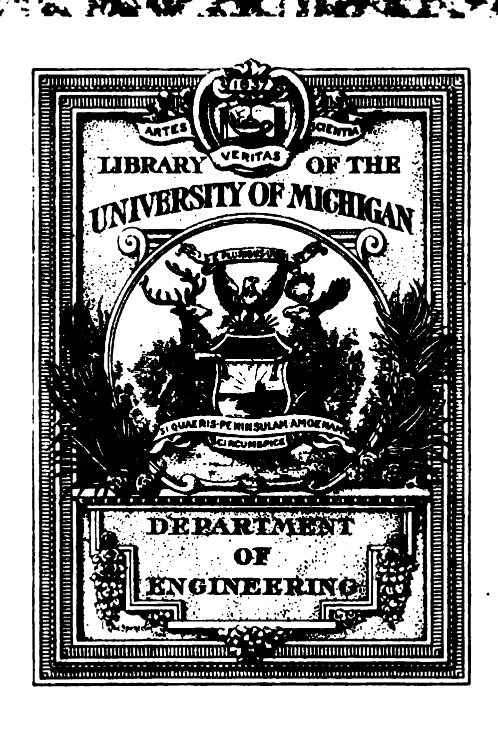

ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

weil. Königl. sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

Fünfte verbesserte und vervollständigte Auflage

bearbeitet von

Gustav Herrmann,

Professor an der Königl. polytechnischen Schule zu Aachen.

In drei Theilen.

Mit gegen 4000 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Erster Theil:

Theoretische Mechanik.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1875.

Lehrbuch

der

Theoretischen Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis

für den

Unterricht an technischen Lehranstalten

sowie zum

Gebrauche für Techniker

bearbeitet

von

Dr. phil. **Julius Weisbach,**

weil. Königl. sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

Fünfte verbesserte und vervollständigte Auflage

bearbeitet von

Gustav Herrmann,

Professor an der Königl. polytechnischen Schule zu Aachen.

Mit über 1000 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1875.

Vorrede zur fünften Auflage.

Von Seiten der Verlagshandlung wurde mir die ehrenvolle Aufforderung, die durch den Tod des Verfassers unterbrochene Herausgabe der fünften Auflage der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik weiter zu führen. Wenn ich dieser Aufforderung entsprach, so geschah es nicht, ohne daß ich mir die großen Schwierigkeiten eines derartigen Unternehmens klar gemacht hätte, und zu dem Bewußtsein gelangt wäre, daß ich meine ganze Kraft und großen Fleiß würde daran setzen müssen, wollte ich der gestellten Aufgabe auch nur einigermaßen gerecht werden. In wie weit letzteres mir gelungen ist, muß ich dem Urtheile des geneigten Lesers anheimgeben, daß ich es wenigstens an Fleiß nicht habe fehlen lassen, darf ich wohl versichern.

Die hervorragende Stelle, welche der verewigte Autor im Gebiete der technischen Forschung und Literatur einnimmt, und die günstige Aufnahme der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik seitens des technischen Publicums, von welcher diese fünfte Auflage ein deutlicher Beweis ist, waren Gründe von genügendem Gewicht, um mich von jeder wesentlichen Aenderung an dem Plane und der Anlage des vorliegenden Werkes von vornherein fern zu halten. Dasselbe mußte den ihm von seinem Urheber gegebenen Charakter, der sich so vorzüglich bewährt hatte, beibehalten, trotzdem vielleicht von mancher Seite dies oder jenes anders gewünscht werden mag. Es konnte sich nur dort um einzelne Abänderungen handeln, wo *sie durch* die fortgeschrittene Forschung oder die veränderten Zeitverhältnisse

geboten erschienen. In jedem Falle habe ich mich immer erst nach sorgfältiger Prüfung zu einer derartigen Aenderung entschlossen.

Die elementare Behandlungsweise der Mechanik, welcher das Werk zum großen Theile seine Beliebtheit und ansehnliche Verbreitung unter den Praktikern verdankt, und welcher Weisbach noch in der Vorrede zur vierten Auflage so lebhaft das Wort redet, ist auch in dieser fünften Auflage beibehalten, nur schien es gerathen, daneben auch auf die analytischen Methoden, wenn auch oft nur in kleingedruckten Anmerkungen, Rücksicht zu nehmen. Auf solche Weise ist auch dem Wunsche derjenigen entsprochen, welche eine solche analytische Behandlung der meist umständlicheren elementaren vorziehen. Mit Rücksicht hierauf ist insbesondere der Abschnitt über Elasticität einer neuen Bearbeitung unterworfen worden und hat mancherlei Zusätze erfahren, wie z. B. die Bemerkungen über Festigkeit gegen Stoßwirkungen und gegen Zerknicken, sowie das Capitel über Federwerke ꝛc. Im fünften Abschnitte ist der Lehre von den Trägheitsmomenten ein Capitel vorausgeschickt, welches die hauptsächlichen allgemeinen Lehren der Dynamik enthält, und im Anhange sind die Grundsätze der graphischen Statik angefügt, welche bei der Beliebtheit, deren die graphischen Methoden sich in neuerer Zeit mit Recht erfreuen, wohl Manchem willkommen sein werden.

Sämmtliche Beispiele und Formeln sind für das metrische Maßsystem umgerechnet, für die Constanten sind meistens nebenher auch noch die für das frühere preußische Maß geltenden Werthe beibehalten.

Aachen, den 8. October 1874.

Gustav Herrmann.

Inhalt des ersten Theiles.

Hülfslehren aus der Analysis.

Erster Theil.

Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Erstes Capitel.

Die einfache Bewegung.

Zweites Capitel.

Zusammengesetzte Bewegung.

Zweiter Abschnitt.

Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erstes Capitel.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

Zweites Capitel.

Mechanik des materiellen Punktes.

Dritter Abschnitt.

Statik fester Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.

Zweites Capitel.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

Drittes Capitel.

Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.

Viertes Capitel.

Gleichgewicht an den Seilmaschinen.

Fünftes Capitel.

Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit der Seile.

Vierter Abschnitt.

Die Anwendung der Statik auf die Elasticität und Festigkeit.

Erstes Capitel.

Die Zug- und Druck-Elasticität und Festigkeit.

Zweites Capitel.

Die Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

Drittes Capitel.

Die Schub-Elasticität und Festigkeit.

Viertes Capitel.

Die Tragkraft langer Säulen oder die Festigkeit des Zerknickens.

Fünftes Capitel.

Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

Sechstes Capitel.

Von den Federwerken.

Fünfter Abschnitt.

Dynamik fester Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Lehren der Dynamik.

Zweites Capitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

Drittes Capitel.

Die Centrifugalkraft starrer Körper.

Viertes Capitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Bahnen.

Fünftes Capitel.

Die Lehre vom Stoße.

Sechster Abschnitt.

Statik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

Zweites Capitel.

Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

Drittes Capitel.

Von den Molecularwirkungen des Wassers.

Viertes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

Siebenter Abschnitt.
Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.
Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

Zweites Capitel.
Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

Drittes Capitel.
Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

Viertes Capitel.

Von den Hindernissen des Wassers bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen.

Fünftes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

Sechstes Capitel.

Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

Siebentes Capitel.

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

Achtes Capitel.

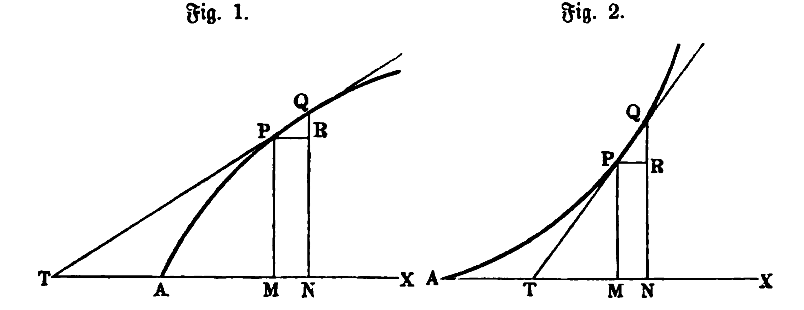
Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

Neuntes Capitel.

Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

das Zeichen $z = f(x,y)$ ausgedrückt. Es ist in diesem Falle z Function von x und y zugleich, und man hat es daher hier mit zwei Urvariablen zu thun.

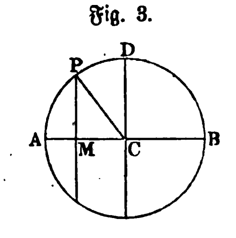
§. 2. **Krumme Linien.** Jede durch eine Function oder Formel $y = f(x)$ ausgedrückte Abhängigkeit einer Größe y von einer anderen Größe x läßt sich durch eine ebene Curve oder krumme Linie APQ, Fig. 1 und 2, darstellen;



verschiedenen Werthen der Urvariablen x entsprechen die Abscissen AM, AN u. s. w., und den verschiedenen Werthen der Abhängigvariablen y die Ordinaten MP, NQ u. s. w. der Curve. Die Coordinaten (Abscissen und Ordinaten) der Curve stellen also die beiden Variablen der Function vor.

Die graphische oder bildliche Darstellung einer Function oder die Zurückführung derselben auf eine Curve vereinigt mehrere Vortheile in sich. Sie liefert uns erstens einen Ueberblick über den Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen; sie ersetzt uns zweitens die Stelle einer Tabelle oder eines Inbegriffes von je zwei zusammengehörigen Werthen einer Function, und sie verschafft uns drittens die Kenntniß von den mannigfaltigsten Eigenschaften und Beziehungen der Functionen. Der mit dem Halbmesser $CA = CB = r$ beschriebene Kreis ADB, Fig. 3, welcher der Function $y = \sqrt{2rx - x^2}$ entspricht, worin x und y die Coordinaten AM und MP bezeichnen, gewährt uns z. B. nicht allein eine Uebersicht über die verschiedenen Werthe, welche diese Function annehmen kann, sondern macht uns auch mit anderen Eigenthümlichkeiten dieser Function bekannt, da die Eigenschaften des Kreises auch ihre Bedeutung in der Function haben. Wir wissen z. B. hiernach, ohne weitere Untersuchungen, daß y nicht allein für $x = 0$, sondern auch für $x = 2r$ Null ausfällt, daß ferner y ein Maximum und zwar $= r$ wird, wenn $x = r$ ist, u. s. w.

Fig. 3.



Graphische Darstellung. Die Naturgesetze lassen sich in der Regel §. 3.
durch Functionen zwischen zwei oder mehreren Größen ausdrücken und sind deshalb auch meist einer graphischen Darstellung fähig.

(1) Beim freien Fallen der Körper im luftleeren Raume hat man z. B. für die Fallgeschwindigkeit y, welche der Fallhöhe x entspricht, $y = \sqrt{2gx}$; diese Formel stimmt aber auch mit der Gleichung $y = \sqrt{px}$ der Parabel überein, wenn man den Parameter (p) der letzteren gleichsetzt der doppelten Beschleunigung ($2\,g$) der Schwere; daher läßt sich auch das Fallgesetz durch eine Parabel APQ, Fig. 4, mit dem Parameter $p = 2\,g$ graphisch darstellen. Die Abscissen AM, AN . . dieser Curve sind natürlich die Fallräume, und die entsprechenden Ordinaten MP, NQ . . die zugehörigen Geschwindigkeiten.

Fig. 4.

(2) Ist a ein gewisses Luftvolumen unter der Pressung von 1 Atmosphäre, so hat man, dem Mariotte'schen Gesetze zufolge, das Volumen derselben Luftmenge unter der Pressung von x Atmosphären: $y = \frac{a}{x}$.

Für $x = 1$, ist $y = a$, für $x = 2$, $y = \frac{a}{2}$, für $x = 4$, $y = \frac{a}{4}$,

für $x = 10$, ist $y = \frac{a}{10}$, für $x = 100$, $y = \frac{a}{100}$, für $x = \infty$, $y = 0$;

man sieht also, daß das Volumen immer kleiner und kleiner wird, je größer die Spannung ist, und daß, wenn das Mariotte'sche Gesetz bei allen Spannungen richtig bliebe, einer unendlich großen Spannung x ein unendlich kleines Volumen y entspräche.

Ferner: $x = 1/2$ giebt $y = 2\,a$, $x = 1/4$ giebt $y = 4\,a$,
$x = 1/10$ „ $y = 10\,a$, $x = 0$ „ $y = \infty\,a$,

je kleiner hiernach die Spannung wird, desto größer fällt dagegen das Volumen aus, und wenn die Spannung unendlich klein ist, so stellt sich das Volumen unendlich groß heraus.

Die Curve, welche diesem Gesetze entspricht, ist in Fig. 5 (a. f. S.) abgebildet; AM, AN . . sind die Spannungen oder Abscissen x, MP, NQ . . die entsprechenden Volumina oder Ordinaten y. Man sieht, diese Curve nähert sich allmälig den Axen AX und AY der Coordinaten, ohne sie je zu erreichen.

(3) Die Abhängigkeit der Expansivkraft y des gesättigten Wasserdampfes von der Temperatur x läßt sich wenigstens innerhalb gewisser Grenzen durch die Formel:

$$y = \left(\frac{a + x}{b}\right)^m \text{ Atmosphären}$$

ausdrücken, und es ist erfahrungsmäßig, innerhalb ziemlich weiter Grenzen, $a = 75$, $b = 175$ und $m = 6$. Wenn wir hiernach

$$y = \left(\frac{75 + x}{175}\right)^6$$

Fig. 6.

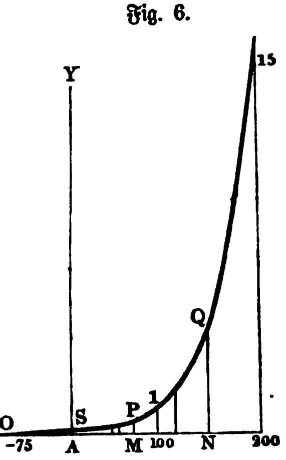
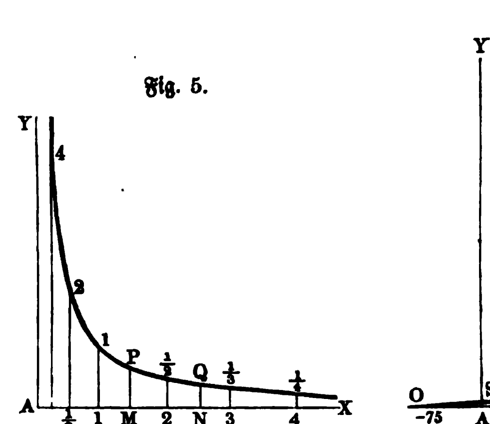


Fig. 5.



setzen und eine unbeschränkte Richtigkeit dieser Formel annehmen, so erhalten wir:

$$\text{Für } x = 100^0,\ y = \left(\frac{175}{175}\right)^6 = 1{,}000 \text{ Atmosphäre,}$$

$$\text{„ } x = 50^0,\ y = \left(\frac{125}{175}\right)^6 = 0{,}133 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = 0^0,\ y = \left(\frac{75}{175}\right)^6 = 0{,}006 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = -75^0,\ y = \left(\frac{0}{175}\right)^6 = 0{,}000 \text{ „}$$

$$\text{ferner für } x = 120^0,\ y = \left(\frac{195}{175}\right)^6 = 1{,}914 \text{ „}$$

$$\text{„ } x = 150^0,\ y = \left(\frac{225}{175}\right)^6 = 4{,}517 \text{ „}$$

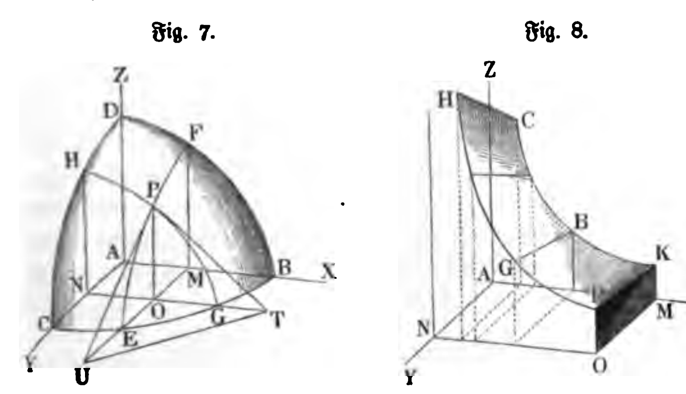
$$\text{„ } x = 200^0,\ y = \left(\frac{275}{175}\right)^6 = 15{,}058 \text{ „}$$

Die entsprechende Curve führt PQ, Fig. 6, vor Augen; man sieht, dieselbe geht in einem Abstande $AO = -75$ vom Anfangspunkte A der Coordinaten durch die Abscissenaxe, und in einem Abstande $AS = 0{,}006$

von eben diesem Punkte durch die Ordinatenaxe; ferner einer Abscisse $AM < 100$ entspricht eine Ordinate MP unter 1 und einer Abscisse $AN > 100$ gehört die Ordinate $NQ > 1$ zu; auch ist wahrzunehmen, daß nicht nur y mit x ins Unendliche wächst, sondern auch, daß die Curve immer steiler und steiler ansteigt, je größer x wird.

Gekrümmte Flächen. Eine Function $z = f(x,y)$ mit zwei Urvariablen läßt sich durch eine krumme Fläche BCD, Fig. 7, darstellen, in welcher die Urvariablen x und y durch die Abscissen AM und AN auf den Axen AX und AY, und die Abhängigvariable z durch die Ordinate OP eines Punktes P in der Fläche BCD repräsentirt werden. Giebt man bei einem bestimmten Werthe von x, y verschiedene Werthe, so erhält man in z die Ordinaten der Punkte einer mit der Coordinatebene YZ parallel laufenden Curve EPF; nimmt man dagegen bei einem bestimmten Werthe von y für x verschiedene Werthe an, so ergeben sich in z die Ordinaten der Punkte einer mit der Coordinatebene XZ parallel laufenden Curve GPH. Es läßt sich folglich die ganze krumme Fläche BCD als eine stetige Verbindung von mit den Coordinatebenen parallel laufenden Curven ansehen. §. 4.

Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz $z = \frac{a(1 + \delta y)}{x}$, wonach sich das Volumen z einer Luftmenge aus der Pressung x und Temperatur y derselben berechnen läßt, ist durch die krumme Fläche $CKPH$, Fig. 8, graphisch darzustellen. Es ist AM die Pressung x, $AN = MO$ die Temperatur



y und OP das entsprechende Volumen z, ferner geben die Coordinaten der Curve PGH die Volumina bei einer und derselben Temperatur $AN = y$, sowie die der Geraden KP die Volumina bei einer und derselben Pressung $AM = NO = x$ an.

§. 5. **Differenzial.** Wenn man die Urvariable einer Function oder Abscisse $AM = x$, Fig. 9 und Fig. 10, der entsprechenden Curve um eine unendlich kleine, künftig durch ∂x zu bezeichnende Größe MN wachsen läßt, so geht die entsprechende Abhängigvariable oder Ordinate $MP = y$ in $NQ = y_1$ über, und wird um den durch ∂y zu bezeichnenden unendlich kleinen Werth $RQ = NQ - MP$ größer. Beide Wachsthümer ∂x und ∂y von x und y nennt man Differenziale oder Elemente der Veränderlichen oder Coordinaten x und y, und es ist nun unsere Hauptaufgabe, für die am häufigsten vorkommenden Functionen die Differenziale, oder vielmehr die Verhältnisse zwischen den zusammengehörigen Elementen ihrer Variablen x und y zu finden. Setzt man in der Function $y = f(x)$, wo x die Abscisse AM und y die Ordinate MP vorstellt,

statt x: $x + \partial x = AM + MN = AN$, so erhält man
statt y: $y + \partial y = MP + RQ = NQ$, also:

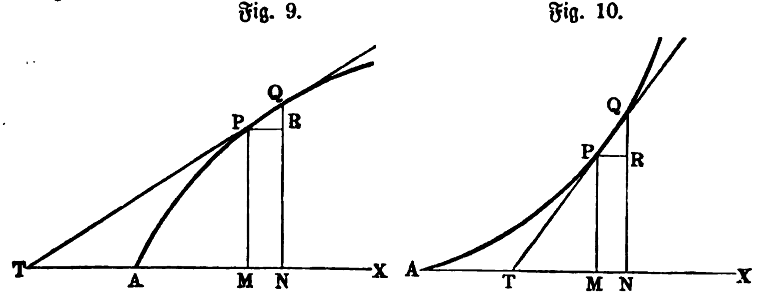
$$y + \partial y = f(x + \partial x),$$

und zieht man hiervon den ersten Werth von y ab, so bleibt das Element oder Differenzial der Variablen y, d. i.:

$$\partial y = \partial f(x) = f(x + \partial x) - f(x)$$

übrig.

Fig. 9. Fig. 10.



Dies ist die allgemeinste Regel zur Bestimmung des Differenziales einer Function, aus welcher sich durch Anwendung auf verschiedene Functionen wieder andere mehr oder weniger allgemeine Regeln ableiten lassen.

Ist z. B. $y = x^2$, so hat man:

$$\partial y = (x + \partial x)^2 - x^2,$$

oder, da

$$(x + \partial x)^2 = x^2 + 2x\partial x + \partial x^2$$

zu setzen ist:

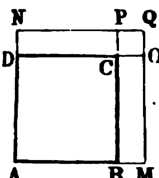
$$\partial y = 2x\partial x + \partial x^2 = (2x + \partial x)\partial x;$$

und einfacher, da ∂x als unendlich kleine Größe gegen $2x$ verschwindet, oder $2x$ durch Hinzutritt von ∂x nicht angebbar verändert wird und deshalb unbeachtet gelassen werden kann:

$$\partial y = \partial(x^2) = 2x\partial x.$$

Es entspricht $y = x^2$ dem Inhalte eines Quadrates $ABCD$, Fig. 11, dessen Seite $AB = AD = x$ ist, und es läßt sich auch aus der Figur entnehmen, daß durch Zunahme der Seite um $BM = DN = \partial x$, das Quadrat um zwei Rechtecke BO und $DP = 2x\partial x$ und um ein Quadrat $OP = (\partial x)^2$ wächst, daß also bei einem unendlich kleinen Wachsthum ∂x von x das Quadrat $y = x^2$ um das Element $2x\partial x$ zunimmt.

Fig. 11.



Tangentenlage. Die gerade Linie TPQ, Fig. 9 und 10, welche durch zwei unendlich nahe liegende Punkte P und Q einer Curve geht, heißt Tangente oder Berührungslinie dieser Curve und bestimmt die Richtung derselben zwischen diesen Punkten. Man giebt die Richtung der Tangente durch den Winkel $MTP = \alpha$ an, unter welchem die Abscissenaxe AX von dieser Linie geschnitten wird. Bei einer concaven Curve wie APQ, Fig. 9, liegt die Tangente außerhalb der Curve und Abscissenaxe; bei einer convexen Curve APQ, Fig. 10, hingegen befindet sie sich zwischen der Curve und Abscissenaxe. §. 6.

In dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke PQR, Fig. 9 und 10, mit den Katheten $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y$ ist der Winkel RPQ gleich dem Tangentenwinkel $MTP = \alpha$, und da

$$tang.\ QPR = \frac{QR}{PR}$$

ist, so hat man auch:

$$tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x};$$

es giebt also das Verhältniß oder der Quotient aus den beiden Elementen ∂y und ∂x die trigonometrische Tangente des Tangentenwinkels an.

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man, wenn man $y^2 = px = z$ setzt:

$\partial z = (y + \partial y)^2 - y^2 = y^2 + 2y\partial y + \partial y^2 - y^2 = 2y\partial y + \partial y^2$,

oder, da ∂y^2 gegen $2y\partial y$, oder, was auf eins herauskommt, ∂y gegen $2y$ verschwindet:

$$\partial z = 2y\partial y,$$

und ebenso:

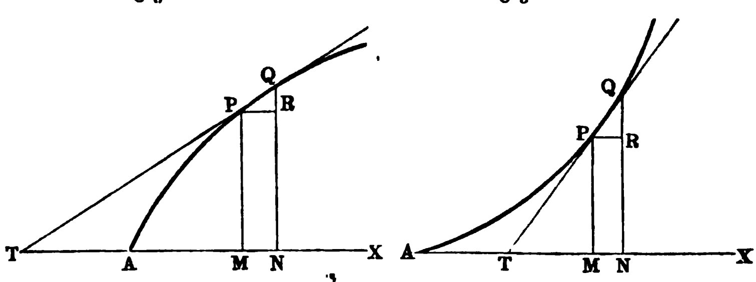
$$\partial z = p(x + \partial x) - px.$$

Es ist hiernach $2y\partial y = p\partial x$, und daher für den Tangentenwinkel der Parabel:

$$tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}.$$

In der Regel nennt man das bestimmte Stück PT der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte P und dem Durchschnittspunkte T mit der

Fig. 12. Fig. 13.



Abscissenaxe Tangente, und die Projection TM desselben in der Abscissenaxe Subtangente, und hat daher:

$$subtang. = PM\, cotang.\, PTM$$
$$= y\, cotang.\, \alpha = y\, \frac{\partial x}{\partial y},$$

z. B. bei der Parabel:

$$subtang. = y \cdot \frac{2x}{y} = 2\,x.$$

Es ist also hier die Subtangente der doppelten Abscisse gleich, und hiernach die Lage der Tangente für jeden Punkt P der Parabel leicht anzugeben.

Bei einer krummen Fläche BCD, Fig. 7, sind die Neigungswinkel α und β von den Tangenten PT und PU an einem Punkte P durch die Formeln

$$tang.\, \alpha = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ und } tang.\, \beta = \frac{\partial z}{\partial y}$$

bestimmt.

Die durch PT und PU gelegte Ebene PTU ist Tangentialebene der krummen Fläche.

§. 7. **Differenzialformeln.** Für eine Function $y = a + mf(x)$ hat man:

$$\partial y = [a + mf(x + \partial x)] - [a + mf(x)]$$
$$= a - a + mf(x + \partial x) - mf(x)$$
$$= m\,[f(x + \partial x) - f(x)];$$

d. i.:

I.) . . . . . $\partial[a + mf(x)] = m\partial f(x),$

z. B.:

$$\partial(5 + 3\,x^2) = 3\,[(x + \partial x)^2 - x^2] = 3\,.\,2x\partial x = 6\,x\partial x.$$

Es ist ebenso:

$$\partial(4 - {}^1\!/_2\,x^3) = -\,{}^1\!/_2\,\partial(x^3) = -\,{}^1\!/_2\,[(x + \partial x)^3 - x^3]$$
$$= -\,{}^1\!/_2\,(x^3 + 3\,x^2\partial x + 3\,x\,\partial x^2 + \partial x^3 - x^3)$$
$$= -\,{}^1\!/_2\,.\,3\,x^2\partial x = -\,{}^3\!/_2\,x^2\partial x.$$

Wir können hiernach folgende wichtige Regel aufstellen: Die constanten Glieder (a, 5) einer Function verschwinden beim Differenziiren, und die constanten Factoren (m, 3) bleiben hierbei unverändert.

Die Richtigkeit dieser Regel läßt sich auch graphisch darthun. Für die Curve APQ, Fig. 14, deren Coordinaten ein Mal $AM = x$ und

Fig. 14.

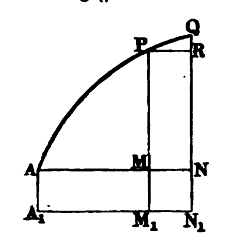
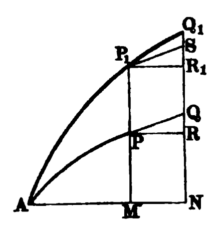


Fig. 15.



$MP = y = f(x)$, und ein anderes Mal $A_1 M_1 = x$ und $M_1 P = a + y$ $= a + f(x)$ sind, ist $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y = \partial f(x)$ und auch $= \partial(a + y) = \partial [a + f(x)]$; und für die Curven $AP_1 Q_1$ und APQ, Fig. 15, deren zusammengehörige Ordinaten MP_1 und MP, sowie NQ_1 und NQ ein gewisses Verhältniß zu einander haben, ist auch das Verhältniß zwischen den Differenzialien
$R_1 Q_1 = NQ_1 - MP_1$ und $RQ = NQ - MP$ beständig dasselbe; denn setzt man $MP_1 = m . MP$ und $NQ_1 = m . NQ$, so folgt:

$$R_1 Q_1 = NQ_1 - MP_1 = m(NQ - MP) = m . RQ$$

d. i.:

$$\partial [mf(x)] = m \partial f(x).$$

Ist ferner $y = u + v$, also die Summe von zwei Variablen u und v, so hat man

$$\partial y = u + \partial u + v + \partial v - (u + v), \text{ d. i. nach §. 5:}$$

II) . . . $\partial(u + v) = \partial u + \partial v$; ebenso:

$$\partial [f(x) + \varphi(x)] = \partial f(x) + \partial \varphi(x).$$

Es ist also das Differenzial von der Summe aus mehreren Functionen gleich der Summe von den Differenzialien der einzelnen Functionen; z. B.:

$$\partial(2x + 3x^2 - {}^1/_2 x^3) = 2\partial x + 6x\partial x - {}^3/_2 x^2 \partial x = (2 + 6x - {}^3/_2 x^2)\partial x.$$

Die Richtigkeit dieser Regel ist auch aus der Betrachtung einer Curve APQ, Fig. 15, abzuleiten. Ist $MP = f(x)$ und $PP_1 = \varphi(x)$, so hat man:

$$MP_1 = y = f(x) + \varphi(x), \text{ und:}$$

$$\partial y = R_1 Q_1 = R_1 S + SQ_1 = RQ + SQ_1 = \partial f(x) + \partial \varphi(x),$$

da $P_1 S$ parallel zu PQ gelegt und deshalb $R_1 S = RQ$ und $QS = PP_1$ gesetzt werden kann.

§. 8. **Differenzial eines Products und eines Quotienten.** Ist $y = u$ also das Product zweier Variablen, z. B. der Inhalt eines Rechtecke $ABCD$, Fig. 16, mit den variablen Seiten $AB = u$ und $BC =$ so hat man:

$$\partial y = (u + \partial u)(v + \partial v) - uv = uv + u\partial v + v\partial u + \partial u \partial v - u$$
$$= u\partial v + v\partial u + \partial u\partial v = u\partial v + (v + \partial v)\partial u.$$

Fig. 16.

Nun ist aber in $v + \partial v$, ∂v unendlich klein ge gen v, daher läßt sich

$$v + \partial v = v, \text{ und } (v + \partial v)\partial u = v\partial u,$$

sowie

$$u\partial v + (v + \partial v)\partial u = u\partial v + v\partial u$$

setzen, so daß

III.) . . . $\partial(uv) = u\partial v + v\partial u$, sowie

$$\partial[f(x) . \varphi(x)] = f(x)\partial\varphi(x) + \varphi(x)\partial f(x)$$

folgt.

Es ist also das Differenzial eines Productes zweier Variable gleich der Summe aus den Producten von je einer und de Differenziale der anderen Variablen.

Wenn die Seiten des Rechteckes $ABCD$, Fig. 16, um $BM = \partial u$ un $DO = \partial v$ wachsen, so nimmt der Inhalt $y = AB . AD = uv$ desselbe um die Rechtecke $CO = u\partial v$, $CM = v\partial u$ und $CP = \partial u\partial v$ zu, wo von das letztere als unendlich klein gegen die ersteren verschwindet, un es ist daher das Differenzial dieses Flächenraumes nur gleich der Summ $u\partial v + v\partial u$ der Inhalte der beiden Rechtecke CO und CM zu setzen.

Dieser Regel zu Folge ist z. B. für $y = x(3x^2 + 1)$:

$$\partial y = x\partial(3x^2 + 1) + (3x^2 + 1)\partial x = 3x\partial(x^2) + (3x^2 + 1)\partial x$$
$$= 3x . 2x\partial x + 3x^2\partial x + \partial x = (9x^2 + 1)\partial x.$$

Ferner ist, wenn w einen dritten variablen Factor bezeichnet:

$$\partial(uvw) = u\partial(vw) + vw\partial u,$$

oder, da $\partial(vw) = v\partial w + w\partial v$ ist,

$$\partial(uvw) = uv\partial w + uw\partial v + vw\partial u; \text{ ebenso}$$
$$\partial(uvwz) = uvw\partial z + uvz\partial w + uwz\partial v + vwz\partial u.$$

Ist $u = v = w = z$, so folgt $\partial(u^4) = 4u^3\partial u$, sowie allgemein:

IV.) . . . . $\partial(x^m) = mx^{m-1}\partial x$,

wenn der Exponent m eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Z. B.: $\partial(x^7) = 7x^6\partial x$, sowie $\partial(\frac{3}{4}x^8) = 6x^7\partial x$.

Ist in $y = x^{-m}$, m wieder eine ganze positive Zahl, so hat man auch:

$$yx^m = 1, \text{ und } \partial(yx^m) = 0, \text{ d. i.}$$
$$y\partial(x^m) + x^m\partial y = 0, \text{ und daher}$$

$$\partial y = -\frac{y\partial(x^m)}{x^m} = -\frac{x^{-m} . mx^{m-1}\partial x}{x^m} = -mx^{-m-1}\partial x,$$

oder, wenn man $-m = n$ setzt:

$$\partial(x^n) = n x^{n-1} \partial x.$$

Es gilt also die Regel IV.) auch für Potenzen mit ganzen negativen Exponenten. Z. B.:

$$\partial(x^{-3}) = -3x^{-4}\partial x = -\frac{3\partial x}{x^4},$$

ebenso:

$$\partial(3x^2+1)^{-2} = -2(3x^2+1)^{-3}\partial(3x^2) = -\frac{12x\partial x}{(3x^2+1)^3}.$$

Ist in $y = x^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ irgend ein Bruch, dessen Nenner n und Zähler m ganze Zahlen sind, so hat man auch $y^n = x^m$, und $\partial(y^n) = \partial(x^m)$, d. i.:

$n y^{n-1}\partial y = m x^{m-1}\partial x$, daher

$$\partial y = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}\partial x}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}\partial x}{x^{m-\frac{m}{n}}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}\partial x.$$

Setzt man $\frac{m}{n} = p$, so folgt:

$$\partial y = \partial(x^p) = p x^{p-1}\partial x,$$

also ebenfalls entsprechend der nun allgemein als richtig anzusehenden Regel IV.)

Auch ist $\partial(u^p) = p u^{p-1}\partial u$, wenn u irgend eine abhängige Function von x bezeichnet.

Hiernach ist z. B. $\partial(\sqrt{x^3}) = \partial(x^{3/2}) = {}^3/_2\, x^{1/2}\partial x = {}^3/_2 \sqrt{x}\,\partial x$,

ebenso $\partial\sqrt{2rx - x^2} = \partial\sqrt{u} = \partial(u^{1/2}) = {}^1/_2\, u^{-1/2}\partial u$

$$= {}^1/_2\,\frac{\partial(2rx - x^2)}{u^{1/2}} = \frac{2r\partial x - 2x\partial x}{2\sqrt{u}} = \frac{(r-x)\partial x}{\sqrt{2rx - x^2}}.$$

Um das Differenzial eines Quotienten $y = \frac{u}{v}$ zu finden, setze man $u = vy$, wonach dann $\partial u = v\partial y + y\partial v$, folglich

$$\partial y = \frac{\partial u - y\partial v}{v} = \frac{\partial u - \frac{u}{v}\partial v}{v}, \text{ d. i.}$$

V.) $\partial\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\partial u - u\partial v}{v^2}$ folgt.

Hiernach ist z. B.

$$\partial\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right) = \frac{(x+2)\partial(x^2-1) - (x^2-1)\partial(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2).2x\partial x - (x^2-1).\partial x}{(x+2)^2} = \left(\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\right)\partial x.$$

Auch ist

$$\partial\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{a\,\partial v}{v^2},\ \text{z. B. } \partial\left(\frac{4}{x^2}\right) = -\frac{4\,\partial(x^2)}{x^4} = -\frac{8\,\partial x}{x^3}.$$

§. 9. **Die algebraische Function x^n.** Die Function $y = x^n$ ist die wichtigste der ganzen Analysis, weil man fast bei allen Untersuchungen auf dieselbe stößt. Wenn man dem Exponenten n alle möglichen Werthe, positive und negative, ganze und gebrochene u. s. w., beilegt, so liefert sie auch die verschiedenartigsten Curven, wie durch Fig. 17 veranschaulicht wird. Es ist hier A der Null- oder Anfangspunkt der Coordinaten-, $X\overline{X}$ die Abscissen- und $Y\overline{Y}$ die Ordinatenaxe.

Trägt man zu beiden Seiten der Coordinatenaxen in den Abständen $x = \pm 1$ und $y = \pm 1$ von A die zu diesen Axen Parallelen $X_1\overline{X}_1$, $X_2\overline{X}_2$, $Y_1\overline{Y}_1$ und $Y_2\overline{Y}_2$ auf, und verbindet man die Durchschnittspunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 derselben noch durch die Transversalen $Z\overline{Z}, Z_1\overline{Z}_1$, so erhält man dadurch ein Diagramm, an welches sich sämmtliche der Gleichung $y = x^n$ entsprechende Curven mehr oder weniger anschließen. Uebrigens ist für jeden Punkt der Abscissenaxe $X\overline{X}$, $y = 0$, sowie für jeden Punkt der Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$, $x = 0$; ferner für die Punkte in den Axen $X_1\overline{X}_1$ und $X_2\overline{X}_2$, $y = \pm 1$, und für die Punkte in den Axen $Y_1\overline{Y}_1$ und $Y_2\overline{Y}_2$, $x = \pm 1$.

Setzt man in der Gleichung $y = x^n$, $x = 1$, so erhält man, was auch der Exponent n für eine Zahl sein möge, stets $y = 1$, und nur für gewisse Werthe von n, überdies noch $y = -1$; es gehen folglich auch alle der Gleichung $y = x^n$ angehörige Curven durch den Punkt P_1, dessen Coordinaten $AM = 1$ und $AN = 1$ sind.

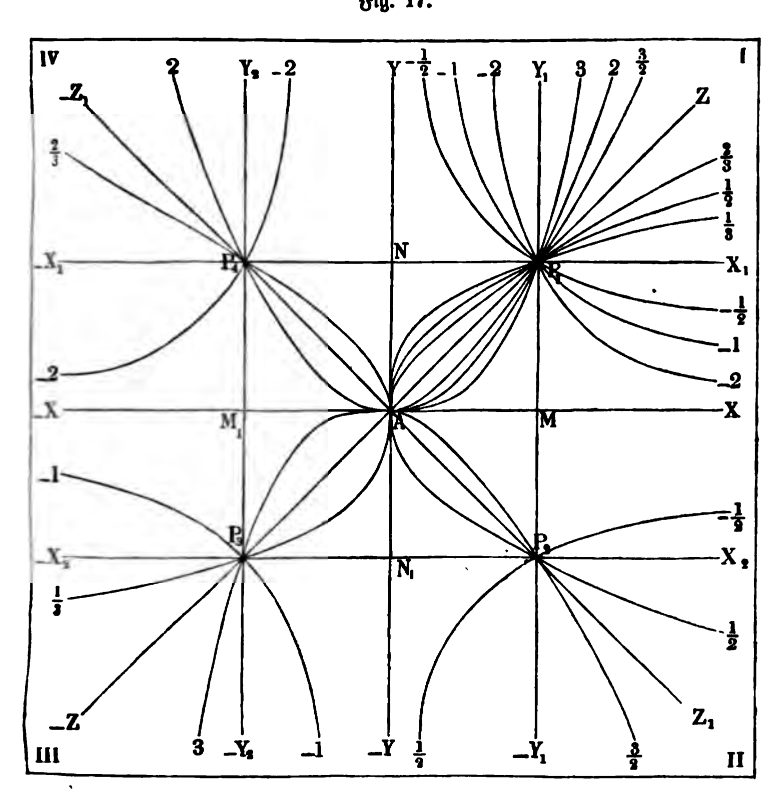
Nimmt man $n = 1$ an, setzt man also $y = x$, so bekommt man die von beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ gleichviel abweichende Gerade $(ZA\overline{Z})$, welche auf der einen Seite von A unter dem Winkel von 45 Grad $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ auf-, und auf der anderen Seite unter demselben Winkel absteigt. Dagegen erhält man für $y = -x$ die unter dem Winkel von 45 Grad auf der einen Seite von A nieder-, und auf der anderen Seite aufsteigende Gerade $Z_1A\overline{Z}_1$.

Ist dagegen $n > 1$, so fällt $y = x^n$ für $x < 1$, kleiner und dagegen für $x > 1$, größer als x aus, und ist $n < 1$, so stellt sich $y = x^n$ für $x < 1$, größer und dagegen für $x > 1$, kleiner als x heraus; dem ersteren Falle $(n > 1)$ entsprechen convexe Curven, welche anfangs unter, von P_1 aus aber über der geraden Linie $(ZA\overline{Z})$ hinlaufen, und dem zweiten Falle $(n < 1)$ concave Curven, bei welchen das Umgekehrte stattfindet.

Wenn im ersten Falle der Exponent n immer kleiner und kleiner und endlich verschwindend klein oder nahe Null angenommen wird, so nähern sich

die Ordinaten dem constanten Werthe $y = x^0 = 1$, und die entsprechenden Curven über AX der gebrochenen Linie ANP_1X_1 immer mehr und mehr;

Fig. 17.



wenn dagegen im zweiten Falle der Exponent n immer größer und größer wird, so nähern sich die Ordinaten allmälig dem Grenzwerthe $y = x^\infty = x^{1/0} = \infty$, dagegen die Abscissen nach und nach der Grenze $x = y^0 = 1$, und es rücken deshalb die entsprechenden Curven der gebrochenen Linie AMP_1Y_1 immer näher und näher.

Nimmt man $n = -1$ an, setzt man also $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, so ist für $x = 0$, $y = \infty$ und für $x = \infty$, $y = 0$, und man hat es mit einer aus §. 3 bekannten und in Fig. 5 abgebildeten Curve $(\overline{1}\,P_1\,\overline{1})$ zu thun, welche sich einerseits immer mehr und mehr der Ordinaten- und andererseits immer mehr und mehr der Abscissenaxe nähert, jedoch diese Axen nie wirklich erreicht.

Ist der Exponent $(-n)$ der Function $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ein ächter Bruch, so fällt für $x < 1$, $y < \frac{1}{x}$ und dagegen für $x > 1$, $y > \frac{1}{x}$ aus, und ist dieser Exponent größer als die Einheit, so hat man umgekehrt, für $x < 1$, $y > \frac{1}{x}$ und für $x > 1$, $y < \frac{1}{x}$. Die der Function $y = x^{-n}$ entsprechenden Curven laufen also, je nachdem n kleiner oder größer als Eins ist, anfangs unter oder über, und später vom Punkte P aus, über oder unter der Curve $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ hin. Während überhaupt die Curven, welche positiven Werthen von n entsprechen, sich anfangs unter, und von P_1 aus über der Geraden $(X_1 \overline{X}_1)$ hinziehen, laufen die Curven, welche aus negativen Exponenten $(-n)$ hervorgehen, erst über und von jenseits P_1 unter $(X_1 \overline{X}_1)$ hin. Bei jenen Curven ist für $x = 0$, auch $y = 0$, und für $x = \infty$ auch $y = \infty$, bei diesen hingegen für $x = 0$, $y = \infty$, und für $x = \infty$, $y = 0$. Wenn sich jene immer mehr und mehr von den Coordinatenaxen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ entfernen, je weiter man sie von dem Anfangspunkte A aus verfolgt, nähern sich diese immer mehr und mehr einerseits der Axe $X\overline{X}$ und andererseits der Axe $Y\overline{Y}$, ohne diese Geraden jedoch wirklich zu erreichen.

Uebrigens rücken die letzten Curvensysteme entweder der gebrochenen Linie YNP_1X_1, oder der gebrochenen Linie Y_1P_1MX immer näher und näher, je nachdem sich der Exponent der Grenze $n = 0$ oder der Grenze $n = \infty$ immer mehr und mehr nähert.

Ist in $y = x^{\pm m}$, m eine ganze ungerade Zahl (1, 3, 5, 7 . . .), so hat y mit x dasselbe Zeichen; positiven Werthen von x entsprechen auch positive Werthe von y und negativen Werthen von x auch negative Werthe von y. Ist hingegen m eine ganze gerade Zahl (2, 4, 6 . . .), so fällt sowohl für positive als auch für negative x, y positiv aus. Die Curven im ersten Falle, wie z. B. $(3\,P_1AP_3\,3)$ oder $(\overline{1}\,P_1\,\overline{1}, \overline{1}\,P_3\,\overline{1})$, laufen folglich auf der einen Seite der Ordinatenaxe über und auf der anderen unter der Abscissenaxe $XA\overline{X}$ hin; die Curven im zweiten Falle, wie z. B. $(2\,P_1AP_4\,2)$ oder $(\overline{2}\,P_1\,\overline{2}, \overline{2}\,P_4\,\overline{2})$, ziehen sich dagegen nur über der Abscissenaxe hin und nehmen folglich auch nur den ersten und vierten Quadranten ein. Jene entsprechen für $m = \pm\infty$ den Grenzlinien $Y_1MAM_1\overline{Y}_2$ und $XMY_1, \overline{X}M_1\overline{Y}_2$, diese hingegen den Grenzlinien $Y_1MAM_1Y_2$ und XMY_1, $\overline{X}M_1Y_2$.

Ist in $y = x^{\pm\frac{1}{n}}$, n eine ganze ungerade Zahl, so hat y mit x einerlei Zeichen, und ist n eine ganze gerade Zahl, so giebt jedes positive x für y zwei Werthe, einen positiven und einen gleich großen negativen, und es ist dagegen für jedes negative x, y imaginär oder unmöglich. Die Curven, wie z. B. ($^1/_3 P_1 A P_3 {}^1/_3$), welche dem ersten Falle entsprechen, befinden sich daher auch nur im ersten und dritten Quadranten, und die Curven für den zweiten Fall, z. B. ($^1/_2 P_1 A P_2 {}^1/_2$), nur im ersten und zweiten Quadranten; jene haben für $n = \infty$ die Grenzlinien $X_1 N A N_1 \overline{X}_2$ und $X_1 N Y$, $\overline{X}_2 N_1 \overline{Y}$, diese die Grenzlinien $X_1 N A N_1 X_2$ und $X_1 N Y$, $X_2 N_1 \overline{Y}$.

Da $y = x^{\pm\frac{1}{n}}$, $x = y^{\pm n}$ bedingt, so folgt, daß das letzte Curvensystem $\left(y = x^{\pm\frac{1}{n}}\right)$ von dem vorhergehenden $\left(y = x^{\pm m}\right)$ nur in der Lage gegen das Axenkreuz abweicht, und daß durch Drehen und Wenden die Curven des einen Systems mit denen des anderen zum Zusammenfallen gebracht werden können.

Da $y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right) = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ ist, so kann man den Lauf der entsprechenden Curve nach dem Vorstehenden im Allgemeinen stets angeben. Z. B. die Curve für

$$y = x^{2/3} = (x^{1/3})^2 = (\sqrt[3]{x})^2$$

hat sowohl für positive als auch für negative x, positive Ordinaten. Dagegen die Curve für

$$y = x^{3/2} = (x^{1/2})^3 = (\sqrt{x})^3$$

hat nur für positive x, reelle Ordinaten, und zwar je zwei entgegengesetzte.

Ferner bei der Curve für

$$y = x^{3/5} = (\sqrt[5]{x})^3$$

hat y mit x stets einerlei Zeichen, da weder die fünfte Wurzel noch der Cubus das Zeichen der Grundzahl ändert.

Endlich sind die Curven, welche der Gleichung $y = - x^{\frac{m}{n}}$ entsprechen, nur durch die entgegengesetzte Lage gegen die Abscissenaxe $X\overline{X}$ von denen der Gleichung $y = x^{\frac{m}{n}}$ verschieden, und bilden die symmetrischen Hälften eines Ganzen.

Tangentenlage der algebraischen Curven. Aus der wichtigen Formel $\partial(x^n) = n x^{n-1} \partial x$ folgt auch die Formel für den Tangentenwinkel der entsprechenden und in Fig. 18 (a. f. S.) abgebildeten Curven; es ist nämlich: §. 10.

$$tang.\ \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1},$$

und daher die Subtangente dieser Curven

$$= y\,\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x^n}{n x^{n-1}} = \frac{x}{n}.$$

Hiernach hat man z. B. für die sogenannte Neil'sche Parabel, deren Gleichung $ay^2 = x^3$, oder $y = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ist:

$$tang.\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\frac{\partial\,(x^{3/2})}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot {}^3/_2\, x^{1/2} = {}^3/_2 \sqrt{\frac{x}{a}},$$

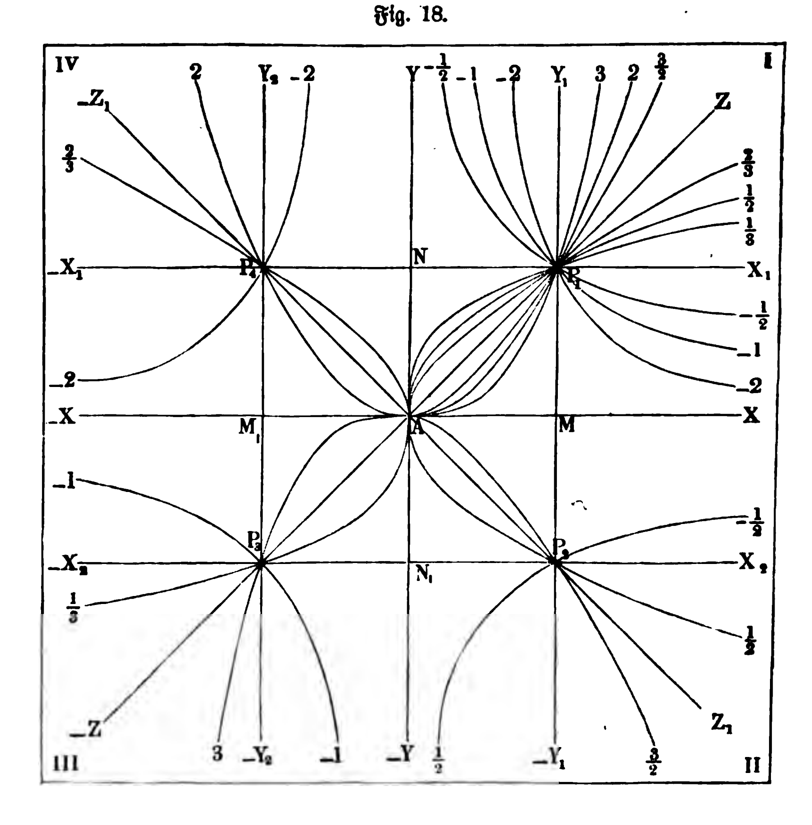
und die Subtangente $= {}^2/_3\, x$.

Ferner ist für die schon aus dem Obigen bekannte Curve $y = \frac{a^2}{x} = a^2 x^{-1}$

$$tang.\,\alpha = a^2\,\frac{\partial\,(x^{-1})}{\partial x} = -\,\frac{a^2}{x^2} = -\left(\frac{a}{x}\right)^2,$$

und die Subtangente $= \frac{x}{-1} = -\,x$. (Vergl. Fig. 5.)

Fig. 18.



Folglich wird für $x = 0$, $tang.\,\alpha = -\,\infty$, also $\alpha = 90^0$,
ferner für $x = a$, $tang.\,\alpha = -\,1$, also $\alpha = 135^0$,
und für $x = \infty$, $tang.\,\alpha = 0$, also $\alpha = 0^0$, u. s. w.

Gleichung der geraden Linie und Asymptoten krummer Linien. §. 11. Wenn eine gerade Linie AO, Fig. 19, die Abscissenaxe unter dem Winkel $XAO = \alpha$ schneidet, und vom Coordinatenanfangspunkt C um $CK = n$ absteht, so ist die Gleichung zwischen den Coordinaten $CM = NP = x$ und $CN = MP = y$ eines Punktes P in derselben, da $n = MR - ML$, und $MR = y\cos.\alpha$, sowie $ML = x\sin.\alpha$ ist,

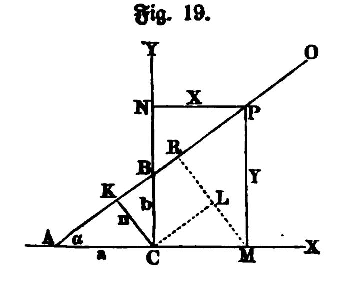
$$y\cos.\alpha - x\sin.\alpha = n.$$

Für $x = 0$ nimmt y den Werth $CB = b = \frac{n}{\cos.\alpha}$ an; daher ist auch $n = b\cos.\alpha$, und $y\cos.\alpha - x\sin.\alpha = b\cos.\alpha$, oder

$$y = b + x\,tang.\,\alpha.$$

Gewöhnlich nennt man die Linien CA und CB, um welche die Durchschnittspunkte A und B der Geraden mit den Coordinatenaxen CX und CY von dem Anfangspunkte C abstehen, die Parameter der Geraden, und bezeichnet sie durch die Buchstaben a und b. Der Figur entsprechend ist $CA = -\,a$, daher:

Fig. 19.



$$tang.\,\alpha = \frac{CB}{CA} = -\,\frac{b}{a}$$

und folglich die Gleichung der Geraden: $y = b - \frac{b}{a}\,x$, oder:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (s. „Ingenieur" Seite 164).}$$

Wenn sich eine Curve einer Geraden, welche um eine endliche Größe vom Coordinatenanfangspunkt absteht, bis ins Unendliche immer mehr und mehr nähert, ohne daß sie dieselbe je wirklich ganz erreicht, so heißt diese Gerade die Asymptote der Curve.

Die Asymptote läßt sich als Tangente oder Berührungslinie für einen unendlich entfernten Punkt der Curve ansehen. Ihr Neigungswinkel α gegen die Abscissenaxe ist daher bestimmt durch

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x},$$

und ihr Abstand n von dem Nullpunkt der Coordinaten, durch die Gleichung

$$n = y\cos.\alpha - x\sin.\alpha = (y - x\,tang.\alpha)\cos.\alpha$$

$$= \frac{y - x\,tang.\alpha}{\sqrt{1 + (tang.\alpha)^2}} = \left(y - x\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

sowie durch $n = (y\,cotg.\,\alpha - x)\,sin.\,\alpha = \dfrac{y\,cotg.\,\alpha - x}{\sqrt{1 + (cotg.\,\alpha)^2}}$

$$= \left(y\frac{\partial x}{\partial y} - x\right) : \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2},$$

wenn man darin x und $y = \infty$ setzt.

Damit eine Tangente für einen unendlich entfernten Berührungspunkt eine Asymptote sei, ist nöthig, daß für x oder $y = \infty$, $y - x\,tang.\,\alpha$ oder $y\,cotg.\,\alpha - x$ nicht unendlich groß ausfalle.

Für eine Curve von der Gleichung $y = x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$ ist

$tang.\,\alpha = -\dfrac{m}{x^{m+1}}$ und $y - x\,tang.\,\alpha = x^{-m} + \dfrac{m}{x^m} = \dfrac{m+1}{x^m}$,

sowie $y\,cotg.\,\alpha - x = -\dfrac{x}{m} - x = -(m+1)\dfrac{x}{m}$, daher

1) für $x = \infty$, $y = 0$, $tang.\,\alpha = 0$, $y - x\,tang.\,\alpha = 0$ und $n = 0$ und

2) für $y = \infty$, $x = 0$, $tang.\,\alpha = \infty$, $y\,cotg. - x = 0$ und $n = 0$.

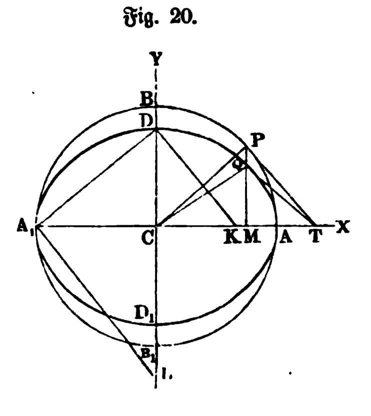
Den Bedingungen $tang.\,\alpha = 0$ und $n = 0$ entspricht aber die Abscissenaxe $X\overline{X}$, und den Bedingungen $\alpha = 90^0$ und $n = 0$ die Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$, daher sind diese Axen zugleich Asymptoten von den Curven, welche der Gleichung $y = x^{-m}$ entsprechen. (Vergl. die Curven $\overline{1}P_1\overline{1}$, $\overline{2}P_1\overline{2}$ und $\overline{1/2}P_1\overline{1/2}$ in Fig. 18, Seite 16.)

§. 12. **Ellipse und Hyperbel.** Die Gleichung einer Ellipse ADA_1D_1, Fig. 20, läßt sich aus der Gleichung:

$$x^2 + y_1^2 = a^2$$

des Kreises ABA_1B_1, dessen Halbmesser $CA = CB = CP = a$ und Coordinaten $CM = x$ und $MP = y_1$ sind, sogleich ableiten, wenn man in Betracht zieht, daß die Ordinate $MQ = y$ der Ellipse in demselben Verhältnisse zur Ordinate $MP = y_1$ des Kreises (bei gleicher Abscisse) steht, wie die kleine Halbaxe $CD = b$ der Ellipse zu dem der großen Halbaxe derselben gleichen Kreishalbmesser $CB = a$. Es ist also:

Fig. 20.



$\dfrac{y}{y_1} = \dfrac{b}{a}$, daher $y_1 = \dfrac{a}{b}\,y$ und $x^2 + \dfrac{a^2}{b^2}\,y^2 = a^2$, d. i.:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ die Gleichung der Ellipse.}$$

Setzt man in dieser Gleichung statt $+ b^2$, $- b^2$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der aus zwei Zweigen PAQ und $P_1 A_1 Q_1$, Fig. 21, bestehenden **Hyperbel**.

Wenn wir in der hieraus folgenden Formel:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

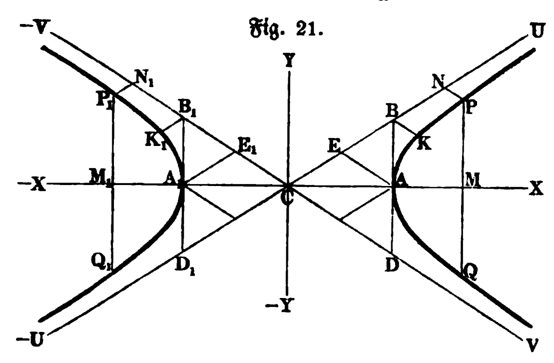
x unendlich groß nehmen, so verschwindet a^2 gegen x^2, und es ist:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} = \pm \frac{bx}{a} = \pm x \, tang. \alpha$$

die Gleichung von zwei durch den Coordinatenanfangspunkt C gehenden geraden Linien CU und CV. Da sich die Ordinaten:

$$\pm \frac{b}{a} x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} \text{ und } \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

Fig. 21.



immer mehr und mehr der Gleichheit nähern, je größer x angenommen wird, so folgt, daß die geraden Linien CU und CV **Asymptoten der Hyperbel** sind.

Nimmt man

$CA = a$, sowie die Perpendikel $AB = + b$ und $AD = - b$,

so bestimmt man dadurch die beiden Asymptoten; denn es ist für die Winkel $\pm \alpha$, unter welchen die Abscissenaxe von den Asymptoten geschnitten wird:

$$tang. ACB = \frac{AB}{CA}, \text{ d. i. } tang. \alpha = \frac{b}{a}, \text{ und ebenso:}$$

$$tang. ACD = \frac{AD}{CA}, \text{ d. i. } tang. (-\alpha) = -\frac{b}{a}.$$

Nimmt man ferner die Asymptoten $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ als Coordinatenaxen an;

setzt man die Abscisse oder Ordinate CN in der einen Axenrichtung $= u$, und die Ordinate oder Coordinate NP in der anderen Axenrichtung $= v$, so hat man, da die Richtung von u um den Winkel α, und von v die um den Winkel $-\alpha$ von der Abscissenaxe CX abweicht, die Abscisse:

$$CM = x = CN cos.\alpha + NP cos.\alpha = (u + v) cos.\alpha,$$

und die Ordinate:

$$MP = y = CN\, sin.\alpha - NP\, sin.\alpha = (u - v) sin\,\alpha;$$

bezeichnet man nun noch die Hypotenuse $CB = \sqrt{a^2 + b^2}$ durch e, so hat man:

$$cos.\alpha = \frac{a}{e} \text{ und } sin.\alpha = \frac{b}{e},$$

folglich:
$$\frac{cos.\alpha}{a} = \frac{sin.\alpha}{b} = \frac{1}{e} \text{ und}$$

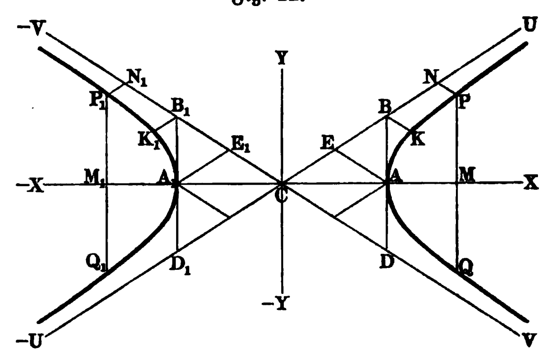
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(u^2 + 2uv + v^2)}{a^2} cos.\alpha^2 - \frac{(u^2 - 2uv + v^2)}{b^2} sin.\alpha^2$$
$$= \frac{u^2 + 2uv + v^2}{e^2} - \frac{u^2 - 2uv + v^2}{e^2} = \frac{4uv}{e^2} = 1,$$

woraus die sogenannte Asymptotengleichung der Hyperbel:

$$uv = \frac{e^2}{4}, \text{ oder } v = \frac{e^2}{4u}, \text{ hervorgeht.}$$

Hiernach ist die Hyperbel zwischen den gegebenen Asymptoten leicht zu zeichnen. Die Coordinaten für den Scheitel A sind $CE = EA = \frac{e}{2}$,

Fig. 22.



dagegen die Coordinaten für den Punkt K sind $CB = e$ und $BK = \frac{e}{4}$, ferner hat man für die Abscissen $2e$, $3e$, $4e$ u. s. w. die Ordinaten $\frac{1}{2}\,\frac{e}{4}$, $\frac{1}{3}\,\frac{e}{4}$, $\frac{1}{4}\,\frac{e}{4}$ u. s. w.

Maximum und Minimum. Wenn man in dem Elementenverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder in der Formel für die Tangente *tang.* α des Tangentenwinkels, für x nach und nach verschiedene Werthe setzt, so erhält man durch dieselbe die verschiedenen Lagen von der Berührungslinie der zugehörigen Curve. Nimmt man $x = 0$, so erhält man die Tangente des Tangentenwinkels im Coordinatenanfangspunkte, nimmt man dagegen $x = \infty$ an, so ergiebt sich dieselbe für einen unendlich entfernten Punkt der Curve. Am wichtigsten sind die Punkte, wo die Tangente einer Curve mit der einen oder der anderen Coordinatenaxe parallel läuft, weil hier in der Regel die eine oder die andere der Coordinaten x und y ihren größten oder kleinsten Werth hat, oder, wie man sagt, ein Maximum oder Minimum ist. Für den Parallelismus mit der Abscissenaxe hat man $\alpha = 0$, also auch *tang.* $\alpha = 0$, und für den mit der Ordinatenaxe $\alpha = 90^0$, also *tang.* $\alpha = \infty$; und hiernach folgt die Regel: Man findet diejenigen Werthe der Abscisse oder Urvariablen x, welchen die Maximal- oder Minimalwerthe der Ordinate oder Abhängigvariablen y entsprechen, wenn man das Differenzialverhältniß $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, und $= \infty$ setzt, und die erhaltenen Gleichungen in Hinsicht auf x auflöst. §. 13.

Fig. 23.

Z. B. für die Gleichung $y = 6x - {}^9/_2 x^2 + x^3$, welche der Curve $APQR$ in Fig. 23 entspricht, ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 6 - 9x + 3x^2 = 3(2 - 3x + x^2) = 3(1 - x)(2 - x),$$

und es erfolgt durch Nullsetzen von $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$1 - x = 0 \text{ und } 2 - x = 0,$$

d. i. $x = 1$ und $x = 2$.

Diese Werthe in die Formel: $y = 6x - {}^9/_2 x^2 + x^3$ gesetzt, ergiebt sich der Maximalwerth von y: $MP = 6 - {}^9/_2 + 1 = {}^5/_2$, und der Minimalwerth: $NQ = 12 - 18 + 8 = 2$.

Ferner für die Curve $KOPQR$, Fig. 24 (a. f. S.), deren Gleichung

$$y = x + \sqrt[3]{(x-1)^2} \text{ ist, hat man}$$

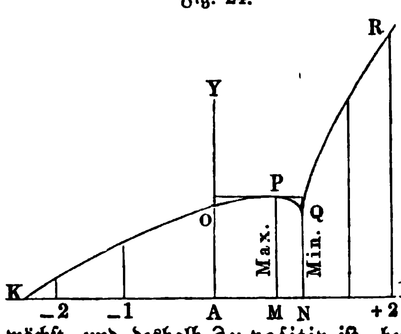
$$\frac{\partial y}{\partial x} = tang.\,\alpha = 1 + {}^2/_3 (x - 1)^{-1/3} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}};$$

und zwar $= 0$, für $\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} = -1$, d. i. für $AM = x = 1 - ({}^2/_3)^3 = {}^{19}/_{27} = 0{,}7037$, dagegen $= \infty$, für $AN = x = 1$. Dem ersteren Falle entspricht der Maximalwerth:

$$MP = y_m = 1 - (^2/_3)^3 + (^2/_3)^2 = {}^{31}/_{27} = 1{,}148,$$

und dem letzteren der Minimalwerth: $NQ = y_n = 1$.

Fig. 24.



Auch ist noch für $x = 0$, $AO = y = 1$, dagegen $y = 0$ für die Abscisse $AK = x$, welche der cubischen Gleichung

$$x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$$

entspricht und den Werth $x = -2{,}148$ hat.

§. 14. **Wendepunkt.** Sowie bei einer vom Anfangspunkte A aus aufsteigenden Curve y mit x wächst, und deshalb ∂y positiv ist, bei einer niedersteigenden hingegen y abnimmt, wenn x größer wird, und deshalb ∂y negativ ausfällt, und endlich an der Stelle, wo die Curve mit der Coordinatenaxe AX parallel läuft, ∂y Null ist, ebenso sind die den gleichen Abscissen-Elementen $\partial x = MN = NO = PS = QT \ldots$, Fig. 25, 26 u. 27, entsprechenden Ordinaten-Elemente:

$$SQ = PS\,tang.\,SPQ, \text{ d. i. } \partial y_1 = \partial x\,.\,tang.\,\alpha_1,$$
$$TR = QT\,tang.\,TQR, \text{ d. i. } \partial y_2 = \partial x\,.\,tang.\,\alpha_2 \text{ u. s. w.}$$

und also auch die Tangentenwinkel α_1, α_2 u. s. w. bei einer convexen Curve APR, Fig. 25, im Wachsen und bei einer concaven Curve

Fig. 25. Fig. 26.

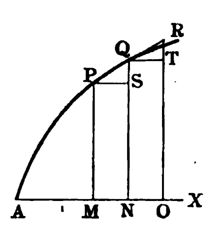
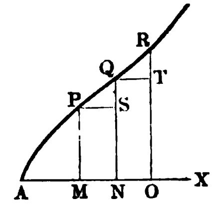


Fig. 27.



APR, Fig. 26, im Abnehmen begriffen; es ist folglich im ersten Falle:

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \text{ positiv}$$

und im zweiten

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

negativ, und man hat endlich auch für den Inflexions- oder Wendepunkt Q, Fig. 27, d. i. für die Stelle Q der Curve, wo Convexität in Concavität übergeht, oder das Umgekehrte stattfindet, auch $SQ = TR$, und daher:

$$\partial\,(tang.\,\alpha) = \partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \text{Null.}$$

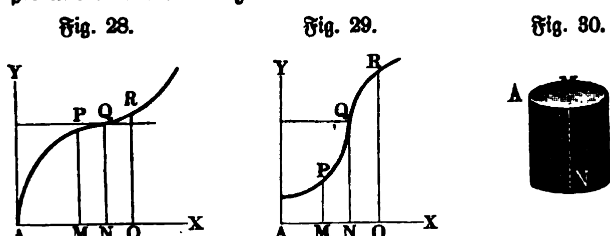
Es gilt also die Regel: Ist das Differenzial der Tangente des Tangentenwinkels positiv, so besitzt die Curve Convexität, ist es negativ, so hat dieselbe Concavität, und ist es Null, so hat man es mit einem Wendepunkte der Curve zu thun.

Auch ist hiernach leicht Folgendes zu ermessen. Die Stelle, wo die Curve parallel mit der Abscissenaxe läuft, für welche also $tang.\alpha = 0$ ist, entspricht entweder einem Minimo, oder Maximo, oder Wendepunkte der Curve, je nachdem diese Curve convex, oder concav, oder keines von beiden, also $\partial\,(tang.\alpha)$ positiv, oder negativ, oder Null ist.

Dagegen die Stelle, wo eine Curve mit der Ordinatenaxe parallel läuft, also $tang.\alpha = \infty$ ist, entspricht entweder einem Minimo, oder Maximo, oder Wendepunkte der Curve, je nachdem dieselbe concav oder convex oder theils concav, theils convex, also $\partial\,(tang.\alpha)$ vor und nach dieser Stelle negativ oder positiv ist, oder vor dieser Stelle ein anderes Zeichen hat als nach derselben.

Ein Curvenstück mit Wendepunkt Q der ersten Art führt Fig. 28, und ein solches mit einem Wendepunkt der zweiten Art Fig. 29 vor Augen. Man sieht die entsprechende Ordinate NQ ist weder ein Maximum, noch ein Minimum; denn es sind in keinem Falle beide benachbarten Ordinaten MP und OR größer und kleiner als NQ.

Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.



In der Geometrie, Physik, Mechanik u. s. w. ist die Ausmittelung von Maximal- und Minimal- oder sogenannten eminenten Werthen einer Function oft von großer Wichtigkeit. Da in der Folge vielfache Bestimmungen solcher Functionswerthe vorkommen werden, so möge hier nur noch folgende geometrische Aufgabe dieser Art zur Lösung gebracht werden.

Es sind die Dimensionen eines geraden Kreiscylinders AN, Fig. 30, anzugeben, welcher bei einem gegebenen Inhalt V die kleinste Oberfläche O hat. Bezeichnen wir den Durchmesser der Basis dieses Cylinders durch x, und die Höhe desselben durch y, so haben wir:

$$V = \frac{\pi}{4}\,x^2 y \text{ und}$$

die Oberfläche oder den Inhalt der beiden Grundflächen plus den Inhalt des Mantels:

$$O = \frac{2\pi x^2}{4} + \pi x y,$$

oder da der ersten Gleichung zufolge,

$$\pi y = \frac{4V}{x^2}, \text{ also } \pi x y = 4 V x^{-1} \text{ gesetzt werden kann:}$$

$$O = \frac{\pi x^2}{2} + 4 V x^{-1},$$

und folglich, da wir O und x als Coordinaten einer Curve behandeln können:

$$tang.\alpha = \frac{\partial O}{\partial x} = \pi x - 4 V x^{-2}.$$

Setzen wir nun diesen Quotienten Null, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\pi x = \frac{4V}{x^2}, \text{ oder } \pi x^3 = 4V,$$

deren Auflösung auf:

$$x = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} \text{ und}$$

$$y = \frac{4V}{\pi x^2} = \sqrt[3]{\frac{64 V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{16 V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = x$$

führt.

Da noch $\partial(tang.\alpha) = \left(\pi + \frac{8V}{x^3}\right)\partial x$ positiv ist, so führt diese Bestimmung auf das gesuchte Minimum.

Diese Bestimmung findet auch ihre Anwendung, wenn es darauf ankommt, die Dimensionen eines cylindrischen Gefäßes zu finden, welches bei einem gegebenen Fassungsraume die kleinste Menge an Material erfordert. Sie entspricht diesem Falle unmittelbar, wenn das Gefäß außer seinem kreisförmigen Boden auch noch einen solchen Deckel erhalten soll; wenn aber der letztere nicht gefordert wird, so hat man:

$$O = \frac{\pi x^2}{4} + 4 V x^{-1}, \text{ folglich}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{4V}{x^2}, \text{ woraus nun:}$$

$$x = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi^3}} \text{ und } y = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} = \tfrac{1}{2} x$$

folgt.

Während also im ersten Falle die Höhe gleich der Weite des Cylinders zu nehmen ist, hat man im zweiten Falle dieselbe nur der halben Cylinderweite gleich zu machen.

Mac Laurin'sche Reihe. Durch successives Differenziiren einer Function $y = f(x)$ findet man eine ganze Reihe neuer Functionen der Urvariablen x, und zwar §. 15.

$$f_1(x) = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x},$$

$$f_2(x) = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}, f_3(x) = \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} \text{ u. s. w.}$$

Z. B. für $y = f(x) = x^{5/3}$, folgt

$f_1(x) = {}^5/_3 x^{2/3}, f_2(x) = {}^{10}/_9 x^{-1/3}, f_3(x) = - {}^{10}/_{27} x^{-4/3}$ u. s. w.

Für eine Function, welche in einer nach Potenzen von x mit positiven ganzen Exponenten fortschreitenden convergenten Reihe

$$y = f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$$

dargestellt ist, erhält man

$$f_1(x) = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + 4 A_4 x^3 + \cdots$$
$$f_2(x) = 2 A_2 + 2 . 3 A_3 x + 3 . 4 A_4 x^2 + \cdots$$
$$f_3(x) = 2 . 3 A_3 + 2 . 3 . 4 A_4 x + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun in diesen Reihen $x =$ Null, so erhält man dadurch lauter zur Bestimmung der constanten Coefficienten A_0, A_1, A_2 . . . geeignete Ausdrücke, nämlich:

$f(0) = A_0, f_1(0) = 1 A_1, f_2(0) = 2 A_2, f_3(0) = 2 . 3 . A_3$ u. s. w.

und es folgen daher diese Coefficienten selbst:

$$A_0 = f(0), A_1 = f_1(0), A_2 = {}^1/_2 f_2(0), A_3 = \frac{1}{2 . 3} f_3(0),$$

$$A_4 = \frac{1}{2 . 3 . 4} f_4(0) \text{ u. s. w.}$$

Es ist hiernach eine Function in folgende, nach Mac Laurin benannte Reihe

$$f(x) = f(0) + f_1(0) \cdot \frac{x}{1} + f_2(0) \cdot \frac{x^2}{1 . 2} + f_3(0) \cdot \frac{x^3}{1 . 2 . 3}$$
$$+ f_4(0) \cdot \frac{x^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \cdots \text{ zu verwandeln.}$$

Für die Binomialfunction $y = f(x) = (1 + x)^n$ ist z. B.

$$f_1(x) = n(1 + x)^{n-1}, f_2(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2},$$
$$f_3(x) = n(n - 1)(n - 2)(1 + x)^{n-3} \text{ u. s. w.,}$$

wenn man daher $x =$ Null setzt, so erhält man:

$$f(0) = 1, f_1(0) = n, f_2(0) = n(n - 1)$$
$$f_3(0) = n(n - 1)(n - 2) \text{ u. s. w.}$$

und es folgt die binomische Reihe:

$$\text{I.)}\quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

Auch ergiebt sich:

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \cdots,$$

sowie:

$$(1+x)^{-n} = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n+1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

Ferner $1 + x = (1-z)^{-1} = \frac{1}{1-z}$ gesetzt, folgt $z = \frac{x}{1+x}$ und

$$(1+x)^n = (1-z)^{-n} = 1 + nz + \frac{n(n+1)}{1.2}z^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}z^3 + \cdots, \text{ d. i.}$$

$$\text{II.)}\quad (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

Die Reihe unter I. ist eine endliche für ganze positive, und die unter *II.* eine solche für ganze negative Werthe von n. Z. B.

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5, \text{ und}$$

$$(1+x)^{-5} = 1 - 5\left(\frac{x}{1+x}\right) + 10\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 - 10\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^5.$$

Da $a + x = a\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ ist, so folgt auch

$$(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n\left[1 + \frac{n}{1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots\right], \text{ d. i.}$$

$$\text{III.)}\quad (a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}x^3 + \cdots$$

z. B. $\sqrt[3]{1009^2} = (1000 + 9)^{2/3} = 100(1 + 0{,}009)^{2/3}$

$$= 100\left(1 + {}^2/_3 . 0{,}009 + \frac{{}^2/_3\,({}^2/_3 - 1)}{2} \cdot (0{,}009)^2 + \cdots\right)$$

$$= 100\,(1 + 0{,}006 - 0{,}000009) = 100{,}5991.$$

Auch ist:

$$(x + 1)^n = x^n + n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} + \cdots;$$

daher für sehr große Werthe von x annähernd:

$$(x + 1)^n = x^n + n x^{n-1}.$$

Hiernach folgt $x^{n-1} = \dfrac{(x+1)^n - x^n}{n}$, ferner:

$$(x - 1)^{n-1} = \frac{x^n - (x-1)^n}{n},$$

$$(x - 2)^{n-1} = \frac{(x-1)^n - (x-2)^n}{n},$$

$$(x - 3)^{n-1} = \frac{(x-2)^n - (x-3)^n}{n},$$

$$\vdots \qquad = \qquad \vdots$$

und zuletzt:

$$1^{n-1} = \frac{2^n - 1^n}{n}.$$

Durch Addition zu beiden Seiten der Gleichheitszeichen folgt nun:

$$x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1} + \cdots + 1$$
$$= \frac{(x+1)^n - 1^n}{n},$$

oder $n - 1 = m$, also $n = m + 1$ gesetzt und die Reihe in umgekehrter Ordnung geschrieben:

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (x-1)^m + x^m = \frac{(x+1)^{m+1} - 1}{m+1}.$$

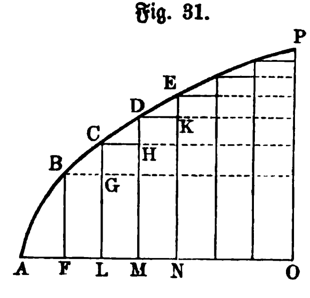
Noch kann man, da x sehr groß, eigentlich unendlich groß sein soll, $(x + 1)^{m+1} = x^{m+1}$ setzen, weshalb die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlenreihe folgt:

IV.) $$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$ z. B.

$$\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{4^2} + \cdots + \sqrt[3]{1000^2} \text{ annähernd}$$
$$= \frac{1000^{5/3}}{{}^5/_3} = {}^3/_5 \sqrt[3]{1000^5} = 60000.$$

§. 16. **Integralrechnung.** Die der Abscisse $AO = x$, Fig. 31, entsprechende Ordinate $OP = y$ läßt sich aus unendlich vielen ungleichen Elementen ∂y wie FB, GC, HD, KE... zusammensetzen, die lauter gleichen Elementen $\partial x = AF = FL = LM = MN$... der Abscisse entsprechen. Wäre daher $\partial y = \varphi(x) . \partial x$ gegeben, so würde man y durch Summation aller derjenigen Werthe von ∂y finden, die sich herausstellen, wenn man in $\varphi(x) . \partial x$ statt x nach und nach ∂x, $2\partial x$, $3\partial x$, $4\partial x$ ... bis $n\partial x = x$ einsetzt. Diese Summation deutet man durch das sogenannte Integralzeichen $\int$ an, welches man vor den allgemeinen Ausdruck für die zu summirenden Elemente setzt, schreibt also statt:

Fig. 31.



$$y = [\varphi(\partial x) + \varphi(2\partial x) + \varphi(3\partial x) + \cdots + \varphi(x)]\partial x,$$

$$y = \int \varphi(x)\partial x.$$

Auch nennt man in diesem Falle y das Integral von $\varphi(x)\partial x$, sowie $\varphi(x)\partial x = \partial y$ das Differenzial von y.

Zuweilen kann man das Integral $\int \varphi(x)\partial x$ durch wirkliches Summiren der Reihe $\varphi(\partial x)$, $\varphi(2\partial x)$, $\varphi(3\partial x)$ u. s. w. bestimmen; viel einfacher ist es jedoch, bei Ausmittelung eines Integrals eine der im Folgenden entwickelten Regeln der sogenannten Integralrechnung in Anwendung zu bringen.

Ist n die Anzahl der Elemente ∂x von x, also $x = n\partial x$, oder $\partial x = \frac{x}{n}$, so kann man setzen:

$$\int \varphi(x)\partial x = \left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \varphi\left(\frac{3x}{n}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{nx}{n}\right)\right]\frac{x}{n}.$$

Für das Differenzial $\partial y = ax\partial x$ hat man z. B. das Integral:

$$y = \int ax\partial x = a\partial x\,(\partial x + 2\partial x + 3\partial x + \cdots + n\partial x)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\,a(\partial x)^2,$$

oder, da nach §. 15, IV, für $n = \infty$, die Summe der natürlichen Zahlenreihe $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n^2$ und $(\partial x)^2 = \frac{x^2}{n^2}$ ist,

$$y = \int ax\partial x = \frac{1}{2}n^2 a\frac{x^2}{n^2} = \frac{1}{2}ax^2.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$y = \int \varphi(x)\partial x = \int \frac{x^2\partial x}{a} = [(\partial x)^2 + (2\partial x)^2 + (3\partial x)^2 + \cdots + (n\partial x)^2]\frac{\partial x}{a}$$
$$= (1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\frac{\partial x^3}{a},$$

wenn $x = n\partial x$ gesetzt, oder aus n Elementen ∂x bestehend angenommen wird. Nun ist aber nach §. 15, IV, für $n = \infty$,

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}, \text{ daher folgt:}$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{a} = \frac{n^3}{3} \cdot \frac{\partial x^3}{a} = \frac{(n\partial x)^3}{3a} = \frac{x^3}{3a}.$$

Integralformeln. Aus der Formel $\partial[a + mf(x)] = m\partial f(x)$ ergiebt sich durch Umkehrung $\int m\partial f(x) = a + mf(x) = a + m\int \partial f(x)$, §. 17.

oder $\partial f(x) = \varphi(x) . \partial x$ gesetzt,

I.) $\int m\varphi(x)\partial x = a + m\int \varphi(x)\partial x$,

und hieraus folgt, daß der constante Factor m beim Integriren sowie beim Differenziiren unverändert bleibt, und daß durch bloßes Integriren ein etwa vorhandenes constantes Glied a nicht bestimmt werden kann; daß also das Integriren allein ein noch unbestimmtes Integral liefert.

Um das constante Glied zu finden, müssen zwei zusammengehörige Werthe von x und $y = \int \varphi(x)\partial x$ bekannt sein. Ist für $x = c$, $y = k$, und hat man $y = \int \varphi(x)\partial x = a + f(x)$ gefunden, so muß auch

$$k = a + f(c)$$

sein, und es giebt daher die Subtraction: $y - k = f(x) - f(c)$, also in diesem Falle:

$$y = \int \varphi(x)\partial x = k + f(x) - f(c) = f(x) + k - f(c);$$

und man hat hiernach die Constante $a = k - f(c)$.

Wenn man z. B. weiß, daß das unbestimmte Integral:

$$y = \int x\partial x = \frac{x^2}{2} \text{ für } x = 1,\ y = 3 \text{ giebt,}$$

so hat man die nöthige Constante $a = 3 - 1/2 = 5/2$, und daher das Integral:

$$y = \int x\partial x = a + \frac{x^2}{2} = \frac{5 + x^2}{2}.$$

Selbst die Constantenbestimmung läßt das Integral noch unbestimmt, weil noch für x als Urvariable jeder beliebige Werth angenommen werden kann; will man aber einen ganz bestimmten Werth k_1 des Integrals haben, der einem bestimmten Werth c_1 von x entspricht, so muß man noch diesen in das gefundene Integral ein-, also $k_1 = k + f(c_1) - f(c)$ setzen.

So giebt z. B. $y = \int x\partial x = \frac{5 + x^2}{2}$, für $x = 5$, $y = 15$.

Meist ist derjenige Werth von x bekannt, bei welchem $y = 0$ ausfällt; in diesem Falle hat man also $k = 0$, und es führt daher das unbestimmte

Integral $\int \varphi(x)\partial x = f(x)$ auf das bestimmte $k_1 = f(c_1) - f(c)$, das also gefunden wird, wenn man in den Ausdruck $f(x)$ für das unbestimmte Integral die beiden gegebenen Grenzwerthe c_1 und c von x einsetzt, und die erhaltenen Werthe von einander subtrahirt. Um dies anzudeuten, schreibt man statt $\int \varphi(x)\partial x$, $\int_c^{c_1} \varphi(x)\partial x$, wenn also z. B. $\int \varphi(x)\partial x = \frac{x^2}{2}$ ist,

$$\int_c^{c_1} \varphi(x)\partial x = \frac{c_1^2 - c^2}{2}.$$

Die Umkehrung der Differenzialformel

$$\partial[f(x) + \varphi(x)] = \partial f(x) + \partial \varphi(x)$$

giebt die Integralformel:

$$\int[\partial f(x) + \partial\varphi(x)] = f(x) + \varphi(x),$$

oder wenn man $\partial f(x) = \psi(x)\partial x$ und $\partial\varphi(x) = \chi(x)\partial x$ setzt:

$$\text{II.)} \quad \int[\psi(x)\partial x + \chi(x)\partial x] = \int\psi(x)\partial x + \int\chi(x)\partial x.$$

Es ist also hiernach das Integral von einer Summe mehrerer Differenzialien gleich der Summe von den Integralen der einzelnen Differenzialien.

Z. B. $\int(3 + 5x)\partial x = \int 3\partial x + \int 5x\partial x = 3x + {}^5/_2 x^2$.

§. 18. **Hauptformel der Integralrechnung.** Die wichtigste Differenzialformel IV des §. 8: $\partial(x^n) = nx^{n-1}\partial x$,
führt durch Umkehrung auf die Hauptformel der Integralrechnung.

Es ist hiernach $\int nx^{n-1}\partial x = x^n$, oder $n\int x^{n-1}\partial x = x^n$, daher

$$\int x^{n-1}\partial x = \frac{x^n}{n};$$

setzt man also $n - 1 = m$, und hiernach $n = m + 1$, so erhält man folgendes wichtige Integral:

$$\int x^m \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

welches in Anwendung mindestens ebenso oft vorkommt, als alle übrigen zusammen.

Die Form dieses Integrals weist auch darauf hin, daß es dem in §. 9 abgehandelten und in Fig. 17 abgebildeten Curvensysteme entspricht.

Hiernach ist z. B. $\int 5x^3\partial x = 5\int x^3\partial x = {}^5/_4 x^4$; ferner:

$$\int \sqrt[3]{x^4}\,\partial x = \int x^{4/3}\partial x = {}^3/_7\, x^{7/3} = {}^3/_7 \sqrt[3]{x^7};$$

$$\int \frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = {}^1/_2 \int x^{-1/2}\partial x = {}^1/_2\, \frac{x^{1/2}}{{}^1/_2} = \sqrt{x};$$

$$\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = \int 4\partial x - \int 6x^2\partial x + \int 5x^4\partial x$$
$$= 4\int\partial x - 6\int x^2\partial x + 5\int x^4\partial x = 4x - 2x^3 + x^5;$$

ferner, wenn man $3x - 2 = u$, also $3\partial x = \partial u$, oder $\partial x = \frac{\partial u}{3}$ einsetzt:

$$\int\sqrt{3x-2}\,.\,\partial x = \int u^{1/2}\frac{\partial u}{3} = {}^1\!/_3\,\frac{u^{3/2}}{{}^3\!/_2} = {}^2\!/_9\,\sqrt{u^3}$$
$$= {}^2\!/_9\,\sqrt{(3x-2)^3};$$

endlich, wenn $2x^2 - 1 = u$, also $4x\partial x = \partial u$, d. i. $x\partial x = \frac{\partial u}{4}$ gesetzt wird:

$$\int\frac{5x\partial x}{\sqrt[3]{2x^2-1}} = \int\frac{5\partial u}{4\sqrt[3]{u}} = \frac{5}{4}\int u^{-1/3}\partial u = \frac{5}{4}\,\frac{u^{2/3}}{{}^2\!/_3}$$
$$= \frac{15}{8}\sqrt[3]{u^2} = \frac{15}{8}\sqrt[3]{(2x^2-1)^2}.$$

Durch Hinzufügung der Grenzwerthe lassen sich die unbestimmten Integrale sogleich in bestimmte verwandeln, z. B.:

$$\int_1^2 5x^3\partial x = {}^5\!/_4(2^4 - 1^4) = {}^5\!/_4.(16-1) = 18{}^3\!/_4,$$

$$\int_4^9\frac{\partial x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 1,$$

$$\int_1^6\sqrt{3x-2}\,.\,\partial x = {}^2\!/_9\left(\sqrt{16^3} - \sqrt{1^3}\right) = {}^2\!/_9\,(64-1) = 14.$$

Wäre z. B. $\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = 7$ für $x = 0$, so hätte man allgemein: $\int(4 - 6x^2 + 5x^4)\partial x = 7 + 4x - 2x^3 + x^5$.

Exponential- und logarithmische Functionen. Die sogenannte Exponentialfunction $y = a^x$, welche in einer Potenz mit variablem Exponenten besteht, läßt sich mittels Mac Laurin's Theorem wie folgt in eine Reihe verwandeln, wobei auch zugleich das Differenzial derselben mit gefunden wird. §. 19.

Setzt man $a^x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots$, oder, da für $x = 0$, a^x den Werth $a^0 = 1$ annimmt, also $A_0 = 1$ ausfällt,

$$a^x = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots,\text{ so hat man auch:}$$
$$a^{\partial x} = 1 + A_1\partial x + A_2\partial x^2 + A_3\partial x^3 + \cdots,\text{ und daher}$$
$$\partial(a^x) = a^{x+\partial x} - a^x = a^x a^{\partial x} - a^x = a^x(a^{\partial x} - 1)$$
$$= a^x(A_1\partial x + A_2\partial x^2 + A_3\partial x^3 + \cdots)$$
$$= a^x(A_1 + A_2\partial x + \cdots)\partial x = A_1 a^x\partial x.$$

Nun folgt durch successives Differenziiren der Reihe

$$f(x) = a^x = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots,$$

$$f_1(x) = \frac{\partial (a^x)}{\partial x} = A_1 a^x = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \cdots$$

$$f_2(x) = \frac{\partial (A_1 a^x)}{\partial x} = A_1^2 a^x = 2 A_2 + 2.3.A_3 x + \cdots,$$

$$f_3(x) = \frac{\partial (A_1^2 a^x)}{\partial x} = A_1^3 a^x = 2.3.A_3 + \cdots,$$

setzt man daher $x = 0$, so folgt:

$$A_1 = A_1,\ 2 A_2 = A_1^2,\ 2.3.A_3 = A_1^3 \cdots,$$

daher

$$A_2 = \frac{1}{1.2} A_1^2, A_3 = \frac{1}{1.2.3} A_1^3, A_4 = \frac{1}{1.2.3.4} A_1^4 \text{ u. s. w.,}$$

und es nimmt die Exponentialreihe die Form

$$\text{I.)} \quad a^x = 1 + A_1 \frac{x}{1} + A_1^2 \frac{x^2}{1.2} + A_1^3 \frac{x^3}{1.2.3} + A_1^4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots \text{ an.}$$

Der constante Coefficient A_1 ist natürlich eine bestimmte Function der constanten Grundzahl, sowie letztere eine Function des ersteren; giebt man daher die eine von beiden Zahlen, so ist dadurch die andere auch bestimmt. Die einfachste oder sogenannte natürliche Potenzenreihe erhält man für $A_1 = 1$, deren Grundzahl (a) in der Folge mit e bezeichnet wird. Es ist also:

$$\text{II.)} \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots$$

und setzt man $x = 1$, so ergiebt sich die Grundzahl der natürlichen Potenzenreihe:

$$e^1 = e = 1 + 1 + {}^1/_2 + {}^1/_6 + {}^1/_{24} + \cdots = 2{,}7182828 \cdots$$

Setzt man $e = a^m$, oder $a = e^{1/m}$, so ist $1/m = Log.\ nat.\, a$, der sogenannte natürliche oder hyperbolische Logarithme von a, und

$$\text{III.)} \quad a^x = (e^{1/m})^x = e^{\frac{x}{m}} = 1 + \frac{1}{1}\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{m}\right)^3 + \cdots$$

Da diese Reihe der Form nach mit der unter I. übereinstimmt, so ist auch $A_1 = \dfrac{1}{m}$, und

IV. $\partial(a^x) = A_1 a^x \partial x = \frac{a^x \partial x}{m} = Log.\, nat.\, a\, .\, a^x \partial x$, sowie

V.) $\partial(e^x) = e^x \partial x$.

Z. B. $\partial(e^{3x+1}) = e^{3x+1} \partial(3x + 1) = 3 e^{3x+1} \partial x$.

Setzt man $y = a^x = e^{\frac{x}{m}}$, so hat man umgekehrt:

$$x = Log._a y \text{ und } \frac{x}{m} = Log.\, nat.\, y, \text{ daher}$$

$$Log._a y = m\, Log.\, nat.\, y, \text{ sowie umgekehrt}$$

$$Log.\, nat.\, y \text{ oder } Log._e y = \frac{1}{m} Log._a y.$$

Die Zahl m heißt der Modul des der Grundzahl a entsprechenden Logarithmensystemes. Es läßt sich also mit Hülfe desselben der natürliche Logarithme in jeden künstlichen, und umgekehrt, ein solcher in den natürlichen verwandeln. Für das Brigg'sche Logarithmensystem ist die Basis $a = 10$, daher $1/m = Log.\ nat.\ 10 = 2{,}30258\ldots$, und umgekehrt, der Modul

$$m = \frac{1}{Log.\, nat.\, 10} = 0{,}43429\ldots$$

Es ist also:

$$Log.\, y = 0{,}43429\ Log.\ nat.\, y, \text{ und}$$
$$Log.\, nat.\, y = 2{,}30258\ \ Log.\, y.$$

(Vergl. „Ingenieur", S. 81 u. f. w.)

Exponentialcurven. Der Lauf der Curven, welche den Exponentialfunctionen $y = e^x$ und $y = 10^x$ entsprechen, wird durch Fig. 32 (a. f. S.) veranschaulicht. Für $x = 0$ ist in beiden Fällen $y = e^0 = a^0 = 1$; deshalb gehen denn auch beide Curven OQS und OQ_1S_1 durch denselben Punkt (O) in der Ordinatenaxe AY. Für $x = 1$, ist: §. 20.

$$y = e^x = 2{,}718\ldots, \text{ und}$$
$$y = 10^x = 10,$$

für $x = 2$, giebt:

$$y = e^x = 2{,}718^2 = 7{,}389 \text{ und}$$
$$y = 10^x = 10^2 = 100 \text{ u. s. w.;}$$

es steigen also auf der positiven Seite der Abscissenaxe beide Curven, zumal aber die letztere, sehr stark an; dagegen ist für $x = -1$:

$$e^x = e^{-1} = \frac{1}{2{,}718\ldots} = 0{,}368\ldots, \text{ und}$$
$$10^x = 10^{-1} = 0{,}1;$$

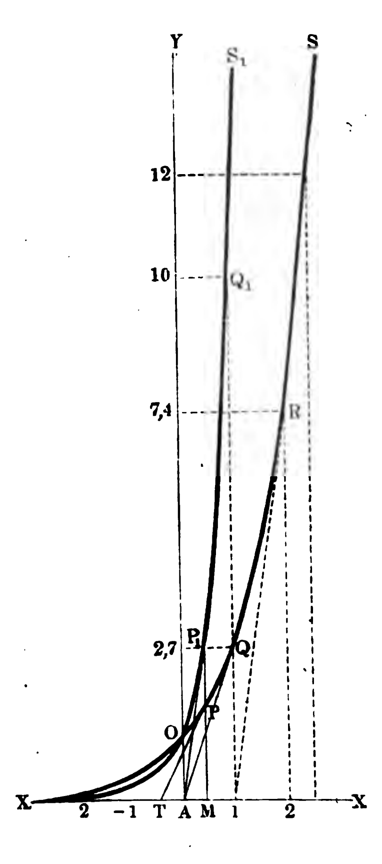
ferner für $x = -2$:

$$e^x = e^{-2} = \frac{1}{2{,}718^2} = 0{,}135 \text{ und } 10^x = 10^{-2} = 0{,}01;$$

endlich für $x = -\infty$ geben beide Gleichungen:

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{a^\infty} = 0.$$

Fig. 32.



Es nähern sich also beide Curven auf der negativen Seite der Abscissenaxe dieser Axe immer mehr und mehr, und zwar die letztere stärker als die erstere; jedoch findet ein wirkliches Zusammentreffen mit dieser Axe nie statt.

Da aus

$y = e^x$, $x = Log.\,nat.\,y$

und ebenso aus

$y = a^x$, $x = Log._a\,y$

folgt, so geben diese Curven auch eine Scala der natürlichen und Brigg'schen Logarithmen ab; es sind nämlich die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten; so ist z. B.

$$AM = Log.\,nat.\,MP$$
$$= Log._a\,MP_1$$

u. s. w.

Nach der Differenzialformel IV. des letzten Artikels ist der Tangentenwinkel α der Exponentialcurve durch die einfache Formel:

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a^x \partial x}{m \partial x}$$
$$= \frac{a^x}{m} = \frac{y}{m} = y\,Log.\,nat.\,a$$

bestimmt.

Bei der Curve $O P_1 Q_1 S_1$, Fig. 32, ist folglich die Subtangente $= y\,cotg.\,\alpha = m$, also constant, und bei der Curve $OPQS$ ist sie stets $= 1$, z. B. für den Punkt Q, $\overline{A1} = 1$, für den Punkt R, $\overline{12} = 1$ u. s. w.

§. 21. Ist $x = a^y$, so hat man auch

$$\partial x = \partial(a^y) = \frac{a^y \partial y}{m}.$$

und umgekehrt,

$$\partial y = \frac{m\partial x}{a^y} = \frac{m\partial x}{x}.$$

Nun ist aber auch $y = Log._a x$, d. i. der Logarithme der variablen Potenz x bei der constanten Grundzahl a, daher hat man auch folgende Differenzialformeln der **logarithmischen Functionen**

$$y = Log._a x \text{ und } y = Log. nat. x:$$

$$\text{I.)} \quad \partial(Log._a x) = \frac{m\partial x}{x} = \frac{1}{Log. nat. a} \cdot \frac{\partial x}{x}, \text{ sowie}$$

$$\text{II.)} \quad \partial(Log. nat. x) = \frac{\partial x}{x}.$$

Bezeichnet α den Tangentenwinkel der Curve, welche der Gleichung $y = Log._a x$ entspricht, so ist $tang. \alpha = \frac{m}{x}$, und die **Subtangente**

$$= y\, cotg. \alpha = \frac{xy}{m},$$

also proportional dem Inhalte xy eines aus den Seiten x und y zu construirenden Rechteckes.

Mittels der gefundenen Differenzialformeln I. und II. erhält man:

$$1)\ \partial(Log. nat. \sqrt[2]{x}) = \frac{\partial\sqrt[2]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\partial(x^{1/2})}{x^{1/2}} = {}^1/_2\, \frac{x^{-1/2}\partial x}{x^{1/2}} = \frac{\partial x}{2x},$$

$$\text{oder auch} = \partial({}^1/_2\, Log. nat. x) = {}^1/_2\, \partial(Log. nat. x) = {}^1/_2 \cdot \frac{\partial x}{x}.$$

$$2)\ \partial Log. nat. \left(\frac{2+x}{x^2}\right) = \partial[Log. nat. (2+x) - Log. nat. x^2]$$
$$= \partial\, Log. nat. (2+x) - \partial\, Log. nat. (x^2)$$
$$= \frac{\partial x}{2+x} - 2\,\frac{\partial x}{x} = -\frac{(4+x)\partial x}{x(2+x)}.$$

$$3)\ \partial\left(Log. nat. \frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \partial[Log. nat. (e^x-1)] - \partial[Log. nat. (e^x+1)]$$
$$= \frac{\partial(e^x)}{e^x-1} - \frac{\partial(e^x)}{e^x+1} = \frac{e^x dx}{e^x-1} - \frac{e^x \partial x}{e^x+1} = \frac{2e^x dx}{e^{2x}-1}.$$

Integrale der Exponential- und logarithmischen Formeln. §. 22.

Wenn man die Differenzialformeln der letzten Paragraphen umkehrt, so stößt man, wie folgt, auf andere wichtige Integralformeln.

Aus $\partial(a^x) = \frac{a^x \partial x}{m}$, folgt $\int \frac{a^x \partial x}{m} = a^x$, d. i.:

I.) $\int a^x \partial x = m a^x = a^x : Log. nat. a$, und daher:

II.) $\int e^x \partial x = e^x$.

Ferner aus $\partial(Log._a x) = \frac{m\,dx}{x}$, folgt $\int \frac{m\,\partial x}{x} = Log._a x$, d. i.:

III.) $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{m}\,Log._a x = Log.\,nat.\,x$, und dasselbe giebt auch die Integration der Formel $\partial(Log.\,nat.\,x) = \frac{\partial x}{x}$.

Hiernach lassen sich leicht folgende Beispiele berechnen:

$\int e^{5x-1}\partial x = {}^1/_5 \int e^{5x-1}\partial(5x-1) = {}^1/_5\, e^{5x-1}$.

$\int \frac{3\,\partial x}{7x+2} = {}^3/_7 \int \frac{\partial(7x+2)}{7x+2} = {}^3/_7\, Log.\,nat.(7x+2)$.

$\int\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)\partial x = \int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)\partial x$

$= \int x\,\partial x + \int \partial x + 2\int \frac{\partial(x-1)}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\,Log.\,nat.(x-1)$.

§. 23. **Logarithmische Reihen.** Die erste Integralformel $\int x^m \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ läßt das letzte Integral unbestimmt; denn $m = -1$ gesetzt, folgt:

$\int \frac{\partial x}{x} = \int x^{-1}\partial x = \frac{x^0}{0}$ + eine Constante $= \infty$ + Constante; setzen wir aber $x = 1 + u$, und $dx = du$, so erhalten wir:

$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial u}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)\,du$, und daher

$$\int \frac{\partial x}{x} = \int \frac{\partial u}{1+u} = \int (1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - \cdots)\,du$$
$$= \int \partial u - \int u\,\partial u + \int u^2 \partial u - \int u^3 \partial u + \cdots$$
$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots;$$

es läßt sich also auch $Log.\,nat.(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$, oder

IV.) $Log.\,nat.\,x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$

setzen.

Mit Hülfe dieser Reihe lassen sich die Logarithmen solcher Zahlen berechnen, welche wenig von 1 abweichen; hat man aber von größeren Zahlen die Logarithmen zu finden, so schlage man folgenden Weg ein.

Nimmt man u negativ an, so giebt die vorletzte Reihe:

$$Log.\,nat.(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} - \cdots;$$

und es folgt nun durch die Subtraction beider Reihen von einander:

$$Log.nat.(1+u) - Log.nat.(1-u) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right), \text{ d. i.}$$

$$Log.nat.\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\right), \text{ oder}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = x, \text{ also } u = \frac{x-1}{x+1} \text{ gesetzt,}$$

V.) $$Log.nat.x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right].$$

Diese Reihe ist auch zur Bestimmung der Logarithmen von solchen Zahlen zu gebrauchen, welche bedeutend von 1 abweichen, da $\frac{x-1}{x+1}$ stets unter 1 ausfällt.

Es ist auch $Log.(x+y) - Log.x = Log.\left(\frac{x+y}{x}\right) = Log.\left(1+\frac{y}{x}\right)$

$$= \frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \text{ꝛc.}$$

$$= 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^5 + \cdots\right]$$

und daher:

VI.) $$Log.(x+y) = Log.x + 2\left[\frac{y}{2x+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2x+y}\right)^3 + \cdots\right].$$

Diese Formel ist anzuwenden, um aus dem Logarithmen einer Zahl den Logarithmen einer nächst größeren Zahl zu berechnen.

Z. B. $$Log.nat.2 = 2\left[\frac{2-1}{2+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2-1}{2+1}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{243} + \cdots\right)$$

$$= 2\left\{\begin{matrix}0{,}33333\\0{,}01234\\0{,}00082\\0{,}00007\end{matrix}\right\} = 2 \,.\, 0{,}34656 = 0{,}69312,$$

genauer $= 0{,}69314718.$

$Log.nat.8 = Log.nat.2^3 = 3\,Log.nat.2$ ist hiernach $= 2{,}0794415$, und endlich nach der letzten Formel:

$$Log.nat.10 = Log.nat.(8+2)$$

$$= Log.nat.8 + 2\left[\frac{2}{16+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{16+2}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2{,}0794415 + 0{,}2231436 = 2{,}302585.$$

Man kann auch

$$Log.nat.10 = Log.nat.2 + Log.nat.5 = Log.nat.2 + Log.nat.(4+1)$$
$$= Log.nat.2 + Log.nat.(2^2)$$
$$+ 2\left[\frac{1}{2.4+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2.4+1}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$= 3 . Log.nat.2 + 2\left[{}^1/_9 + {}^1/_3({}^1/_9)^3 + {}^1/_5({}^1/_9)^5 + \cdots\right]$$
$$= 2{,}0794415 + 2 . 0{,}1115718 = 2{,}302585$$ setzen.

(Vergl. §. 19.)

§. 24. **Trigonometrische und Kreisfunctionen.** Von praktischer Wichtigkeit sind endlich noch die trigonometrischen und Kreisfunctionen, deren Differenziale und Integrale ebenfalls im Folgenden ermittelt werden.

Die Sinusfunction $y = sin.x$ giebt für $x = 0$, $y = 0$;

für $x = \frac{\pi}{4} = \frac{3{,}1416}{4} = 0{,}7854\ldots, y = \sqrt{{}^1/_2} = 0{,}7071,$

für $x = \frac{\pi}{2}, y = 1$, für $x = \pi, y = 0$;

für $x = {}^3/_2\pi, y = -1$, für $x = 2\pi, y = 0$ u. s. w.;

trägt man daher x als Abscissen AO und y als die entsprechenden Ordinaten OP auf, so erhält man die schlangenförmige Curve $(APB\pi C\overline{2\pi})$, Fig. 33, welche sich nach beiden Seiten von A ins Unendliche fortsetzen läßt.

Fig. 33.

Die Cosinusfunction $y = cos. x$ giebt für $x = 0$, $y = 1$, für $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \sqrt{1/_2}$, für $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, für $x = \pi$, $y = -1$, für $x = {}^3/_2 \pi$, $y = 0$, für $x = 2\pi$, $y = 1$ u. s. w.; ihr entspricht daher genau dieselbe Schlangenlinie $\left(+1 P \frac{\pi}{2} D \frac{3\pi}{2} + 1\right)$ wie der Sinusfunction, nur ist dieselbe auf der Abscissenaxe um $1/_2 \pi = 1{,}5708..$ weiter vor oder hinter der Sinuscurve stehend.

Ganz anders sind aber die Curven gestaltet, welche den Tangens- und Cotangensfunctionen $y = tang. x$ und $y = cotang. x$ entsprechen. Setzt man in $y = tang. x$, $x = 0$, $1/_4 \pi$, $1/_2 \pi$, so erhält man $y = 0, 1, \infty$, und daher eine Curve (AQE), welche sich einer durch den Theilpunkt $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ der Abscissenaxe AX gehenden Parallele zur Ordinatenaxe AY immer mehr und mehr nähert, ohne sie je zu erreichen. Nimmt man ferner $x = \frac{\pi}{2}, \pi, {}^3/_2 \pi$, so erhält man $y = -\infty, 0, +\infty$, und daher eine Curve ($F\pi G$), die sich den Parallelen durch $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und $({}^3/_2 \pi)$ bis ins Unendliche nähert, oder wie man sagt, diese Parallelen zu Asymptoten (s. §. 11) hat.

Bei ferneren Annahmen für x wiederholen sich dieselben Werthe von y, und deshalb wird also auch der Function $y = tang. x$ durch lauter Curven, wie ($F\pi G$), welche um $\pi = 3{,}1416$ in der Richtung der Abscissenaxe von einander abstehen, entsprochen.

Die Function

$y = cotang. x$, giebt dagegen für $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$; $y = \infty, 1, 0, -\infty$, daher entspricht derselben eine Curve $\left(K Q \frac{\pi}{2} L\right)$, welche von der Tangentencurve nur der Lage nach verschieden ist; auch läßt sich leicht einsehen, daß noch unendlich viele Curvenzweige, wie z. B. $\left(M \frac{3\pi}{2} N\right)$ u. s. w., dieser Function angehören.

Während sowohl die Curve für Sinus und auch die für Cosinus (die sogenannte Sinusoide und Cosinusoide) ein stetig zusammenhängendes Ganzes bildet, besteht die Curve für die Tangenten, sowie auch die für die Cotangenten (die sogenannte Tangentoide oder Cotangentoide) aus lauter getrennten Zweigen, indem ihre Ordinaten für gewisse Werthe von x aus dem positiven Unendlichen in das negative Unendliche überspringen, wobei natürlich die Curve ihre Continuität verliert.

§. 25. **Differenziale der trigonometrischen Functionen.** Die Differenziale der trigonometrischen Linien oder Functionen ergeben sich durch Betrachtung der Fig. 34, in welcher

$$CA = CP = CQ = 1, \text{Bog. } AP = x, PQ = \partial x,$$

ferner:

$$MP = \sin. x,\ CM = \cos. x,\ AS = \text{tang.} x,$$

endlich:

$$OQ = NQ - MP = \sin.(x + \partial x) - \sin. x = \partial \sin. x,$$

$$PO = -(CN - CM) = -[\cos.(x + \partial x) - \cos. x] = \partial \cos. x,$$

und

$$ST = AT - AS = \text{tang.}(x + \partial x) - \text{tang.} x = \partial \text{tang.} x$$

ist.

Da das Bogenelement PQ rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, und der Winkel PCA zwischen zwei Linien CP und CA dem Winkel PQO zwischen ihren Perpendikeln PQ und OQ gleich ist, so sind die Dreiecke CPM und OPQ einander ähnlich, und es ist:

$$\frac{OQ}{PQ} = \frac{CM}{CP}, \text{ d. i. } \frac{\partial \sin. x}{\partial x} = \frac{\cos x}{1},$$

daher

I.) $\partial(\sin. x) = \cos. x \,.\, \partial x$; ebenso auch:

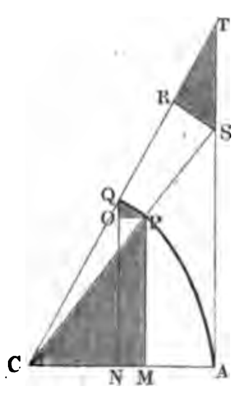
$$\frac{OP}{PQ} = \frac{MP}{CP}, \text{ d. i. } \frac{-\partial \cos. x}{\partial x} = \frac{\sin. x}{1},$$

daher

II.) $\partial(\cos. x) = -\sin. x\, \partial x.$

Man sieht hieraus, daß kleine Fehler im Bogen oder Winkel auf den Sinus um so mehr Einfluß haben, je größer $\cos. x$, je kleiner also der Bogen oder Winkel ist, daß dagegen dieselben den Cosinus um so mehr verändern, je größer $\sin. x$ ist, je mehr also der Bogen sich $\frac{\pi}{2}$ nähert, und daß endlich das Differenzial des Cosinus das entgegengesetzte Zeichen von dem des Bogens hat, also, wie bekannt, eine Zunahme von x eine Abnahme von $\cos. x$ liefert, und umgekehrt, eine Abnahme von x ein Wachsen von $\cos. x$ giebt.

Fig. 34.



Legt man SR rechtwinkelig auf CT, so erhält man ein Dreieck SRT, welches

wegen der Gleichheit der Winkel RTS und CQN oder CPM dem Dreiecke CPM ähnlich ist, und weshalb man hat:

$$\frac{ST}{SR} = \frac{CP}{CM}, \text{ d. i. } \frac{\partial\, tang.x}{SR} = \frac{1}{cos.x}.$$

Nun ist aber auch: $\dfrac{SR}{CS} = \dfrac{PQ}{CP}$, d. i. $SR = \dfrac{CS.\partial x}{1}$

und

$$CS = secans.x = \frac{1}{cos.x}, \text{ daher } SR = \frac{\partial x}{cos.x}$$

und

III.) $\partial(tang.x) = \dfrac{\partial x}{(cos.x)^2}$.

Führt man statt x, $\dfrac{\pi}{2} - x$, also statt $\partial x, \partial\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\partial x$ ein, so erhält man:

$$\partial\, tang.\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\partial x}{\left[cos.\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2}, \text{ d. i.}$$

IV.) $\partial(cotang.x) = -\dfrac{\partial x}{(sin.x)^2}$.

Durch Umkehrung geben diese Formeln für das Differenzial des Bogens:

$$\partial x = \frac{\partial\, sin.x}{cos.x} = -\frac{\partial\, cos.x}{sin.x} = (cos.x)^2\, \partial\, tang.x$$
$$= -(sin.x)^2\, \partial\, cotang.x,$$

oder:

$$\partial x = \frac{\partial\, sin.x}{\sqrt{1 - (sin.x)^2}} = \frac{\partial\, tang.x}{1 + (tang.x)^2}$$

sowie

$$\partial x = -\frac{\partial\, cos.x}{\sqrt{1 - (cos.x)^2}} = -\frac{\partial\, cotang.x}{1 + (cotang.x)^2}.$$

Bezeichnet man nun $sin.x$ durch y, und x durch $arc.(sin. = y)$, so erhält man:

V.) $\partial\, arc.(sin. = y) = \dfrac{\partial y}{\sqrt{1 - y^2}}$,

und auf gleiche Weise findet man:

VI.) $\partial\, arc.(cos. = y) = -\dfrac{\partial y}{\sqrt{1 - y^2}}$,

sowie:

VII.) $\partial\, arc.(tang. = y) = \dfrac{\partial y}{1 + y^2}$,

und

VIII.) $\partial\, arc.(cotang. = y) = -\dfrac{\partial y}{1 + y^2}$.

§. 26. **Integrale der trigonometrischen Functionen.** Die letzten Differenzialformeln geben durch Umkehrung folgende Integralformeln:

I.) $\int cos.x\,\partial x = sin.x$,

II.) $\int sin.x\,\partial x = -\,cos.x$,

III.) $\int \dfrac{\partial x}{cos.x^2} = tang.x$,

IV.) $\int \dfrac{\partial x}{sin.x^2} = -\,cotang.x$,

ferner:

V.) $\int \dfrac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = arc.(sin. = x) = -\,arc.(cos. = x)$,

VI.) $\int \dfrac{\partial x}{1 + x^2} = arc.(tang. = x) = -\,arc.(cotang. = x)$,

und hierzu lassen sich leicht noch folgende finden.

Es ist $\partial(Log.nat.sin.x) = \dfrac{\partial sin.x}{sin.x} = \dfrac{cos.x\,.\,\partial x}{sin.x} = cotang.x\,.\,\partial x$,

folglich:

VII.) $\int cotg.x\,\partial x = Log.nat.sin.x$, ebenso:

VIII.) $\int tang.x\,\partial x = -\,Log.cos.nat.x$; ferner:

$$\partial(Log.nat.tang.x) = \frac{\partial\,tang.x}{tang.x} = \frac{\partial x}{cos.x^2\,tang.x}$$

$$= \frac{\partial x}{sin.x\,cos.x} = \frac{\partial(2x)}{sin.2x},$$

daher:

$$\partial(Log.nat.tang.{}^1/_2 x) = \frac{\partial x}{sin.x}, \text{ und}$$

IX.) $\int \dfrac{\partial x}{sin.x} = Log.nat.tang.\dfrac{x}{2}$,

ebenso:

X.) $\int \dfrac{\partial x}{cos.x} = Log.nat.tang.\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$

$$= Log.nat.tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Ferner $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-x} = \frac{a(1-x)+b(1+x)}{(1+x)(1-x)}$ gesetzt, folgt $1 = a\,(1-x) + b\,(1+x)$. Nimmt man $1 + x = 0$, also $x = -1$ an, so erhält man hiernach $1 = a\,(1+1)$, daher $a = {}^1/_2$, und setzt man $1 - x = 0$, also $x = 1$, so ergiebt sich $1 = 2\,b$, daher:

$$b = {}^1/_2 \text{ und } \frac{1}{1-x^2} = \frac{{}^1/_2}{1+x} + \frac{{}^1/_2}{1-x},$$

endlich aber:

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{1+x} + {}^1/_2 \int \frac{\partial x}{1-x}$$
$$= {}^1/_2\, Log.\,nat.\,(1+x) - {}^1/_2\, Log.\,nat.\,(1-x),$$

d. i.:

XI.) $$\int \frac{\partial x}{1-x^2} = {}^1/_2\, Log.\,nat. \left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

und ebenso:

XII.) $$\int \frac{\partial x}{x^2-1} = {}^1/_2\, Log.\,nat. \left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Setzt man $\sqrt{1+x^2} = xy$, so erhält man $1 + x^2 = x^2y^2$ und $\partial x\,(1-y^2) = xy\,\partial y$, daher:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial y}{1-y^2} = {}^1/_2\, \partial\, Log.\,nat. \left(\frac{1+y}{1-y}\right),$$

wonach:

XIII.) $$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = Log.\,nat.\,(x + \sqrt{1+x^2}),$$

sowie:

XIV.) $$\int \frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}} = Log.\,nat.\,(x + \sqrt{x^2-1}) \text{ folgt.}$$

Trigonometrische Reihen. Um $arc.\,(tang. = x) = \int \frac{\partial x}{1+x^2}$ §. 27. zu finden, darf man nur $\frac{1}{1+x^2}$ durch Division in eine Reihe verwandeln und dann Glied für Glied integriren. Man erhält so:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots,$$

und

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = \int \partial x - \int x^2 \partial x + \int x^4 \partial x - \int x^6 \partial x + \cdots,$$

folglich:

I.) $$arc.\,(tang. = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

z. B.:

$$\frac{\pi}{4} = arc.(tang. = 1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \cdots,$$

also den Halbkreis $\pi = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \cdots$

oder:

$$\frac{\pi}{6} = arc.(tang. = \sqrt{1/3}) = \sqrt{1/3}[1 - 1/3 \cdot 1/3 + 1/5 (1/3)^2 - 1/7 (1/3)^3 + \cdots],$$

folglich:

$$\pi = 6\sqrt{1/3}\,(1 - 1/9 + 1/45 - 1/189 + \cdots) = 3{,}1415926 \cdots$$

Auf gleiche Weise erhält man aus:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + 1/2\, x^2 + 3/8\, x^4 + 5/16\, x^6 + \cdots$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \partial x + 1/2 \int x^2 \partial x + 3/8 \int x^4 \partial x + 5/16 \int x^6 \partial x + \cdots,$$

d. i.:

$$\text{II.)}\quad arc.(sin. = x) = x + \frac{1\,x^3}{2.3} + \frac{1.3\,x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7} + \cdots,$$

z. B.:

$$\frac{\pi}{6} = arc.(sin. = 1/2) = 1/2\,(1 + 1/24 + 3/640 + 5/7168 + \cdots),$$

also:

$$\pi = 3 \,.\, \left\{\begin{matrix} 1{,}04167 \\ 0{,}00469 \\ 0{,}00070 \\ 0{,}00012 \end{matrix}\right\} = 3{,}1416 \,..$$

Ferner folgt durch successives Differenziiren, wenn man

$$sin.x = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$$

setzt:

$$\frac{\partial(sin.x)}{\partial x} = cos.x = A_1 + 2\,A_2 x + 3\,A_3 x^2 + 4\,A_4 x^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial(cos.x)}{\partial x} = -\,sin.x = 2\,A_2 + 2.3\,A_3 x + 3.4\,A_4 x^2 + \cdots$$

$$-\,\frac{\partial(sin.x)}{\partial x} = -\,cos.x = 2.3.A_3 + 2.3.4.A_4 x + \cdots$$

$$-\,\frac{\partial(cos.x)}{\partial x} = sin.x = 2.3.4.A_4 + \cdots$$

Nun ist aber für $x = 0$, $sin.x = 0$, und $cos.x = 1$, daher folgt aus der ersten Reihe $A_0 = 0$, aus der zweiten $A_1 = cos.\,0 = 1$, aus der dritten $A_2 = 0$, aus der vierten $A_3 = -\frac{1}{2.3}$, aus der fünften $A_4 = 0$ 2c.,

und wenn man diese Werthe in die fingirte Reihe einsetzt, die Sinusreihe:

III.) $sin. x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ ꝛc.

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

IV.) $cos. x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ ꝛc.,

ferner

V.) $tang. x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3.5.7.3} + \cdots$

und

VI.) $cotang. x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3.5.3} - \frac{2x^5}{3.5.7.9} -$ ꝛc.

(Vergl. „Ingenieur“, Seite 159.)

Anwendungen der Reductionsformel. Wenn man die Differenzialformel $\partial(uv) = u\partial v + v\partial u$, aus §. 8, integrirt, so erhält man den Ausdruck $uv = \int u\partial v + \int v\partial u$, und folgendes unter dem Namen „die Reductionsformel“ bekannte Integral: §. 28.

$$\int v\partial u = uv - \int u\partial v, \text{ oder}$$

$$\int \varphi(x)\partial f(x) = \varphi(x)f(x) - \int f(x)\partial\varphi(x).$$

Diese Regel kommt stets zur Anwendung, wenn das Integral $\int v\partial u = \int\varphi(x)\partial f(x)$ nicht, dagegen aber das Integral $\int u\partial v = \int f(x)\partial\varphi(x)$ bekannt ist.

Mittels der Reductionsformel läßt sich z. B. das Integral von folgendem Differenzial:

$$\partial y = \sqrt{1 + x^2}.\partial x$$

auf ein anderes bekanntes Integral zurückführen. Es ist hier

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}, \text{ also } \partial\varphi(x) = \frac{x\partial x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

und

$$f(x) = x, \text{ also } \partial f(x) = \partial x$$

zu setzen; folglich hat man:

$$\int\sqrt{1 + x^2}\partial x = x\sqrt{1 + x^2} - \int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

aber:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

daher folgt:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,\partial x = x\sqrt{1+x^2} - \int\sqrt{1+x^2}\,\partial x + \int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}},$$

oder:

$$2\int\sqrt{1+x^2}\,\partial x = x\sqrt{1+x^2} + \int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}}$$

und folglich:

I.) $$\int\sqrt{1+x^2}\,\partial x = {}^1/_2\,x\sqrt{1+x^2} + {}^1/_2\int\frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= {}^1/_2[x\sqrt{1+x^2} + Ln.(x+\sqrt{1+x^2})].$$

Ebenso:

II.) $$\int\sqrt{1-x^2}\,\partial x = {}^1/_2\,x\sqrt{1-x^2} + {}^1/_2\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= {}^1/_2[x\sqrt{1-x^2} + arc.(sin. = x)]$$

und

III.) $$\int\sqrt{x^2-1}\,\partial x = {}^1/_2\,x\sqrt{x^2-1} - {}^1/_2\int\frac{\partial x}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$= {}^1/_2[x\sqrt{x^2-1} - Ln.(x+\sqrt{x^2-1})].$$

Auch ist

$$\int(sin.x)^2\partial x = \int sin.x\,sin.x\,\partial x = -\int sin.x\,\partial(cos.x) = -sin.x\,cos.x$$
$$+\int cos.x\,\partial(sin.x) = -sin.x\,cos.x + \int(cos.x)^2\partial x$$
$$= -sin.x\,cos.x + \int[1-(sin.x)^2]\,\partial x,$$

daher folgt:

$$2\int(sin.x)^2\partial x = \int\partial x - sin.x\,cos.x,$$

und

IV.) $$\int(sin.x)^2\partial x = {}^1/_2(x - sin.x\,cos.x) = {}^1/_2(x - {}^1/_2\,sin.2x).$$

Ebenso ist

V.) $$\int(cos.x)^2\partial x = {}^1/_2(x + sin.x\,cos.x) = {}^1/_2(x + {}^1/_2\,sin.2x).$$

Ferner hat man

VI.) $$\int sin.x\,cos.x\,\partial x = {}^1/_4\int sin.2x\,\partial(2x) = -{}^1/_4\,cos.2x,$$

VII.) $$\int(tang.x)^2\partial x = tang.x - x,$$

und

VIII.) $$\int(cotg.x)^2\partial x = -(cotg.x + x).$$

Endlich ist

IX.) $$\int x\,sin.x\,\partial x = -x\,cos.x + \int cos.x\,\partial x = -x\,cos.x + sin.x,$$

X.) $$\int x e^x\partial x = \int x\,\partial(e^x) = x e^x - \int e^x\partial x = (x-1)e^x,$$

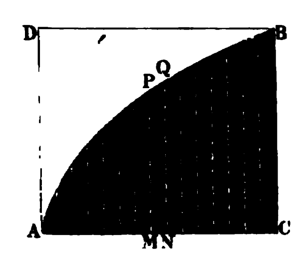
XI.) $$\int Log.nat.x\partial x = x\,Log.nat.x - \int x\frac{\partial x}{x} = x(Log.nat.x - 1)$$

und

XII.) $$\int (x\,Log.nat.x\,\partial x) = \frac{x^2}{2}\,Log.nat.x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{\partial x}{x}$$
$$= (Log.nat.x - {}^1/_2)\,\frac{x^2}{2}.$$

Quadraturen. Kommt es darauf an, eine Curve APB, Fig. 35, zu quadriren, d. i. den Inhalt der Fläche ABC, welche von dieser Curve APB und von ihren Coordinaten AC und BC begrenzt wird, zu bestimmen oder durch eine Function der Abscisse dieser Curve auszudrücken, so denken wir uns diesen Flächenraum durch unendlich viele Ordinaten MP, NQ u. s. w. in lauter streifenförmige Elemente, wie $MNQP$ von der constanten Breite $MN = \partial x$ und der veränderlichen Länge $MP = y$ zerlegt. Da sich nun der Inhalt eines solchen Flächenelementes §. 29.

Fig. 35.



$$\partial F = \left(\frac{MP + NQ}{2}\right)\cdot MN = (y + {}^1/_2\partial y)\partial x = y\partial x$$

setzen läßt, so findet man den Inhalt der ganzen Fläche F, indem man das Differenzial $y\partial x$ integrirt, also

$$F = \int y\,\partial x$$

setzt.

Z. B. für eine Parabel mit dem Parameter p ist $y^2 = px$, und daher folgt die Fläche derselben:

$$F = \int \sqrt{px}\,\partial x = \sqrt{p}\int x^{1/2}\partial x = \frac{\sqrt{p}\,.\,x^{3/2}}{3/2} = {}^2/_3\,x\sqrt{px} = {}^2/_3\,xy.$$

Die Parabelfläche ABC ist also zwei Drittel von dem sie umschließenden Rechtecke $ACBD$.

Diese Formel gilt auch für schiefwinkelige, unter einem Winkel $XAY = \alpha$ zusammenstoßende Coordinaten, z. B. für die Fläche ABC, Fig. 36 (a. f. S.), wenn nur statt $BC = y$, der Normalabstand $BN = y\,sin.\alpha$ eingesetzt wird; man hat also hier:

$$F = sin.\alpha\int y\,\partial x,$$

z. B. bei der Parabelfläche, wenn die Abscissenaxe AX einen Durchmesser

und die Ordinatenaxe AY eine Tangente der Parabel bildet, also $y^2 = p_1 x = \frac{p x}{sin.\, \alpha^2}$ ist (s. „Ingenieur" Seite 177):

$$F = {}^2/_3\, x y\, sin.\, \alpha,$$

d. i.:

Fläche $ABC = {}^2/_3$ Parallelogramm $ACBD$.

Fig. 36.

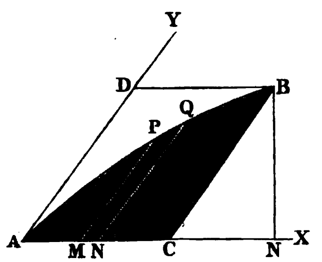
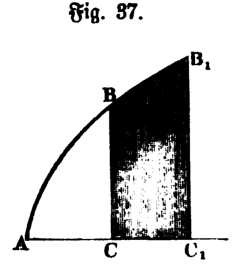


Fig. 37.



Für eine Fläche $BCC_1B_1 = F$, zwischen den Abscissen $AC_1 = c_1$ und $AC = c$, Fig. 37, ist nach §. 17:

$$F = \int_{c}^{c_1} y\, \partial x.$$

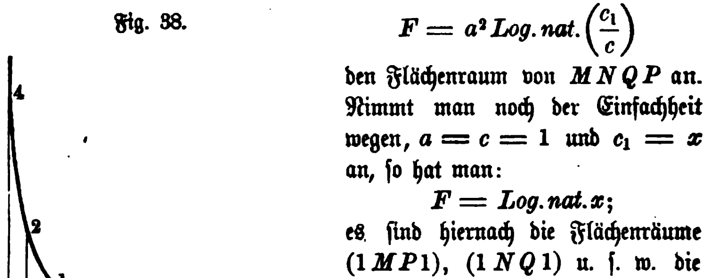
Z. B. für $y = \frac{a^2}{x}$ ist:

$$F = \int_{c}^{c_1} \frac{a^2 \partial x}{x} = a^2 (Log.nat. c_1 - Log.nat. c), \text{ d. i.:}$$

$$F = a^2\, Log.\, nat. \left(\frac{c_1}{c}\right).$$

Der Gleichung $\frac{a^2}{x}$ entspricht die oben in §. 3 kennen gelernte Curve PQ, Fig. 38, und wenn daher $AM = c$ und $AN = c_1$ ist, so giebt

Fig. 38.



$$F = a^2\, Log.\, nat. \left(\frac{c_1}{c}\right)$$

den Flächenraum von $MNQP$ an. Nimmt man noch der Einfachheit wegen, $a = c = 1$ und $c_1 = x$ an, so hat man:

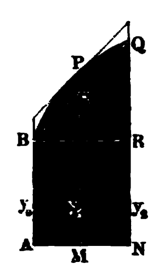
$$F = Log.\, nat.\, x;$$

es sind hiernach die Flächenräume $(1MP1)$, $(1NQ1)$ u. s. w. die natürlichen Logarithmen der Abscissen AM, AN u. s. w. Die Curve selbst ist eine sogenannte gleichseitige Hyperbel, in welcher die beiden

Halbaxen a und b einander gleich sind, folglich der Asymptotenwinkel $\alpha = 45^0$ ist, und die Geraden AX und AY, welchen sich die Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie zu erreichen, sind die Asymptoten derselben. Wegen dieses Zusammenhanges zwischen den Abscissen und den Flächenräumen werden die natürlichen Logarithmen sehr oft hyperbolische Logarithmen genannt.

Simpson'sche Regel. Man kann auch jedes Integral $\int y\partial x = \int \varphi(x)\partial x$ §. 30. gleich dem Inhalte einer Fläche F setzen, und wenn sich nun die Integration durch eine der bekannten Regeln nicht vollziehen läßt, so kann man es wenigstens annähernd finden, wenn man durch Anwendung der bekannten geometrischen Hülfsmittel den Inhalt des entsprechenden Flächenraumes ausmittelt.

Fig. 39.



Für eine Fläche $ABPQN$, Fig. 39, die durch die Grundlinie $AN = x$ und durch die drei gleich weit von einander abstehenden Ordinaten $AB = y_0$, $MP = y_1$ und $NQ = y_2$ bestimmt ist, hat man den trapezoidalen Theil:

$$ABQN = F_1 = (y_0 + y_2)\,\frac{x}{2}$$

und den segmentförmigen Theil $BPQSB$, wenn man BPQ als Parabel ansieht:

$$F_2 = {}^2/_3\, PS.BR = {}^2/_3\,(MP - MS).AN = {}^2/_3\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)x,$$

daher die ganze Fläche:

$$F = F_1 + F_2 = \left[{}^1/_2\,(y_0 + y_2) + {}^2/_3\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right)\right]x$$

$$= [{}^1/_6\,(y_0 + y_2) + {}^2/_3\,y_1]x = (y_0 + 4y_1 + y_2)\cdot\frac{x}{6}\cdot$$

Führt man eine mittlere Ordinate y ein, und setzt $F = xy$, so erhält man daher für dieselbe:

$$y = \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6}$$

Um nun hiernach den Inhalt einer Fläche $MABN$, Fig. 40 (a. f. S.), zu finden, welche über einer gegebenen Grundlinie $MN = x$ steht, und durch eine ungerade Anzahl von Ordinaten $y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots y_n$ bestimmt ist, durch diese also in eine gerade Anzahl von gleich breiten Streifen zerlegt wird, bedarf es nur einer wiederholten Anwendung der letzten Regel.

Es ist die Breite eines Streifens $= \frac{x}{n}$ und hiernach die Fläche des ersten Streifenpaares:

$$= \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{6} \cdot \frac{2x}{n},$$

Fig. 40.



sowie die des zweiten Streifenpaares:

$$= \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{6} \cdot \frac{2x}{n},$$

des dritten Streifenpaares:

$$= \frac{y_4 + 4y_5 + y_6}{6} \cdot \frac{2x}{n}, \text{ u. s. w.;}$$

also der Inhalt der ersten sechs Streifen oder ersten drei Streifenpaare, da hier $n = 6$ beträgt:

$$F = (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)\frac{x}{3.6}$$

$$= [y_0 + y_6 + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)]\frac{x}{18};$$

und es läßt sich nun leicht ermessen, daß der Inhalt einer in vier Streifenpaare zerlegten Fläche:

$$F = [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]\frac{y}{3.8},$$

und daß allgemein, der einer Fläche von n Streifen:

$$F = [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]\frac{x}{3n}$$

gesetzt werden kann.

Auch ist die mittlere Höhe einer solchen Fläche:

$$y = \frac{y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})}{3n},$$

wobei n stets eine gerade Zahl sein muß.

Diese unter dem Namen der Simpson'schen Regel bekannte Formel (s. „Ingenieur“ S. 190) findet ihre Anwendung bei der Bestimmung eines Integrales $\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x$, wenn man $x = c_1 - c$ in eine gerade Anzahl n gleicher Theile theilt, die Ordinaten

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$

$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right) \cdots \text{ bis } y_n = \varphi(c_1)$$

berechnet und diese Werthe in die Formel:

$$\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x$$

$$= [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]\,\frac{c_1 - c}{3n}$$

einsetzt.

Z. B. $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ giebt, da hier $c_1 - c = 2 - 1 = 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist, wenn man $n = 6$, also $\frac{x}{n} = \frac{c_1 - c}{6} = {}^1/_6$ annimmt:

$y_0 = \frac{1}{1} = 1{,}0000,\ y_1 = \frac{1}{{}^7/_6} = {}^6/_7 = 0{,}8571,\ y_2 = \frac{1}{{}^8/_6} = {}^3/_4 = 0{,}7500,$

$y_3 = \frac{1}{{}^9/_6} = {}^6/_9 = 0{,}6666,\ y_4 = \frac{1}{{}^{10}/_6} = 0{,}6000,\ y_5 = \frac{6}{11} = 0{,}5454$ und

$y_6 = 0{,}5000$, daher:

$y_0 + y_6 = 1{,}5000,\ y_1 + y_3 + y_5 = 2{,}0692$ und $y_2 + y_4 = 1{,}3500,$

und das gesuchte Integral:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = (1{,}5000 + 4.2{,}0692 + 2.1{,}3500).{}^1/_{18} = \frac{12{,}4768}{18} = 0{,}69315.$$

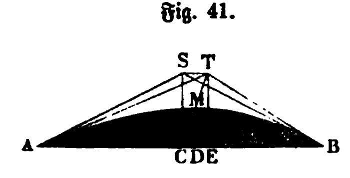
Nach §. 22, III, ist:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = Log.\,nat.\,2 - Log.\,nat.\,1 = 0{,}693147,$$

also die Uebereinstimmung die erwünschte.

Integration durch Annäherung. Im Folgenden soll noch eine andere Regel mitgetheilt werden, welche auch bei einer ungeraden Anzahl n von Streifen angewendet werden kann. Behandelt man ein sehr gedrücktes Segment AMB, Fig. 41, als ein Parabelsegment, so hat man nach §. 29 für den Inhalt desselben: §. 31.

Fig. 41.



$$F = {}^2/_3\,AB\,.\,MD,$$

oder, wenn AT und BT Tangenten an den Enden A und B sind, und deshalb $CT = 2\,CM$ ist: $F = {}^2/_3 \cdot \frac{AB\,.\,TE}{2} = {}^2/_3$ des Dreiecks $ATB = {}^2/_3$ des gleich hohen gleichschenkligen Dreiecks ASB, und also auch $= {}^2/_3\,AC\,.\,CS = {}^2/_3\,\overline{AC}^2\,.\,tang.\,SAC$. Der Winkel $SAC = SBC$

ist $= TAC + TAS = TBC - TBS$; setzt man daher die kleinen Winkel TAS und TBS einander gleich, so erhält man für dieselben:

$$TAS = TBS = \frac{TBC - TAC}{2}$$

und

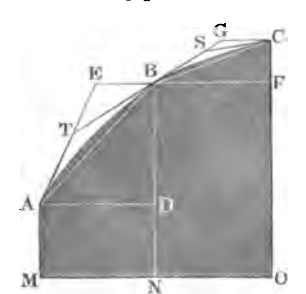
$$SAC = TAC + \frac{TBC - TAC}{2} = \frac{TAC + TBC}{2} = \frac{\delta + \varepsilon}{2},$$

wenn man die Tangentenwinkel TAC und TBC durch δ und ε bezeichnet. Da nun noch $AC = BC = {}^1/_2 AB = {}^1/_2$ Sehne s ist, so hat man:

$$F = {}^1/_6\, s^2 tang. \left(\frac{\delta + \varepsilon}{2}\right).$$

Diese Formel läßt sich nun auch auf das Flächenstück $MABN$, Fig. 42, anwenden, dessen Tangentenwinkel $TAD = \alpha$ und $TBE = \beta$ gegeben sind; setzt man nämlich noch den Sehnenwinkel $BAD = ABE = \sigma$, so hat man:

Fig. 42.



$$TAB = \delta = TAD - BAD$$
$$= \alpha - \sigma$$

und

$$TBA = \varepsilon = ABE - ABT$$
$$= \sigma - \beta,$$

daher:

$$\delta + \varepsilon = \alpha - \beta,$$

und das Segment über AB:

$$F = {}^1/_6\, s^2 tang. \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right),$$

oder, wegen der Kleinheit von $\alpha - \beta$:

$$F = \frac{s^2}{12}\, tang.(\alpha - \beta) = \frac{s^2}{12}\left(\frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\alpha\, tang.\beta}\right),$$

oder, da α und β nicht bedeutend von einander abweichen und deshalb in $tang.\alpha\, tang.\beta$ statt α und β der Mittelwerth σ eingesetzt werden kann:

$$F = {}^1/_{12}\, s^2 . \frac{tang.\alpha - tang.\beta}{1 + tang.\sigma^2} = {}^1/_{12}\, s^2 cos.\sigma^2 (tang.\alpha - tang.\beta),$$

und also statt $s\,cos.\sigma$ die Grundlinie $MN = x$ substituirt:

$$F = \frac{x^2}{12}\,(tang.\alpha - tang.\beta),$$

und daher das ganze Flächenstück $MABN$, wenn y_0 und y_1 dessen Ordinaten MA und NB bezeichnen:

$$F_1 = (y_0 + y_1)\,\frac{x}{2} + (tang.\alpha - tang.\beta)\,\frac{x^2}{12}$$

Stößt an das vorige Flächenstück noch ein anderes $NBCO$ mit einer gleichen Grundlinie $NO = x$, den Ordinaten BN und $CO = y_1$ und y_2 und den Tangentenwinkeln $SBF = \beta$ und $SCG = \gamma$, so hat man für dasselbe den Inhalt:

$$F_2 = (y_1 + y_2)\frac{x}{2} + (tang.\beta - tang.\gamma)\frac{x^2}{12},$$

und daher für das Ganze, da sich hier $-\,tang.\beta$ gegen $+\,tang.\beta$ hebt:

$$F = F_1 + F_2 = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \tfrac{1}{2}y_2)x + (tang.\alpha - tang.\gamma)\frac{x^2}{12}.$$

Für eine Fläche aus drei gleichbreiten Streifen ist ebenso, wenn α den Tangentenwinkel des Anfangs- und δ den des Endpunktes bezeichnet:

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \tfrac{1}{2}y_3)x + (tang.\alpha - tang.\delta)\frac{x^2}{12},$$

und allgemein für ein durch die Abscissen $\frac{x}{n}, \frac{2x}{n}, \frac{3x}{n} \cdots x$, die Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \cdots y_n$ und die Tangentenwinkel α_0 und α_n der Endpunkte bestimmtes Flächenstück:

$$F = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tang.\alpha_0 - tang.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2.$$

Ein Integral wird hiernach mittels der Formel:

$$\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1}\varphi(x)\,\partial x = (\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n)\frac{x}{n} + \tfrac{1}{12}(tang.\alpha_0 - tang.\alpha_n)\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

gefunden, wenn man $x = c_1 - c$ setzt:

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(c + \frac{x}{n}\right),\ y_2 = \varphi\left(c + \frac{2x}{n}\right),$$
$$y_3 = \varphi\left(c + \frac{3x}{n}\right)\cdots,\ y_n = \varphi\left(c + \frac{nx}{n}\right) = \varphi(c_1),$$

sowie $tang.\alpha_0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi(x) = \psi(c)$ und $tang.\alpha_n = \psi(c_1)$ berechnet, und diese Werthe in derselben einsetzt.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ hat man, wenn $n = 6$ angenommen wird, da hier $x = c_1 - c = 2 - 1$ und $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$ ist:

$$y_0 = \frac{1}{c} = 1,\; y_1 = \frac{1}{1 + {}^1/_6} = {}^6/_7,\; y_2 = {}^6/_8,\; y_3 = {}^6/_9,$$

$$y_4 = {}^6/_{10},\; y_5 = {}^6/_{11} \text{ und } y_6 = {}^6/_{12};$$

ferner, da sich $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial (x^{-1})}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ herausstellt:

$$tang.\,\alpha_0 = -{}^1/_1 = -1 \text{ und } tang.\,\alpha_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -{}^1/_4,$$

und daher ist:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = ({}^1/_2 + {}^6/_7 + {}^6/_8 + {}^6/_9 + {}^6/_{10} + {}^6/_{11} + {}^1/_4)\cdot {}^1/_6 + (-1 + {}^1/_4)\cdot {}^1/_{12}\cdot {}^1/_{36}$$

$$= \frac{4{,}1692}{6} - {}^3/_4 \cdot {}^1/_{12} \cdot {}^1/_{36} = 0{,}69487 - 0{,}00173 = 0{,}69314.$$

(Vergleiche das Beispiel des vorigen Artikels.)

§. 32. **Rectification krummer Linien.** Um eine Curve zu rectificiren, oder aus ihrer Gleichung $y = f(x)$ zwischen den Coordinaten $AM = x$ und $MP = y$, Fig. 43, eine Gleichung zwischen dem Bogen $AP = s$ und der einen oder der anderen der beiden Coordinaten abzuleiten, bestimmt man zunächst das Differenzial des Curvenbogens AP, und sucht dann hierzu das Integral. Läßt man x um $MN = PR = \partial x$ wachsen, so nimmt y um $RQ = \partial y$ und s um das Element $PQ = \partial s$ zu, und es ist, dem Pythagoräischen Lehrsatze zufolge:

Fig. 43.

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2,$$

d. i.:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2,$$

also:

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2},$$

und hiernach der Curvenbogen selbst:

$$s = \int \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}.$$

Z. B. für die Neil'sche Parabel (siehe §. 9 und Fig. 17), deren Gleichung $ay^2 = x^3$ ist, hat man: $2ay\partial y = 3x^2\partial x$, daher:

$$\partial y = \frac{3x^2\partial x}{2ay} \text{ und } \partial y^2 = \frac{9x^4\partial x^2}{4a^2y^2} = \frac{9x\partial x^2}{4a}$$

hiernach:

$$\partial s^2 = \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)\partial x^2,$$

und

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}\,\partial x = \frac{4a}{9} \int \left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^{1/2} \partial\left(\frac{9x}{4a}\right)$$

$$= \frac{4a}{9} \int u^{1/2}\,\partial u = \frac{4a}{9}\,{}^2/_3\,u^{3/2} = {}^8/_{27}\,a \sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3}.$$

Um die hierzu nöthige Constante zu finden, wollen wir s mit x und y zugleich anfangen lassen. Wir erhalten dann:

$$0 = {}^8/_{27}\,a\sqrt{1^3} + Con., \text{ also } Con. = -\,{}^8/_{27}\,a$$

und daher

$$s = {}^8/_{27}\,a\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9x}{4a}\right)^3} - 1\right],$$

z. B. für das Stück AP, dessen Abscisse $x = a$ ist:

$$s = {}^8/_{27}\,a\left[\sqrt{({}^{13}/_4)^3} - 1\right] = 1{,}736\,a.$$

Führt man noch den Tangentenwinkel $RPQ = MTP = \alpha$ (Fig. 43) ein, so hat man auch:

$$QR = PQ\,.\,sin.\,RPQ \text{ und } PR = PQ\,cos.\,RPQ,$$

d. i.:

$$\partial y = \partial s\,sin.\,\alpha \text{ und } \partial s = \partial s\,cos.\,\alpha,$$

und also außer $tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ (s. §. 6) auch

$$sin.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial s} \text{ und } cos.\,\alpha = \frac{\partial x}{\partial s};$$

sowie noch

$$s = \int \sqrt{1 + tang.\,\alpha^2}\,.\,\partial x = \int \frac{\partial x}{cos.\,\alpha} = \int \frac{\partial y}{sin.\,\alpha}.$$

Ist nun die Gleichung zwischen zwei der Größen x, y, s und α gegeben, so kann man hiernach auch Gleichungen zwischen je zwei anderen dieser Größen finden. Ist z. B. $cos.\,\alpha = \frac{s}{\sqrt{c^2 + s^2}}$, so hat man:

$$\partial x = \partial s\,cos.\,\alpha = \frac{s\,\partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}}$$

und

$$x = \int \frac{s\,\partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = {}^1/_2 \int \frac{2s\,\partial s}{\sqrt{c^2 + s^2}} = {}^1/_2 \int \frac{\partial u}{\sqrt{u}} = {}^1/_2 \int u^{-1/2}\partial u = u^{1/2}$$

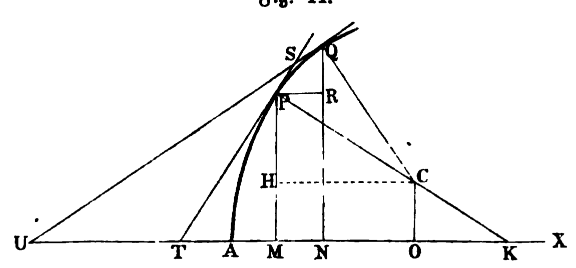
$$= \sqrt{c^2 + s^2} + Con.,$$

und wenn nun x und s zugleich Null sind:

$$x = \sqrt{c^2 + s^2} - c.$$

§. 33. **Krümmungshalbmesser einer Curve.** Eine Gerade winkelrecht zur Tangente PT, Fig. 44, ist auch normal zur Berührungsstelle P der

Fig. 44.



Curve, weil die Tangente die Richtung dieser Stelle angiebt. Das Stück PK dieser Linie vom Berührungspunkte P bis zur Abscissenaxe heißt Normale schlechtweg, und die Projection MK desselben in der Abscissenaxe Subnormale. Für die letztere hat man, da der Winkel MPK dem Tangentenwinkel $PTM = \alpha$ gleich ist:

$$MK = MP . tang. \alpha,$$

d. i.:

$$\text{die } Subnormale = y\, tang. \alpha = y \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Da für das Curvensystem $y = x^m$, $tang. \alpha = m x^{m-1}$ ist, so folgt hier die $Subnormale = mx^m . x^{m-1} = mx^{2m-1} = \frac{my^2}{x}$, und für die gemeine Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man

$$\text{die } Subnormale = y \frac{p}{2y} = \frac{p}{2};$$

also constant.

Errichtet man ferner in einem zweiten, der Stelle P unendlich nahen Punkte Q eine andere Normallinie QC, so erhält man in dem Durchschnittspunkte zwischen beiden Linien das Centrum C für einen durch beide Berührungspunkte P und Q zu beschreibenden Kreis, den sogenannten Krümmungskreis, und es sind die Stücke CP und CQ der Normallinien die Halbmesser dieses Kreises oder die sogenannten Krümmungshalbmesser. Jedenfalls ist dieser Kreis derjenige unter allen durch P und Q zu legenden Kreisen, welcher sich am meisten an das Curvenelement PQ anschmiegt, und deshalb anzunehmen, daß sein Bogen PQ mit dem Curvenelemente PQ zusammenfalle.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ durch r, den Curvenbogen AP durch s, also sein Element PQ durch ∂s, und den Tangentenwinkel oder Bogen von PTM durch α, also sein Element $SUM - STM$, d. i. $- UST = - PCQ$, durch $\partial \alpha$, so haben wir einfach,

da $\overline{PQ} = CP$. Bogen des Winkels PCQ ist, $\partial s = - r\partial\alpha$, und folglich den Krümmungshalbmesser: $r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}$.

Gewöhnlich läßt sich α nur mittels der Coordinatengleichung bestimmen, indem man setzt:

$$tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nun ist aber noch:

$$\partial\, tang.\alpha = \frac{\partial \alpha}{(cos.\alpha)^2} \text{ und } cos.\alpha = \frac{\partial x}{\partial s},$$

daher hat man:

$$\partial\alpha = (cos.\alpha)^2 . \partial\, tang.\alpha = \frac{\partial x^2}{\partial s^2} \cdot \partial\, tang.\alpha,$$

und den Krümmungshalbmesser

$$r = -\frac{\partial s}{(cos.\alpha)^2 \partial\, tang.\alpha} = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial\, tang.\alpha}.$$

Für eine convexe Curve ist $r = +\frac{\partial s}{\partial \alpha} = +\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial\, tang.\alpha}$, und für einen Wendepunkt, $r = \infty$.

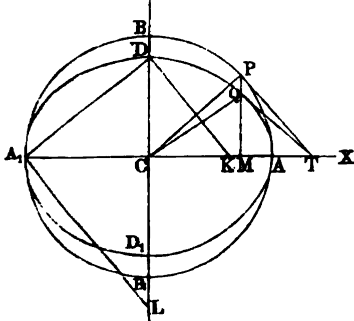
Für die Coordinaten $AO = u$ und $OC = v$ des Krümmungsmittelpunktes C ist

$u = AM + HC = x + CP sin.\, CPH$, d. i. $u = x + r sin.\alpha$,

sowie

$v = OC = MP - HP = y - CP cos.\, CPH$, d. i. $v = y - r cos.\alpha$.

Fig. 45.



Die stetige Folge der Krümmungsmittelpunkte giebt eine Curve, welche die Evolute von AP genannt, und deren Lauf durch die Coordinaten u und v bestimmt wird.

Wenn man die Ellipse ADA_1D_1, Figur 45, mit einem Kreise ABA_1B_1 in Verbindung bringt, so kann man die Coordinaten $CM = x$ und $MQ = y$ derselben durch den Centriwinkel $PCB = \beta$ des Kreises ausdrücken. Es ist nämlich:

$$x = CP sin.\, CPM = CP sin.\, BCP = a\, sin.\beta$$

und

$$y = MQ = \frac{b}{a} MP = \frac{b}{a} CP cos.\, CPM = b\, cos.\beta.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\partial x = a \cos.\beta \partial\beta \text{ und } \partial y = - b \sin.\beta \partial\beta,$$

folglich für den Tangentenwinkel $QTX = \alpha$ der Ellipse:

$$tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{b \sin.\beta}{a \cos.\beta} = - \frac{b}{a} tang.\beta,$$

also für dessen Nebenwinkel $QTC = \alpha_1 = 180^0 - \alpha$:

$$tang.\alpha_1 = \frac{b}{a} tang.\beta \text{ und } cotg.\alpha_1 = \frac{a}{b} cotg.\beta.$$

Hiernach ist die Subtangente der Ellipse:

$$MT = MQ cotg. MTQ$$

$$= y cotg.\alpha_1 = \frac{ay}{b} cotg.\beta = y_1 cotg.\beta,$$

wenn y_1 die Ordinate MP des Kreises bezeichnet. Da bei dem letzteren die Tangente PT rechtwinkelig auf dem Halbmesser CP steht, so ist auch $PTM = PCB = \beta$, und daher die Subtangente desselben ebenfalls $MT = MP cotg. MTP = y_1 cotg.\beta$. Es haben also die beiden Punkte P und Q des Kreises und der Ellipse, welche einerlei Abscisse angehören, eine und dieselbe Subtangente MT.

Ferner ist für das elliptische Bogenelement:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = (a^2 \cos.\beta^2 + b^2 \sin.\beta^2) \partial\beta^2,$$

und das Differenzial von $tang.\alpha$, d. i.:

$$\partial tang.\alpha = - \frac{b}{a} \partial tang.\beta = - \frac{b}{a} \frac{\partial\beta}{\cos.\beta^2},$$

daher folgt der Krümmungshalbmesser der Ellipse:

$$r = - \frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial tang.\alpha} = \frac{(a^2 \cos.\beta^2 + b^2 \sin.\beta^2)^{3/2}}{a^2 \cos.\beta^2 \cdot \frac{b}{a \cos.\beta^2}}$$

$$= \frac{(a^2 \cos.\beta^2 + b^2 \sin.\beta^2)^{3/2}}{ab}.$$

Z. B. für $\beta = 0$, also $\sin.\beta = 0$ und $\cos.\beta = 1$, folgt der größte Krümmungshalbmesser:

$$r_m = \frac{a^3}{ab} = \frac{a^2}{b},$$

und dagegen für $\beta = 90^0$, also $\sin.\beta = 1$ und $\cos.\beta = 0$, ergiebt sich der kleinste Krümmungshalbmesser:

$$r_n = \frac{b^3}{ab} = \frac{b^2}{a}.$$

Der erstere Werth von r entspricht der Stelle D, und der letztere dem

Punkte A; beide sind durch die Axenstücke CL und CK bestimmt, welche die in den Endpunkten A_1 und D auf der Sehne $A_1 D$ errichteten Perpendikel von C aus auf beiden Axen abschneiden.

Zusammengesetzte Functionen. Viele Functionen, welche in der Anwendung auf die Praxis vorkommen, lassen sich aus den oben kennen gelernten Hauptfunctionen: §. 34.

$$y = x^m,\ y = e^x \text{ und } y = sin.x,\ y = cos.x \text{ u. s. w.}$$

zusammensetzen, und es sind daher auch ihre Eigenschaften, betreffend die Tangentenlage, Quadratur, Krümmungshalbmesser u. s. w. leicht mit Hülfe der vorstehenden Lehren aufzusuchen, sowie auch die ihnen entsprechenden Curven zu construiren, wie folgendes Beispiel zeigen wird.

Für die Curve, welche der Gleichung:

$$y = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right) = x^2 - {}^1/_3 x^3$$

entspricht, ist

$$\partial y = 2x\partial x - x^2\partial x,$$

folglich

$$tang.\alpha = 2x - x^2 = x(2 - x).$$

Da diese Tangente für $x = 0$ und $x = 2$, Null ausfällt, so hat sie in den Punkten, welche diesen Abscissenwerthen zukommen, die Richtung der Abscissenaxe. Ferner ist:

$$\partial\, tang.\alpha = 2\partial x - 2x\partial x = 2(1 - x)\partial x,$$

wonach also für

$$x = 0,\ \partial\, tang.\alpha = +\ 2\partial x,$$

sowie für

$$x = 2,\ \partial\, tang.\alpha = -\ 2\partial x$$

ausfällt, und daher die Ordinate des ersten Punktes ein Minimum, dagegen die des zweiten Punktes ein Maximum ist. Setzt man $\partial\, tang.\alpha = 0$, so ergeben sich dadurch die Coordinaten $x = 1$ und $y = {}^2/_3$ des Wendepunktes, in welchem sich das concave Curvenstück an das convexe anschließt.

Ferner ist für das Curvenelement ∂s:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 + x^2(2 - x)^2\partial x^2 = [1 + x^2(2 - x)^2]\partial x^2,$$

und daher die Krümmungshalbmesser der Curve:

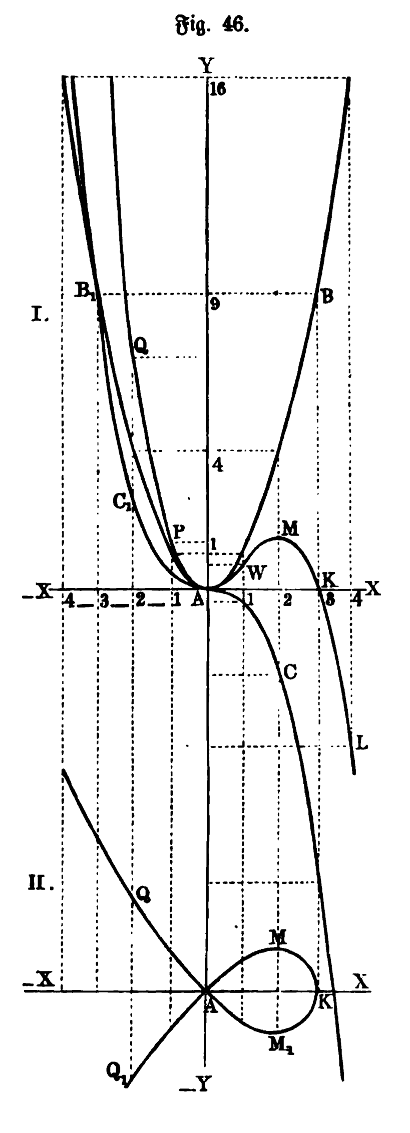
$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2\partial tang.\alpha} = -\frac{[1 + x^2(2 - x)^2]^{3/2}}{2(1 - x)},$$

z. B. für $x = 0$, $r = \frac{-1}{2} = -{}^1/_2$, für $x = 1$, $r = -\frac{2^{3/2}}{0} = \infty$,

für $x = 2$, $r = \frac{-1}{-2} = +{}^1/_2$, für $x = 3$, $r = {}^1/_4 . 10^{3/2} = +7{,}906$,

Die entsprechende Curve ist in Fig. 46 vor Augen geführt, worin A den Ursprung der Coordinaten, und $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ die Coordinatenaxen darstellen. Dem ersten Theil $y_1 = x^2$ der Gleichung entspricht die Parabel $B A B_1$, welche sich von A aus zu beiden Seiten der Axe $A Y$ symmetrisch hinzieht, dem zweiten Theil $y_2 = -\,{}^1/_3\,x^3$ gehört dagegen die Curve $C A C_1$ an, welche sich auf der rechten Seite von $Y\overline{Y}$ unter, und auf der linken Seite von $Y\overline{Y}$ über der Abscissenaxe $X\overline{X}$ hinzieht, und sich dabei immer mehr und mehr von $X\overline{X}$ entfernt, je weiter sie von $Y\overline{Y}$ abrückt. Um für eine gegebene Abscisse x den entsprechenden Punkt der Curve $y = x^2 - {}^1/_3\,x^3$ zu bestimmen, kommt es nur darauf an, die dieser Abscisse zugehörigen Ordinaten der ersten Curven algebraisch zu addiren. Da z. B. für $x = 1$, $y_1 = 1$ und $y_2 = -\,{}^1/_3$ ist, folgt die entsprechende Ordinate des Punktes W, $y = y_1 + y_2 = 1 - {}^1/_3 = {}^2/_3$, ferner, da für $x = 2$, $y_1 = 4$ und $y_2 = -\,{}^8/_3$ ist, so folgt die Coordinate des Punktes M, $y = 4 - {}^8/_3 = {}^4/_3$, ebenso ergiebt sich für $x = 3$, $y = y_1 + y_2 = 9 - 9 = 0$, für $x = 4$, $y = 16 - {}^{64}/_3 = -\,{}^{16}/_3$, für $x = -1$, $y = 1 + {}^1/_3 = {}^4/_3$, für $x = -2$, $y = 4 + {}^8/_3 = {}^{20}/_3$ u. s. w., und man

Fig. 46.



ersieht, daß die letzte Curve von A aus rechts den Lauf $AWMKL\ldots$ hat, wobei sie anfangs über der Abscisse $AK = 3$ hinläuft, sich aber von da aus weiter bis ins Unendliche unter $X\overline{X}$ hinabzieht, und daß sie von A aus links nur einen ins Unendliche aufsteigenden Zweig $APQ\ldots$ bildet. Auch ist nach dem Obigen, W ein Wende-, sowie M ein Maximalpunkt der Curve. Während die Curve in A und M die Richtung von $X\overline{X}$ hat, steigt sie in W unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad auf, weil für denselben $tang.\alpha = x(2-x) = 1$ ist, dagegen ist für den Neigungswinkel in K, $tang.\alpha = -3$, folglich dieser Winkel selbst $\alpha = 71^0 34'$ u. s. w.

Die Quadratur der Curve ist durch das Integral

$$F = \int y \partial x = \int (x^2 - {}^1\!/_3 x^3) \partial x = \int x^2 \partial x - {}^1\!/_3 \int x^3 \partial x$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} = \frac{x^3}{3}\left(1 - \frac{x}{4}\right) \text{ vollzogen.}$$

Hiernach folgt z. B. für das Flächenstück $AWMK$ über $AK = 3$, der Inhalt $F = \frac{3^3}{3}(1 - {}^3\!/_4) = {}^9\!/_4$, und dagegen der Inhalt des Flächenstückes $\overline{3L4}$, über dem Abscissenstücke $\overline{34}$, $F_1 = \frac{4^3}{3}(1 - {}^4\!/_4) - \frac{3^3}{3}(1 - {}^3\!/_4) = 0 - {}^9\!/_4 = -{}^9\!/_4$.

Um endlich noch die Länge eines Curvenstückes, z. B. von AWM, zu finden, setzen wir

$$s = \int \sqrt{1 + x^2(2-x)^2}\, \partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\, \partial x,$$

und bringen die im §. 30 abgehandelte Integrationsmethode zur Anwendung. Es ist hier $c = 0$, und $c_1 = 2$; nimmt man $n = 4$ an, so folgt $\partial x = \frac{c_1 - c}{n} = \frac{2-0}{4} = {}^1\!/_2$, und setzt man nun für x nach und nach die Werthe 0, ${}^1\!/_2$, 1, ${}^3\!/_2$ und 2 in die Function

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2(2-x)^2}$$

ein, so erhält man die Werthe:

$$\varphi(0) = \sqrt{1} = 1,$$
$$\varphi({}^1\!/_2) = \sqrt{1 + {}^9\!/_{16}} = {}^5\!/_4,\ \varphi(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$
$$\varphi({}^3\!/_2) = \sqrt{1 + {}^9\!/_{16}} = {}^5\!/_4 \text{ und } \varphi(2) = \sqrt{1} = 1,$$

und daher die Länge des Bogens AWM:

$$s = \left(\varphi(0) + 4\varphi({}^1\!/_2) + 2\varphi(1) + 4\varphi({}^3\!/_2) + \varphi(2)\right)\frac{c_1 - c}{3\,.\,4}$$
$$= (1 + 5 + 2{,}828 + 5 + 1)\,.\,{}^1\!/_6 = 2{,}471.$$

Mittels der Curve $y = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$ läßt sich nun auch leicht der Lauf der Curve $y = x\sqrt{1 - \frac{x}{3}}$ angeben, denn wenn man aus den Coordinatenwerthen der ersteren die Quadratwurzeln auszieht, ergeben sich die entsprechenden Coordinaten der letzteren. Da die Quadratwurzeln aus negativen Zahlen imaginär sind, so erstreckt sich diese Curve nicht über den Punkt K hinaus, und da jede Quadratwurzel aus positiver Zahl zwei gleich große entgegengesetzte Werthe hat, so läuft die neue Curve (II.) in zwei symmetrischen Zweigen $QAMK$ und Q_1AM_1K zu beiden Seiten der Abscissenaxe $X\overline{X}$ hin.

§. 35. **Functionswerth $\frac{0}{0}$.** Wenn der Quotient $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ aus zwei Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für einen gewissen Werth a von x den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ annimmt, welches stets eintritt, wenn, wie z. B. in $y = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, Zähler und Nenner eines Bruches einen Factor $x - a$ gemeinschaftlich haben, so kann man den wirklichen Werth desselben finden, wenn man Zähler und Nenner jeden für sich differenziirt.

Wächst x um das Element ∂x und entsprechend y um das Element ∂y, so erhält man:

$$y + \partial y = \frac{\varphi(x) + \partial\varphi(x)}{\psi(x) + \partial\psi(x)}.$$

Nun ist aber für $x = a$:

$$\varphi(x) = 0 \text{ und } \psi(x) = 0,$$

daher hat man für diesen Fall:

$$y + \partial y = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)},$$

oder, da ∂y als unendlich kleine Größe gegen y verschwindet:

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial\psi(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

wo $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ die Differenzialquotienten oder sogenannten zweiten Ableitungen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnen.

Stellt sich $y = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ wieder $= \frac{0}{0}$ heraus, so kann man von Neuem differenziiren, und

$$y = \frac{\partial\varphi_1(x)}{\partial\psi_1(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} \text{ setzen u. s. w.}$$

Auf gleiche Weise sind auch die unbestimmten Ausdrücke $y = \frac{\infty}{\infty}$ und

$0 \,.\, \infty$ u. s. w. zu behandeln, da $\infty = \frac{1}{0}$, folglich $\frac{\infty}{\infty}$ und $0 \,.\, \infty = \frac{0}{0}$ gesetzt werden können. Z. B.:

$y = \frac{3x^3 - 7x^2 - 8x + 20}{5x^3 - 21x^2 + 24x - 4}$ giebt für $x = 2$, $\frac{0}{0}$; es ist daher auch erlaubt,

$$y = \frac{\partial(3x^3 - 7x^2 - 8x + 20)}{\partial(5x^3 - 21x^2 + 24x - 4)} = \frac{9x^2 - 14x - 8}{15x^2 - 4x + 24}$$

zu setzen.

Nun fällt aber für $x = 2$, y wieder $= \frac{0}{0}$ aus, daher setzt man von Neuem:

$$y = \frac{\partial(9x^2 - 14x - 8)}{\partial(15x^2 - 42x + 24)} = \frac{18x - 14}{30x - 42} = \frac{9x - 7}{15x - 21} = \frac{11}{9}.$$

Es ist aber auch wirklich der Factor $y - 2$ zwei Mal in dem Zähler und Nenner der gegebenen Function enthalten. Dividirt man beide durch $x - 2$, so erhält man:

$$y = \frac{3x^2 - x - 10}{5x^2 - 11x + 2},$$

und wiederholt man diese Division im letzten Werthe, so stellt sich

$$y = \frac{3x + 5}{5x - 1},$$

also $x = 2$ gesetzt: $y = \frac{11}{9}$ heraus.

Ferner: $y = \frac{a - \sqrt{a^2 - x}}{x}$ giebt für $x = 0$, ebenfalls $\frac{0}{0}$.

Nun ist aber:

$$\partial(a - \sqrt{a^2 - x}) = -\partial(a - x)^{1/2} = \frac{1/2\,\partial x}{\sqrt{a^2 - x}},$$

daher folgt für diesen Fall: $y = \frac{1/2}{\sqrt{a^2 - x}} = \frac{1}{2a}$.

Ferner in $y = \frac{Ln\,x}{\sqrt{1 - x}}$, $x = 1$ gesetzt, folgt $y = \frac{0}{0}$; nun ist aber:

$$\partial\, Ln.x = \frac{\partial x}{x} \text{ und } \partial \sqrt{1 - x} = -\frac{\partial x}{2\sqrt{1 - x}},$$

daher folgt $y = -\frac{2\sqrt{1 - x}}{x} = \frac{2\,.\,0}{1} = 0$.

Endlich:

$$y = \frac{1 - sin.x + cos.x}{-1 + sin.x + cos.x} \text{ giebt für } x = \frac{\pi}{2} \; (90^0),$$

$$y = \frac{1 - 1 + 0}{-1 + 1 + 0} = \frac{0}{0};$$

daher ist auch

$$y = \frac{\partial(1 - sin.x + cos.x)}{\partial(-1 + sin.x + cos.x)} = \frac{-cos.x - sin.x}{cos.x - sin.x}$$

$$= \frac{-0 - 1}{0 - 1} = 1$$

zu setzen.

§. 36. **Methode der kleinsten Quadrate.** Wenn für eine Function $y = \alpha u + \beta v$ eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der Variablen u, v und y durch Beobachtung oder Messung gefunden worden ist, so kann man nach denjenigen Werthen der Constanten α und β fragen, welche von den kleinen zufälligen und ungesetzmäßigen Beobachtungs- oder Messungsfehlern möglichst befreit sind und daher auch den Zusammenhang zwischen den Größen u, v und y, wovon u und v auch bekannte Functionen einer und derselben Variablen x bedeuten können, möglichst genau ausdrücken. Unter allen Regeln, welche man zur Beantwortung dieser Frage, d. i. zur Ausmittelung der möglich oder wahrscheinlich richtigsten Werthe der Constanten anwendet, ist die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate die allgemeinste und wissenschaftlich begründetste.

Sind

$$\left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & y_1 \\ u_2, & v_2, & y_2 \\ u_3, & v_3, & y_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n, & v_n, & y_n \end{matrix}\right\}$$

die der Function $y = \alpha u + \beta v$ entsprechenden Resultate der Beobachtung, so hat man für die Beobachtungsfehler und deren Quadrate folgende Werthe:

$$\left\{\begin{matrix} z_1 = y_1 - (\alpha u_1 + \beta v_1) \\ z_2 = y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2) \\ z_3 = y_3 - (\alpha u_3 + \beta v_3) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_n = y_n - (\alpha u_n + \beta v_n) \end{matrix}\right\}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_1^2 = y_1^2 - 2\alpha u_1 y_1 - 2\beta v_1 y_1 + \alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\beta u_1 v_1 + \beta^2 v_1^2 \\
\varepsilon_2^2 = y_2^2 - 2\alpha u_2 y_2 - 2\beta v_2 y_2 + \alpha^2 u_2^2 + 2\alpha\beta u_2 v_2 + \beta^2 v_2^2 \\
\varepsilon_3^2 = y_3^2 - 2\alpha u_3 y_3 - 2\beta v_3 y_3 + \alpha^2 u_3^2 + 2\alpha\beta u_3 v_3 + \beta^2 v_3^2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\varepsilon_n^2 = y_n^2 - 2\alpha u_n y_n - 2\beta v_n y_n + \alpha^2 u_n^2 + 2\alpha\beta u_n v_n + \beta^2 v_n^2
\end{array}\right\},$$

und erhält nun für die Summe der Fehlerquadrate, wenn man sich der Abkürzung wegen des Summationszeichens Σ bedient, um eine Summation gleichartiger Größen anzuzeigen, also $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \cdots + y_n^2 = \Sigma(y^2)$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + \cdots + v_n y_n = \Sigma(vy)$ setzt, u. s. w.:

$$\Sigma(\varepsilon^2) = \Sigma(y^2) - 2\alpha\Sigma(uy) - 2\beta\Sigma(vy) + \alpha^2\Sigma(u^2) + 2\alpha\beta\Sigma(uv) + \beta^2\Sigma(v^2).$$

In dieser Gleichung sind natürlich außer der als Abhängigvariablen zu behandelnden Fehlerquadratsumme $\Sigma(\varepsilon^2)$ nur die hier als Urvariable anzusehenden Constanten α und β der Function $y = \alpha u + \beta v$ unbekannt. Die Methode der kleinsten Quadrate fordert nun, sowohl α als auch β so zu wählen, daß die Quadratsumme $\Sigma(\varepsilon^2)$ zum Minimum werde; und deshalb müssen wir die gewonnene Function für $\Sigma(\varepsilon^2)$ ein Mal in Beziehung auf α und ein Mal in Beziehung auf β differenziiren, und jeden der sich herausstellenden Differenzialquotienten von $\Sigma(\varepsilon^2)$ gleich Null setzen. Dadurch stößt man auf folgende zwei Bestimmungsgleichungen für α und β:

$$-\Sigma(uy) + \alpha\Sigma(u^2) + \beta\Sigma(uv) = 0,$$
$$-\Sigma(vy) + \beta\Sigma(v^2) + \alpha\Sigma(uv) = 0;$$

deren Auflösung auf folgende Ausdrücke führt:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(uy) - \Sigma(uv)\Sigma(vy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}$$

und

$$\beta = \frac{\Sigma(u^2)\Sigma(vy) - \Sigma(uv)\Sigma(uy)}{\Sigma(u^2)\Sigma(v^2) - \Sigma(uv)\Sigma(uv)}$$ (vergl. „Ingenieur“ S. 77).

Diese Formeln gehen für eine Function $y = \alpha + \beta v$, da hier $u = 1$, also $\Sigma(uv) = \Sigma(v)$, $\Sigma(uy) = \Sigma(y)$ und $\Sigma(u^2) = 1 + 1 + 1 + \cdots = n$, d. i. die Anzahl der Gleichungen oder Beobachtungen ist, in folgende über:

$$\alpha = \frac{\Sigma(v^2)\Sigma(y) - \Sigma(v)\Sigma(vy)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)},$$

$$\beta = \frac{n\Sigma(vy) - \Sigma(v)\Sigma(y)}{n\Sigma(v^2) - \Sigma(v)\Sigma(v)}.$$

Für die noch einfachere Function $y = \beta v$, wo $\alpha =$ Null ist, erhält man:

$$\beta = \frac{\Sigma(vy)}{\Sigma(v^2)},$$

und endlich für den einfachsten Fall $y = \alpha$, wo es sich also um die Ausmittelung des wahrscheinlichsten Werthes einer einzigen Größe handelt, ist

$$\alpha = \frac{\Sigma(y)}{n},$$

also dieser Werth das arithmetische Mittel aus allen durch Messungen oder Beobachtungen gefundenen Werthen.

Beispiel. Um das Gesetz einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, d. i. deren Anfangsgeschwindigkeit c und Beschleunigungsmaß p kennen zu lernen, hat man die verschiedenen Zeiten t_1, t_2, t_3 u. s. w. entsprechenden Räume oder Wege s_1, s_2, s_3 u. s. w. gemessen, und dabei Folgendes gefunden:

Zeiten	0	1	3	5	7	10 Sec.
Räume	0	5	20	38	58½	101 Fuß

Ist nun $s = ct + \frac{pt^2}{2}$ das dieser Bewegung zu Grunde liegende Bewegungsgesetz, so handelt es sich um die Ermittelung der Constanten c und p. Setzt man in die obigen Formeln $u = t$ und $v = t^2$, sowie $\alpha = c$, $\beta = \frac{p}{2}$ und $y = s$, so erhält man zur Berechnung von c und p folgende Formeln:

$$c = \frac{\Sigma(t^4)\,\Sigma(st) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(st^2)}{\Sigma(t^2)\,\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(t^3)}$$

und

$$\frac{p}{2} = \frac{\Sigma(t^2)\,\Sigma(st^2) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(st)}{\Sigma(t^2)\,\Sigma(t^4) - \Sigma(t^3)\,\Sigma(t^3)},$$

wonach sich folgende Rechnung führen läßt:

t	t^2	t^3	t^4	s	st	st^2
1	1	1	1	5	5	5
3	9	27	81	20	60	180
5	25	125	625	38	190	950
7	49	343	2401	58,5	409,5	2866,5
10	100	1000	10000	101	1010	10100
Summen	184 $= \Sigma(t^2)$	1496 $= \Sigma(t^3)$	13108 $= \Sigma(t^4)$	222,5 $= \Sigma(s)$	1674,5 $= \Sigma(st)$	14101,5 $= \Sigma(st^2)$

Hieraus bestimmt sich:

$$c = \frac{13108 . 1674{,}5 - 1496 . 14101{,}5}{184 . 13108 - 1496 . 1496} = \frac{853502}{173856} = 4{,}909 \text{ Fuß und}$$

$$\tfrac{1}{2} p = \frac{184 . 14101{,}5 - 1496 . 1674{,}5}{184 . 13108 - 1496 . 1496} = \frac{89624}{173856} = 0{,}5155 \text{ Fuß},$$

und daher folgende Formel für die beobachtete Bewegung:

$$s = 4{,}909 t + 0{,}5155 . t^2.$$

Nach dieser Formel hat man:

für die Zeiten	0	1	3	5	7	10 Sec.
die Räume	0	5,42	19,36	37,43	59,62	100,64 Fuß

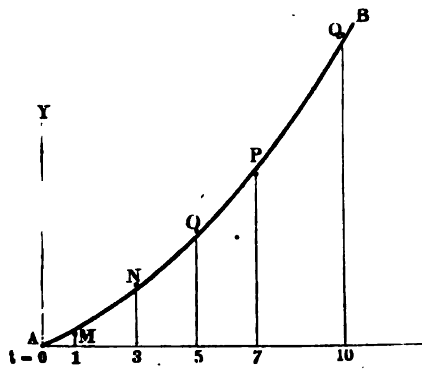


Fig. 47.

Wenn man die Zeiten (t) als Abscissen und sowohl die beobachteten als auch die berechneten Wege (s) als Ordinaten aufträgt, so läßt sich durch die Endpunkte der berechneten Coordinaten eine Curve AB, Fig. 47, legen, welche sich zwischen den durch die beobachteten Coordinaten bestimmten Punkten M, N, O, P, Q so hinzieht, daß die Quadratsumme der Abweichungen derselben von diesen Punkten beiderseits möglichst klein ausfallen.

Anwendung auf die praktische Geometrie. Sind nicht allein die einzelnen Werthe, sondern auch die Aggregate einer Reihe von Größen w, x, y, z.. durch Messung gefunden worden, so lassen sich die wahrscheinlichsten Werthe derselben durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen, wie in folgenden Beispielen gezeigt wird. §. 37.

1) Man hat durch Nivelliren gefunden:

die Höhe von B über A, $= a$, von C über A, $= b$,
" " " C " B, $= c$, " D " B, $= d$,
" " " D " C, $= e$, " E " B, $= f$,
sowie " " " E " D, $= g$ (Fig. 48 a. f. S.),

und fragt nun nach den wahrscheinlichsten Höhen w, x, y und z der Punkte B, C, D, E über A?

Es sollte sein:

$w = a, x = b, x - w = c, y - w = d, y - x = e, z - w = f$ und $z - y = g$;

daher sind die Fehler:

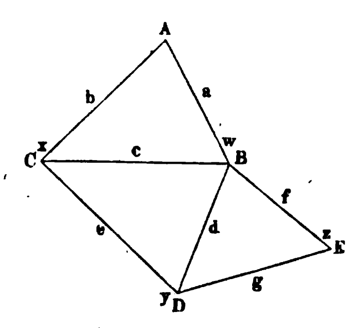
$$w - a,\ x - b,\ x - w - c,\ y - w - d,\ y - x - e,$$
$$z - w - f \text{ und } z - y - g,$$

und es folgt die Summe sämmtlicher Fehlerquadrate:

$$F^2 = (w - a)^2 + (x - b)^2 + (x - w - c)^2 + (y - w - d)^2$$
$$+ (y - x - e)^2 + (z - w - f)^2 + (z - y - g)^2.$$

Damit dasselbe ein Minimum werde, müssen die Differenzialquotienten dieses Ausdruckes, welche aus dem successiven Differenziiren desselben in Hinsicht auf w, x, y und z hervorgehen, einzeln gleich Null sein, es ist also

Fig. 48.

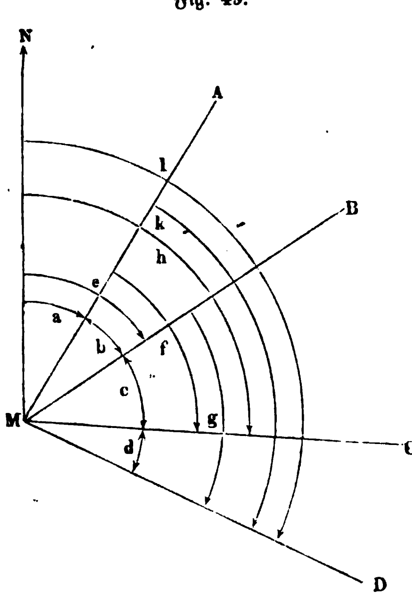


$$(w - a) - (x - w - c)$$
$$-(y - w - d) - (z - w - f) = 0,$$
$$(x - b) + (x - w - c)$$
$$-(y - x - e) = 0,$$
$$(y - w - d) + (y - x - e)$$
$$-(z - y - g) = 0 \text{ und}$$
$$(z - w - f) + (z - y - g) = 0$$

zu setzen.

Die Auflösung dieser vier Gleichungen giebt die gesuchten wahrscheinlichen Höhenwerthe w, x, y und z.

Fig. 49.



2) Um die möglichst genauen Richtungen der Linien MA, MB, MC und MD gegen eine gegebene Grundlinie MN, Fig. 49, zu ermitteln, sind folgende Winkel und Winkelsummen gemessen worden:

$NMA = a$, $AMB = b$, $BMC = c$, $CMD = d$, $NMB = e$, $AMC = f$, $BMD = g$, $NMC = h$, $AMD = k$, und $NMD = l$, welches sind nun die wahrscheinlichsten Werthe der Richtungswinkel $NMA = w$, $NMB = x$, $NMC = y$ und $NMD = z$?

Hier sind die Fehler

$w - a$, $x - w - b$, $y - x - c$, $z - y - d$, $x - e$, $y - w - f$, $z - x - g$, $y - h$, $z - y - k$ und $z - l$,

daher folgt die Summe der Fehlerquadrate:

$$F^2 = (w - a)^2 + (x - w - b)^2 + (y - x - c)^2 + (z - y - d)^2 + (x - e)^2 + (y - w - f)^2 + (z - x - g)^2 + (y - h)^2 + (z - y - k)^2 + (z - l)^2,$$

und es ergeben sich durch Differenziiren u. s. w. folgende vier Gleichungen zur Bestimmung der Richtungswinkel w, x, y und z:

$$(w - a) - (x - w - b) - (y - w - f) = 0,$$
$$(x - w - b) - (y - x - c) + (x - e) - (z - x - g) = 0,$$
$$(y - x - c) - (z - y - d) + (y - w - f) + (y - h) - (z - y - k) = 0 \text{ und}$$
$$(z - y - d) + (z - x - g) + (z - y - k) + (z - l) = 0.$$

Beispiel 1. Durch ein Nivellement zwischen vier Punkten A, B, C und D, Fig. 48, sind folgende Höhenunterschiede gefunden worden:

Höhe von B über A, $a = 45{,}437$ Meter; von C über A, $b = 69{,}877$ Meter;
„ „ C über B, $c = 24{,}402$ „ von D über B, $d = 105{,}127$ „
und von D über C, $e = 80{,}768$ Meter,

welches sind nun die wahrscheinlichen Höhen w, x und y der Punkte B, C und D über A?

Es sind die einzelnen Fehler:

$$w - 45{,}437;\ x - 69{,}817;\ x - w - 24{,}402;$$
$$y - w - 105{,}127 \text{ und } y - x - 80{,}768 \text{ Meter},$$

und folgt daher die Summe sämmtlicher Fehlerquadrate:

$$F^2 = (w - 45{,}437)^2 + (x - 69{,}817)^2 + (x - w - 24{,}402)^2 + (y - w - 105{,}127)^2 + (y - x - 80{,}768)^2.$$

Durch Differenziiren nach w, x und y und Nullsetzen der Differenzialquotienten ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$(w - 45{,}437) - (x - w - 24{,}402) - (y - w - 105{,}127) = 0,$$
$$(x - 69{,}817) + (x - w - 24{,}402) - (y - x - 80{,}768) = 0,$$
$$(y - w - 105{,}127) + (y - x - 80{,}768) = 0,$$

oder

$$3w - x - y = -84{,}092,$$
$$3x - w - y = 13{,}451$$

und

$$2y - w - x = 185{,}895.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$x + w = 115{,}254,$$

sowie

$$x - w = 24{,}386,$$

und schließlich

$$w = 45{,}434,$$
$$x = 69{,}820$$

und

$$y = 150{,}574 \text{ Meter}$$

Beispiel 2. Aus dem Punkte M, Fig. 49, sind die Horizontalwinkel $NMA = a$, $AMB = b$, u. s. w. gemessen und hierbei folgende Resultate erhalten worden:

$$NMA = a = 36^0 21' 30'', \quad AMB = b = 29^0 43' 0''$$
$$BMC = c = 48^0 6' 30'', \quad NMB = d = 66^0 3' 30''$$
$$AMC = e = 77^0 50' 30'' \text{ und } NMC = f = 114^0 12' 0'';$$

welches sind nun die wahrscheinlich richtigsten Werthe der Winkel $NMA = x$, $NMB = y$ und $NMC = z$, um welche die Richtungen MA, MB und MC von der Grundlinie MN abweichen?

Es sind auch hier die Fehler: $f_1 = x - a$, $f_2 = y - d$ u. s. w., und ist, wie im vorigen Beispiel die Summe der Fehlerquadrate:

$$F^2 = (w-a)^2 + (x-w-b)^2 + (y-x-c)^2 + (x-d)^2 + (y-w-e)^2 + (y-f)^2$$

und daher zu setzen:

$$w - a - (x - w - b) - (y - w - e) = 0,$$
$$x - w - b - (y - x - c) + x - d = 0$$

sowie

$$y - x - c + y - w - e + y - f = 0,$$

wonach

$$3w - x - y = a - b - e = -71^0 12' 0''$$
$$3x - w - y = b + d - c = 47^0 40' 0''$$

und

$$3y - w - x = c + e + f = 240^0 9' 0''$$

folgt.

Durch Elimination von y ergiebt sich:

$$w - x = -29^0 43' 0''$$

und

$$2x - w = 95^0 47' 15'',$$

so daß nun

$$x = 66^0 4' 15'',$$
$$w = 36^0 21' 0''$$

und

$$y = 114^0 10' 45''$$

folgt.

Die Summe der Fehler:

$$w - a = -0^0 0' 30'',$$
$$x - w - b = +0^0 0' 15'',$$
$$y - x - c = 0^0 0' 0'',$$
$$x - d = +0^0 0' 45'',$$
$$y - w - e = +0^0 0' 45'',$$
$$y - f = -0^0 1' 15''$$

ist, wie nöthig, = Null, sowie die Summe der Fehlerquadrate:

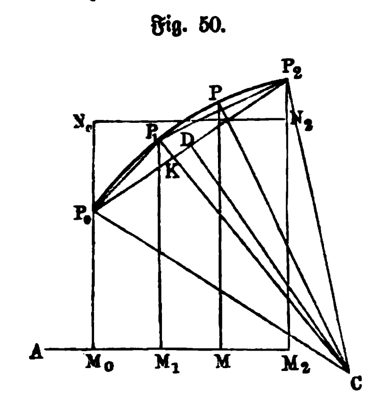
$$30^2 + 15^2 + 0^2 + 45^2 + 45^2 + 15^2 = 5400,$$

im Minimum.

§. 38. **Interpolationsverfahren.** Kommt es darauf an, in Ermangelung einer Formel für das stetige Fortschreiten einer Größe y oder ihre Abhängigkeit von einer anderen Größe x, einen Werth der Größe y, welcher einem gegebenen Werthe von x entspricht, mittels entweder aus Erfahrung bekannter oder aus einer Tabelle entnommener Werthe von x und y zu bestimmen, so

wendet man das sogenannte **Interpolationsverfahren** an, von welchem hier nur das Wichtigste mitgetheilt werden soll.

Fig. 50.



Wenn die Abscissen $AM_0 = x_0$, $AM_1 = x_1$ und $AM_2 = x_2$, Fig. 50, und die zugehörigen Ordinaten $M_0P_0 = y_0$, $M_1P_1 = y_1$ und $M_2P_2 = y_2$ gegeben sind, so kann man die einer neuen Abscisse $AM = x$ entsprechende Ordinate $MP = y$ durch die Formel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ ausdrücken, wofern die drei dadurch bestimmten Punkte P_0, P_1, P_2 nahe in einer geraden Linie oder in einem wenig gekrümmten Bogen liegen. Legt man den Coordinatenanfangspunkt von A nach M_0, so wird dadurch der Allgemeinheit nicht geschadet, wir bekommen aber dann einfach für $x = 0$, $y = \alpha$ und folglich das constante Glied $\alpha = y_0$.

Führen wir nun ein Mal x_1 und y_1 und ein anderes Mal x_2 und y_2 in die fingirte Gleichung ein, so erhalten wir folgende zwei Bestimmungsgleichungen:

$$y_1 - y_0 = \beta x_1 + \gamma x_1^2$$

und

$$y_2 - y_0 = \beta x_2 + \gamma x_2^2,$$

woraus sich

$$\beta = \frac{(y_1 - y_0)x_2^2 - (y_2 - y_0)x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}$$

und

$$\gamma = \frac{(y_1 - y_0)x_2 - (y_2 - y_0)x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}$$

ergiebt.

Es ist also hiernach:

$$y = y_0 + \left(\frac{(y_1 - y_0)x_2^2 - (y_2 - y_0)x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}\right)x$$
$$+ \left(\frac{(y_1 - y_0)x_2 - (y_2 - y_0)x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}\right)x^2.$$

Läge die Ordinate y_1 mitten zwischen y_0 und y_2, so hätte man $x_2 = 2x_1$ und daher einfacher:

$$y = y_0 - \left(\frac{3y_0 - 4y_1 + y_2}{2x_1}\right)x + \left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2x_1^2}\right)x^2.$$

Sind nur zwei Paar Coordinaten x_0, y_0 und x_1, y_1 gegeben, so muß man die Begrenzungslinie $P_0 P_1$ als gerade Linie ansehen, und folglich

$$y = y_0 + \beta x,$$

also auch

$$y_1 = y_0 + \beta x_1$$

setzen, wonach

$$\beta = \frac{y_1 - y_0}{x_1}$$

und

$$y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1}\right) x$$

folgt.

Wenn verlangt wird, zwischen den Ordinaten y_0, y_1, y_2 eine vierte Ordinate y durch Construction zu interpoliren, so legt man durch die Endpunkte P_0, P_1, P_2 dieser Ordinaten einen Kreis, und nimmt y als die Ordinate desselben an. Das Centrum C dieses Kreises wird auf die bekannte Weise dadurch bestimmt, daß man die Punkte P_0, P_1, P_2 mit einander durch gerade Linien verbindet und in den Mittelpunkten derselben Perpendikel errichtet; der Durchschnitt C dieser Perpendikel unter einander ist das gesuchte Centrum.

Sind die Entfernungen des mittleren Punktes P_1 von den beiden anderen Punkten P_0 und P_2, s_0 und s_2, und ist der Abstand $P_1 K$ des Punktes P_1 von der Verbindungslinie $s_1 = P_0 P_2, = h$, so hat man für den Peripheriewinkel $\alpha = P_1 P_0 P_2 = {}^1/_2$ Centriwinkel $P_1 C P_2$:

$$sin.\alpha = \frac{h}{s_0}$$

und folglich für den Krümmungshalbmesser $CP = CP_0 = CP_1 = CP_2$:

$$r = \frac{s_2}{2\,sin.\alpha} = \frac{s_0 s_2}{2h}.$$

Man findet folglich das Centrum C des durch P_0, P_1, P_2 gehenden Kreises, wenn man mit dem nach dieser Formel berechneten Halbmesser r aus P_0 oder P_1 oder P_2 das in der Mitte D der Sehne $P_0 P_2$ errichtete Perpendikel durchschneidet.

§. 39. Das Mittel sämmtlicher Ordinaten über der Grundlinie $M_0 M_2$ ist die Höhe eines Rechteckes $M_0 M_2 N_2 N_0$, über derselben Grundlinie $M_0 M_2$, welches mit der Fläche $M_0 M_2 P_2 P_1 P_0$ einerlei Inhalt hat, und läßt sich daher aus diesem Flächenraume leicht bestimmen. Nach §. 29 ist derselbe:

$$F = \int_0^{x_2} y \partial x = \int_0^{x_2} (y_0 + \beta x + \gamma x^2) \partial x$$

$$= y_0 x_2 + \frac{\beta x_2^2}{2} + \frac{\gamma x_2^3}{3}$$

$$= y_0 x_2 + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2^2 - (y_2 - y_0) x_1^2}{x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2}\right) \frac{x_2^2}{2}$$

$$+ \left(\frac{y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}\right) \frac{x_2^3}{3}$$

$$= \left(y_0 + \frac{(y_1 - y_0) x_2^2}{6 x_1 (x_2 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_0)(3 x_1 - 2 x_2)}{6 (x_2 - x_1)}\right) x_2$$

$$= \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) x_2 + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{6 x_1 (x_2 - x_1)}\right) x_2^2,$$

und folglich die mittlere Ordinate:

$$y_m = \frac{F}{x_2} = \frac{y_0 + y_2}{2} + \left(\frac{(y_1 - y_0) x_2 - (y_2 - y_0) x_1}{6 x_1 (x_2 - x_1)}\right) x_2.$$

Wäre $\frac{y_2 - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x_2}{x_1}$, so hätte man es mit einer geradlinigen Begrenzung zu thun, und es wäre dann einfach:

$$F = \left(\frac{y_0 + y_2}{2}\right) x_2,$$

sowie

$$y_m = \frac{y_0 + y_2}{2}.$$

Wäre ferner bloß $x_2 = 2 x_1$, also y_1 von den Grenzordinaten y_0 und y_2 gleichviel abstehend, so würde sein:

$$F = (y_0 + 4 y_1 + y_2) \frac{x_2}{6} \text{ (siehe §. 30), und}$$

$$y_m = \frac{y_0 + 4 y_1 + y_2}{6}.$$

Ist ein Flächenraum $M_0 M_3 P_3 P_0$, Fig. 51, durch vier Coordinaten $M_0 P_0 = y_0$, $M_1 P_1 = y_1$, $M_2 P_2 = y_2$, $M_3 P_3 = y_3$ bestimmt, welche in gleichen Abständen von einander stehen, so kann man die Größe desselben einfach annähernd auf folgende Weise bestimmen.

Bezeichnen wir die Grundlinie $M_0 M_3$ durch x_3 und drei zwischen y_0 und y_3 in gleichen Abständen von einander eingeschaltete Ordinaten $N_1 Q_1$, $N_2 Q_2$, $N_3 Q_3$ durch z_1, z_2, z_3, so können wir annähernd die Fläche:

$$M_0 M_3 P_3 P_0 = F = (\tfrac{1}{2} y_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \tfrac{1}{2} y_3) \frac{x_3}{4} \text{ setzen.}$$

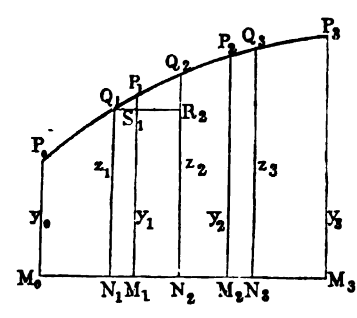
Nun ist aber:

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{2z_1 + 2z_2 + 2z_3}{6} = \frac{2z_1 + z_2}{6} + \frac{2z_3 + z_2}{6}$$

und

$$y_1 = z_1 + \tfrac{1}{3}(z_2 - z_1) = \frac{2z_1 + z_2}{3},$$

Fig. 51.



sowie

$$y_2 = \frac{2z_3 + z_2}{3},$$

daher folgt:

$$\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

und

$$F = [\tfrac{1}{2}y_0 + \tfrac{3}{2}(y_1 + y_2) + \tfrac{1}{2}y_3]\frac{x_3}{4}$$

$$= [y_0 + 3(y_1 + y_2) + y_3]\frac{x_3}{8},$$

sowie:

$$y_m = \frac{y_0 + 3(y_1 + y_2) + y_3}{8}.$$

Während die vorige Formel für y_m zur Anwendung kommt, wenn die Fläche in eine gerade Anzahl von Streifen zerlegt ist, läßt sich die letztere anwenden, wenn die Anzahl dieser Flächentheile eine ungerade ist.

Hiernach kann man auch annähernd

$$\int_c^{c_1} y\,\partial x = \int_c^{c_1} \varphi(x)\,\partial x = [y_0 + 3(y_1 + y_2) + y_3]\,\frac{c_1 - c}{8}$$

setzen, wenn

$$y_0 = \varphi(c),\ y_1 = \varphi\left(\frac{2c + c_1}{3}\right),\ y_2 = \varphi\left(\frac{c + 2c_1}{3}\right) \text{ und } y_3 = \varphi(c_1)$$

vier bestimmte Werthe der Function $y = \varphi(x)$ sind.

Z. B. für $\int_1^2 \frac{\partial x}{x}$ (s. Beispiel §. 30) hat man $c = 1$, $c_1 = 2$ und $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, daher folgt

$$y_0 = \tfrac{1}{1} = 1,\ y_1 = \frac{3}{2 + 2} = \tfrac{3}{4},\ y_2 = \frac{3}{1 + 4} = \tfrac{3}{5} \text{ und } y_3 = \tfrac{1}{2},$$

und hiernach der angenäherte Werth dieses Integrals:

$$\int_1^2 \frac{\partial x}{x} = [1 + 3(\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{5}) + \tfrac{1}{2}]\,.\,\tfrac{1}{8} = \frac{111}{160} = 0{,}694.$$

Erster Theil.

Die allgemeinen Lehren der Mechanik.

Erster Abschnitt.

Phoronomie oder rein mathematische Bewegungslehre.

Erstes Capitel.

Die einfache Bewegung.

Ruhe und Bewegung. Jeder Körper nimmt im Raume einen gewissen Ort ein, und ein Körper ist in Ruhe (franz. repos; engl. rest), wenn er seinen Ort nicht ändert; er ist hingegen in Bewegung (franz. mouvement; engl. motion), wenn er aus einem Orte nach und nach in andere übergeht. Ruhe und Bewegung eines Körpers sind entweder absolut oder relativ, je nachdem man den Ort desselben auf einen Raum bezieht, der entweder selbst in Ruhe oder in Bewegung ist, oder darin gedacht wird. §. 1.

Auf der Erde giebt es keine Ruhe, denn alle Körper auf der Erde nehmen an ihrer Bewegung um die Sonne und um ihre eigene Axe Antheil; denken wir uns aber die Erde in Ruhe, so sind für uns auch alle diejenigen Erdkörper in Ruhe, welche ihren Ort in Beziehung auf die Erde nicht ändern.

Bewegungsarten. Die stetige Folge von Oertern, welche ein Körper in seiner Bewegung nach und nach einnimmt, bildet einen Raum, den man den Weg oder die Bahn (franz. chemin, trajectoire; engl. way, path trajectory) des bewegten Körpers nennt. Der Weg eines bewegten Punktes ist eine Linie. Der Weg eines geometrischen Körpers ist zwar wieder ein Körper, man versteht aber unter demselben gewöhnlich diejenige Linie, welche ein ausgezeichneter Punkt, z. B. der Mittelpunkt des Körpers, bei der Bewegung beschreibt. §. 2.

Die Längeneinheit, womit der Weg eines bewegten Punktes gemessen wird, ist in der Folge Ein Meter = 3,1862 Fuß (preuß.).

Eine Bewegung ist geradlinig (franz. rectiligne; engl. rectilinear), wenn ihr Weg in einer geraden Linie besteht; sie ist aber krummlinig (franz. curviligne; engl. curvilinear), wenn der Weg des bewegten Körpers eine krumme Linie ist.

In Beziehung auf Zeit (franz. temps; engl. time) ist die Bewegung entweder gleichförmig oder ungleichförmig.

§. 3. Eine Bewegung ist gleichförmig (franz. uniforme; engl. uniform), wenn durch dieselbe in gleichen und beliebig kleinen Zeittheilchen gleiche Wege zurückgelegt werden; sie ist ungleichförmig (franz. varié; engl. variable), wenn diese Gleichheit nicht statthat. Werden mit dem Ablaufen der Zeit die in gleichen Zeittheilchen durchlaufenen Räume immer größer und größer, so heißt die ungleichförmige Bewegung beschleunigt (franz. accéléré; engl. increasing), nehmen diese aber immer mehr und mehr ab, so heißt sie verzögert (franz. retardé; engl. decreasing).

Von der gleichförmigen Bewegung ist die periodische Bewegung (franz. périodique; engl. periodic) dadurch unterschieden, daß bei dieser nur innerhalb gewisser endlicher Zeiträume, die man Perioden nennt, gleiche Räume durchlaufen werden.

Das beste Beispiel der gleichförmigen Bewegung giebt die scheinbare tägliche Umdrehung des Fixsternhimmels; nächstdem das Fortrücken der Zeiger einer Uhr. Beispiele der ungleichförmigen Bewegung geben fallende und in die Höhe geworfene Körper, der sinkende Wasserspiegel beim Ausfluß des Wassers aus Gefäßen u. s. w. Für die periodische Bewegung findet man Beispiele an den Pendelschwingungen, an den Kolbenspielen einer Dampfmaschine u. s. w.

§. 4. **Gleichförmige Bewegung.** Geschwindigkeit (franz. vitesse; engl. speed, velocity) ist die Stärke oder Größe einer Bewegung. Je größer der Raum ist, welchen ein Körper innerhalb einer gewissen Zeit durchläuft, desto stärker ist auch seine Bewegung, oder desto größer ist auch seine Geschwindigkeit. Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit unveränderlich, bei einer ungleichförmigen Bewegung hingegen ändert sie sich in jedem Augenblicke. Das Maß der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitpunkte ist der Weg, den der Körper von diesem an innerhalb der Zeiteinheit oder Secunde entweder wirklich zurücklegt oder zurücklegen würde, wenn von diesem Augenblicke oder Zeitpunkte an die Bewegung in eine gleichförmige überginge, also die Geschwindigkeit unveränderlich bliebe. Gewöhnlich nennt man dieses Maß schlechtweg Geschwindigkeit.

§. 5. Wenn ein Körper in jedem Zeittheilchen den Weg σ durchläuft, und die Zeitsecunde aus n (sehr vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist der Weg

innerhalb einer Secunde, die Geschwindigkeit oder vielmehr das Geschwindigkeitsmaß:

$$c = n \,.\, \sigma.$$

Im Laufe einer Zeit t (Secunden) verfließen $n \,.\, t$ Zeittheilchen, und in jedem wird der Raum σ zurückgelegt; es ist daher der ganze Weg (franz. l'espace; engl. the distance, space), welcher der Zeit t entspricht:

$$s = n \,.\, t \,.\, \sigma = n \,.\, \sigma \,.\, t, \text{ d. i.}$$

I.) $s = ct$.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist also der Raum (s) ein Product aus Geschwindigkeit (c) und Zeit (t).

Umgekehrt ist:

II.) $c = \frac{s}{t}$ und

III.) $t = \frac{s}{t}$.

Beispiele. 1) Ein Dampfwagen, welcher mit einer Geschwindigkeit von 10 Meter fortrollt, legt in zwei Stunden = 120 Minuten = 7200 Secunden den Weg $s = 10 \,.\, 7200 = 72000$ Meter zurück. 2) Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem 1200 Fuß tiefen Schachte eine Zeit von $4\frac{1}{2}$ Minuten = 270 Secunden nöthig ist, so hat man die mittlere Geschwindigkeit dieses Fördergefäßes $(c) = \frac{1200}{270} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9} = 4{,}444 \ldots$ Fuß anzunehmen. 3) Ein Pferd, welches sich mit 6 Fuß Geschwindigkeit fortbewegt, braucht zum Zurücklegen eines Weges von einer Meile oder 24000 Fuß die Zeit $t = \frac{24000}{6} = 4000$ Secunden oder 1 Stunde 6 Minuten und 40 Secunden.

Vergleicht man zwei verschiedene gleichförmige Bewegungen mit einander, §. 6.
so stößt man auf Folgendes:

Die Räume sind $s = ct$ und $s_1 = c_1 t_1$, es ist daher ihr Verhältniß $\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{c_1 t_1}$. Setzt man nun $t_1 = t$, so hat man $\frac{s}{s_1} = \frac{c}{c_1}$; nimmt man $c_1 = c$, so erhält man $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; ist endlich $s_1 = s$, so folgt $\frac{c}{c_1} = \frac{t_1}{t}$.

Die in gleichen Zeiten durchlaufenen Räume verhalten sich also bei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen wie die Geschwindigkeiten; die mit gleichen Geschwindigkeiten zurückgelegten Wege dagegen wie die Zeiten; die gleichen Räumen entsprechenden Geschwindigkeiten sind endlich den Zeiten umgekehrt proportional.

Gleichförmig veränderte Bewegung. Eine Bewegung ist gleich- §. 7.
förmig verändert (franz. uniformément varié; engl. uniformly varied),

wenn ihre Geschwindigkeit innerhalb gleicher, beliebig kleiner Zeittheilchen um gleichviel zu- oder abnimmt. Sie ist entweder gleichförmig beschleunigt (franz. uniformément accéléré; engl. uniformly accelerated), oder gleichförmig verzögert (franz. uniformément retardé; engl. uniformly retarded); im ersten Falle findet ein allmäliges Wachsen, im zweiten ein stetiges Abnehmen an Geschwindigkeit statt.

Gleichförmig beschleunigt fällt ein Körper im luftleeren Raume, und gleichförmig verzögert würde das Steigen senkrecht in die Höhe geworfener Körper erfolgen, wenn die Luft keinen Einfluß auf den Körper ausübte.

§. 8. Die Stärke oder Größe der Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers heißt Acceleration oder Beschleunigung (franz. accélération; engl. acceleration, rate of variation of the velocity); sie ist entweder positiv (Beschleunigung) oder negativ (Verzögerung, retardation), je nachdem eine Zu- oder eine Abnahme der Geschwindigkeit statthat. Je mehr die Geschwindigkeit innerhalb einer gewissen Zeit zu- oder abnimmt, desto größer ist auch die Acceleration. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Acceleration unveränderlich; es läßt sich daher auch dieselbe durch diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit messen, welche im Laufe einer Zeitsecunde stattfindet. Bei jeder anderen Bewegung hingegen ist das Maß der Acceleration diejenige Zu- oder Abnahme an Geschwindigkeit, welche ein Körper erhalten würde, wenn von dem Augenblicke an, für welchen man die Acceleration angeben will, dieselbe ihre Veränderlichkeit verlöre, die Bewegung also in eine gleichförmig veränderte überginge.

Sehr gewöhnlich nennt man dieses Maß selbst die Acceleration oder Beschleunigung.

§. 9. Wenn die Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung in einem sehr kleinen (unendlich kleinen) Zeittheilchen um $\varkappa$ zunimmt, und die Zeitsecunde aus n (unendlich vielen) solchen Zeittheilchen besteht, so ist die Zunahme an Geschwindigkeit in einer Secunde, oder die sogenannte Acceleration:

$$p = n\varkappa,$$

und die Zunahme nach t Secunden,

$$= nt.\varkappa = n\varkappa.t = pt.$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit (im Augenblicke, wo man die Zeit t zu zählen anfängt) $= c$, so hat man hiernach die Endgeschwindigkeit, d. i. die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit:

$$v = c + pt.$$

Für die ohne Geschwindigkeit anfangende Bewegung ist $c = 0$, daher $v = pt$, und für die gleichförmig verzögerte, negative Acceleration $(-p)$ besitzende Bewegung ist:

$$v = c - pt.$$

Beispiele. 1) Die Acceleration eines im luftleeren Raume frei fallenden Körpers ist 9,81 Meter = $31\frac{1}{4}$ = 31,25 Fuß; es erlangt daher ein solcher nach 3 Secunden die Geschwindigkeit $v = pt = 9{,}81 \,.\, 3 = 29{,}43$ Meter = $31{,}25 \,.\, 3 = 93{,}75$ Fuß. 2) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat im Anfang schon die Geschwindigkeit $c = 25$ Fuß, und erlangt beim Herabrollen in jeder Secunde noch 5 Fuß Zusatz an Geschwindigkeit; es ist daher ihre Geschwindigkeit nach $2\frac{1}{2}$ Secunden: $v = 25 + 5 \,.\, 2{,}5 = 25 + 12{,}5 = 37{,}5$ Fuß, d. h. sie wird, von dem letzten Zeitpunkte an gleichförmig fortgehend, in jeder Secunde 37,5 Fuß Weg zurücklegen. 3) Ein mit 12 Meter Geschwindigkeit fortgehender Dampfwagen wird so gebremst, daß er in jeder Secunde 1,5 Meter an Geschwindigkeit verliert, seine Acceleration also — 1,5 Meter beträgt; es ist deshalb seine Geschwindigkeit nach 5 Secunden: $v = 12 - 1{,}5 \,.\, 5 = 12 - 7{,}5 = 4{,}7$ Meter.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung. Innerhalb eines unendlich kleinen Zeittheilchens τ läßt sich die Geschwindigkeit v einer jeden Bewegung als unveränderlich ansehen; man kann daher den in diesem Zeittheilchen durchlaufenen Raum §. 10.

$$\sigma = v \,.\, \tau$$

setzen, und erhält so den in einer endlichen Zeit t durchlaufenen Raum, wenn man die Summe dieser kleinen Räume ermittelt. Nun ist aber für alle diese Räumchen die Zeit τ eine und dieselbe, es läßt sich daher auch ihre Summe gleichsetzen dem Producte aus eben diesen Zeittheilchen und aus der Summe der gleichen Intervallen entsprechenden Geschwindigkeiten.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist aber die Summe $(0 + v)$ der Geschwindigkeiten im ersten und letzten Augenblicke so groß als die Summe $p\tau + (v - p\tau)$ der Geschwindigkeiten im zweiten und vorletzten Augenblicke, auch gleich der Summe $2p\tau + (v - 2p\tau)$ der Geschwindigkeiten im dritten und vorvorletzten Augenblicke u. s. w., und diese Summe überhaupt gleich der Endgeschwindigkeit v; es ist daher hier die Summe aller Geschwindigkeiten gleich dem Producte $\left(v \cdot \frac{n}{2}\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v und aus der halben Anzahl aller Zeittheilchen, und der durchlaufene Raum das Product $\left(v \cdot \frac{n}{2} \cdot \tau\right)$ aus der Endgeschwindigkeit v, der halben Anzahl der Zeittheilchen und der Größe eines solchen Theilchens. Nun giebt endlich die Größe (τ) eines Zeittheilchens, mit der Anzahl n derselben multiplicirt, die ganze Zeit t an, deshalb ist der innerhalb der Zeit t gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Raum:

$$s = \frac{vt}{2}.$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung fällt hiernach der Raum ebenso groß aus wie bei der gleichförmigen Bewegung, wenn die Geschwindigkeit der letzteren Bewegung halb so groß ist als die Endgeschwindigkeit der ersteren.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper innerhalb 10 Secunden durch gleichförmig beschleunigte Bewegung eine Geschwindigkeit v von 26 Fuß erlangt hat, so ist der zu gleicher Zeit zurückgelegte Weg $s = \frac{26 . 10}{2} = 130$ Fuß. 2) Ein Wagen, welcher bei seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung im Laufe von 7 Secunden 25 Meter zurückgelegt hat, geht am Ende mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 . 25}{7} = 7{,}14 \ldots \text{ Meter fort.}$$

§. 11. Die beiden Grundformeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\text{I.)} \quad v = pt$$

und

$$\text{II.)} \quad s = \frac{vt}{2},$$

welche ausdrücken, daß hier die Geschwindigkeit ein Product aus Acceleration und Zeit, und der Raum ein solches aus der halben Geschwindigkeit und Zeit ist, schließen noch zwei andere Hauptformeln in sich, die man erhält, wenn man aus beiden Gleichungen ein Mal v und ein zweites Mal t eliminirt. Es folgt nämlich:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{pt^2}{2}$$

und

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2}{2p}.$$

Hiernach ist also der gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg ein Product aus der halben Acceleration und dem Quadrate der Zeit, und auch der Quotient aus dem Quadrate der Endgeschwindigkeit und der doppelten Beschleunigung.

Diese vier Hauptformeln geben durch Umkehrung, je nachdem man die eine oder die andere der in ihnen enthaltenen Größen absondert, noch acht andere Formeln, und man findet dieselben im „Ingenieur“ Seite 325 in einer Tabelle zusammengestellt.

Beispiele. 1) Ein mit der Acceleration 5 Meter bewegter Körper legt in 1,5 Secunde den Weg $\frac{5 . (1{,}5)^2}{2} = \frac{11{,}25}{2} = 5{,}625$ Meter zurück. 2) Ein durch die Acceleration $p = 4{,}5$ Fuß in die Geschwindigkeit $v = 16{,}5$ Fuß versetzter Körper hat den Raum $s = \frac{(16{,}5)^2}{2 . 4{,}5} = 30{,}25$ Fuß durchlaufen.

§. 12. Bei der Vergleichung von zwei verschiedenen gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit einander stößt man auf Folgendes:

Die Geschwindigkeiten sind $v = pt$ und $v_1 = p_1 t_1$, die Räume hingegen $s = \frac{pt^2}{2}$ und $s_1 = \frac{p_1 t_1^2}{2}$, es folgt hieraus:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{pt}{p_1 t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{pt^2}{p_1 t_1^2} = \frac{vt}{v_1 t_1} = \frac{v^2 p_1}{v_1^2 p}.$$

Setzt man nun $t_1 = t$, so erhält man:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{p}{p_1};$$

es verhalten sich also bei gleichen Zeiten die durchlaufenen Wege wie die Endgeschwindigkeiten, oder auch wie die Beschleunigungen.

Nimmt man ferner $p_1 = p$ an, so ergiebt sich:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2};$$

bei gleichen Beschleunigungen und also auch bei einer und derselben gleichförmig beschleunigten Bewegung sind also die Endgeschwindigkeiten den Zeiten und die durchlaufenen Räume den Quadraten der Zeiten, oder auch den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional.

Ferner $v_1 = v$ angenommen, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1}{t}$ und $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; bei gleichen Endgeschwindigkeiten sind die Accelerationen den Zeiten umgekehrt, die Räume aber den Zeiten direct proportional.

Endlich $s_1 = s$ gesetzt, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2}$; es verhalten sich also bei gleichen Räumen die Accelerationen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten und direct wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit. Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man nach §. 9: §. 13.

$$\text{I.)} \quad v = c + pt,$$

und da der unveränderlichen Geschwindigkeit c der Raum ct, der Acceleration p aber der Weg $\frac{pt^2}{2}$ zukommt:

$$\text{II.)} \quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Entfernt man p aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} t,$$

und beseitigt man t, so stellt sich

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ heraus.}$$

Beispiele. 1) Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 3$ Meter und mit der Acceleration $p = 5$ Meter bewegter Körper legt in 7 Secunden den Weg

$$s = 3 . 7 + 5 . \frac{7^2}{2} = 21 + 122,5 = 143,5 \text{ Meter zurück.}$$

2) Ein anderer Körper, welcher innerhalb 3 Minuten = 180 Secunden seine Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ Fuß in die von $7\frac{1}{2}$ Fuß umändert, macht in dieser Zeit den Weg von $\frac{2,5 + 7,5}{2} . 180 = 900$ Fuß.

§. 14. **Gleichförmig verzögerte Bewegung.** Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$\text{I.)} \quad v = c - pt,$$

$$\text{II.)} \quad s = ct - \frac{pt^2}{2},$$

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t,$$

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2p},$$

welche aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen sogleich hervorgehen, wenn man darin p negativ setzt. Während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ohne Ende wächst, nimmt bei der gleichförmig verzögerten Bewegung die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Zeitpunkte ab, wird in demselben = Null, und fällt später negativ aus, d. h. es geht später die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich.

Setzen wir in der ersten Formel $v = 0$, so erhalten wir $pt = c$, also die Zeit, zu welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist:

$$t = \frac{c}{p};$$

setzen wir endlich diesen Werth von t in die zweite Gleichung, so erhalten wir den Raum, welchen der Körper zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt hat:

$$s = \frac{c^2}{2p}.$$

Ist die Zeit größer als $\frac{c}{p}$, so fällt der Raum kleiner als $\frac{c^2}{2p}$ aus; ist die Zeit $= \frac{2c}{p}$, so ist der Raum Null, es ist also der Körper nach seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt; ist endlich die Zeit noch größer als $\frac{2c}{p}$, so ist s negativ, d. h. es befindet sich der Körper vom Anfangspunkte aus auf der entgegengesetzten Seite.

Beispiel. Ein Körper, welcher mit $c = 12$ Meter Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene hinaufrollt, durch welche er eine Verzögerung von 2 Meter pro Secunde erleidet, steigt nur $\frac{12}{2} = 6$ Secunden lang und $\frac{12^2}{2 \cdot 2} = 36$ Meter hoch, rollt dann zurück, kommt nach 12 Secunden mit 12 Meter Geschwindigkeit in den Anfangspunkt zurück und hat nach 15 Secunden den Weg $s = ct - \frac{p\,t^2}{2}$ $= 12 \cdot 15 - \frac{2 \cdot 15^2}{2} = 180 - 225 = 45$ Meter zurückgelegt, ist also 45 Meter unter den Anfangspunkt gelangt, wenn sich die Ebene auch abwärts fort erstreckt.

Freier Fall der Körper. Der freie oder senkrechte Fall der Körper im luftleeren Raume (franz. mouvement vertical des corps pesants; engl. vertical motion of bodies) giebt das wichtigste Beispiel der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die durch die Schwerkraft (franz. gravité; engl. gravity) erzeugte Acceleration dieser Bewegung bezeichnet man durch den Buchstaben g, und hat unter den mittleren Breitegraden von Europa den mittleren Werth von §. 15.

9,81 Meter,
30,20 pariser Fuß,
32,20 englischen Fuß,
31,03 wiener Fuß,
$31\frac{1}{4} = 31,25$ preußischen Fuß und
32,7 Schweizer- oder Meterfuß zu je 0,3 Meter.

Wenn man einen dieser Werthe statt g in die gefundenen Formeln:

$$v = gt,\; s = \frac{gt^2}{2} \text{ und } s = \frac{v^2}{2g},\; v = \sqrt{2gs}$$

einführt, so kann man alle Fragen, welche sich in Ansehung des freien Falles der Körper vorlegen lassen, beantworten. Für das Metermaß ist:

$$v = 9,81 \cdot t = 4,429\sqrt{s},$$
$$s = 4,905\,t^2 = 0,0510\,v^2 \text{ und}$$
$$t = 0,1019\,v = 0,4515\sqrt{s};$$

dagegen für das preußische Fußmaß:

$$v = 31,25 \cdot t = 7,906\sqrt{s};$$
$$s = 15,625 \cdot t^2 = 0,016\,v^2 \text{ und}$$
$$t = 0,032\,v = 0,253\sqrt{s}.$$

Beispiele. 1) Ein Körper erlangt beim ungehinderten Fallen in 4 Secunden die Geschwindigkeit $v = 31,25 \cdot 4 = 125$ Fuß und durchläuft in dieser Zeit den Weg $s = 15,625 \cdot 4^2 = 250$ Fuß. 2) Ein von der Höhe $s = 9$ Fuß herabgefallener Körper hat die Geschwindigkeit $v = 7,906 \cdot \sqrt{9} = 23,72$ Fuß. 3) Ein mit 10 Meter Geschwindigkeit vertical emporgeworfener Körper steigt auf die Höhe $s = 0,051 \cdot 10^2 = 5,1$ Meter und braucht dazu die Zeit:

$t = 0,1019 \cdot 10 = 1,019$ oder reichlich 1 Secunde.

§. 16. Wie sich beim freien Fall der Körper die Bewegungsverhältnisse im Laufe der Zeit gestalten, wird durch folgende Tabelle vor Augen geführt:

Zeit in Secunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geschwindigkeit	0	$1g$	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$	$6g$	$7g$	$8g$	$9g$	$10g$
Weg	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$
Differenzen . .	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$

Die letzte Horizontalcolumne dieser Tafel giebt die Wege an, welche der frei fallende Körper in den einzelnen Secunden durchläuft. Man sieht, daß sich diese Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu einander verhalten, während die Zeiten und Geschwindigkeiten wie die natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4 u. s. w., und die Fallräume wie deren Quadrate 1, 4, 9, 16 u. s. w. wachsen. Hiernach ist z. B. die Geschwindigkeit nach 6 Secunden, $6g$ = 58,86 Meter, d. h. der Körper würde, wenn er von dieser Zeit an gleichförmig fortginge, etwa auf einer ihm keine Hindernisse darbietenden Horizontalebene seine Bewegung fortsetzte, in jeder Secunde den Weg $6g$ = 58,86 Meter durchlaufen. Diesen Raum durchläuft er im Laufe der folgenden oder siebenten Secunde aber nicht wirklich, sondern derselbe beträgt nach der letzten Columne genau $13 \cdot \frac{g}{2} = 13 \,.\, 4{,}905 = 63{,}765$ Meter; in der achten Secunde ist er sogar $15 \cdot \frac{g}{2} = 15 \,.\, 4{,}905 = 73{,}575$ Meter u. s. w.

Anmerkung. Aeltere deutsche Schriftsteller bezeichnen den Raum von 4,905 Meter = 15,625 Fuß, welcher vom frei fallenden Körper in der ersten Secunde durchlaufen wird, durch g und nennen ihn wohl auch Beschleunigung der Schwere. Sie haben dann für den freien Fall der Körper die Formeln:

$$v = 2gt = 2\sqrt{gs},$$

$$s = gt^2 = \frac{v^2}{4g},$$

$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Dieser nur in Deutschland vorkommende Gebrauch ist aber jetzt ganz verschwunden, aber beim Lesen älterer deutscher Werke über Physik und Mechanik, z. B. der Werke von Eytelwein, Gerstner u. s. w. zu beachten.

Der freie Fall mit einer Anfangsgeschwindigkeit. Geht der §. 17.
freie Fall der Körper mit einer gewissen **Anfangsgeschwindigkeit** (franz. **vitesse initial**; engl. **initiale-velocity**) c vor sich, so nehmen die Formeln folgende Formen an:

$$v = c + gt = c + 9{,}81\, t \text{ Meter} = c + 31{,}25\, t \text{ Fuß},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^3 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 19{,}62 s} \text{ Meter} = \sqrt{c^2 + 62{,}5\, s} \text{ Fuß},$$

$$s = ct + \frac{g}{2} t^2 = ct + 4{,}905\, t^2 \text{ Meter} = ct + 15{,}625\, t^2 \text{ Fuß},$$

auch:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}0510\, (v^2 - c^2) \text{ Meter} = 0{,}016\, (v^2 - c^2) \text{ Fuß}.$$

Wird hingegen der Körper mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, so hat man:

$$v = c - gt = c - 9{,}81\, t \text{ Meter} = c - 31{,}25\, t \text{ Fuß},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs} = \sqrt{c^2 - 19{,}62 s} \text{ Meter} = \sqrt{c^2 - 62{,}5\, s} \text{ Fuß},$$

$$s = ct - \frac{g}{2} t^2 = ct - 4{,}905\, t^2 \text{ Meter} = ct - 15{,}625\, t^2 \text{ Fuß},$$

auch:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = 0{,}051\, (c^2 - v^2) \text{ Meter} = 0{,}016\, (c^2 - v^2) \text{ Fuß}.$$

Betrachtet man eine gegebene Geschwindigkeit c als eine durch den freien Fall erlangte Endgeschwindigkeit, so nennt man den entsprechenden **Fallraum**

$$\frac{c^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, c^2 \text{ Fuß} = 0{,}0510\, c^2 \text{ Meter}.$$

die **Geschwindigkeitshöhe** (franz. **hauteur due à la vitesse**; engl. **height due to velocity**). Durch Einführung derselben lassen sich einige der obigen Formeln einfacher ausdrücken. Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ von der Anfangsgeschwindigkeit c durch k und die der Endgeschwindigkeit $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ durch h, so hat man für fallende Körper:

$$h = k + s \text{ und } s = h - k,$$

und für steigende:

$$h = k - s \text{ und } s = k - h.$$

Es ist also der **Fall-** oder **Steigraum stets gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.**

Beispiel. Sind bei einer gleichförmig veränderten Geschwindigkeit die Geschwindigkeiten 5 Meter und 11 Meter, also die Geschwindigkeitshöhen $= 0{,}051 \,.\, 5^2 = 1{,}275$ Meter und $0{,}051 \,.\, 11^2 = 6{,}171$ Meter, so ist der Raum, welcher während des Ueberganges aus der einen Geschwindigkeit in die andere zurückgelegt wird: $s = 6{,}171 - 1{,}275 = 4{,}896$ Meter.

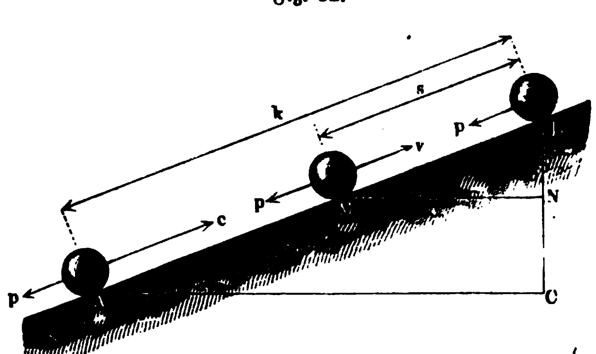
§. 18. **Das senkrechte Emporsteigen.** Setzt man in der Formel $s = \frac{c^2 - v^2}{2g}$ für das senkrechte Emporsteigen der Körper die Endgeschwindigkeit $v = 0$, so giebt s die größte Steighöhe

$$k = \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist folglich die der Anfangsgeschwindigkeit c entsprechende größte Steighöhe gleich der der Endgeschwindigkeit c zukommenden Fallhöhe k, und also auch $c = \sqrt{2gk}$ nicht allein die Endgeschwindigkeit für die freie Fallhöhe k, sondern auch die Anfangsgeschwindigkeit für die größte Steighöhe k, und es folgt daher noch, daß der senkrecht in die Höhe geworfene Körper an jeder Stelle diejenige Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gs}$ hat, die er, jedoch in umgekehrter Richtung, haben würde, wenn er von der noch übrigen Steighöhe s bis zu dieser Stelle frei herabgefallen wäre, die er also auch beim darauf folgenden Niederfallen dort wirklich besitzt.

Dasselbe Verhältniß findet natürlich auch bei jeder anderen gleichförmig beschleunigten Bewegung statt, z. B. bei einem auf einer geneigten Ebene AB, Fig. 52, hinaufsteigenden Körper A, welchen die Schwerkraft mit einer

Fig. 52.



gewissen von dem Neigungswinkel CAB abhängigen Acceleration p herab zu treiben sucht. Bei der Anfangsgeschwindigkeit c steigt der Körper auf die Höhe $AB = k = \frac{c^2}{2p}$, und hat an einem Ort M, welcher um $MB = s$ von

der höchsten Stelle B absteht, die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2ps}$, mit welcher er auch in M ankäme, wenn er beim Herabfallen den Weg $BM = s$ zurückgelegt hätte.

Beispiel. Ein Körper wird mit 15 Fuß Geschwindigkeit senkrecht emporgeworfen und trifft bei 2 Fuß Steighöhe auf ein elastisches Hinderniß, welches ihn momentan mit derselben Geschwindigkeit zurückwirft, mit welcher er aufschlägt. Wie groß ist nun diese Geschwindigkeit und wie groß ist die Zeit zum Steigen und Zurückfallen desselben? Der Anfangsgeschwindigkeit $c = 15$ Fuß entspricht die Steighöhe $k = 3{,}60$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe für den Augenblick des Anstoßes ist nun $h = 3{,}60 - 2{,}00 = 1{,}60$, und folglich diese Geschwindigkeit selbst $= 7{,}906 \sqrt{1{,}6} = 10$ Fuß. Die Zeit zum Steigen auf die ganze Höhe (3,6 Fuß) wäre: $t = 0{,}032 \,.\, c = 0{,}032 \,.\, 15 = 0{,}480$ Secunden, die Zeit zum Steigen auf die Höhe 1,6 Fuß aber: $t_1 = 0{,}032 \,.\, 10 = 0{,}320$ Secunden, es bleibt diesemnach die Zeit zum Steigen auf die Höhe von 2 Fuß oder die Zeit vom Anfang bis zum Anstoß: $t - t_1 = 0{,}480 - 0{,}320 = 0{,}160$ Secunden, also endlich die ganze Zeit zum Steigen und Fallen $= 2 \,.\, 0{,}160 = 0{,}320$ Secunden. Diese ist also nur der $\frac{0{,}320}{0{,}960}$ste = 3te Theil von der Zeit, welche zum Aufsteigen und Zurückfallen nöthig wäre, wenn der Körper unaufgehalten stiege und fiele. Dieser Fall findet beim Schmieden des glühenden Eisens seine Anwendung, weil es hier wegen des schnellen Abkühlens darauf ankommt, in einer kurzen Zeit so viel Hammerschläge wie möglich erfolgen zu lassen. Wenn der Hammer durch eine elastische Prallvorrichtung zurückgeworfen wird, so kann er unter den im Beispiele zum Grunde liegenden Verhältnissen in derselben Zeit ziemlich dreimal so viel Schläge thun als beim ungehinderten Aufsteigen.

Anmerkung 1. Das Umsetzen der Geschwindigkeit in Geschwindigkeitshöhe sowie auch das Umsetzen der letzteren in die erstere, ist ein in der praktischen Mechanik und namentlich in der Hydraulik sehr oft vorkommendes Geschäft. Eine Tafel, wodurch dasselbe in ein bloßes Nachschlagen verwandelt wird, leistet deshalb dem Praktiker sehr nützliche Dienste. Eine sich auf das preußische Fußmaß beziehende Tabelle dieser Art enthält der „Ingenieur“ Seite 326 bis 329.

Anmerkung 2. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind allerdings nur für den freien Fall im luftleeren Raume streng richtig; sie lassen sich jedoch auch beim freien Fall in der Luft mit einer noch erträglichen Genauigkeit gebrauchen, wenn die fallenden Körper in Beziehung auf ihr Volumen ein großes Gewicht haben, und wenn die Geschwindigkeiten nicht sehr groß ausfallen. Uebrigens werden sie auch noch unter anderen Umständen und Verhältnissen in vielen anderen Fällen gebraucht, wie sich in der Folge zeigen wird.

Ungleichförmige Bewegung überhaupt. Die Formel $s = ct$ (§. 5) für die gleichförmige Bewegung gilt auch für jede ungleichförmige Bewegung, wenn man statt t ein Zeitelement oder unendlich kleines Zeittheilchen τ, und statt s das innerhalb dieses Zeittheilchens zurückgelegte Raumelement σ setzt, da anzunehmen ist, daß innerhalb eines Augenblickes die Geschwindigkeit c, welche hier durch v bezeichnet werden soll, sich nicht ändert, also die Bewegung gleichförmig bleibt. §. 19.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper innerhalb 10 Secunden durch gleichförmig beschleunigte Bewegung eine Geschwindigkeit v von 26 Fuß erlangt hat, so ist der zu gleicher Zeit zurückgelegte Weg $s = \frac{26 . 10}{2} = 130$ Fuß. 2) Ein Wagen, welcher bei seiner gleichförmig beschleunigten Bewegung im Laufe von 7 Secunden 25 Meter zurückgelegt hat, geht am Ende mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 . 25}{7} = 7,14 .. \text{ Meter fort.}$$

§. 11. Die beiden Grundformeln der gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$\text{I.)} \quad v = pt$$

und

$$\text{II.)} \quad s = \frac{vt}{2},$$

welche ausdrücken, daß hier die Geschwindigkeit ein Product aus Acceleration und Zeit, und der Raum ein solches aus der halben Geschwindigkeit und Zeit ist, schließen noch zwei andere Hauptformeln in sich, die man erhält, wenn man aus beiden Gleichungen ein Mal v und ein zweites Mal t eliminirt. Es folgt nämlich:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{pt^2}{2}$$

und

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2}{2p}.$$

Hiernach ist also der gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg ein Product aus der halben Acceleration und dem Quadrate der Zeit, und auch der Quotient aus dem Quadrate der Endgeschwindigkeit und der doppelten Beschleunigung.

Diese vier Hauptformeln geben durch Umkehrung, je nachdem man die eine oder die andere der in ihnen enthaltenen Größen absondert, noch acht andere Formeln, und man findet dieselben im „Ingenieur" Seite 325 in einer Tabelle zusammengestellt.

Beispiele. 1) Ein mit der Acceleration 5 Meter bewegter Körper legt in 1,5 Secunde den Weg $\frac{5 . (1,5)^2}{2} = \frac{11,25}{2} = 5,625$ Meter zurück. 2) Ein durch die Acceleration $p = 4,5$ Fuß in die Geschwindigkeit $v = 16,5$ Fuß versetzter Körper hat den Raum $s = \frac{(16,5)^2}{2 . 4,5} = 30,25$ Fuß durchlaufen.

§. 12. Bei der Vergleichung von zwei verschiedenen gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit einander stößt man auf Folgendes:

Die Geschwindigkeiten sind $v = pt$ und $v_1 = p_1 t_1$, die Räume hingegen $s = \frac{pt^2}{2}$ und $s_1 = \frac{p_1 t_1^2}{2}$, es folgt hieraus:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{pt}{p_1 t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{pt^2}{p_1 t_1^2} = \frac{vt}{v_1 t_1} = \frac{v^2 p_1}{v_1^2 p}.$$

Setzt man nun $t_1 = t$, so erhält man:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{p}{p_1};$$

es verhalten sich also bei gleichen Zeiten die durchlaufenen Wege wie die Endgeschwindigkeiten, oder auch wie die Beschleunigungen.

Nimmt man ferner $p_1 = p$ an, so ergiebt sich:

$$\frac{v}{v_1} = \frac{t}{t_1} \text{ und } \frac{s}{s_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{v^2}{v_1^2};$$

bei gleichen Beschleunigungen und also auch bei einer und derselben gleichförmig beschleunigten Bewegung sind also die Endgeschwindigkeiten den Zeiten und die durchlaufenen Räume den Quadraten der Zeiten, oder auch den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional.

Ferner $v_1 = v$ angenommen, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1}{t}$ und $\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1}$; bei gleichen Endgeschwindigkeiten sind die Accelerationen den Zeiten umgekehrt, die Räume aber den Zeiten direct proportional.

Endlich $s_1 = s$ gesetzt, giebt $\frac{p}{p_1} = \frac{t_1^2}{t^2} = \frac{v^2}{v_1^2}$; es verhalten sich also bei gleichen Räumen die Accelerationen umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten und direct wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit. Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig beschleunigte Bewegung hat man nach §. 9: §. 13.

$$\text{I.)} \quad v = c + pt,$$

und da der unveränderlichen Geschwindigkeit c der Raum ct, der Acceleration p aber der Weg $\frac{pt^2}{2}$ zukommt:

$$\text{II.)} \quad s = ct + \frac{pt^2}{2}.$$

Entfernt man p aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} t,$$

und beseitigt man t, so stellt sich

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ heraus.}$$

Beispiele. 1) Ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 3$ Meter und mit der Acceleration $p = 5$ Meter bewegter Körper legt in 7 Secunden den Weg

$$s = 3 . 7 + 5 . \frac{7^2}{2} = 21 + 122{,}5 = 143{,}5 \text{ Meter zurück.}$$

2) Ein anderer Körper, welcher innerhalb 3 Minuten = 180 Secunden seine Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ Fuß in die von $7\frac{1}{2}$ Fuß umändert, macht in dieser Zeit den Weg von $\frac{2{,}5 + 7{,}5}{2} . 180 = 900$ Fuß.

§. 14. **Gleichförmig verzögerte Bewegung.** Für die mit der Geschwindigkeit c anfangende gleichförmig verzögerte Bewegung gelten die Formeln:

$$\text{I.)} \quad v = c - pt,$$

$$\text{II.)} \quad s = ct - \frac{pt^2}{2},$$

$$\text{III.)} \quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t,$$

$$\text{IV.)} \quad s = \frac{c^2 - v^2}{2p},$$

welche aus den Gleichungen des vorigen Paragraphen sogleich hervorgehen, wenn man darin p negativ setzt. Während bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung die Geschwindigkeit ohne Ende wächst, nimmt bei der gleichförmig verzögerten Bewegung die Geschwindigkeit bis zu einem gewissen Zeitpunkte ab, wird in demselben = Null, und fällt später negativ aus, d. h. es geht später die Bewegung in umgekehrter Richtung vor sich.

Setzen wir in der ersten Formel $v = 0$, so erhalten wir $pt = c$, also die Zeit, zu welcher die Geschwindigkeit Null geworden ist:

$$t = \frac{c}{p};$$

setzen wir endlich diesen Werth von t in die zweite Gleichung, so erhalten wir den Raum, welchen der Körper zu diesem Zeitpunkte zurückgelegt hat:

$$s = \frac{c^2}{2p}.$$

Ist die Zeit größer als $\frac{c}{p}$, so fällt der Raum kleiner als $\frac{c^2}{2p}$ aus; ist die Zeit $= \frac{2c}{p}$, so ist der Raum Null, es ist also der Körper nach seinem Ausgangspunkt zurückgekehrt; ist endlich die Zeit noch größer als $\frac{2c}{p}$, so ist s negativ, d. h. es befindet sich der Körper vom Anfangspunkte aus auf der entgegengesetzten Seite.

Beispiel. Ein Körper, welcher mit $c = 12$ Meter Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene hinaufrollt, durch welche er eine Verzögerung von 2 Meter pro Secunde erleidet, steigt nur $\frac{12}{2} = 6$ Secunden lang und $\frac{12^2}{2 \cdot 2} = 36$ Meter hoch, rollt dann zurück, kommt nach 12 Secunden mit 12 Meter Geschwindigkeit in den Anfangspunkt zurück und hat nach 15 Secunden den Weg $s = ct - \frac{p t^2}{2}$ $= 12 \cdot 15 - \frac{2 \cdot 15^2}{2} = 180 - 225 = 45$ Meter zurückgelegt, ist also 45 Meter unter den Anfangspunkt gelangt, wenn sich die Ebene auch abwärts fort erstreckt.

Freier Fall der Körper. Der freie oder senkrechte Fall der Körper im luftleeren Raume (franz. mouvement vertical des corps pesants; engl. vertical motion of bodies) giebt das wichtigste Beispiel der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die durch die Schwerkraft (franz. gravité; engl. gravity) erzeugte Acceleration dieser Bewegung bezeichnet man durch den Buchstaben g, und hat unter den mittleren Breitegraden von Europa den mittleren Werth von §. 15.

9,81 Meter,
30,20 pariser Fuß,
32,20 englischen Fuß,
31,03 wiener Fuß,
$31\frac{1}{4} = 31,25$ preußischen Fuß und
32,7 Schweizer- oder Meterfuß zu je 0,3 Meter.

Wenn man einen dieser Werthe statt g in die gefundenen Formeln:

$$v = gt, \; s = \frac{gt^2}{2} \text{ und } s = \frac{v^2}{2g}, \; v = \sqrt{2gs}$$

einführt, so kann man alle Fragen, welche sich in Ansehung des freien Falles der Körper vorlegen lassen, beantworten. Für das Metermaß ist:

$$v = 9,81 \cdot t = 4,429 \sqrt{s},$$
$$s = 4,905 t^2 = 0,0510 v^2 \quad \text{und}$$
$$t = 0,1019 v = 0,4515 \sqrt{s};$$

dagegen für das preußische Fußmaß:

$$v = 31,25 \cdot t = 7,906 \sqrt{s};$$
$$s = 15,625 \cdot t^2 = 0,016 v^2 \quad \text{und}$$
$$t = 0,032 v = 0,253 \sqrt{s}.$$

Beispiele. 1) Ein Körper erlangt beim ungehinderten Fallen in 4 Secunden die Geschwindigkeit $v = 31,25 \cdot 4 = 125$ Fuß und durchläuft in dieser Zeit den Weg $s = 15,625 \cdot 4^2 = 250$ Fuß. 2) Ein von der Höhe $s = 9$ Fuß herabgefallener Körper hat die Geschwindigkeit $v = 7,906 \cdot \sqrt{9} = 23,72$ Fuß. 3) Ein mit 10 Meter Geschwindigkeit vertical emporgeworfener Körper steigt auf die Höhe $s = 0,051 \cdot 10^2 = 5,1$ Meter und braucht dazu die Zeit:

$t = 0,1019 \cdot 10 = 1,019$ oder reichlich 1 Secunde.

§. 16. Wie sich beim freien Fall der Körper die Bewegungsverhältnisse im Laufe der Zeit gestalten, wird durch folgende Tabelle vor Augen geführt:

Zeit in Secunden	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Geschwindigkeit	0	$1g$	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$	$6g$	$7g$	$8g$	$9g$	$10g$
Weg	0	$1\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$25\frac{g}{2}$	$36\frac{g}{2}$	$49\frac{g}{2}$	$64\frac{g}{2}$	$81\frac{g}{2}$	$100\frac{g}{2}$
Differenzen . .	0	$1\frac{g}{2}$	$3\frac{g}{2}$	$5\frac{g}{2}$	$7\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	$11\frac{g}{2}$	$13\frac{g}{2}$	$15\frac{g}{2}$	$17\frac{g}{2}$	$19\frac{g}{2}$

Die letzte Horizontalcolumne dieser Tafel giebt die Wege an, welche der frei fallende Körper in den einzelnen Secunden durchläuft. Man sieht, daß sich diese Wege wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. w. zu einander verhalten, während die Zeiten und Geschwindigkeiten wie die natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4 u. s. w., und die Fallräume wie deren Quadrate 1, 4, 9, 16 u. s. w. wachsen. Hiernach ist z. B. die Geschwindigkeit nach 6 Secunden, $6g = 58{,}86$ Meter, d. h. der Körper würde, wenn er von dieser Zeit an gleichförmig fortginge, etwa auf einer ihm keine Hindernisse darbietenden Horizontalebene seine Bewegung fortsetzte, in jeder Secunde den Weg $6g = 58{,}86$ Meter durchlaufen. Diesen Raum durchläuft er im Laufe der folgenden oder siebenten Secunde aber nicht wirklich, sondern derselbe beträgt nach der letzten Columne genau $13 \cdot \frac{g}{2} = 13 \,.\, 4{,}905 = 63{,}765$ Meter; in der achten Secunde ist er sogar $15 \cdot \frac{g}{2} = 15 \,.\, 4{,}905 = 73{,}575$ Meter u. s. w.

Anmerkung. Aeltere deutsche Schriftsteller bezeichnen den Raum von 4,905 Meter = 15,625 Fuß, welcher vom frei fallenden Körper in der ersten Secunde durchlaufen wird, durch g und nennen ihn wohl auch Beschleunigung der Schwere. Sie haben dann für den freien Fall der Körper die Formeln:

$$v = 2gt = 2\sqrt{gs},$$

$$s = gt^2 = \frac{v^2}{4g},$$

$$t = \frac{v}{2g} = \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

Dieser nur in Deutschland vorkommende Gebrauch ist nun fast ganz verschwunden, aber beim Lesen älterer deutscher Werke über Physik und Mechanik, z. B. der Werke von Eytelwein, Gerstner u. s. w. zu beachten.

Der freie Fall mit einer Anfangsgeschwindigkeit. Geht der freie Fall der Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit (franz. vitesse initial; engl. initiale-velocity) c vor sich, so nehmen die Formeln folgende Formen an: §. 17.

$$v = c + gt = c + 9{,}81\,t \text{ Meter} = c + 31{,}25\,t \text{ Fuß},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 + 2gs} = \sqrt{c^2 + 19{,}62\,s} \text{ Meter} = \sqrt{c^2 + 62{,}5\,s} \text{ Fuß},$$

$$s = ct + \frac{g}{2}t^2 = ct + 4{,}905\,t^2 \text{ Meter} = ct + 15{,}625\,t^2 \text{ Fuß},$$

auch:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2g} = 0{,}0510\,(v^2 - c^2) \text{ Meter} = 0{,}016\,(v^2 - c^2) \text{ Fuß}.$$

Wird hingegen der Körper mit der Geschwindigkeit c senkrecht in die Höhe geworfen, so hat man:

$$v = c - gt = c - 9{,}81\,t \text{ Meter} = c - 31{,}25\,t \text{ Fuß},$$

auch:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gs} = \sqrt{c^2 - 19{,}62\,s} \text{ Meter} = \sqrt{c^2 - 62{,}5\,s} \text{ Fuß},$$

$$s = ct - \frac{g}{2}t^2 = ct - 4{,}905\,t^2 \text{ Meter} = ct - 15{,}625\,t^2 \text{ Fuß},$$

auch:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2g} = 0{,}051\,(c^2 - v^2) \text{ Meter} = 0{,}016\,(c^2 - v^2) \text{ Fuß}.$$

Betrachtet man eine gegebene Geschwindigkeit c als eine durch den freien Fall erlangte Endgeschwindigkeit, so nennt man den entsprechenden Fallraum

$$\frac{c^2}{2g} = 0{,}016\,.\,c^2 \text{ Fuß} = 0{,}0510\,c^2 \text{ Meter}.$$

die Geschwindigkeitshöhe (franz. hauteur due à la vitesse; engl. height due to velocity). Durch Einführung derselben lassen sich einige der obigen Formeln einfacher ausdrücken. Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{c^2}{2g}\right)$ von der Anfangsgeschwindigkeit c durch k und die der Endgeschwindigkeit $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$ durch h, so hat man für fallende Körper:

$$h = k + s \text{ und } s = h - k,$$

und für steigende:

$$h = k - s \text{ und } s = k - h.$$

Es ist also der Fall- oder Steigraum stets gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Beispiel. Sind bei einer gleichförmig veränderten Geschwindigkeit die Geschwindigkeiten 5 Meter und 11 Meter, also die Geschwindigkeitshöhen = 0,051 . 5^2 = 1,275 Meter und 0,051 . 11^2 = 6,171 Meter, so ist der Raum, welcher während des Ueberganges aus der einen Geschwindigkeit in die andere zurückgelegt wird: $s = 6{,}171 - 1{,}275 = 4{,}896$ Meter.

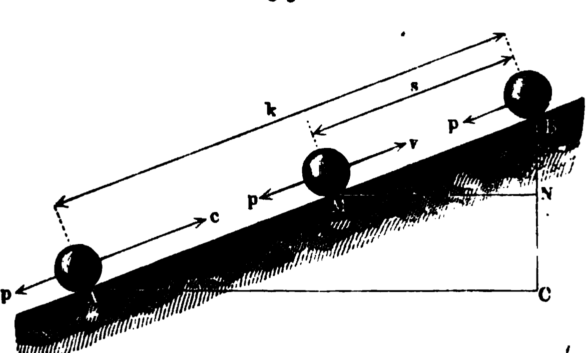
§. 18. **Das senkrechte Emporsteigen.** Setzt man in der Formel $s = \frac{c^2 - v^2}{2g}$ für das senkrechte Emporsteigen der Körper die Endgeschwindigkeit $v = 0$, so giebt s die größte Steighöhe

$$k = \frac{c^2}{2g}.$$

Es ist folglich die der Anfangsgeschwindigkeit c entsprechende größte Steighöhe gleich der der Endgeschwindigkeit c zukommenden Fallhöhe k, und also auch $c = \sqrt{2gk}$ nicht allein die Endgeschwindigkeit für die freie Fallhöhe k, sondern auch die Anfangsgeschwindigkeit für die größte Steighöhe k, und es folgt daher noch, daß der senkrecht in die Höhe geworfene Körper an jeder Stelle diejenige Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gs}$ hat, die er, jedoch in umgekehrter Richtung, haben würde, wenn er von der noch übrigen Steighöhe s bis zu dieser Stelle frei herabgefallen wäre, die er also auch beim darauf folgenden Niederfallen dort wirklich besitzt.

Dasselbe Verhältniß findet natürlich auch bei jeder anderen gleichförmig beschleunigten Bewegung statt, z. B. bei einem auf einer geneigten Ebene AB, Fig. 52, hinaufsteigenden Körper A, welchen die Schwerkraft mit einer

Fig. 52.



gewissen von dem Neigungswinkel CAB abhängigen Acceleration p herab zu treiben sucht. Bei der Anfangsgeschwindigkeit c steigt der Körper auf die Höhe $AB = k = \frac{c^2}{2p}$, und hat an einem Ort M, welcher um $MB = s$ von

der höchsten Stelle B absteht, die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2ps}$, mit welcher er auch in M ankäme, wenn er beim Herabfallen den Weg $BM = s$ zurückgelegt hätte.

Beispiel. Ein Körper wird mit 15 Fuß Geschwindigkeit senkrecht emporgeworfen und trifft bei 2 Fuß Steighöhe auf ein elastisches Hinderniß, welches ihn momentan mit derselben Geschwindigkeit zurückwirft, mit welcher er aufschlägt. Wie groß ist nun diese Geschwindigkeit und wie groß ist die Zeit zum Steigen und Zurückfallen desselben? Der Anfangsgeschwindigkeit $c = 15$ Fuß entspricht die Steighöhe $k = 3{,}60$ Fuß, die Geschwindigkeitshöhe für den Augenblick des Anstoßes ist nun $h = 3{,}60 - 2{,}00 = 1{,}60$, und folglich diese Geschwindigkeit selbst $= 7{,}906 \sqrt{1{,}6} = 10$ Fuß. Die Zeit zum Steigen auf die ganze Höhe (3,6 Fuß) wäre: $t = 0{,}032 \,.\, c = 0{,}032 \,.\, 15 = 0{,}480$ Secunden, die Zeit zum Steigen auf die Höhe 1,6 Fuß aber: $t_1 = 0{,}032 \,.\, 10 = 0{,}320$ Secunden, es bleibt diesemnach die Zeit zum Steigen auf die Höhe von 2 Fuß oder die Zeit vom Anfang bis zum Anstoß: $t - t_1 = 0{,}480 - 0{,}320 = 0{,}160$ Secunden, also endlich die ganze Zeit zum Steigen und Fallen $= 2 \,.\, 0{,}160 = 0{,}320$ Secunden. Diese ist also nur der $\frac{0{,}320}{0{,}960}$te $=$ 3te Theil von der Zeit, welche zum Aufsteigen und Zurückfallen nöthig wäre, wenn der Körper unaufgehalten stiege und fiele. Dieser Fall findet beim Schmieden des glühenden Eisens seine Anwendung, weil es hier wegen des schnellen Abkühlens darauf ankommt, in einer kurzen Zeit so viel Hammerschläge wie möglich erfolgen zu lassen. Wenn der Hammer durch eine elastische Prallvorrichtung zurückgeworfen wird, so kann er unter den im Beispiele zum Grunde liegenden Verhältnissen in derselben Zeit ziemlich dreimal so viel Schläge thun als beim ungehinderten Aufsteigen.

Anmerkung 1. Das Umsetzen der Geschwindigkeit in Geschwindigkeitshöhe sowie auch das Umsetzen der letzteren in die erstere, ist ein in der praktischen Mechanik und namentlich in der Hydraulik sehr oft vorkommendes Geschäft. Eine Tafel, wodurch dasselbe in ein bloßes Nachschlagen verwandelt wird, leistet deshalb dem Praktiker sehr nützliche Dienste. Eine sich auf das preußische Fußmaß beziehende Tabelle dieser Art enthält der „Ingenieur“ Seite 326 bis 329.

Anmerkung 2. Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln sind allerdings nur für den freien Fall im luftleeren Raume streng richtig; sie lassen sich jedoch auch beim freien Fall in der Luft mit einer noch erträglichen Genauigkeit gebrauchen, wenn die fallenden Körper in Beziehung auf ihr Volumen ein großes Gewicht haben, und wenn die Geschwindigkeiten nicht sehr groß ausfallen. Uebrigens werden sie auch noch unter anderen Umständen und Verhältnissen in vielen anderen Fällen gebraucht, wie sich in der Folge zeigen wird.

Ungleichförmige Bewegung überhaupt. Die Formel $s = ct$ (§. 5) für die gleichförmige Bewegung gilt auch für jede ungleichförmige Bewegung, wenn man statt t ein Zeitelement oder unendlich kleines Zeittheilchen τ, und statt s das innerhalb dieses Zeittheilchens zurückgelegte Raumelement σ setzt, da anzunehmen ist, daß innerhalb eines Augenblickes die Geschwindigkeit c, welche hier durch v bezeichnet werden soll, sich nicht ändert, also die Bewegung gleichförmig bleibt. §. 19.

Man hat demnach für jede **ungleichförmige Bewegung**:

$$\text{I.)}\quad \sigma = v\tau, \text{ sowie } v = \frac{\sigma}{\tau} \text{ (vergl. §. 10).}$$

Es ist also die Geschwindigkeit (v) **für jeden Augenblick durch den Quotienten aus dem Raum- und aus dem Zeitelemente bestimmt.**

Ebenso ist die Formel $v = pt$ (§. 11) für die gleichförmig beschleunigte Bewegung auch für jede ungleichförmige Bewegung überhaupt giltig, wenn man statt t und v das Zeitelement τ und den innerhalb desselben erlangten unendlich kleinen Geschwindigkeitszuwachs $\varkappa$ substituirt, da sich die Beschleunigung p innerhalb eines Augenblickes τ nicht angebbar verändert, also die Bewegung während desselben als gleichförmig beschleunigt angesehen werden kann.

Hiernach hat man für alle Bewegungen:

$$\text{II.)}\quad \varkappa = p\tau, \text{ sowie } p = \frac{\varkappa}{\tau}.$$

Es ist also die **Acceleration** (p) **für jeden Augenblick der Bewegung gleich dem Quotienten aus dem Geschwindigkeits- und dem entsprechenden Zeitelemente.**

Setzt man die ganze Bewegungszeit $t = n\tau$, und die Geschwindigkeiten in den einzelnen Zeittheilen τ, der Reihe nach $v_1, v_2, v_3 \,..\, v_n$, so sind die entsprechenden Wegelemente $\sigma_1 = v_1\tau,\ \sigma_2 = v_2\tau,\ \sigma_3 = v_3\tau \,..,\ \sigma_n = v_n\tau$; und es ist daher der ganze in der Zeit t zurückgelegte Weg

$$s = (v_1 + v_2 + \cdot\cdot + v_n)\tau = \left(\frac{v_1 + v_2 + \cdot\cdot\cdot + v_n}{n}\right) n\tau, \text{ d. i.:}$$

$$\text{I.*)}\quad s = \left(\frac{v_1 + v_2 + \cdot\cdot + v_n}{n}\right) t = vt,$$

wenn $v = \frac{v_1 + v_2 + \cdot\cdot + v_n}{n}$, **die mittlere Geschwindigkeit** bei Zurücklegung des Weges s bezeichnet.

Ebenso ist, wenn c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit bezeichnet, und $p_2, p_2 \ldots p_n$ die Accelerationen in den stetig auf einander folgenden gleichen Zeitelementen τ sind,

$$v - c = (p_1 + p_2 + \cdot\cdot + p_n)\tau = \left(\frac{p_1 + p_2 + \cdot\cdot + p_n}{n}\right) n\tau,$$

d. i.:

$$\text{II*)}\quad v - c = \left(\frac{p_1 + p_2 + \cdot\cdot + p_n}{n}\right) t = pt,$$

wenn $p = \frac{p_1 + p_2 + \cdot\cdot + p_n}{n}$ die **mittlere Acceleration** bezeichnet.

Durch Verbindung der Formeln I. und II. erhält man folgende nicht minder wichtige Gleichung:

$$\text{III.}\quad v\varkappa = p\sigma.$$

Nimmt bei Durchlaufung des Weges $s = n\sigma$, die Acceleration nach und nach die Werthe $p_1, p_2, \ldots p_n$ an, so ist die Summe der Producte $p\sigma$,

$$= (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)\sigma = \left(\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}\right) n\sigma$$

$$= \left(\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}\right) s = ps,$$

wenn p die mittlere Acceleration bezeichnet. Und geht die Anfangsgeschwindigkeit c durch wiederholtes Wachsen um $\varkappa = \frac{v - c}{n}$ in die Endgeschwindigkeit v über, so ist die Summe der Producte $v\varkappa$:

$$c\varkappa + (c + \varkappa)\varkappa + \cdots + (v - \varkappa)\varkappa + v\varkappa = [c + (c + \varkappa) + \cdots + (v - \varkappa) + v]\varkappa$$

$$= (v + c)\frac{n\varkappa}{2} = \frac{(v + c)(v - c)}{2} = \frac{v^2 - c^2}{2},$$

und daher zu setzen:

$$\text{III.*)}\quad \frac{v^2 - c^2}{2} = ps, \text{ oder } s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ (vergl. IV. §. 13).}$$

Auch ist die Zeit, in welcher der Raum $s = n\sigma$ mit der veränderlichen Geschwindigkeit $v_1, v_2, \ldots v_n$ zurückgelegt wird,

$$\text{IV.*)}\ t = \sigma\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots \frac{1}{v_n}\right) = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{s}{v},$$

wenn der Werth $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{v}$ gesetzt, also dessen Reciproke v als die mittlere Geschwindigkeit angesehen wird.

Ebenso ist die Zeit, innerhalb welcher bei der veränderlichen Acceleration $p_1, p_2, \ldots p_n$ die Geschwindigkeit c in v übergeht,

$$\text{V.*)}\ t = \frac{v - c}{n}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right) = \frac{v - c}{p},$$

wenn $p = \frac{1}{n\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)}$ die mittlere Acceleration bezeichnet.

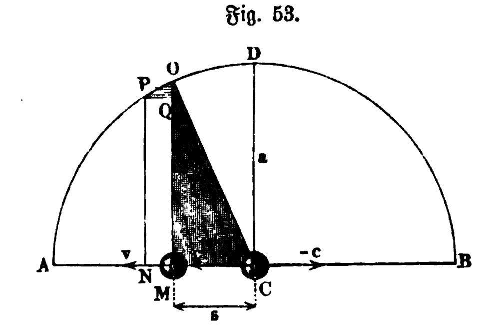
Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich die vielfachsten Aufgaben der Phoronomie und Mechanik lösen.

Beispiel. Wenn sich ein Körper nach dem Gesetze $v = at^2$ bewegt, so ist $v + \varkappa = a(t + \tau)^2 = a(t^2 + 2t\tau + \tau^2)$, also $\varkappa = a\tau(2t + \tau)$, folglich $p = \frac{\varkappa}{\tau} = 2at$.

Die Geschwindigkeiten des Körpers am Ende der Zeiten $\tau, 2\tau, 3\tau \, . \, . \, n\tau$ sind
$$a\tau^2, a(2\tau)^2, a(3\tau)^2 \, . \, . \, a(n\tau)^2,$$
und es folgt daher der durchlaufene Weg nach $t = n\tau$ Secunden:
$$s = [a\tau^2 + a(2\tau)^2 + \, . \, . \, a(n\tau)^2]\tau = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \, . \, . + n^2)\, a\tau^3,$$
oder da nach §. 15, IV., der analytischen Hülfslehren, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \, . \, . + n^3 = \frac{n^3}{3}$ ist:
$$s = \frac{n^3}{3} a\tau^3 = \frac{a}{3}(n\tau)^3 = \frac{at^3}{3}.$$

§. 20. **Das einfache Schwingungsgesetz.** Mit Hülfe der vorstehenden phoronometrischen Formeln lassen sich die Bewegungsverhältnisse schwingender Körper wie folgt entwickeln. Das Gesetz, welches denselben zum Grunde liegt, wird durch die Formel
$$p = -\mu s,$$
in welcher μ einen constanten Factor oder Coefficienten bezeichnet, ausgedrückt. Bezeichnet c die Anfangsgeschwindigkeit, sowie v die variable Geschwindigkeit des bewegten Körpers M, in dem Augenblicke, wenn er den Weg $\overline{CM} = s$ (Fig. 53) zurückgelegt hat, so läßt sich nach Formel III.*) des vorigen Paragraphen setzen:
$$\frac{v^2 - c^2}{2} = -ps = -\mu s \, . \, s.$$

Fig. 53.



Nun ist aber der Mittelwerth der Acceleration $p = \mu s$, $\frac{\mu s}{2}$, daher hat man einfach:
$$v^2 - c^2 = -\mu s^2,$$
oder
$$v^2 = c^2 - \mu s^2,$$
und
$$v = \sqrt{c^2 - \mu s^2}.$$

Hiernach nimmt während der Bewegung des Körpers von C nach A die Geschwindigkeit v desselben immer mehr und mehr ab, und es ist dieselbe Null, wenn $\mu s^2 = c^2$, oder $s\sqrt{\mu} = c$, d. i. wenn der Körper den Weg
$$\overline{CA} = a = \frac{c}{\sqrt{\mu}}$$
zurückgelegt hat. Führt man den Werth $\mu a^2 = c^2$ in den obigen Ausdruck ein, so erhält man: $v = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - s^2}.$

Nun ist $\sqrt{a^2 - s^2}$ = der Ordinate $\overline{MO}$, eines mit dem Halbmesser $\overline{CA} = \overline{CO} = \overline{CD} = a$ beschriebenen Kreises, daher folgt auch:

$$v = \frac{c}{a} \cdot \overline{MO}.$$

Das Wegelement $\overline{MN} = \sigma = v\tau$, welches im Zeitelemente τ durchlaufen wird, ist die Projection PQ eines Bogenelementes OP, und läßt sich wegen Aehnlichkeit der Dreiecke COM und POQ setzen:

$$\sigma = \frac{PO.MO}{CO} = \frac{PO.MO}{a} = \frac{PO.v}{c};$$

hiernach ist

$$\tau = \frac{\sigma}{v} = \frac{PO}{c},$$

und es folgt die ganze Zeit, innerhalb welcher sich der Körper von C nach A bewegt,

$$t_1 = \frac{\text{Summe aller Bogenelemente}}{c} = \frac{\text{Quadrant } DA}{c},$$

d. i.:

$$t_1 = \frac{\pi a}{2c} = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

Dieselbe Zeit ist auch zu dem darauf folgenden Rückgang des Körpers nöthig, wobei die Geschwindigkeit desselben wieder von Null bis c stetig wächst. Nach der Zeit $t_2 = 2t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ gelangt der Körper auf die andere Seite von C und durchläuft hier in denselben Zeiten den Weg $CB = a$ hin und zurück, so daß schließlich die Zeit eines vollständigen Spieles oder Hin- und Rückganges

$$2t_2 = 4t_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \text{ ausfällt.}$$

Dem variablen Weg $\overline{CM} = s$ entspricht ein Bogen $DO = a\beta$, für welchen

$$sin.\beta = sin.DCO = sin.COM = \frac{CM}{CO} = \frac{s}{a},$$

ist, daher hat man:

$$\beta = arc.\left(sin. = \frac{s}{a}\right),$$

sowie

$$DO = a\,arc.\left(sin. = \frac{s}{a}\right)$$

und die Zeit zum Durchlaufen des Weges s:

$$t = \frac{DO}{c} = \frac{a}{c}\, arc.\left(sin. = \frac{s}{a}\right),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, arc.\left(sin. = \frac{s\sqrt{\mu}}{c}\right).$$

Umgekehrt folgt aus der Zeit t:

1) $s = \frac{c}{\sqrt{\mu}}\, sin.\,(t\sqrt{\mu}) = a\, sin.\left(\frac{ct}{a}\right)$,

ferner

$$v = \sqrt{c^2 - [c\, sin.\,(t\sqrt{\mu})]^2} = c\sqrt{1 - (sin.\, t\sqrt{\mu})^2},$$

d. i.:

2) $v = c\, cos.\,(t\sqrt{\mu}) = c\, cos.\left(\frac{ct}{a}\right)$,

und

3) $p = -\, c\sqrt{\mu}\,.\, sin.\,(t\sqrt{\mu}) = -\,\frac{c^2}{a}\, sin.\left(\frac{ct}{a}\right) = -\,\mu s.$

Anfangs, also für $t = 0$, ist $s = 0$, $v = c$ und $p = 0$, später für $t\sqrt{\mu} = \frac{\pi}{2}$, oder $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$ ist $s = \frac{c}{\sqrt{\mu}}$, $v = 0$ und $p = -\sqrt{\mu}$, ferner für

$t\sqrt{\mu} = \pi$, oder $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$, $s = 0$, $v = -\,c$ und $p = 0$,

ebenso für

$t\sqrt{\mu} = {}^3/_2\pi$, oder $t = \frac{3\pi}{2\sqrt{\mu}}$, $s = -\,\frac{c}{\sqrt{\mu}}$, $v = 0$ und $p = c\sqrt{\mu}$,

und für

$t\sqrt{\mu} = 2\pi$, oder $t = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, wieder $s = 0$, $v = c$ und $p = 0$.

Der bewegte Punkt hat folglich eine schwingende Bewegung auf beiden Seiten des festen Anfangspunktes C, zu welchem er jedes Mal nach Zurücklegung des Weges $a = \pm\,\frac{c}{\sqrt{\mu}}$, mit der von Null allmälig bis $v = \pm\, c$ wachsenden Geschwindigkeit zurückkehrt.

(§. 21.) **Phoronometrische Differenzial- und Integralformeln.** Die allgemeinen Bewegungsformeln, welche im vorstehenden Paragraphen entwickelt worden sind, nehmen im Gewande der Differenzial- und Integralrechnung, wo man das Zeitelement τ durch ∂t, das Wegelement σ durch ∂s und das Geschwindigkeitselement $\varkappa$ durch ∂v bezeichnet, folgende Formeln an:

I.) $v = \frac{\partial s}{\partial t}$, oder $\partial s = v\partial t$, daher $s = \int v\partial t$, sowie $t = \int \frac{\partial s}{v}$.

II.) $p = \frac{\partial v}{\partial t}$, oder $\partial v = p \partial t$, daher $v = \int p \partial t$, sowie $t = \int \frac{\partial v}{p}$.

III.) $v \partial v = p \partial s$, oder $s = \int \frac{v \partial v}{p}$, sowie $\frac{v^2 - c^2}{2} = \int p \partial s$,

wenn c die Anfangs- und v die Endgeschwindigkeit bei Durchlaufung des Weges s bezeichnet.

Es ist also hiernach die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate gleich dem doppelten Integrale von dem Producte aus der Acceleration und dem Elemente ∂s, oder gleich dem doppelten Producte aus der mittleren Acceleration und dem Raume, welcher während des Ueberganges der Geschwindigkeit aus c in v zurückgelegt wird.

Der Lehre vom Größten und Kleinsten zufolge hat der Raum einen eminenten Werth, also die Bewegung ihre größte Extension erlangt, wenn:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v = \text{Null}$$

ist, und ist die Geschwindigkeit am größten oder kleinsten für:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p = \text{Null}.$$

Die vorstehenden Formeln bilden die Grundlage der höhern Phoronometrie und Mechanik.

Beispiele. 1) Aus der gegebenen Gleichung $s = 2 + 3t + t^2$ für den Raum folgt durch Differenziiren für die Geschwindigkeit die Gleichung $v = 3 + 2t$, und für die Acceleration $p = 2$; es ist also die letztere constant, und die Bewegung gleichförmig beschleunigt. Für $t = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Secunden hat man aber
$v = 3, 5, 7, 9 \ldots$ (Meter), und
$s = 2, 6, 12, 20 \ldots$ (Meter).

2) Aus der Formel $v = 10 + 3t - t^2$ für die Geschwindigkeit ergiebt sich durch Integriren die Gleichung $s = \int 10pt + \int 3t dt - \int t^2 dt = 10t + \frac{3}{2} - \frac{t^3}{3}$, dagegen durch Differenziiren die Formel $p = 3 - 2t$.

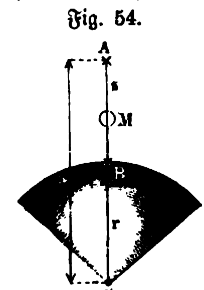
Hiernach ist für $3 - 2t - 0$, d. i. für $t = \frac{3}{2}$ Secunden, die Acceleration Null und die Geschwindigkeit ein Maximum ($v = 12\frac{1}{4}$), und für $10 + 3t - t^2 = 0$, d. i. $t = \frac{3}{2} + \sqrt{10 + \frac{9}{4}} = \frac{3 + 7}{2} = 5$ Secunden, die Geschwindigkeit Null und der Raum ein Maximum.

Für $t =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6	Secunden hat man
$p =$	3,	1,	-1,	-3,	-5,	-7,	-9	Meter,
$v =$	10,	12,	12,	10,	6,	0,	-8	Meter,
$s =$	0,	$11\frac{1}{6}$,	$23\frac{1}{3}$,	$34\frac{1}{2}$,	$42\frac{2}{3}$,	$45\frac{5}{6}$,	42	Meter.

Attractionsgesetz. Nach dem Attractionsgesetze wächst die Acceleration (§. 22.) der Schwere umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung CM des Körpers

M vom Mittelpunkt C der Erde (Fig. 54), hat daher dieselbe an der Erdoberfläche oder im Abstande $\overline{CB} = r$ vom Mittelpunkte C der Erde, die Größe g, so ist sie im Abstand $\overline{CA} = a$,

Fig. 54.



$$p_1 = \frac{g r^2}{a^2},$$

sowie im Abstande $CM = CA = a - s$,

$$p = \frac{g r^2}{(a - s)^2}$$

zu setzen. Nun hat man aber:

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = \int p \partial s,$$

daher folgt hier für die Endgeschwindigkeit v eines mit der Anfangsgeschwindigkeit c fallenden Körpers:

$$\frac{v^2 - c^2}{2g} = r^2 \int \frac{\partial s}{(a - s)^2} = r^2 \int (a - s)^{-2} \partial s = r^2 (a - s)^{-1} + Con.$$

$$= \frac{r^2}{a - s} + Con.$$

Da für $s = 0$, $v = c$ ist, so folgt $Con. = - \frac{r^2}{a}$ und schließlich

$$\frac{v^2 - c^2}{2g} = \frac{r^2}{a - s} - \frac{r^2}{a} = \frac{r^2 s}{a(a - s)},$$

oder

$$v^2 - c^2 = \frac{2 g r^2 s}{a(a - s)},$$

und

$$v = \sqrt{c^2 + \frac{2 g r^2 s}{a(a - s)}}.$$

Ist die Fallhöhe s im Vergleich zum Abstand a und dem Erdhalbmesser r klein, so kann man $a - s = a = r$, und daher $p = g$, sowie $s = \frac{v^2 - c^2}{2g}$ setzen, welches in den gewöhnlichen Fällen der praktischen Mechanik geschieht. Ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, so hat man einfach:

$$v = \sqrt{\frac{2 g r^2 s}{a(a - s)}},$$

und umgekehrt die Fallhöhe:

$$s = \frac{a^2 v^2}{2 g r^2 + a v^2}.$$

Die Fallzeit, innerhalb welcher der Körper den Weg s durchläuft, ist durch die Integralformel

$$t = \int \frac{\partial v}{v} = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \int \sqrt{\frac{a-s}{s}} \partial s$$

zu bestimmen.

Nun hat man nach der Reductionsformel in §. 28 der analyt. Hülfslehren:

$$\int \sqrt{\frac{a-s}{s}} \partial s = s\sqrt{\frac{a-s}{s}} - \int s \partial \sqrt{\frac{a-s}{s}}$$

$$= \sqrt{s(a-s)} + \int \frac{a \partial s}{2\sqrt{s(a-s)}},$$

auch läßt sich

$$\sqrt{s(a-s)} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - s\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{{}^1/_2 a - s}{{}^1/_2 a}\right)^2}$$

setzen, daher folgt die Fallzeit:

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left(\sqrt{s(a-s)} + \int \frac{\partial s}{\sqrt{1 - \left(\frac{{}^1/_2 a - s}{{}^1/_2 a}\right)^2}}\right).$$

Bezeichnet man $\frac{{}^1/_2 a - s}{{}^1/_2 a} = \frac{a - 2s}{a}$ durch u, so kann man

$\partial s = -\frac{a \partial u}{2}$, und

$$\int \frac{\partial s}{\sqrt{1 - \left(\frac{{}^1/_2 a - s}{{}^1/_2 a}\right)^2}} = -\frac{a}{2}\int \frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}} \text{ setzen.}$$

Endlich ist nach V, §. 26 der analyt. Hülfslehren:

$$-\int \frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}} = arc.(cos. = u),$$

daher folgt:

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left[\sqrt{s(a-s)} + \frac{a}{2}\, arc.\left(cos. = \frac{a-2s}{a}\right)\right].$$

Führt man $\frac{a-2s}{a} = cos. x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (s. IV., §. 27 der analyt. Hülfslehren) ein, so erhält man annähernd:

$$\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) = \frac{2s}{a},$$

daher den Bogen

$$x = 2\sqrt{\frac{s}{a}}\left(1 + \frac{s}{6a}\right),$$

und

$$\frac{a}{2}x = \frac{a}{2} arc.\left(cos. = \frac{a-2s}{a}\right) = \sqrt{sa}\left(1 + \frac{s}{6a}\right),$$

während sich

$$\sqrt{s(a-s)} = \sqrt{sa}\sqrt{1-\frac{s}{a}} = \sqrt{sa}\left(1-\frac{s}{2a}\right)$$

setzen läßt, daher ist die Fallzeit für eine kleine Fallhöhe s,

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\cdot\sqrt{sa}\left(1-\frac{s}{2a}+1+\frac{s}{6a}\right) = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{s}{2g}}\left(2-\frac{s}{3a}\right)$$

$$= \left(1-\frac{s}{6a}\right)\frac{a}{r}\sqrt{\frac{2s}{g}},$$

und endlich für eine sehr kleine Fallhöhe s, wobei $a = r$ gesetzt werden kann,

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}, \text{ sowie } s = \tfrac{1}{2}gt^2, \text{ wie bekannt.}$$

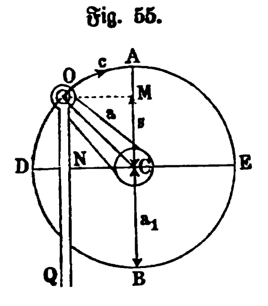
§. 23. **Mittlere Geschwindigkeit.** Von der Geschwindigkeit $v = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\partial s}{\partial t}$ für einen Augenblick oder während eines Zeitelementes $\tau = \partial t$ ist diejenige Geschwindigkeit $c_1 = \frac{s}{t}$ verschieden, welche sich ergiebt, wenn man den Raum, welcher während einer gewissen Zeit, z. B. während einer Periode einer periodischen Bewegung durchlaufen wird, durch die Zeit selbst dividirt. Man nennt dieselbe die mittlere Geschwindigkeit (franz. vitesse moyenne; engl. mean-velocity) und kann sie auch als diejenige Geschwindigkeit ansehen, die ein Körper haben müßte, um in einer gegebenen Zeit (t) einen gewissen Raum (s) gleichförmig zurückzulegen, welcher in Wirklichkeit in eben dieser Zeit ungleichförmig durchlaufen wird. So ist z. B. bei der gleichförmig veränderten Bewegung die mittlere Geschwindigkeit gleich der halben Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ aus der Anfangs- und Endgeschwindigkeit; denn es ist nach §. 13 der Raum gleich dieser Summe $\left(\frac{c+v}{2}\right)$ multiplicirt durch die Zeit (t).

Allgemein ist (nach §. 19) die mittlere Geschwindigkeit $c_1 = \frac{v_1+v_2+\cdots+v_n}{n}$, wenn $v_1, v_2, \ldots v_n$ eine gleichen und sehr kleinen Zeitintervallen entsprechende Geschwindigkeitsreihe bezeichnet.

Beispiel. Während eine Kurbel CO gleichförmig im Kreise $AEBD$, Fig. 55, herumgedreht wird, geht die daran hängende Last Q, z. B. der Kolben einer Luft- oder Wasserpumpe u. s. w., ganz ungleichförmig auf und nieder; die Geschwindigkeit dieser Last ist im tiefsten und höchsten Punkte A und B der Kurbelwarze am kleinsten, nämlich Null, auf der halben Höhe derselben, in D und E, aber am größten, nämlich der Kurbelgeschwindigkeit c gleich. Innerhalb einer halben Umdrehung ist die mittlere Geschwindigkeit gleich der ganzen Steighöhe,

d. i. dem Durchmesser AB des Kreises, in welchem die Kurbel herumgeht, dividirt durch die Zeit einer halben Umdrehung. Setzen wir den Halbmesser $CA = CO$ des Warzenkreises $= a$, also jenen Durchmesser $= 2a$, und diese Zeit $= t$, so folgt demnach die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2a}{t}$. Die Kurbel selbst macht in dieser Zeit den Halbkreis πa; es ist daher ihre Geschwindigkeit $c = \frac{\pi . a}{t}$ und folglich die mittlere Geschwindigkeit der Last $c_1 = \frac{2}{\pi} c = \frac{2}{3,141} c = 0,6366$mal so groß als die unveränderliche Geschwindigkeit c der Kurbel.

Fig. 55.



Während die Kurbelwarze von ihrem mittleren Stande D aus, bei der Drehung um den Winkel $DCO = \beta$, den Weg $DO = a\beta = ct$ in der Zeit t mit der unveränderlichen Geschwindigkeit c zurücklegt, macht die an ihr hängende Stange den Weg:

$$s = CM = NO = a \sin. \beta,$$

oder da $\beta = \frac{ct}{a}$ ist,

$$s = a \sin. \left(\frac{ct}{a}\right).$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit dem oben, §. 20, gefundenen Weg einer einfachen Schwingung überein, daher bewegt sich auch die Stange OQ der Kurbel CO, sowie die an ihr hängende Last auf dieselbe Weise, wie ein mit der Acceleration $p = -\mu s = -\left(\frac{c}{a}\right)^2 s$ schwingender Körper.

Endlich ist die mittlere Geschwindigkeit der Last beim Durchlaufen des Weges $s = a \sin. \beta$,

$$c_1 = \frac{s}{t} = \frac{c \sin. \beta}{\beta},$$

z. B. für $\beta^0 = 30$ Grad, oder $\beta = \frac{1}{6}\pi$, wobei $\sin. \beta = \frac{1}{2}$ ausfällt:

$$c_1 = \frac{3c}{\pi} = 0,95493\, c.$$

Graphische Darstellung der Bewegungsformeln. Die im Vorigen gefundenen Bewegungsgesetze lassen sich auch in geometrischen Figuren ausdrücken oder, wie man sagt, graphisch darstellen. Graphische Darstellungen überhaupt erleichtern die Auffassung, unterstützen das Gedächtniß, schützen wohl auch gegen Fehler und dienen sogar zuweilen zur unmittelbaren Ausmittelung der gesuchten Größen; sie sind deshalb der Mechanik von großem Nutzen. §. 24.

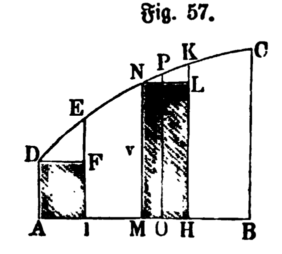
Bei der gleichförmigen Bewegung ist der Raum (s) das Product (ct) aus Geschwindigkeit und Zeit, und von einem Rechtecke der Geometrie ist der

Flächenraum ein Product aus Höhe und Grundlinie; man kann daher auch den gleichförmig durchlaufenen Raum s durch ein Rechteck $ABCD$, Fig. 56, darstellen, dessen Grundlinie AB die Zeit (t) und dessen Höhe $AD = BC$ die Geschwindigkeit (c) ist, vorausgesetzt, daß die Zeit mit der Geschwindigkeit in einerlei Längeneinheiten ausgedrückt, daß also durch eine und dieselbe Linie die Zeitsecunde und der Meter zugleich repräsentirt werden.

Fig. 56.

§. 25. Während bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit (MN) zu jeder anderen Zeit (AM) der Bewegung eine und dieselbe ist, fällt dieselbe bei der ungleichförmigen Bewegung in jedem Augenblicke anders aus; es läßt sich deshalb diese Bewegung nur durch ein Viereck $ABCD$, Fig. 57, darstellen, welches zur Grundlinie AB die Zeit (t) und zur übrigen Begrenzung drei andere Linien AD, BC und CD hat, von denen die ersten beiden der Anfangs- und Endgeschwindigkeit gleich sind, und die letzte durch die Endpunkte (N) der verschiedenen Geschwindigkeitswerthe in den Zwischenpunkten (M) geht. Nach den verschiedenen Arten von ungleichförmigen Bewegungen ist die vierte Linie CD entweder gerade oder krumm; ferner von Anfang aus aufsteigend oder niedersteigend, endlich entweder gegen die Grundlinie concav (hohl) oder convex (erhaben). In jedem Falle ist der ungleichförmig durchlaufene Raum (s) durch den Flächeninhalt dieser Figur zu messen; denn dieser Flächenraum $ABCD$, Fig. 57, läßt sich durch Höhenlinien in lauter schmale, als Rechtecke anzusehende Streifen wie $MOPN$ zerlegen, wovon jeder ein Product aus einem Theile (MO) der Grundlinie und aus der diesem Theile entsprechenden Höhe (MN) oder (OP) ist, und ebenso läßt sich der in einer gewissen Zeit durchlaufene Raum aus Theilchen zusammensetzen, wovon jedes ein Product aus einem Zeittheilchen und der während desselben stattfindenden Geschwindigkeit ist. Die Figur führt auch die Differenz zwischen dem Geschwindigkeitsmaß und dem in der folgenden Zeiteinheit wirklich zurückgelegten Weg vor Augen. Das Rechteck $ML = v \, . \, 1$ über der Grundlinie $MH =$ Eins (1) ist das Maß der Geschwindigkeit $MN = v$, wogegen die Fläche MK über derselben Grundlinie den wirklich durchlaufenen Raum darstellt. Ebenso ist das Rechteck AF über $\overline{A1} =$ Eins, das Maß der Anfangsgeschwindigkeit $AD = c$, dagegen die Fläche AE der in der ersten Secunde wirklich zurückgelegte Weg.

Fig. 57.



§. 26. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die Zu- oder Abnahme $v - c$ der Geschwindigkeit ($= pt$, §. 13) proportional der Zeit (t).

Ziehen wir nun in Fig. 58 und Fig. 59 die Linie DE der Grundlinie AB parallel, und schneiden wir dadurch von den die Geschwindigkeiten vorstellen-

Fig. 58.

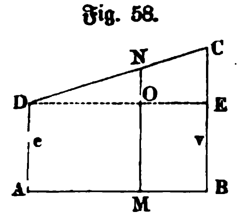
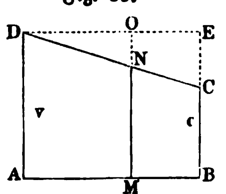


Fig. 59.



den Linien BC und MN die der Anfangsgeschwindigkeit AD gleichen Stücke BE und MO ab, so bleiben uns die Linien CE und NO als Geschwindigkeitszu- oder Geschwindigkeitsabnahmen übrig, für welche nach dem Obigen die Proportion:

$$NO : CE = DO : DE$$

gilt.

Eine solche Proportion bedingt, daß N und so auch jeder Punkt der Linie CD, in der geraden Verbindungslinie zwischen C und D liegen, daß also jene, die verschiedenen Geschwindigkeiten (MN) begrenzende Linie CD selbst, gerade sein muß.

Diesem zufolge läßt sich also der gleichförmig beschleunigt und gleichförmig verzögert durchlaufene Raum durch den Inhalt eines Trapezes $ABCD$ darstellen, das zur Höhe AB die Zeit (t) und zu den (parallelen) Grundlinien AD und BC die Anfangs- und Endgeschwindigkeit hat. Auch ist damit die §. 13 gefundene Formel $s = \frac{c + v}{2} \cdot t$ in vollkommener Uebereinstimmung. Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung steigt die vierte Seite DC vom Anfangspunkte an aufwärts, und bei der gleichförmig verzögerten Bewegung läuft diese Linie abwärts. Bei der mit Null Geschwindigkeit anfangenden gleichförmig beschleunigten Bewegung geht das Trapez in ein Dreieck vom Inhalte $\frac{1}{2} BC . AB = \frac{1}{2} vt$ über.

Die mittlere Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung ist der Quotient: Raum dividirt durch Zeit; sie giebt also mittelst Multiplication durch die Zeit, den Weg und läßt sich deshalb auch als die Höhe $AF = BE$ desjenigen Rechteckes $ABEF$, Fig. 60 (a. f. S.), ansehen, welches zur Grundlinie AB die Zeit t hat und an Inhalt dem den zurückgelegten Weg oder Raum messenden Vierecke $ABCND$ gleich ist. Die mittlere Geschwindigkeit ergiebt sich demnach auch durch Verwandlung des Viereckes $ABCND$ in ein gleich langes Rechteck $ABEF$. Ihre Bestimmung ist besonders bei periodischen Bewegungen, welche fast bei allen Maschinen vorkommen, von Wichtigkeit. Das Gesetz dieser Bewegungen wird durch eine §. 27.

Schlangenlinie $CDEFG$, Fig. 61, repräsentirt. Schneidet die mit AB parallel laufende Gerade LM denselben Raum wie die Schlangenlinie ab,

Fig. 60.

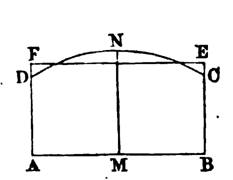
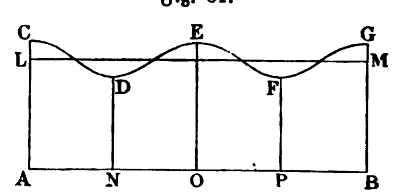


Fig. 61.



ist also LM gleichsam die Axe, um welche sich $CDEFG$ windet, so ist der Abstand $AL = BM$ zwischen beiden parallelen Linien AB und LM die mittlere Geschwindigkeit der periodischen Bewegung, dagegen AC, OE, BG u. s. w. die größte und ND, PF u. s. w. die kleinste Geschwindigkeit einer Periode AO, OB u. s. w.

§. 28. Auch die Acceleration oder der in der Zeitsecunde erfolgte Zusatz an Geschwindigkeit läßt sich in der Figur leicht nachweisen. Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist sie unveränderlich; sie ist deshalb die Differenz PQ, Fig. 62 und Fig. 63, zwischen zwei Geschwindigkeiten OP und

Fig. 62.

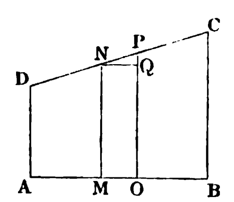
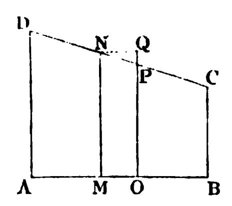


Fig. 63.



MN, wovon die eine einer um eine Secunde (MO) größeren Zeit angehört als die andere. Ist die Bewegung ungleichförmig verändert, also die Geschwindigkeitslinie CD eine Curve, so ist für jeden Zeitpunkt (M) die Acceleration eine andere, und deshalb ist sie auch nicht die wirkliche Differenz PQ zwischen den um eine Secunde MO von einander abstehenden Geschwindigkeiten OP und $MN = OQ$, Fig. 64 und 65, sondern sie ist die Zunahme RQ der Geschwindigkeit MN, welche eintreten würde, wenn von dem Augenblicke M an die Bewegung in eine gleichförmig beschleunigte, also die krumme Geschwindigkeitslinie NPC in eine gerade Linie NE überginge. Nun ist aber die Tangente oder Berührungslinie NE diejenige Gerade, in welche eine Curve DN weiter fortgeht, wenn sie von einer gewissen Stelle (N) an ihre Richtung unverändert beibehält; es fällt demnach die neue Geschwindigkeitslinie mit der Tangente zusammen, es ist ferner auch die bis zu dieser Linie gehende Höhenlinie OR die Geschwindigkeit, welche nach einer Secunde eintreten würde, wenn die Bewegung vom Anfang derselben an in eine gleich-

förmig beschleunigte übergegangen wäre, und endlich die Differenz QR zwischen dieser Geschwindigkeit OR und der anfänglichen MN, die Acceleration für den Augenblick, welcher dem Punkte M in der Zeitlinie AB entspricht.

Fig. 64.

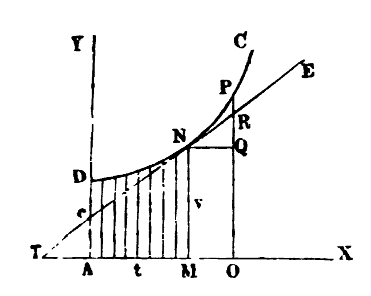
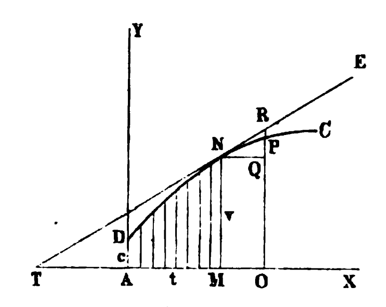


Fig. 65.



Dem Vorstehenden zu Folge lassen sich die vier Bewegungselemente: Zeit, Weg, Geschwindigkeit und Acceleration, durch eine ebene Curve wie DNC, Fig. 64 u. 65, graphisch darstellen, und zwar die Zeit t durch die Abscisse $AM = x$, die Geschwindigkeit v am Ende derselben durch die Ordinate $MN = y$, das Maaß des zurückgelegten Weges s durch die Fläche $AMND = S$ zwischen der Anfangsgeschwindigkeit $AD = c$ und der Endgeschwindigkeit $MN = v$, und endlich das Maaß der Acceleration p durch die trigonometrische Tangente des Winkels $MTN = \alpha$, welchen die Berührungslinie TE mit der Grundlinie oder Abscissenaxe AX einschließt.

Der Tangentenwinkel α und demselben entsprechend, auch die Acceleration p ist $=$ Null, also die Berührungslinie DE parallel zur Grundlinie AX, wenn die Geschwindigkeit v ihren größten oder kleinsten Werth hat, und ebenso ist die Geschwindigkeit $v =$ Null, an der Stelle, wo der Weg s einen Grenzwerth erreicht hat.

Man kann auch die Zeiten und Accelerationen als die Coordinaten einer Curve ansehen, in welchem Falle natürlich die Geschwindigkeiten durch Flächenräume repräsentirt werden.

Zweites Capitel.

Zusammengesetzte Bewegung.

§. 29. **Zusammensetzung der Bewegungen.** Ein und derselbe Körper kann gleichzeitig zwei oder mehrere Bewegungen besitzen; jede (relative) Bewegung besteht ja aus der Bewegung innerhalb eines Raumes und aus der Bewegung dieses Raumes innerhalb oder in Beziehung auf einen zweiten Raum. So besitzt schon jeder Punkt auf der Erde zwei Bewegungen; denn er läuft täglich einmal um die Erdaxe und mit dieser zugleich jährlich einmal um die Sonne. Eine auf dem Schiffe gehende Person hat in Beziehung auf die Ufer zwei Bewegungen, ihre eigene und die des Schiffes; das Wasser, welches durch eine Boden- oder Seitenöffnung eines Gefäßes ausfließt, das auf einem Wagen fortgefahren wird, hat zwei Bewegungen, die Bewegung aus dem Gefäße und die Bewegung mit dem Gefäße u. s. w.

Man unterscheidet hiernach einfache und zusammengesetzte Bewegungen. Einfach (franz. und engl. simple) sind die geradlinigen Bewegungen, aus welchen andere gerad- oder krummlinige Bewegungen, die man aber deswegen zusammengesetzte (franz. composés; engl. composed) nennt, bestehen oder bestehend gedacht werden können.

Die Zusammensetzung mehrerer einfachen Bewegungen zu einer einzigen und die Zerlegung einer zusammengesetzten Bewegung in mehrere einfache werden im Folgenden abgehandelt.

§. 30. Erfolgen die einfachen Bewegungen in einer und derselben geraden Linie, so giebt die Summe oder Differenz derselben die resultirende zusammengesetzte Bewegung, ersteres, wenn die Bewegungen nach gleichen Richtungen vor sich gehen, letzteres, wenn ihre Richtungen entgegengesetzt sind. Die Richtigkeit dieses Satzes leuchtet sogleich ein, wenn man die gleichzeitigen Räume der einfachen Bewegungen zu einem einzigen vereinigt. Den gleichförmigen Bewegungen mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 entsprechen die gleichzeitigen Räume $c_1 t$ und $c_2 t$; haben diese Bewegungen eine und dieselbe Richtung, so ist demnach der Raum nach t Secunden:

$$s = c_1 t + c_2 t = (c_1 + c_2)t,$$

und folglich ist die resultirende Geschwindigkeit, mit welcher die zusammengesetzte Bewegung vor sich geht, die Summe der Geschwindigkeiten von den einfachen Bewegungen. Bei entgegengesetzten Richtungen beider Bewegungen ist:

$$s = c_1 t - c_2 t = (c_1 - c_2)t,$$

hier ist also die resultirende Geschwindigkeit der Differenz der einfachen Geschwindigkeiten gleich.

Beispiele. 1) An einer Person, welche sich mit 4 Fuß Geschwindigkeit auf dem Verdecke eines Schiffes in der Bewegungsrichtung desselben fortbewegt, während das Schiff selbst 6 Fuß Geschwindigkeit hat, scheinen die Gegenstände an den Ufern mit 4 + 6 = 10 Fuß Geschwindigkeit vorbei zu gehen. 2) Das Wasser, welches aus der Seitenöffnung eines Gefäßes mit 10 Meter Geschwindigkeit ausfließt, während es mit dem Gefäße zugleich in der entgegengesetzten Richtung mit 3 Meter Geschwindigkeit fortgeht, hat in Beziehung auf die übrigen in Ruhe befindlichen Gegenstände nur 10 — 3 = 7 Meter Geschwindigkeit.

Dieselben Verhältnisse finden auch bei den ungleichförmigen Bewegungen statt. Hat ein und derselbe Körper außer den Anfangsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 noch die constanten Accelerationen p_1 und p_2, so sind die entsprechenden Räume $c_1 t$, $c_2 t$, $\frac{1}{2} p_1 t^2$, $\frac{1}{2} p_2 t^2$, und haben nun Geschwindigkeiten und Accelerationen eine gleiche Richtung, so ist der ganze Raum, welcher diesen einfachen Bewegungen entspricht: §. 31.

$$s = (c_1 + c_2)t + (p_1 + p_2)\frac{t^2}{2}.$$

Setzt man nun $c_1 + c_2 = c$ und $p_1 + p_2 = p$, so erhält man

Fig. 66.



$s = ct + p\frac{t^2}{2}$, und es folgt hiernach, daß nicht allein durch die Summe der einfachen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit, sondern auch durch die Summe der Accelerationen der einfachen Bewegungen die Acceleration der resultirenden oder zusammengesetzten Bewegung gegeben wird.

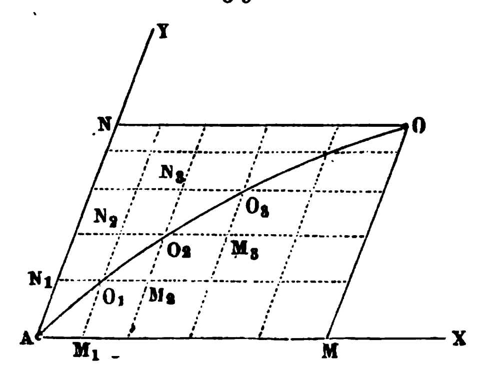
Beispiel. Ein Körper auf dem Monde erhält von der Mondmasse die Acceleration $p_1 = 5$ Fuß und von der Erde die Acceleration $p_2 = 0{,}01$ Fuß. Es fällt daher ein Körper A, Fig. 66, außerhalb des Mondes M und der Erde E, mit 5,01 Fuß, und ein Körper B innerhalb M und E, mit 4,99 Fuß Beschleunigung dem Mittelpunkte des Mondes zu.

Parallelogramm der Bewegungen. Hat ein Körper zwei in den Richtungen von einander abweichende Bewegungen zugleich, so nimmt er eine zwischen beiden inneliegende Bewegungsrichtung an, und sind diese Bewegungen ungleichartig, ist z. B. die eine gleichförmig und die andere gleichförmig beschleunigt, so ist die Richtung an jeder Stelle der Bewegung eine andere, die Bewegung selbst also eine krummlinige. §. 32.

Wenn ein Körper von einem Punkte A aus während eines Zeitelementes in der Richtung AX das Wegelement $AM_1 = x_1$, und in der Richtung AY das Wegelement $AN_1 = y_1$ zurücklegt (s. Fig. 67 a. f. S.), so ist der-

selbe am Ende dieses Zeitelementes in einem Punkte O_1, welcher in der Richtung AX um $N_1 O_1 = AM_1 = x_1$ von AY, und in der Richtung AY

Fig. 67.



um $M_1 O_1 = AN_1 = y_1$ von AX absteht; und wenn der Körper im zweiten Zeitelemente nach den angegebenen Richtungen die Wegelemente $O_1 M_2 = x_2$ und $O_1 N_2 = y_2$ durchläuft, so befindet sich derselbe am Ende dieser Zeit in einem Punkte O_2, welcher in der Richtung AX um $N_1 O_1 + N_2 O_2 = AM_1 + O_1 M_2 = x_1 + x_2$ von AY, sowie in der Richtung AY um $M_1 O_1 + M_2 O_2 = AN_1 + O_1 N_2 = y_1 + y_2$ von AX absteht. Sind ferner im dritten Zeitelemente die Wegelemente $O_2 M_3 = x_3$ und $O_2 N_3 = y_3$, so hat man die Abstände des Ortes O_3 am Ende dieses Zeitelementes:

$$N_1 O_1 + N_2 O_2 + N_3 O_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$

und

$$M_1 O_1 + M_2 O_2 + M_3 O_3 = y_1 + y_2 + y_3,$$

und es ist nun leicht zu ermessen, daß am Ende einer gewissen Zeit t der Ort O des bewegten Körpers von den Bewegungsrichtungen AY und AX um die Wege

$$NO = AM = x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots,$$

und

$$MO = AN = y = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$$

absteht, und daher den vierten Eckpunkt O eines Parallelogramms bildet, welches sich aus den beiden gleichzeitigen Wegen $AM = x$ und $AN = y$ und dem von den Richtungen derselben eingeschlossenen Winkel XAY construiren läßt.

Man gelangt auch zu demselben Resultat, wenn man sich vorstellt, daß der Raum $AM = x$ in einer Linie AX zurückgelegt werde, die mit allen ihren Punkten zugleich in der Richtung AY fortgeht, also auch M mit AY

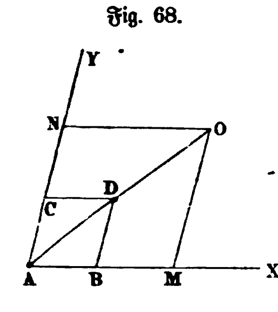
parallel fortführt und diesen Punkt den Weg $MO = AN = y$ beschreiben läßt.

Parallelogramm der Geschwindigkeiten. Erfolgen die beiden Bewegungen in den Richtungen AX und AY gleichförmig und mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2, so sind die Räume nach einer gewissen Zeit (t): §. 33.

$$x = c_1 t \text{ und } y = c_2 t;$$

es ist also ihr Verhältniß $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1}$ zu allen Zeiten dasselbe, eine Eigenthümlichkeit, die nur der geraden Linie AO, Fig. 68, zukommt. Es folgt also hieraus, daß die zusammengesetzte Bewegung in einer geraden Linie vor sich geht. Construirt man ferner aus den Geschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ das Parallelogramm $ABCD$, so giebt dessen vierter Eckpunkt den Ort D an, wo sich der Körper am Ende einer Secunde befindet. Da aber die resultirende Bewegung eine geradlinige ist, so folgt, daß diese überhaupt in der Richtung der Diagonale des aus den Geschwindigkeiten construirten Parallelogrammes vor sich geht. Bezeichnet man nun den Weg AO, welcher in der Zeit (t) wirklich zurückgelegt wird, durch s, so hat man wegen Aehnlichkeit der Dreiecke AMO und ABD:

Fig. 68.



$$\frac{s}{x} = \frac{AD}{AB},$$

es folgt demnach dieser Weg:

$$s = \frac{x . AD}{AB} = \frac{c_1 t . \overline{AD}}{c_1} = \overline{AD} . t.$$

Der letzten Gleichung zufolge ist der Weg in der Diagonale der Zeit (t) proportional, also die Bewegung selbst gleichförmig, ihre Geschwindigkeit c gleich der Diagonale AD.

Es giebt also die Diagonale eines aus zwei Geschwindigkeiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel gebildeten Parallelogrammes die Richtung und Größe derjenigen Geschwindigkeit an, mit welcher die resultirende Bewegung wirklich vor sich geht. Man nennt dieses Parallelogramm Parallelogramm der Geschwindigkeiten (franz. parallélogramme des vitesses; engl. parallelogram of velocities), die einfachen Geschwindigkeiten heißen auch wohl Componenten oder Seitengeschwindigkeiten (franz. composantes; engl. components)

und die zusammengesetzte Geschwindigkeit die **resultirende** oder **mittlere** (franz. resultante; engl. resultant).

§. 34. **Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.** Durch die Anwendung **trigonometrischer Formeln** läßt sich die Richtung und Größe der mittleren Geschwindigkeit auch rechnend finden. Die Auflösung von einem der gleichen Dreiecke, z. B. von ABD, aus denen das Parallelogramm $ABDC$ (Fig. 69) der Geschwindigkeiten besteht, giebt die mittlere Geschwindigkeit $AD = c$ aus den Seitengeschwindigkeiten $AB = c_1$ und $AC = c_2$ und aus dem von ihren Richtungen gebildeten Winkel $BAC = \alpha$ durch die Formel:

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + 2\,c_1\,c_2\,cos.\alpha},$$

Fig. 69.

und die Winkel $XAD = \alpha_1$ und $YAD = \alpha_2$, die die mittlere Geschwindigkeit mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 einschließt, durch die Formel:

$$sin.\alpha_1 = \frac{c_2\,sin.\alpha}{c}$$

und

$$sin.\alpha_2 = \frac{c_1\,sin.\alpha}{c}$$

oder

$$cotg.\alpha_1 = \frac{AE}{DE} = \frac{AB + BE}{DE} = \frac{c_1 + c_2\,cos.\alpha}{c_2\,sin.\alpha} = cotg.\alpha + \frac{c_1}{c_2\,sin.\alpha}.$$

Auch ist $tang.\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha_1\right) = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}\,tang.\,\frac{\alpha}{2}$ und

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{2} - \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha_1\right).$$

Sind die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 einander gleich, ist also das Parallelogramm derselben ein Rhombus, so ergiebt sich in Folge der Rechtwinkeligkeit zwischen den Diagonalen einfacher:

$$c = 2\,c_1\,cos.\,{}^1\!/_2\,\alpha \text{ und } \alpha_1 = \alpha_2 = {}^1\!/_2\,\alpha.$$

Schließen endlich die Geschwindigkeiten einen Rechtwinkel ein, so erhält man ebenfalls einfacher·

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } tang.\alpha_1 = \frac{c_2}{c_1}.$$

Beispiele. 1) Das aus einem Gefäße oder aus einer Maschine ausfließende Wasser hat eine Geschwindigkeit $c_1 = 25$ Fuß, während sich das Gefäß selbst mit einer Geschwindigkeit $c_2 = 19$ Fuß in einer Richtung bewegt, die mit der des ausfließenden Wassers einen Winkel $\alpha^0 = 130^0$ bildet. Welches ist die Richtung und Größe der resultirenden, oder wie man wohl sagt, der absoluten Geschwindigkeit des Wassers?

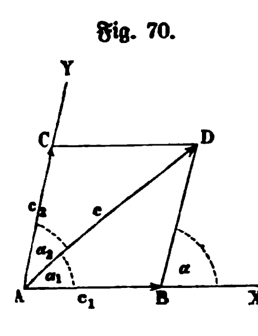
Es ist $c = \sqrt{25^2 + 19^2 + 2.25.19 \, cos. 130^0} = \sqrt{625 + 361 - 50.19. cos. 50^0}$
$= \sqrt{986 - 950 \, cos. 50^0} = \sqrt{986 - 610,7} = \sqrt{375,3} = 19,37$ Fuß
die gesuchte resultirende Geschwindigkeit.

Ferner $sin. \alpha_1 = \frac{19 \, sin. 130^0}{19,37} = 0,9808 \; sin. \; 50^0 = 0,7513$, und sonach der Winkel, um welchen die Resultirende von der Geschwindigkeit c_1 abweicht, $\alpha_1 = 48^0 \, 42'$, also der Winkel, welchen sie mit der Bewegungsrichtung des Geschützes einschließt: $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 81^0 \, 18'$.

2) Wären die vorigen Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander gerichtet, so würde $cos. \alpha = cos. 90^0 = 0$, und deshalb die mittlere Geschwindigkeit $c = \sqrt{986} = 31,40$ Fuß sein; für ihre Richtung wäre $tang. \alpha_1 = {}^{19}/_{25} = 0,76$, daher die Abweichung derselben von der ersten Geschwindigkeit: $\alpha_1 = 37^0 \, 14'$, sowie $\alpha_2 = 90^0 - 37^0 \, 14' = 52^0 \, 46'$.

Zerlegung der Geschwindigkeiten. Man kann auch jede gegebene Geschwindigkeit aus zwei Seitengeschwindigkeiten bestehend ansehen, und deshalb, gewissen Bedingungen entsprechend, in solche zerlegen. Sind z. B. die Winkel $DAX = \alpha_1$ und $DAY = \alpha_2$, Fig. 70, gegeben, welche die zu suchenden Geschwindigkeiten mit der mittleren $AD = c$ einschließen sollen, so ziehe man durch den Endpunkt D der die c vorstellenden Graden andere Linien parallel zu den Richtungen AX und AY: die sich ergebenden Durchschnittspunkte B und C schneiden nun die gesuchten Geschwindigkeiten §. 35.

Fig. 70.



$$AB = c_1 \text{ und } AC = c_2 \text{ ab.}$$

Die Trigonometrie giebt diese Geschwindigkeiten durch die Formeln:

$$c_1 = \frac{c \, sin. \alpha_2}{sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}, \; c_2 = \frac{c \, sin. \alpha_1}{sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

In vielen Fällen der Anwendung sind die beiden Geschwindigkeiten winkelrecht gegen einander gerichtet, dann ist also $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, $sin. (\alpha_1 + \alpha_2) = 1$, und es folgt:

$$c_1 = c \, . \, cos. \alpha_1 = c \, . \, sin. \alpha_2 \text{ und } c_2 = c \, sin. \alpha_1 = c \, cos. \alpha_2.$$

Uebrigens kann auch aus einer Seitengeschwindigkeit (c_1) und ihrem Richtungswinkel (α_1) die Richtung und Größe der anderen Seitengeschwindigkeit gefunden werden. Endlich lassen sich auch aus den Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 ihre Richtungswinkel bestimmen, wie man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Winkel desselben findet.

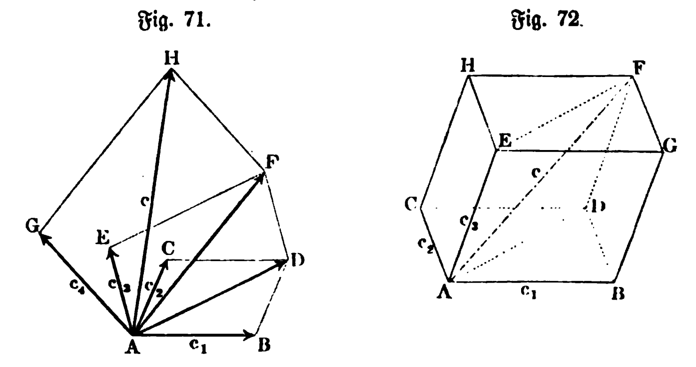
Beispiel. Es sei die Geschwindigkeit $c = 10$ Meter in zwei Seitengeschwindigkeiten zu zerlegen, deren Richtungen um die Winkel $\alpha_1 = 65^0$ und $\alpha_2 = 70^0$ von ihrer Richtung abweichen. Diese Geschwindigkeiten sind:

$$c_1 = \frac{10 sin.70^0}{sin.135^0} = \frac{9,397}{sin.45^0} = 13,29 \text{ Fuß u. } c_2 = \frac{10 sin.65^0}{sin.135^0} = \frac{9,063}{0,7071} = 12,81 \text{ Meter.}$$

§. 36. **Polygon und Parallelepiped der Geschwindigkeiten.** Durch wiederholte Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten läßt sich jede beliebige Anzahl von Geschwindigkeiten in eine einzige Geschwindigkeit verwandeln. Die Construction des Parallelogrammes $ABDC$ (Fig. 71) giebt die mittlere Geschwindigkeit AD zu c_1 und c_2; durch Construction des Parallelogramms $ADFE$ erhält man in AF die mittlere Geschwindigkeit zu AD und $AE = c_3$, und ebenso stellt sich durch Construction des Parallelogrammes $AFHG$ die mittlere Geschwindigkeit $AH = c$ von AF und $AG = c_4$, und dadurch auch die von c_1, c_2, c_3 und c_4 heraus.

Am einfachsten ergiebt sich die in Frage stehende mittlere Geschwindigkeit durch Construction des Polygones $ABDFH$ der Geschwindigkeiten, dessen Seiten AB, BD, DF und FH den gegebenen Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 und c_4 parallel und gleich gemacht werden, und dessen letzte Seite AH allemal die resultirende Geschwindigkeit ist.

Fig. 71. Fig. 72.

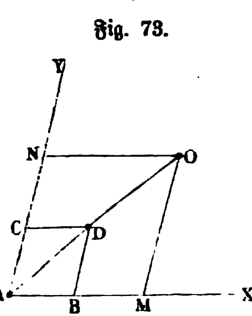


Auch in dem Falle, wenn die Geschwindigkeitsrichtungen nicht in einerlei Ebene liegen, läßt sich die mittlere Geschwindigkeit durch mehrfache Anwendung des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten finden. Die mittlere Geschwindigkeit $AF = c$ (Fig. 72) von drei nicht in einer Ebene befindlichen Geschwindigkeiten $AB = c_1$, $AC = c_2$ und $AE = c_3$ ist die Diagonale eines Parallelepipeds $BCHG$, dessen Seiten diesen Geschwindigkeiten gleich sind. Man spricht daher wohl auch von einem Parallelepiped der Geschwindigkeiten.

§. 37. **Zusammensetzung der Accelerationen.** Zwei gleichförmig beschleunigte und mit Null Geschwindigkeit anfangende Bewegungen geben in ihrer Zusammensetzung wieder eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der geraden Linie. Bezeichnet man die Accelerationen dieser nach

den Richtungen AX und AY (Fig. 73) vor sich gehenden Bewegungen durch p_1 und p_2, so sind am Ende der Zeit t die Räume:

Fig. 73.



$$AM = x = \frac{p_1 t^2}{2}$$

und

$$AN = y = \frac{p_2 t^2}{2},$$

und es ist ihr Verhältniß

$$\frac{x}{y} = \frac{p_1 t^2}{p_2 t^2} = \frac{p_1}{p_2}$$

von der Zeit gar nicht abhängig, deshalb also der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung ein geradliniger. Macht man $AB = p_1$, und $BD = AC = p_2$, so erhält man ein Parallelogramm $ABDC$, welches dem Parallelogramm $AMON$ ähnlich und für welches

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{1}{2} p_1 t^2}{p_1} = \frac{1}{2} t^2, \text{ alſo } AO = \frac{1}{2} \overline{AD} . t^2 \text{ ist.}$$

Dieser Gleichung zufolge ist der Weg AO der zusammengesetzten Bewegung dem Quadrate der Zeit proportional, die Bewegung selbst also **gleichförmig beschleunigt**, und die Acceleration derselben die Diagonale AD des aus den einfachen Accelerationen p_1 und p_2 construirten Parallelogramms.

So wie man also durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten Geschwindigkeiten zusammensetzt und zerlegt, ebenso lassen sich nach genau denselben Regeln durch ein Parallelogramm, welches man das **Parallelogramm der Accelerationen** (franz. parallélogramme des accélérations; engl. parallelogram of accelerations) nennt, Accelerationen zu einer einzigen vereinigen, sowie in mehrere andere zerlegen.

Zusammensetzung von Geschwindigkeiten und Accelerationen. Aus der **Vereinigung** von einer **gleichförmigen Bewegung** mit einer **gleichförmig beschleunigten** geht eine gänzlich ungleichförmige Bewegung hervor, wenn die Bewegungsrichtungen nicht zusammenfallen. Während einer gewissen Zeit t wird in der einen Richtung AX, Fig. 74, mit Null Anfangsgeschwindigkeit und der unveränderlichen Acceleration p der Weg §. 38.

$$AM = x = \frac{pt^2}{2},$$

und in der Richtung AY, welche um den Winkel $XAY = \alpha$ von der Richtung AX abweicht, mit der constanten Geschwindigkeit c gleichzeitig der Weg

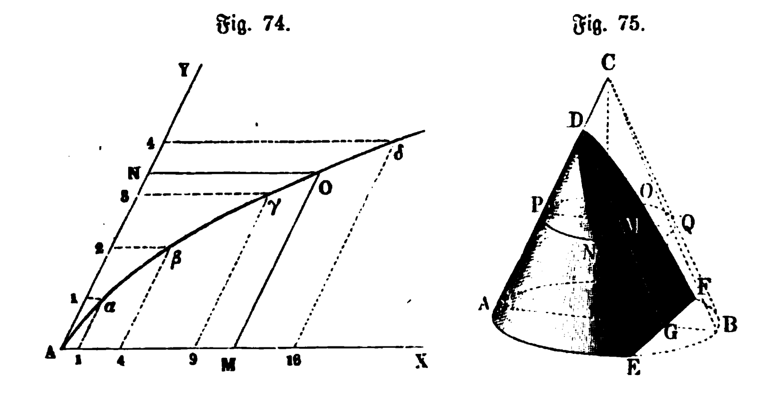
$$AN = y = ct$$

zurückgelegt, und es ist daher der auf diese Weise bewegte Körper am Ende der Zeit t im vierten Eckpunkt O des aus $x = \frac{pt^2}{2}$ und $y = ct$ construirten Parallelogramms angelangt. Mit Hülfe dieser Formeln läßt sich zwar der Ort des Körpers für jeden Augenblick finden, aber derselbe liegt nicht mehr in einer geraden Linie, sondern gehört einer Curve an, deren Gleichung durch Elimination der Zeit t gefunden wird, und zwar, indem man $t = \frac{y}{c}$ aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung $x = \frac{pt^2}{2}$ einsetzt. Auf diese Weise folgt die Gleichung der Bahn des Körpers:

$$x = \frac{py^2}{2c^2}, \text{ oder } y^2 = \frac{2c^2x}{p}.$$

Dieser zufolge verhalten sich die Wege (x) in der zweiten Bewegungsrichtung nicht wie die Wege selbst, sondern wie die Quadrate (y^2) der Wege in der

Fig. 74. Fig. 75.



ersten Bewegungsrichtung, und es ist deshalb der Weg des Körpers auch keine gerade, sondern eine gewisse krumme Linie, welche man in der Geometrie unter dem Namen die Parabel (franz. parabole; engl. parabola) kennen lernt.

Während sich beispielsweise die Wege in der Richtung AY wie die Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. zu einander verhalten, stehen die Wege in der Richtung AX in den quadratischen Verhältnissen 1, 4, 9, 16 u. s. w. zu einander und sind die Eckpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. der aus je zwei dieser Wege gebildeten Parallelogramme Punkte in der parabolischen Bahn AO des bewegten Körpers.

Anmerkung. Es sei ABC, Fig. 75, ein Kegel mit kreisförmiger Basis $AEBF$, sowie DEF ein Schnitt desselben parallel zur Seitenlinie BC und winkelrecht zum Durchschnitt ABC geführt, und $OPNQ$ ein zweiter, mit der

Basis paralleler und deswegen ebenfalls kreisförmiger Durchschnitt. Es sei ferner EF die Durchschnittslinie zwischen der Basis und dem ersten Schnitte, und ON die zwischen beiden Schnitten; denken wir uns endlich im triangulären Durchschnitte ABC die parallelen Durchmesser AB und PQ und im Schnitte DEF die Axe DG geführt. Alsdann gilt für die halbe Kreissehne $MN = MO$ die Gleichung $\overline{MN}^2 = PM . MQ$; aber MQ ist $= GB$ und für PM gilt die Proportion $PM : DM = AG : DG$, es ergiebt sich daher:

$$MN^2 = BG \cdot \frac{DM \cdot AG}{DG}.$$

Ebenso ist aber auch $GE^2 = BG . AG$; dividirt man daher beide Gleichungen durch einander, so folgt:

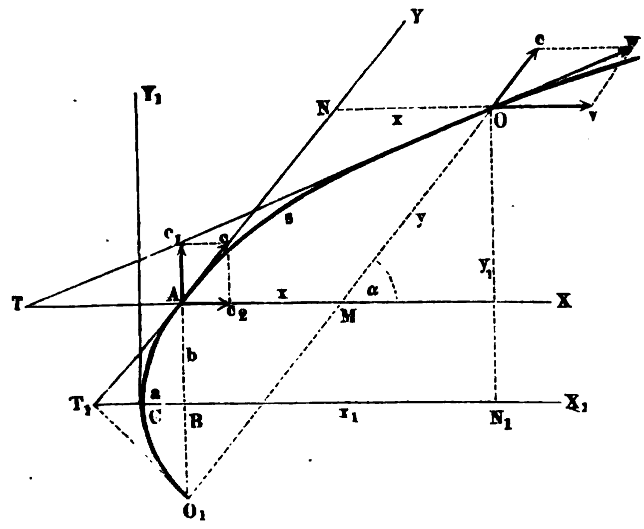
$$\frac{DM}{DG} = \frac{\overline{MN}^2}{\overline{GE}^2};$$

es verhalten sich also die auf der Axe abgeschnittenen Stücke (Abscissen), wie die Quadrate der entsprechenden Perpendikel (Ordinaten). Dieses Gesetz stimmt mit dem oben gefundenen Bewegungsgesetze vollkommen überein; es geht also diese Bewegung in einer krummen Linie DNE vor sich, welche einem Kegelschnitte angehört.

Ueber die Construction, Tangentenlage und andere Eigenschaften der Parabel ist im Ingenieur Seite 175 u. s. w. nachzusehen.

Parabelbewegung. Um die aus der Zusammensetzung von Geschwindigkeit und Acceleration hervorgehende Bewegung vollständig zu kennen, muß man auch noch die Richtung, Geschwindigkeit und den durchlaufenen Weg für jede Zeit (t) angeben können. Die Geschwindigkeit parallel zu AY ist unveränderlich $= c$, die parallel zu AX aber unveränderlich v und zwar $v = pt$; construirt man nun aus den Geschwindigkeiten c und v für einen Punkt O der Bahn das Parallelogramm $Ocwv$, Fig. 76, so erhält §. 39.

Fig. 76.



man in der Diagonale w desselben die mittlere oder die veränderliche Geschwindigkeit, mit welcher der bewegte Körper die parabolische Bahn AO durchläuft. Diese Geschwindigkeit ist:

$$w = \sqrt{c^2 + v^2 + 2cv cos.\alpha} = \sqrt{c^2 + 2cpt cos.\alpha + (pt)^2} \text{ (s. §. 34),}$$

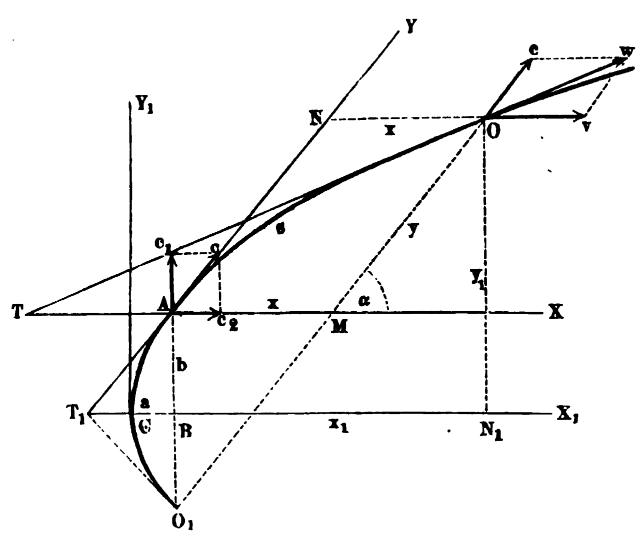
wobei α den Winkel $XAY = vOc$ bezeichnet, welchen die Richtungen AX und AY der Bewegungen zwischen sich einschließen. Die Richtung dieser Geschwindigkeit ist zugleich die Tangente der parabolischen Bahn AO in O, daher sie auch Tangentialgeschwindigkeit genannt wird. Für den Winkel $vOw = XTO = \theta$, welchen die Tangentialgeschwindigkeit w mit der Axenrichtung AX einschließt, hat man die bekannten Formeln

$$sin.\theta = \frac{c sin.\alpha}{w}$$

und

$$cotang.\theta = \frac{v + c cos.\alpha}{c sin.\alpha} = cotg.\alpha + \frac{v}{c sin.\alpha} = cotg.\alpha + \frac{pt}{c sin.\alpha}.$$

Fig. 77.



Auch ist

$$\frac{MT}{MO} = \frac{v}{c},$$

daher die sogenannte Subtangente:

$$MT = \frac{v}{c} MO = \frac{pt}{c} y = pt^2 = 2 \frac{pt^2}{2},$$

d. i.: $$Subtang. MT = 2x = 2AM.$$

Um endlich noch den Raum oder Curvenbogen $AO = s$ zu finden, kann man sich der Formel $\sigma = w\tau$ (§. 19) bedienen, wonach sich die Elemente σ aus dem Zeitelemente τ und den verschiedenen Werthen der Tangentialgeschwindigkeit berechnen lassen. Es ist hiernach:

$$s = (w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n)\tau$$
$$= (w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n)\frac{t}{n},$$

wenn die Zeit der Bewegung mit t bezeichnet und die Anzahl der Zeitelemente $= n$ angenommen, also $\tau = \frac{t}{n}$ gesetzt wird. Uebrigens giebt die Formel

$$w = \sqrt{c^2 + 2cpt\cos.\alpha + (pt)^2}$$

die verschiedenen Werthe $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$, wenn man darin der Reihe nach $t = \tau, 2\tau, 3\tau \ldots n\tau$ setzt.

Auch hat man $t = \frac{y}{c}$ und

$$w = \sqrt{c^2 + 2py\cos.\alpha + \left(\frac{py}{c}\right)^2}.$$

Nach der Simpson'schen Regel kann man den mittleren Geschwindigkeitswerth

$$w = \frac{w_0 + 4w_1 + 2w_2 + 4w_3 + \cdots 4w_{n-1} + w_n}{3n}$$

setzen und hiernach den parabolischen Weg

$$s = wt \text{ berechnen.}$$

Uebrigens giebt die höhere Geometrie einen complicirten logarithmisch-trigonometrischen Ausdruck für die Länge eines Parabelbogens (s. weiter unten, Artikel Kettenlinie).

Mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Formeln kann man aus der gegebenen Geschwindigkeit c, der Acceleration p und dem Winkel α zwischen den Bewegungsrichtungen für jede Zeit t die Coordinaten des Orts, die Bewegungsrichtung und die Geschwindigkeiten, sowie annäherungsweise auch die Länge des von dem bewegten Körper zurückgelegten Weges berechnen. Da nun aber der letztere eine gemeine Parabel ist, so hat man noch den Scheitel derselben zu ermitteln, sowie die orthogonalen Coordinaten des bewegten Punktes anzugeben. §. 40.

Aus der gefundenen Gleichung $y^2 = \frac{2c^2x}{p}$, oder $y = c\sqrt{\frac{2x}{p}}$ folgt sogleich, daß jeder Abscisse $AM = x$, zwei gleiche entgegengesetzte Ordinaten $+y$ und $-y$ angehören, daß folglich die Richtung AX der Acceleration

zugleich die Richtung der durch den Scheitel C gehenden Hauptaxe CX_1, der parabolischen Bahn des bewegten Punktes sei. Die Anfangsgeschwindigkeit c desselben läßt sich in die Componenten $c_1 = c\,sin.\,\alpha$ und $c_2 = c\,cos.\,\alpha$ zerlegen, wovon der letztere als eine in einer gewissen Zeit t_0 durch die Acceleration p erzeugte Geschwindigkeit anzusehen ist und sich daher $= pt_0$ setzen läßt. Sind nun a und b die gesuchten orthogonalen Coordinaten CB und BA des Punktes A in Hinsicht auf den Parabelscheitel C, so hat man daher:

$$b = c_1 t_0 = c t_0\,sin.\,\alpha$$

und

$$a = \frac{pt_0\,.\,t_0}{2} = \frac{c\,cos.\,\alpha\,.\,t_0}{2} = \frac{c t_0\,cos.\,\alpha}{2},$$

oder, $t_0 = \frac{c\,cos.\,\alpha}{p}$ eingesetzt:

$$b = \frac{c^2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}{p} = \frac{c^2\,sin.\,2\,\alpha}{2p},$$

und

$$a = \frac{c^2 (cos.\,\alpha)^2}{2p} = {}^1/_2\, b\,cotang.\,\alpha.$$

Mißt man nun die orthogonalen Coordinaten $CN_1 = x_1$ und $N_1 O = y_1$ vom Scheitel C aus, und rechnet man ebenso die Zeit t_1 vom Abgang in C an, so hat man zu setzen:

$$x_1 = \frac{pt_1^2}{2}$$

und

$$y_1 = c_1 t_1 = c\,sin.\,\alpha\,.\,t_1 = c t_1\,sin.\,\alpha,$$

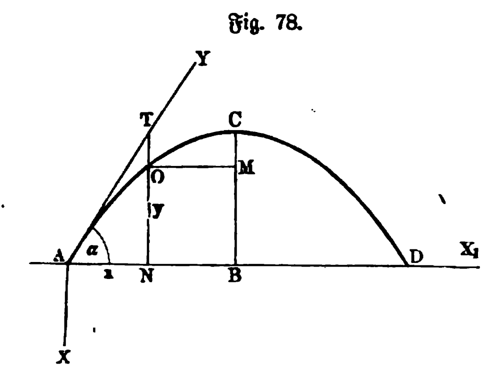
daher auch

$$x_1 = \frac{py_1^2}{2\,c^2 (sin.\,\alpha)^2},\ \text{sowie}\ y_1 = c\,sin.\,\alpha \sqrt{\frac{2\,x}{p}}.$$

Anmerkung. Die seither abgehandelte Theorie der parabolischen, aus einer unveränderlichen Geschwindigkeit und einer constanten Acceleration hervorgehenden Bewegung findet ihre Anwendung in der Ballistik, oder der Lehre von der Wurfbewegung. Die schief auf- oder abwärts geworfenen Körper würden in Folge ihrer Anfangsgeschwindigkeit (c) und der Acceleration der Schwere ($g = 9{,}81$ Meter oder $31^1/_4$ Fuß) einen Parabelbogen durchlaufen, wenn der Widerstand der Luft beseitigt wäre, oder die Bewegung im luftleeren Raume vor sich ginge. Ist die Wurfgeschwindigkeit nicht groß, dagegen die Dichtigkeit des geworfenen Körpers bedeutend, so fällt die Abweichung von der Parabel klein genug aus, um dieselbe ganz vernachlässigen zu können. Am vollkommensten wird noch die parabolische Bahn an springenden Wasserstrahlen, wie sie sich beim Ausflusse aus Gefäßen, bei Spritzen u. s. w. bilden, vorgefunden. Abgeschossene Körper, wie z. B. Geschützkugeln, beschreiben in Folge des großen Luftwiderstandes, von der Parabel bedeutend abweichende Bahnen.

Wurfbewegung. Ein unter dem Elevationswinkel $X_1 A Y = \alpha$ (Fig. 78) abgeschossener Körper steigt auf eine gewisse Höhe $B C$, welche die **Wurfhöhe** (franz. hauteur du jet; engl. height of projection) genannt wird, und er erreicht beim Herabfallen die Horizontalebene, von der er in A ausgegangen ist, in einer Entfernung $A D$, welche die **Wurfweite** (franz. amplitude du jet; engl. range of projection) heißt. §. 41.

Fig. 78.



Aus der Geschwindigkeit c, der Acceleration g der Schwere und dem Elevationswinkel α folgt der Weg in der Wurfrichtung,

$$\overline{AT} = ct,$$

sowie der Weg in der Fallrichtung

$$\overline{TO} = \frac{g t^2}{2},$$

daher sind die horizontalen und verticalen Projectionen der Bahn $A O$ des geworfenen Körpers:

$$\overline{AN} = \overline{AT} cos.\alpha, \text{ d. i. } x = ct cos.\alpha,$$

und

$$\overline{NO} = \overline{AT} sin.\alpha - \overline{TO}, \text{ d. i. } y = ct sin.\alpha - \frac{g t^2}{2}.$$

Auch folgt, wenn man $t = \frac{x}{c cos.\alpha}$ in die zweite Gleichung einsetzt:

$$y = x \frac{sin.\alpha}{cos\,\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{c cos.\alpha}\right)^2,$$

oder

$$y = x\, tang.\alpha - \frac{g x^2}{2 c^2}\left[1 + (tang.\alpha)^2\right],$$

da sich

$$\frac{sin\,\alpha}{cos.\,\alpha} = tang.\alpha$$

und

$$\frac{1}{(cos.\alpha)^2} = 1 + (tang.\alpha)^2$$

setzen läßt.

Für $y = 0$ ist x entweder auch $= 0$, oder $=$ der **Wurfweite** AD, und zwar

$$x = \frac{2c^2}{g}(cos.\alpha)^2 \, tang.\alpha = \frac{2c^2}{g} sin.\alpha \, cos.\alpha = \frac{c^2}{g} sin. 2\alpha,$$

folglich die **halbe Wurfweite**:

$$\overline{AB} = \tfrac{1}{2}\overline{AD} = a = \frac{c^2}{2g} sin. 2\alpha.$$

Auch ergiebt sich, wenn man in der Gleichung

$$y = x \, tang.\alpha - \frac{g x^2}{2c^2(cos.\alpha)^2},$$

$a = \frac{x}{2} = \frac{c^2}{g} sin.\alpha \, cos.\alpha$ einsetzt

$$y = \frac{c^2}{g}(sin.\alpha)^2 - \frac{c^2}{2g}(sin.\alpha)^2,$$

d. i. die **Wurfhöhe**:

$$b = \frac{c^2}{2g}(sin.\alpha)^2.$$

Letztere ist ein Maximum mit $sin.\alpha = 1$, also beim senkrechten Wurf, und zwar $= \frac{c^2}{2g}$; erstere ist dagegen ein Maximum mit $sin. 2\alpha = 1$, also für $2\alpha = 90^0$, d. i. für $\alpha = 45^0$. Bei dem Elevationswinkel $\alpha = 45^0$ fällt also die Wurfweite $2a$ am größten, und zwar $= \frac{c^2}{g} = 2\frac{c^2}{2g}$, d. i. doppelt so groß als die größte senkrechte Steighöhe aus, auch folgt, da $sin. 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, die entsprechende Wurfhöhe

$$b = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{2g} = \tfrac{1}{4}\frac{c^2}{g},$$

d. i. gleich ein Viertel der entsprechenden Wurfweite.

Giebt man der Gleichung

$$y = x \, tang.\alpha - \frac{g x^2}{2c^2}[1 + (tang.\alpha)^2]$$

die Form

$$(tang.\alpha)^2 - \frac{2c^2}{gx} tang.\alpha = -\left(1 + \frac{2c^2 y}{g x^2}\right),$$

und löſ't dieselbe in Hinsicht auf $tang.\alpha$ auf, so erhält man die Gleichung:

$$tang.\alpha = \frac{c^2}{gx} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{gx}\right)^2 - \left(1 + \frac{2c^2 y}{g x^2}\right)},$$

welche diejenige Größe des Wurfwinkels α angiebt, bei welchem ein durch die Coordinaten x und y gegebenes Ziel O erreicht wird.

Ist $\left(\frac{c^2}{gx}\right)^2 = \frac{1 + 2c^2y}{gx^2}$, oder $c^4 - 2gc^2y = g^2x^2$, daher

$$c = \sqrt{g(y + \sqrt{x^2 + y^2})},$$

so fällt einfach $tang.\,\alpha = \frac{c^2}{gx}$ aus, und dann wird das Ziel am höchsten Punkte oder im Scheitel der Wurflinie erreicht.

Kleinere Werthe von c machen $tang.\,\alpha$ imaginär, größere Werthe führen dagegen auf zwei Werthe von $tang.\,\alpha$; im ersteren Falle ist das Ziel gar nicht zu erreichen, im zweiten wird es dagegen sowohl beim Aufsteigen, als auch beim Niederfallen des Geschosses getroffen.

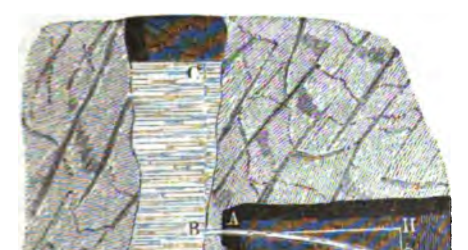
Beispiele. 1) Ein unter dem Elevationswinkel von 66° mit 20 Fuß Geschwindigkeit aufsteigender Wasserstrahl, dem also die Geschwindigkeitshöhe $k = 0{,}016 \, . \, 20^2 = 6{,}4$ Fuß zukommt, steigt auf die Höhe $a = h \, sin.\,\alpha^2 = 6{,}4\,(sin.\,66^0)^2 = 5{,}34$ Fuß und hat die Wurf- oder Sprungweite $2b = 2 \, . \, 6{,}4 \, sin.\,132^0 = 2 \, . \, 6{,}4 \, sin.\,48^0 = 9{,}51$ Fuß. Die Zeit, welche jedes Wassertheilchen braucht, um den ganzen Parabelbogen ACD (Fig. 78) zu durchlaufen, ist $t = \frac{2c\,sin.\,\alpha}{g} = \frac{2 \, . \, 20 \, . \, sin.\,66^0}{31{,}25} = 1{,}17$ Secunde. Die Höhe, welche dem Horizontalabstande $AN = x = 3$ Fuß entspricht, ist

$$y = 3 \, . \, tang.\,66^0 - \frac{31{,}25 \, . \, 9}{2 \, . \, 400 \, . \, (cos.\,66^0)^2} = 6{,}738 - \frac{0{,}35156}{0{,}16543}$$

$$= 6{,}738 - 2{,}125 = 4{,}613 \text{ Fuß}.$$

2) Man hat durch ein Bohrloch AB, Fig. 79, in einen alten Grubenbau CD eingeschlagen, und es kommt das darin angesammelte Wasser durch das Bohrloch zum Abfluß. Um nun den Wasserstand in dem Grubenbau zu ermitteln, ist die halbe Sprungweite $AH = a$ und die zugehörige Sprunghöhe $HO = b$ des Wasserstrahls, welcher sich in den freien Raum der Strecke E ergießt, gemessen worden. Die Formeln $a = ct$ und

Fig. 79.



$$b = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{a}{c}\right)^2,$$

führen auf den Ausdruck

$$c = a\sqrt{\frac{g}{2b}}$$

für die gesuchte Ausflußgeschwindigkeit, und wenn der Geschwindigkeitsverlust, welchen das Wasser beim Durchfluß durch das Bohrloch erleidet, vernachlässigt wird, so ist der Wasserstand oder die Höhe des Wasserspiegels im Grubenbau über der Bohrlochsmündung:

$$h = \frac{c^2}{2g} = \frac{a^2}{4b}.$$

Mißt z. B. bei der Sprungweite $a = 6$ Meter und die Sprunghöhe $b = 0{,}35$ Meter, so ist der gesuchte Wasserstand im alten Grubenbau:

$$h = \frac{6^2}{4\,.\,0{,}35} = \frac{36}{1{,}4} = 25{,}71 \text{ Meter},$$

während die Ausflußgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2gh} = \sqrt{19{,}62\,.\,25{,}71} = 22{,}46 \text{ Meter}$$

beträgt, und das stündlich abfließende Wasserquantum

$$Q = 3600\,Fc = 3600\,.\,0{,}0019635\,.\,22{,}46 = 158{,}8 \text{ Cubikmeter}$$

betragen würde, wenn das Bohrloch einen Durchmesser von 5 Centimeter, oder einen Querschnitt von 19,635 Quadratcentimeter hätte.

§. 42. **Springende Wasserstrahlen.** Die Eigenthümlichkeiten der Bewegung des Wassers in springenden Strahlen werden besonders durch Folgendes dargethan und zur Anschauung gebracht. Nach dem Vorstehenden sind

$$y = x\,tang.\alpha - \frac{g x^2 [1 + (tang.\alpha)^2]}{2 c^2}$$

und

$$y_1 = x_1\,tang.\alpha_1 - \frac{g x_1^2 [1 + (tang.\alpha_1)^2]}{2 c^2}$$

die Gleichungen der Parabeln, welche zwei mit derselben Geschwindigkeit c unter verschiedenen Neigungswinkeln α und α_1 aufsteigende Wasserstrahlen bilden. Setzt man $x_1 = x$ und subtrahirt man diese Gleichungen von einander, so erhält man die neue Gleichung

$$y - y_1 = x\,(tang.\alpha - tang.\alpha_1) - \frac{g x^2}{2 c^2}\,[(tang.\alpha)^2 - (tang.\alpha_1)^2]$$

$$= x\,(tang.\alpha - tang.\alpha_1)\left(1 - \frac{g x}{2 c^2}\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1)\right).$$

Nimmt man ferner an, daß diese beiden Wasserstrahlen nahe unter denselben Winkeln aufsteigen, und verlangt man endlich, daß beide Parabeln einen Punkt gemeinschaftlich haben, so hat man $y_1 = y$, daher

$$x\,(tang.\alpha - tang.\alpha_1)\left(1 - \frac{g x}{2 c^2}\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1)\right) = 0,$$

also

$$\frac{g x}{2 c^2}\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1) = 1,$$

oder, da sich $\alpha_1 = \alpha$ setzen läßt, einfach

$$\frac{g x\,tang.\alpha}{c^2} = 1, \quad \text{oder} \quad tang.\alpha = \frac{c^2}{g x}.$$

Führt man diesen Ausdruck in der Gleichung

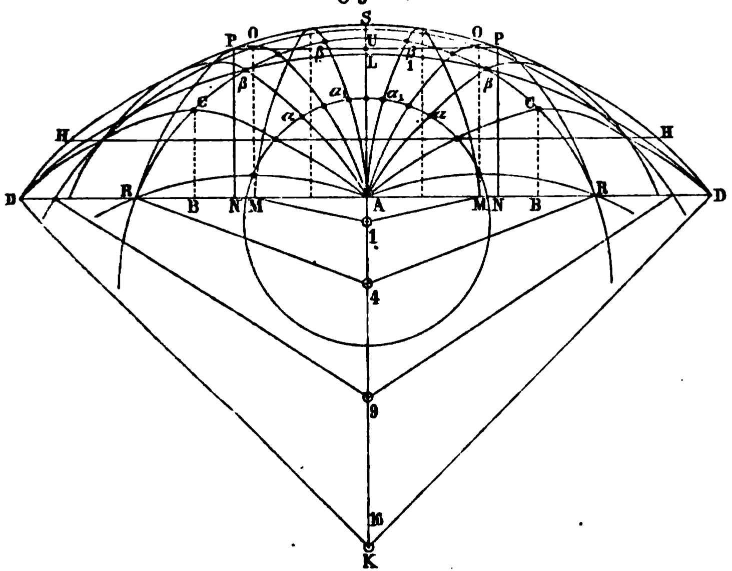
$$y = x\,tang.\alpha - \frac{g x^2}{2 c^2}\,[1 + (tang.\alpha)^2]$$

ein, so erhält man die Gleichung

$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g x^2}{2 c^2}\left(1 + \frac{c^4}{g^2 x^2}\right) = \frac{c^2}{2 g} - \frac{g x^2}{2 c^2}$$

der Curve *DPSPD*, Fig. 80, welche durch die benachbarten Punkte geht, worin sich je zwei der mit verschiedenen Winkeln aus einem und demselben

Fig. 80.



Punkte *A* aufsteigenden Parabeln schneiden, und daher auch das ganze System der Parabeln *AÇD*, *AOR* u. s. w. berührt oder umhüllt.

Die Sprunghöhe des senkrecht aufsteigenden Strahles ist $AS = \frac{c^2}{2g}$, und die Sprungweite des unter dem Winkel $\alpha = 45$ Grad aufsteigenden Strahles ACD ist $AD = 2 \cdot \frac{c^2 sin. 2\alpha}{2g} = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} = 2\,\overline{AS}$.

Verlegt man den Coordinatenanfangspunkt von *A* nach *S*, ersetzt man also die Coordinaten $AN = x$ und $NP = y$ durch die Coordinaten $SU = u$ und $UP = v$, so hat man

$$y = AS - SU = \frac{c^2}{2g} - u \text{ und } x = AN = UP = v,$$

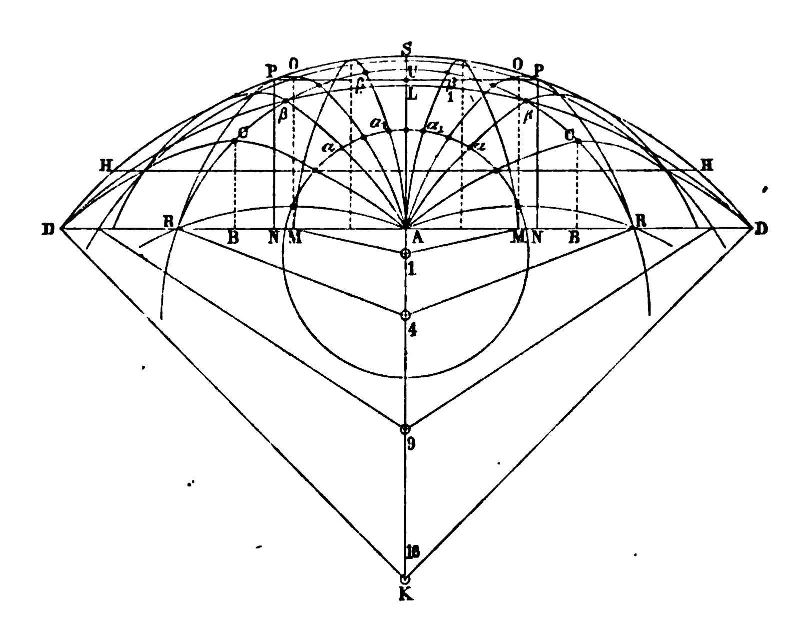
daher geht die obige Gleichung

$$y = \frac{c^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 c^2} \text{ in folgende über:}$$

$$u = \frac{g v^2}{2 c^2} \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{2 c^2}{g} u.$$

Diese Gleichung gehört der gemeinen Parabel mit dem Parameter $p = \frac{2c^2}{g} = 4\overline{AS}$ an, und es ist daher auch die Umhüllungscurve $DPSPD$ der sämmtlichen aus demselben Punkte A aufsteigenden Wasserstrahlen die gemeine Parabel mit dem Scheitel S und der Axe SA.

Fig. 81.



Ein nach allen Richtungen aus A aufsteigendes Strahlenbündel wird folglich von einem Paraboloid umhüllt, welches durch Umdrehung der Umhüllungscurve $DPSPD$ um AS entsteht.

Ist t die Zeit, in welcher der in einer Parabel aufsteigende Körper den Bogen AO, Fig. 81, zurücklegt, dessen Coordinaten $AM = x$ und $MO = y$ sind, so hat man

$$x = ct\cos.\alpha \text{ und } y = ct\sin.\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

folglich auch

$$\cos.\alpha = \frac{x}{ct} \text{ und } \sin.\alpha = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{ct}.$$

Setzt man nun diese Werthe für $\cos.\alpha$ und $\sin.\alpha$ in die bekannte trigonometrische Formel $(\cos.\alpha)^2 + (\sin.\alpha)^2 = 1$ ein, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{(ct)^2} + \frac{(y + \frac{1}{2} g t^2)^2}{(ct)^2} = 1, \text{ oder } x^2 + (y + \tfrac{1}{2} g t^2)^2 = c^2 t^2.$$

Wenn von einem Punkte A, Fig. 81, aus, gleichzeitig in derselben Verticalebene Körper unter verschiedenen Neigungswinkeln mit gleichen Geschwindigkeiten emporgeworfen werden, so sind die Orte, welche dieselben nach irgend einer Zeit t einnehmen, durch die zuletzt gefundene Gleichung bestimmt, welche einem Kreise vom Halbmesser $r = ct$ angehört, dessen Mittelpunkt um die Größe $a = \frac{1}{2} g t^2$ senkrecht unter dem Ausgangspunkte A liegt und dessen Gleichung sich daher in der Form $x^2 + (y + a)^2 = r^2$ darstellen läßt. Dieser Kreis wird daher auch gleichzeitig von den in einem und demselben Augenblicke aus A aufsteigenden Elementen der springenden Wasserstrahlen ACD, AOR, ALS... erreicht.

Setzt man in der Formel $t_1 = \frac{x}{c \cos. \alpha}$, $\alpha = 45^0$, und $x = AB = \frac{c^2}{2g}$, ein, so erhält man $t_1 = \frac{c}{2 g \cos. 45^0} = \frac{c}{g} \sqrt{\frac{1}{2}}$, daher die Zeit zum Durchlaufen des Parabelbogens ACD, $t = 2 t_1 = \frac{c}{g} \sqrt{2}$, und den Halbmesser des Kreises DLD, welcher von den verschiedenen Wasserelementen gleichzeitig erreicht wird:

$$KD = r = ct = \frac{c^2}{g} \sqrt{2} = \frac{c^2}{2g} \sqrt{8} = 2{,}828 \frac{c^2}{2g} = 2{,}828 . \overline{AS},$$

sowie den Abstand des Mittelpunktes K von A:

$$AK = a = \tfrac{1}{2} g t^2 = \frac{c^2}{g} = 2 \frac{c^2}{2g} = 2 \overline{AS}.$$

Theilt man nun DK in 4, sowie AK in 16 gleiche Theile, so kann man, da r mit t und a mit t^2 proportional wächst, aus den Theilpunkten 1, 4, 9 von AK mit $\frac{1}{4} DK$, $\frac{2}{4} DK$ und $\frac{3}{4} DK$ andere Kreise beschreiben, welche andere in gleichen Zeiten durchlaufene Parabelbögen abschneiden. So schneidet z. B. der aus (1) mit $1 \alpha = \frac{1}{4} DK$ beschriebene Kreis in den Punkten α, α_1..., sowie der aus (4) mit $4 \beta = \frac{1}{2} DK$ beschriebene Kreis in den Punkten β, β_1... gleichzeitig durchlaufene Parabelwege $A\alpha$, $A\alpha_1$..., sowie $A\beta$, $A\beta_1$... ab.

Dreht man diese Kreise um die verticale Axe KL, so beschreiben sie die Kugelflächen, welche die gleichzeitig durchlaufenen Parabelwege begrenzen, wenn die Strahlen rund herum, nach allen Richtungen und unter allen Neigungswinkeln aufsteigen.

Krummlinige Bewegungen überhaupt. Aus der Vereinigung §. 43. von mehreren Geschwindigkeiten mit mehreren unveränderlichen Accelerationen entspringt ebenfalls eine parabolische Bewegung, denn es lassen sich nicht

nur die Geschwindigkeiten, sondern auch die Accelerationen zu einer einzigen vereinigen; es ist also das Ergebniß dasselbe, als wenn nur eine Geschwindigkeit und nur eine Acceleration, d. i. nur eine gleichförmige, und nur eine gleichförmig beschleunigte Bewegung vorhanden wäre.

Sind die Accelerationen veränderlich, so kann man sie ebenso gut zu einer mittleren vereinigen, als wenn sie constant wären, denn es ist erlaubt, dieselben in einem unendlich kleinen Zeittheilchen (τ) als unveränderlich, die entsprechenden Bewegungen also innerhalb dieses Theilchens als gleichförmig beschleunigt anzusehen. Allerdings ist die resultirende Acceleration veränderlich, wie ihre Componenten selbst. Vereinigt man nun diese resultirende Acceleration mit der gegebenen Geschwindigkeit, so läßt sich ein kleiner Parabelbogen angeben, in welchem die Bewegung während eines kleinen Zeittheilchens statthat. Bestimmt man so für das folgende Zeittheilchen wieder die Geschwindigkeit und die mittlere Acceleration, so läßt sich ein neues, einer anderen Parabel angehöriges Bogenstück finden, und fährt man so fort, so erhält man dadurch nach und nach die angenäherte vollständige Bahncurve.

§. 44. Man kann jeden kleinen Bogentheil irgend einer Curve als einen Kreisbogen ansehen. Der Kreis, welchem dieser Bogen zugehört, heißt Krümmungskreis (franz. cercle osculateur; engl. circle of curvature, osculatory circle), und sein ihm zugehöriger Halbmesser Krümmungshalbmesser (franz. rayon de courbure; engl. radius of curvature). Es läßt sich ebenso die Bahn eines bewegten Körpers aus Kreisbogen zusammensetzen, und deshalb eine Formel für ihre Halbmesser entwickeln.

Fig. 82.

Es sei AM (Fig. 82) ein sehr kleiner gleichförmig beschleunigt zurückgelegter Weg $x = \frac{p\tau^2}{2}$ in der Richtung AX, und AN ein sehr kleiner, gleichförmig durchlaufener Weg $y = v\tau$, und O der vierte Eckpunkt des aus x und y construirten Parallelogramms, d. i. der Punkt, welchen der von A ausgehende Körper am Ende des Zeittheilchens (τ) einnimmt. Legen wir AC rechtwinkelig gegen AY

und sehen wir nun zu, aus welchem Punkte C in dieser Linie sich ein kleiner Kreisbogen durch A und O beschreiben läßt. Wegen der Kleinheit des Bogens AO können wir annehmen, daß nicht allein CA, sondern auch die Gerade COP rechtwinkelig auf AY stehe, daß also im kleinen Dreiecke NOP der Winkel NPO ein rechter sei. Die Auflösung dieses Dreiecks giebt:

$$OP = ON sin. ONP = AM sin. XAY = \frac{p\tau^2}{2} sin. \alpha,$$

und die Tangente

$$AP = AN + NP = v\tau + \frac{p\tau^2}{2} cos. \alpha = \left(v + \frac{p\tau}{2} cos. \alpha\right)\tau,$$

welche sich $= v\tau$ setzen läßt, weil $\frac{p\tau}{2} cos. \alpha$ wegen des unendlich kleinen Factors τ gegen v verschwindet. Nun ist aber nach der Lehre vom Kreise $\overline{AP}^2 = OP . (OP + 2\overline{CO})$, oder, da OP gegen $2CO$ verschwindet, $\overline{AP}^2 = OP . 2\overline{CO}$; es folgt daher der gesuchte Krümmungshalbmesser:

$$CA = CO = r = \frac{\overline{AP}^2}{2OP} = \frac{v^2\tau^2}{p\tau^2 sin. \alpha} = \frac{v^2}{p sin. \alpha}.$$

Um den Krümmungshalbmesser construirend zu bestimmen, trage man auf die Normale der anfänglichen Bewegungsrichtung AY die Normalacceleration, d. i. den normalen Componenten $p sin. \alpha$ als AD auf, verbinde den Endpunkt E der Geschwindigkeit $AE = v$ mit D durch die Gerade DE und ziehe EC winkelrecht auf DE; der dadurch bestimmte Durchschnitt C mit der ersten Normalen ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises durch A.

Durch Umkehrung der letzten Formel folgt die Normalacceleration $n = p sin. \alpha = \frac{v^2}{r}$; es wächst hiernach dieselbe wie das Quadrat der Geschwindigkeit v und umgekehrt wie der Krümmungshalbmesser r, also direct mit der Stärke der Krümmung.

Beispiel. Für die durch die Acceleration der Schwere bewirkte parabolische Bahn ist $r = 0{,}1019 \frac{c^2}{sin. \alpha}$ Meter, und im Scheitel dieser Curven, wo $\alpha = 90^0$, also $sin. \alpha = 1$, fällt $r = 0{,}1019 c^2$ aus. Bei einer Geschwindigkeit von 20 Meter ergäbe sich also $r = 0{,}1019 . 400 = 40{,}76$ Fuß; je mehr sich aber der Körper vom Scheitel entfernt, desto kleiner wird α und desto größer wird folglich der Krümmungshalbmesser.

Hat der Punkt A das Wegelement $AO_1 = \sigma_1$, Fig. 83 (a. f. S.), durchlaufen, so ist seine Geschwindigkeit eine andere geworden, weil sich nun zur anfänglichen Geschwindigkeit c in der Richtung von AY die erlangte Ge- §. 45.

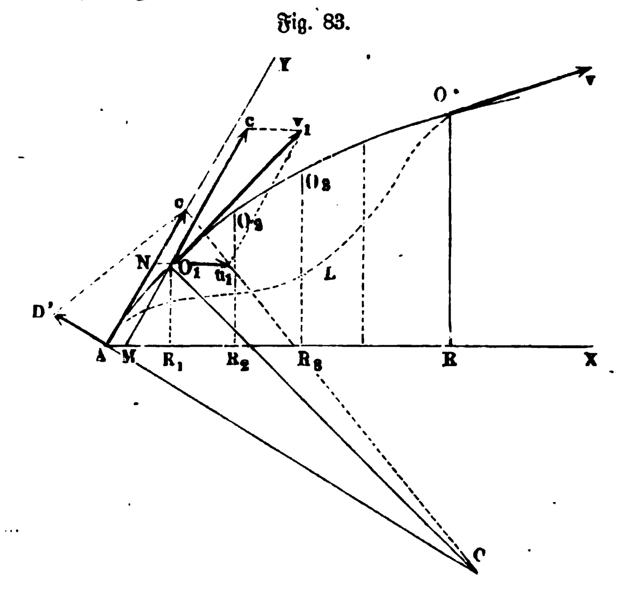
schwindigkeit $u_1 = p\tau$ in der Richtung von AX gesellt, und es ist folglich für den neuen Geschwindigkeitswerth v_1, dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zufolge:

$v_1^2 = c^2 + 2cp\tau\cos.\alpha + p^2\tau^2 = c^2 + p\tau(2c\cos.\alpha + p\tau)$,

oder, da $p\tau$ gegen $2v\cos.\alpha$ verschwindet,

$v_1^2 = c^2 + 2cp\tau\cos.\alpha$.

Fig. 83.



Noch ist $c\tau$ das Wegelement $AN = AO_1 = \sigma_1$, und $p\cos.\alpha$ die Tangentialacceleration, d. i. der Component k der Acceleration p in der Tangenten- oder Bewegungsrichtung (Fig. 83), daher hat man:

$$\frac{v_1^2 - c^2}{2} = k\sigma_1.$$

Ferner ist $\sigma_1 \cos.\alpha$ die Projection $AR_1 = \xi_1$ des Wegelementes in der Richtung der Acceleration, daher hat man auch:

$$\frac{v_1^2 - c^2}{2} = p\,\xi_1.$$

Bei fortgesetzter Bewegung geht nach und nach v_1 in $v_2, v_3 \ldots v_n$ über, wobei die projicirten Wegtheile um $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ wachsen, es ist

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = p\,\xi_2, \quad \frac{v_3^2 - v_2^2}{2} = p\,\xi_3, \ldots \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2} = p\,\xi_n,$$

daher folgt durch Addition:

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = p(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = px,$$

wenn x die Projection AR des ganzen Curvenweges AO in der Richtung AX der Acceleration p bezeichnet. Auch läßt sich

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = \left(\frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}\right)x$$

setzen, wenn die Acceleration variabel ist und nach und nach die Werthe $p_1, p_2 \ldots p_n$ annimmt.

Es ist also die **Veränderung** des Quadrats der Geschwindigkeit gar nicht von der Gestalt und Größe, sondern **nur von der Projection** x **des Weges in der Richtung der Acceleration abhängig**. Sie ist z. B. bei der Curve ALO dieselbe wie bei der Curve $AO_1 O_2 \ldots O$, da beide Wege in der Richtung der gemeinschaftlichen Acceleration p die gemeinschaftliche Projection $AR = x$ haben. Ebenso ist

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = \left(\frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}{n}\right)s = ks,$$

wenn s den Curvenweg und k die mittlere Tangentialacceleration bezeichnet.

Aus diesem Grunde haben z. B. die Wasserelemente sämmtlicher springenden Strahlen in Fig. 81, wenn sie eine und dieselbe Horizontale HH erreichen, eine und dieselbe Geschwindigkeit. Ist, wie oben, c die Austritts- oder Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit in HH, und b die Höhe der Linie HH über dem Anfangspunkt A, so hat man

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = -gb,$$

und daher

$$v = \sqrt{c^2 - 2gb}.$$

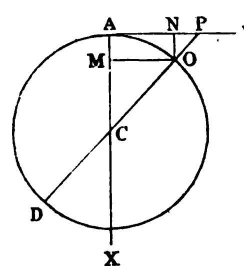
Ist an einer gewissen Stelle der Bewegung, $\alpha = 90$ Grad, so fällt die Tangentialacceleration $k = p \cos.\alpha = 0$ aus und die Normalacceleration $m = p \sin.\alpha$ mit der mittleren Acceleration p zusammen. Auch ist dann die Veränderung des Geschwindigkeitsquadrates bei Durchlaufung eines Wegelementes σ, $v_1^2 - v^2 = 0$, also $v_1 = v$; und wenn sich nun bei fortgesetzter Bewegung in einer Curve die Richtung der Acceleration so ändert, daß sie stets normal zur Bewegungsrichtung bleibt, also eine Tangentialacceleration gar nicht vorkommt, so ist auch bei Durchlaufung eines endlichen Curvenweges, $v_1^2 - v^2 = 0$, also $v_1 = v$, unveränderlich, also die Endgeschwindigkeit gleich der Anfangsgeschwindigkeit c.

Die Normalacceleration, bei welcher diese Beständigkeit der Geschwindigkeit statthat, ist

$$m = p = \frac{c^2}{r},$$

und sie fällt bei der Bewegung im Kreise AOD, Fig. 84, da hier der Krümmungshalbmesser $CA = CO = CD = r$ constant ist, ebenfalls unveränderlich aus. Umgekehrt bringt auch eine unveränderliche Acceleration, welche den Körper unaufhörlich rechtwinkelig von seiner Bewegung ablenkt, eine gleichförmige Umdrehung im Kreise hervor.

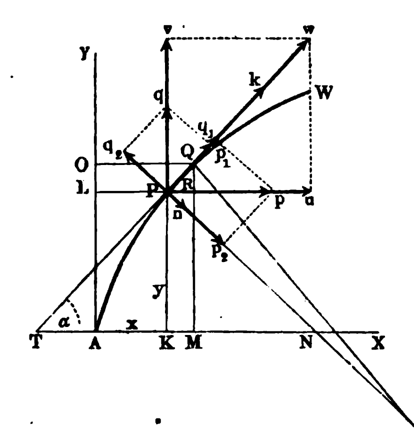
Fig. 84.



Beispiel. Ein Körper, welcher in einem Kreise von 5 Meter Halbmesser so herumgeht, daß er zu jeder Umdrehung 5 Secunden Zeit braucht, hat die Geschwindigkeit $c = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi . 5}{5} = 2 . \pi = 6{,}283$ Meter, und die Normalacceleration $p = \frac{(6{,}283)^2}{5} = 7{,}896$ Meter; d. h. er wird in jeder Secunde um $\frac{1}{2} p = \frac{1}{2} . 8{,}896 = 3{,}948$ Meter von der geraden Linie abgelenkt.

(§. 46.) **Krummlinige Bewegungen überhaupt.** Bewegt sich ein Punkt P, Fig. 85, nach zwei Richtungen AX und AY zugleich, so lassen sich seine Wege $AK = LP = x$ und $AL = KP = y$ als Coordinaten der von der Bahn desselben gebildeten Curve APW ansehen, und ist nun ∂t das Zeitelement, innerhalb dessen der Körper die Wegelemente $PR = \partial x$ und $RQ = \partial y$ zurücklegt, so hat man nach (§. 21) die Abscissengeschwindigkeit:

Fig. 85.



1) $u = \frac{\partial x}{\partial t}$,

sowie die Ordinatengeschwindigkeit:

2) $v = \frac{\partial y}{\partial t}$,

und daher die daraus resultirende Tangential- oder Curvengeschwindigkeit, wenn die Bewegungsrichtungen AX und AY den Rechtwinkel einschließen:

3) $w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \sqrt{\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial t^2}} = \frac{\partial s}{\partial t}$,

wo ∂s das Curvenelement PQ bezeichnet, welches nach §. 32 der analytischen Hülfslehren

$\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$ zu setzen ist.

Ebenso ist die Acceleration in der Richtung der Abscissenaxe, oder die sogenannte Abscissenacceleration nach (§. 21):

$$4)\ p = \frac{\partial u}{\partial t},$$

sowie die Ordinatenacceleration:

$$5)\ q = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Für den Tangentenwinkel $PTX = QPR = \alpha$, um welchen die Bewegungsrichtung $\overline{Pw}$ von der Abscissenrichtung abweicht, hat man:

$$tang.\alpha = \frac{v}{u} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

sowie auch:

$$sin.\alpha = \frac{v}{w} = \frac{\partial y}{\partial s}$$

und

$$cos.\alpha = \frac{u}{w} = \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Die Accelerationen p und q lassen sich nach der Tangentialrichtung PT und nach der Normalrichtung PN in die Componenten:

$$p_1 = p\,cos.\alpha \text{ und } p_2 = p\,sin.\alpha, \text{ sowie}$$
$$q_1 = q\,sin.\alpha \text{ und } q_2 = q\,cos.\alpha$$

zerlegen, woraus sich durch eine andere Zusammensetzung die Tangentialacceleration:

$$k = p_1 + q_1 = p\,cos.\alpha + q\,sin.\alpha$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{u}{w} + \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{v}{w} = \frac{u\partial u + v\partial v}{w\partial t},$$

und die Normalacceleration:

$$m = p_2 - q_2 = p\,sin.\alpha - q\,cos.\alpha$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{v}{w} - \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{u}{w} = \frac{v\partial u - u\partial v}{w\partial t}$$

ergiebt.

Nun folgt aber aus $u^2 + v^2 = w^2$ durch Differenziiren:

$$u\partial u + v\partial v = w\partial w,$$

daher ist einfach die Tangentialacceleration:

$$6)\ k = \frac{w\partial w}{w\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t}.$$

Ferner ergiebt sich aus $tang.\alpha = \frac{v}{u}$:

$$\partial tang.\alpha = \frac{u\partial v - v\partial u}{u^2},$$

(s. analyt. Hülfslehren §. 8), und es ist der Krümmungshalbmesser $CP = CQ$ des Bogenelementes PQ, nach §. 33 der analytischen Hülfslehren:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial tang.\alpha},$$

daher folgt:

$$v\partial u - u\partial v = -u^2\partial tang.\alpha = \frac{u^2\partial s^3}{r\partial x^2} = \frac{\partial s^3}{r\partial t^2} = \frac{\partial s}{r}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{w^2\partial s}{r},$$

und daher die Normalacceleration einfach

$$7)\ m = \frac{w^2\partial s}{rw\partial t} = \frac{w}{r}\cdot\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{w^2}{r}.$$

Endlich folgt:

$$k\partial s = \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\partial s = \frac{\partial s}{\partial t}\partial w = w\partial w;$$

woraus sich nun wie in (§. 21):

$$8)\ \frac{w^2 - c^2}{2} = \int k\partial s$$

ergiebt, wenn man annimmt, daß bei Durchlaufung des Weges s die Geschwindigkeit c in w übergeht. Es ist also auch bei der krummlinigen Bewegung die halbe Differenz der Geschwindigkeitsquadrate das Product aus der mittleren Acceleration (k) und dem Wege s.

Ebenso ist

$$p\partial x + q\partial y = u\partial u + v\partial v = w\partial w,$$

also auch noch

$$9)\ \frac{w^2 - c^2}{2} = \int(p\partial x + q\partial y) = \int p\partial x + \int q\partial y,$$

und

$$10)\ \int k\partial s = \int p\partial x + \int q\partial y,$$

oder

$$k\partial s = p\partial x + q\partial y.$$

Das Product aus der Tangentialacceleration und dem Curvenelemente ist also gleich der Summe von den Producten aus den Coordinatenaccelerationen und den ihnen entsprechenden Coordinatenelementen.

Beispiel. Ein Körper bewegt sich in der einen Axe AX mit der Geschwindigkeit $u = 12t$, und in der anderen Axe AY mit der Geschwindigkeit $v = 4t^2 - 9$;

man soll die übrigen Verhältnisse der hieraus resultirenden Bewegung ermitteln. Die entsprechenden Coordinatenaccelerationen sind:

$$p = \frac{\partial u}{\partial t} = 12, \text{ und } q = \frac{\partial v}{\partial t} = 8t,$$

und die zugehörigen Coordinaten oder Axenwege selbst:

$$x = \int u \partial t = \int 12 t \partial t = 6t^2, \text{ und}$$

$$y = \int v \partial t = \int (4t^2 - 9)\partial t = \frac{4}{3} t^3 - 9t,$$

wofern diese Räume mit der Zeit $t = 0$ beginnen. Die Curven- oder Tangentialgeschwindigkeit ist:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{144t^2 + (4t^2 - 9)^2} = \sqrt{16t^4 + 72t^2 + 81} = 4t^2 + 9,$$

folglich die Tangentialacceleration:

$$k = \frac{\partial w}{\partial t} = 8t$$

= der Ordinatenacceleration q, und der Curvenweg:

$$s = \int w \partial t = \int (4t^2 + 9)\partial t = \frac{4}{3} t^3 + 9t.$$

Ferner ist für die Bewegungsrichtung:

$$tang.\alpha = \frac{v}{u} = \frac{4t^2 - 9}{12t} = \frac{\frac{2}{3}x - 9}{3\sqrt{6x}}, \text{ daher:}$$

$$\partial tang.\alpha = \frac{4t^2 + 9}{12t^2}\partial t,$$

und der Krümmungshalbmesser der Bahn:

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial tang.\alpha} = -\frac{(4t^2+9)^3 . 12t^2}{144t^2(4t^2+9)} = -\frac{(4t^2+9)^2}{12}, \text{ oder}$$

$$r = -\frac{w^2}{12}.$$

Hiernach ist nun noch die Normalacceleration, wodurch der bewegte Körper die stetige Richtungsänderung erleidet:

$$m = \frac{w^2}{r} = -12,$$

also constant.

Die Gleichung der Bahncurve folgt, wenn man $t = \sqrt{\frac{x}{6}}$ in der obigen Gleichung für y einsetzt:

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{6}\right)^3} - 9\sqrt{\frac{x}{6}} = \left(\frac{2}{9}x - 9\right)\sqrt{\frac{x}{6}}.$$

Die Ordinate y ist ein Maximum für $v = 0$, d. i. für $t^2 = \frac{9}{4}$, also für $t = \frac{3}{2}$, und $x = 6 . t^2 = 6 \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$, und:

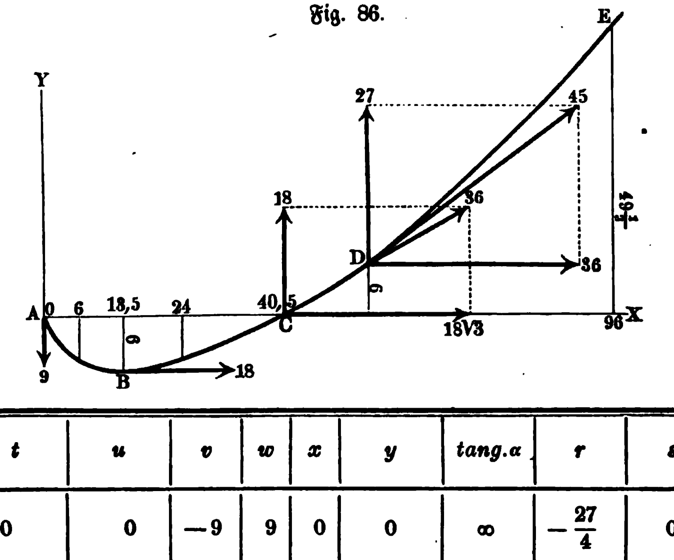
$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} - 9 \cdot \frac{3}{2} = -9.$$

Sie ist dagegen $= 0$, für $t^2 = \frac{27}{4}$, oder $t = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, und $x = \frac{81}{2}$. Es

läuft also die Bahncurve anfangs unter der Abscissenaxe hin, durchschneidet nach der Zeit $t = \sqrt{\frac{27}{4}}$, und zwar bei der Abscisse $x = \frac{81}{2}$, dieselbe, und bleibt von da an über dieser Axe.

Folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der zusammengehörigen Werthe von t, u, v, w, x, y, $tang.\alpha$, r und s, wonach die entsprechende Bahncurve $ABCDE$ in Fig. 86 construirt ist.

Fig. 86.

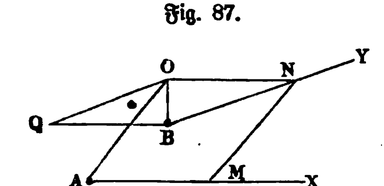


t	u	v	w	x	y	$tang.\alpha$	r	s
0	0	-9	9	0	0	∞	$-\frac{27}{4}$	0
1	12	-5	13	6	$-\frac{23}{3}$	$-\frac{5}{12}$	$-\frac{169}{12}$	$\frac{31}{3}$
$1\frac{1}{2}$	18	0	18	$\frac{27}{2}$	-9	0	-27	18
2	24	7	25	24	$-\frac{22}{3}$	$\frac{7}{24}$	$-\frac{625}{12}$	$\frac{86}{3}$
$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$	18	36	$\frac{81}{2}$	0	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	-108	$27\sqrt{3}$
3	36	27	45	54	$+9$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{675}{4}$	63
4	48	55	73	96	$+\frac{148}{3}$	$\frac{55}{48}$	$-\frac{5329}{12}$	$\frac{364}{3}$

§. 47. **Relative Bewegungen.** Bei der gleichzeitigen Bewegung zweier Körper findet eine immerwährende Veränderung in der gegenseitigen Lage, Entfernung u. s. w. derselben statt, welche sich mit Hülfe des Obigen für jeden Zeitpunkt wie folgt bestimmen läßt. Es sei in Fig. 87 A der An-

fangspunkt des einen Körpers, B der des anderen; jener rücke in der Richtung AX in einer gewissen Zeit (t) nach M, dieser in der Richtung BY in eben dieser Zeit nach N; ziehen wir nun MN, so erhalten wir in dieser Linie die relative Lage und Entfernung der Körper A und B am Ende dieser Zeit. Legen wir AO parallel mit MN und machen auch $AO = MN$, so wird die Linie AO die gegenseitige Lage der Körper A und B ebenfalls angeben. Ziehen wir noch ON, so erhalten wir ein Parallelogramm, in welchem auch $ON = AM$ ist. Machen wir endlich noch BQ parallel und gleich der NO und ziehen OQ, so erhalten wir ein neues Parallelogramm $BNOQ$, in welchem die eine Seite BN der absolute Weg (y) des zweiten Körpers, die andere Seite BQ der nach entgegengesetzter Richtung gelegte Weg (x) des ersten Körpers, und der vierte Eckpunkt O der relative Ort des zweiten Körpers ist, wofern er nämlich auf den als unveränderlich anzusehenden Ort des ersten Körpers bezogen wird.

Fig. 87.

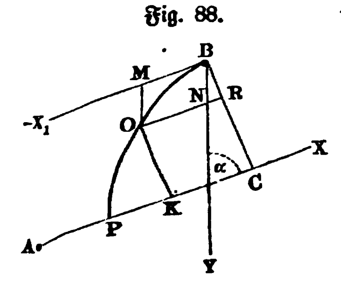


Man findet also den relativen Ort O eines bewegten Körpers (B), wenn man diesem Körper außer seiner eigenen Bewegung (BN) noch diejenige AM des Körpers (A), worauf man den Ort bezieht, in umgekehrter Richtung, also BQ, beilegt, und nun nach den gewöhnlichen Regeln, z. B. mit Hülfe eines Parallelogrammes $BNOQ$, diese Bewegungen zusammensetzt.

Sind die Bewegungen der Körper A und B gleichförmig, so kann man für AM und BN die Geschwindigkeiten c und c_1, d. i. die Wege in einer Secunde, einsetzen. Man erhält deshalb die relative Geschwindigkeit des einen Körpers, wenn man demselben außer seiner eigenen absoluten Geschwindigkeit auch noch die des Körpers, auf welchen man die erste Geschwindigkeit bezieht, in entgegengesetzter Richtung beilegt. Auch findet dasselbe Verhältniß mit den Accelerationen statt. §. 48.

Bewegt sich z. B. ein Körper A, Fig. 88, in der Richtung AX gleichförmig mit der Geschwindigkeit c, und ein Körper B in der Richtung BY, welche mit AX den Winkel α einschließt, bei Null Anfangsgeschwindigkeit mit der constanten Acceleration p, so kann man auch annehmen, daß A still stehe und B außer der Acceleration p noch die Geschwindigkeit ($-c$) in der Richtung $B\overline{X_1} \parallel AX$ besitze, wobei er folglich relativ eine parabolische Bahn BOP durchläuft. Die in der Zeit t durch-

Fig. 88.



laufenen Wege in den Richtungen BY und BX_1 sind: $BN = \frac{pt^2}{2}$ und $BM = ct$, wovon sich die erstere in die Componenten $NR = \frac{pt^2}{2} \cos.\alpha$ und $BR = \frac{pt^2}{2} \sin.\alpha$ zerlegen läßt, welche parallel und rechtwinkelig zu AX gerichtet sind. Sind nun $AC = a$ und $CB = b$ die anfänglichen Coordinaten des Punktes B in Hinsicht auf A, sowie $AK = x$ und $KO = y$ die Coordinaten desselben nach der Zeit t, so hat man, da $AK = AC - ON - NR$ und $KO = CB - BR$ ist,

$$x = a - ct - \frac{pt^2}{2} \cos.\alpha \text{ und } y = b - \frac{pt^2}{2} \sin.\alpha$$

und die entsprechenden relativen Geschwindigkeiten:

$$u = -c - pt\cos.\alpha \text{ und } v = -pt\sin.\alpha.$$

Aus der Abscisse x bestimmt sich die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{p\cos.\alpha} + \left(\frac{c}{p\cos.\alpha}\right)^2} - \frac{c}{p\cos.\alpha},$$

dagegen aus der Ordinate y:

$$t = \sqrt{\frac{2(b-y)}{p\sin.\alpha}}.$$

Läuft der Körper B in der Linie AX dem Körper A entgegen, so ist sowohl $b = 0$, als auch $\alpha = 0$, daher

$$t = \sqrt{\frac{2(a-x)}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} - \frac{c}{p},$$

und setzt man $x = 0$, so folgt die Zeit, nach welcher die Körper zusammenstoßen:

$$t = \sqrt{\frac{2a}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} - \frac{c}{p} = \frac{\sqrt{2ap + c^2} - c}{p}.$$

Läuft dagegen der Körper B in der Linie AX dem Körper A voraus, so ist $\alpha = 180^0$, daher die Entfernung desselben vom letzten Körper:

$x = a - ct + \frac{pt^2}{2}$, und umgekehrt, die Zeit, an deren Ende die Körper um x von einander entfernt sind:

$$t = \pm\sqrt{-\frac{2(a-x)}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2} + \frac{c}{p}.$$

Die entsprechende Geschwindigkeit $u = -c + pt$ ist $= 0$, und die Entfernung x ein Minimum für $t = \frac{c}{p}$, und zwar $x = a - \frac{c^2}{2p}$.

Für jeden anderen Werth von x giebt es zwei Zeitwerthe, den einen größer und den anderen kleiner als $\frac{c}{p}$.

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der relativen Bewegung findet sowohl in der Himmels- als auch in der Maschinenmechanik vielfache Anwendung. Behandeln wir hier nur folgenden Fall. Ein Körper A, Fig. 89, bewegt sich in der Richtung AX mit der Geschwindigkeit c_1, und soll von einem anderen Körper B getroffen werden, welcher die Geschwindigkeit c_2 hat; welche Richtung ist demselben zu geben? Ziehen wir AB, tragen wir c_1 an B in umgekehrter Richtung, und vollenden wir aus c_1 und c_2 ein Parallelogramm $\overline{Bc_1cc_2}$, dessen Diagonale c auf AB fällt, so erhalten wir in der Richtung der Seite $\overline{Bc_2} = c_2$ desselben zugleich die gesuchte Richtung BY, in welcher der Körper B zu bewegen ist, damit er den Körper A treffe, und zugleich in dem Durchschnittspunkte C der beiden Richtungen AX und BY die Stelle des Zusammenstoßes. Ist α der Winkel BAX, um welchen AX, und β der Winkel ABY, um welchen BY von AB abweicht, so hat man:

$$\frac{sin.\beta}{sin.\alpha} = \frac{c_1}{c_2}.$$

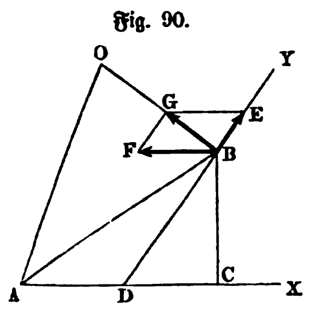
Diese Formel findet auch ihre Anwendung in der **Aberration des Sternenlichtes**, welche aus der Zusammensetzung der Geschwindigkeit c_1 der um die Sonne laufenden Erde A und der Geschwindigkeit c_2 des Sternenlichtes B hervorgeht. Es ist c_1 circa 4 Meilen und $c_2 = 42000$ Meilen, folglich:

Fig. 89.

$$sin.\beta = \frac{c_1}{c_2} sin.\alpha = \frac{4\, sin.\alpha}{42000} = \frac{sin.\alpha}{10500},$$

und hiernach die Aberration oder der Winkel $ABC = \beta$, um welchen die Richtung AB, in welcher man den als unendlich entfernt anzusehenden Stern sieht, von der Richtung BC oder AD abweicht, in welcher er sich wirklich befindet, $\beta = 20'' sin.\alpha$; also für $\alpha = 90^0$, d. i. für einen Stern, welcher sich winkelrecht über der Erdbahn (in dem sogenannten Ekliptikpol) befindet, $\beta = 20''$. In Folge dieser Abweichung sieht man also einen Stern in der Bewegungsrichtung der Erde stets $20''$ von seinem wahren Orte abgerückt, und es beschreibt folglich ein Stern in der Nähe des Ekliptikpoles im Laufe eines Jahres scheinbar einen kleinen Kreis von 20 Secunden Halbmesser um seinen wahren Ort. Bei Sternen, welche in der Ebene der Erdbahn stehen, bildet diese scheinbare Bewegung eine gerade Linie, und bei den übrigen Sternen gehen diese scheinbaren Bewegungen in Ellipsen vor sich.

Fig. 90.



Beispiel. Ein Dampfwagenzug fährt auf der Schienenbahn AX, Fig. 90, von A aus mit 35 Fuß Geschwindigkeit; ein anderer gleichzeitig von B aus auf einer Bahn BY, welche mit der ersteren den

Winkel $BDX = 56^0$ einschließt, mit 20 Fuß Geschwindigkeit. Wenn nun die anfänglichen Abstände $AC = 30000$ Fuß und $CB = 24000$ Fuß betragen, wie groß ist die Entfernung AO beider Wagenzüge nach einer Viertelstunde? Aus der absoluten Geschwindigkeit $BE = c_1 = 20$ Fuß des zweiten Zuges, der umgekehrten Geschwindigkeit $BF = c = 35$ Fuß des ersten Zuges und dem eingeschlossenen Winkel $EBF = \alpha = 180^0 - BDC = 180^0 - 56^0 = 124^0$ folgt die relative Geschwindigkeit des zweiten Zuges:

$$BG = \sqrt{c^2 + c_1^2 + 2\,c\,c_1 \,cos.\alpha} = \sqrt{35^2 + 20^2 - 2\,.\,35\,.\,20\,.\,cos.\,56^0}$$
$$= \sqrt{1225 + 400 - 1400\,cos.\,56^0} = \sqrt{1625 - 782{,}9} = \sqrt{842{,}1} = 29{,}02 \text{ Fuß.}$$

Für den Winkel $GBF = \varphi$, den die Richtung der relativen Bewegung mit der ersten Bewegungsrichtung einschließt, ist:

$$sin.\varphi = \frac{c_1\,sin.\,56^0}{29{,}02} = \frac{20\,.\,0{,}8290}{29{,}02};\ Log.sin.\varphi = 0{,}75690 - 1, \text{ daher } \varphi = 34^0{,}50'.$$

Der in 15 Minuten $= 900$ Sec. relativ durchlaufene Weg ist $BO = 29{,}02\,.\,900 = 26118$ Fuß, die Entfernung $AB = \sqrt{(30000)^2 + (24000)^2} = 38419$ Fuß, der Winkel $BAC = ABF$, da dessen Tangente $\frac{24000}{30000} = 0{,}8$ ist, hat den Werth $\psi = 38^0\,40'$, daher ist der Winkel $ABO = \varphi + \psi = 34^0\,50' + 38^0\,40' = 73''\,30'$, und die Entfernung der beiden Wagenzüge nach 15 Minuten:

$$AO = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 - 2\,AB\,.\,BO\,cos.\,ABO}$$
$$= \sqrt{38419^2 + 26118^2 - 2\,.\,38419\,.\,26118\,cos.\,73^0\,30'}$$
$$= \sqrt{1588190000} = 39850 \text{ Fuß.}$$

Zweiter Abschnitt.

Mechanik oder physische Bewegungslehre im Allgemeinen.

Erstes Capitel.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

Mechanik. Die Mechanik (franz. mécanique; engl. mechanics) ist die Wissenschaft, welche von den Bewegungsgesetzen materieller Körper handelt. Sie ist insofern eine Anwendung der Phoronomie oder Cinematik auf die Körper der Außenwelt, als die letztere sich nur mit der Bewegung geometrischer Körper befaßt und die Ursachen der Bewegung außer Betracht läßt. §. 49.

Die Mechanik ist ein Theil der Naturlehre (franz. physique générale; engl. natural-philosophy) oder der Lehre von den Gesetzen, nach welchen die Veränderungen in der Körperwelt erfolgen, nämlich derjenige Theil, welcher sich mit den aus meßbaren Bewegungen hervorgegangenen Veränderungen in der materiellen Welt beschäftigt.

Kraft. Kraft (franz. force; engl. force) ist die Ursache der Bewegung oder der Bewegungsveränderung materieller Körper. Jede Bewegungsveränderung, z. B. jede Veränderung in der Geschwindigkeit eines Körpers, ist als die Wirkung einer Kraft anzusehen. Aus diesem Grunde messen wir denn auch jedem frei fallenden Körper eine Kraft, die sogenannte Schwerkraft, bei, weil derselbe seine Geschwindigkeit unaufhörlich ändert. Auf der anderen Seite ist aus der Ruhe oder aus der Unveränderlichkeit im Bewegungszustande eines Körpers noch nicht auf die Abwesenheit von Kräften zu schließen; denn es können sich die Kräfte eines Körpers gegenseitig aufheben, §. 50

ohne eine Wirkung übrig zu lassen. Die Schwerkraft, mit welcher ein Körper zur Erde niederfällt, besitzt derselbe auch noch, wenn er auf einem Tische ruht, es wird aber hier ihre Wirkung durch die Festigkeit des Tisches oder einer anderen Unterlage aufgehoben.

§. 51. **Gleichgewicht.** Ein Körper ist im Gleichgewicht (franz. équilibre; engl. equilibrium), oder die Kräfte eines Körpers halten einander das Gleichgewicht, wenn dieselben ohne eine Wirkung übrig zu lassen, oder ohne Bewegung zu erzeugen oder zu verändern, einander aufheben oder vernichten.

Bei einem an einem Faden aufgehängten Körper ist z. B. die Schwerkraft in demselben mit der Cohäsion des Fadens im Gleichgewicht. Das Gleichgewicht unter Kräften wird aufgehoben, und es entsteht Bewegung, wenn man eine von den Kräften entfernt oder auf andere Weise aufhebt. So geht z. B. die durch ein Gewicht gebogene Stahlfeder in Bewegung über, wenn dieses Gewicht weggenommen wird, weil nun diejenige Kraft der Feder, welche man ihre Elasticität nennt, allein noch wirkt.

Statik (franz. statique; engl. statics) ist derjenige Theil der Mechanik, welcher von den Gesetzen des Gleichgewichts handelt; die Dynamik (franz. dynamique; engl. dynamics) hingegen handelt von den Kräften, inwiefern sie Bewegungen hervorbringen.

§. 52. **Eintheilung der Kräfte.** Nach ihren Wirkungen sind die Kräfte entweder bewegende (franz. forces motrices, puissances; engl. moving forces) oder widerstehende (Widerstände, franz. résistances; engl. resistances). Jene bringen Bewegungen hervor, oder vermögen dieselben zu erzeugen, diese hingegen können dieselben nur verhindern und mäßigen. Die Schwerkraft, die Elasticität einer Stahlfeder u. s. w. gehören zu den bewegenden Kräften, die Reibung, Festigkeit der Körper u. s. w. sind widerstehende Kräfte oder Widerstände, weil durch sie nur Bewegungen verhindert oder vermindert oder bewegende Kräfte aufgehoben, aber keineswegs Bewegungen hervorgerufen werden können. Die bewegenden Kräfte theilt man wieder ein in beschleunigende (franz. accéleratrices; engl. accelerating) und in verzögernde (franz. retardatrices; engl. retarding). Jene erzeugen eine positive, diese eine negative Acceleration, durch jene wird also eine beschleunigte, durch diese eine verzögerte Bewegung hervorgebracht. Die Widerstände sind stets verzögernde Kräfte, aber nicht alle verzögernde Kräfte sind widerstehende. Bei einem senkrecht in die Höhe geworfenen Körper wirkt z. B. die Schwerkraft verzögernd, deswegen ist aber die Schwerkraft noch keine widerstehende Kraft, denn beim darauf folgenden Herabfallen des Körpers nimmt sie wieder die Stelle einer bewegenden Kraft ein.

Noch unterscheidet man beständige (constante, franz. constantes; engl. uniform) und veränderliche Kräfte (franz. variables; engl. variable) von einander. Während constante Kräfte immer auf gleiche Weise wirken und eben deshalb in gleichen Zeittheilchen gleiche Wirkungen, d. i. gleiche Zusätze oder Abnahmen in der Geschwindigkeit hervorbringen, sind bei den veränderlichen Kräften diese Wirkungen zu verschiedenen Zeiten verschieden; während also aus jenen Kräften gleichförmig veränderte Bewegungen hervorgehen, entsprechen diesen Kräften ungleichförmig beschleunigte oder ungleichförmig verzögerte Bewegungen.

Druck. Druck (franz. pression; engl. pressure) und Zug (franz. traction; engl. traction) sind die ersten Wirkungen der Kräfte auf materielle Körper. Vermöge derselben werden Körper zusammengedrückt und ausgedehnt, oder überhaupt in ihrer Form verändert. §. 53.

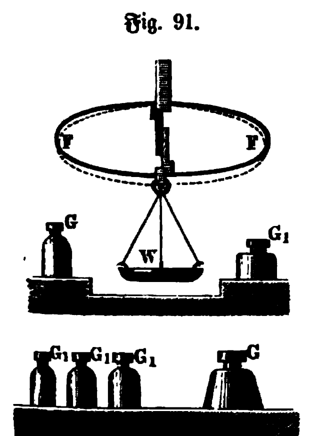
Der durch die lothrecht abwärts wirkende Schwerkraft hervorgebrachte Druck oder Zug, welchen die Unterlage eines schweren Körpers oder der Faden, woran ein Körper aufgehängt ist, auszuhalten hat, heißt das Gewicht (franz. poids; engl. weight) des Körpers.

Druck und Zug, und also auch Gewicht sind Größen eigenthümlicher Art, die zwar nur unter einander verglichen werden, aber als Wirkungen der Kräfte zum Maße derselben dienen können.

Die einfachsten und deshalb gewöhnlichsten Mittel zum Messen der Kräfte sind Gewichte.

Gleichheit der Kräfte. Zwei Gewichte oder auch zwei Drücke oder Züge, und also auch die Kräfte, welche letzteren entsprechen, sind gleich, wenn man eine durch die andere ersetzen kann, ohne dadurch eine andere Wirkung zu erhalten. Wenn z. B. eine Stahlfeder FF, Fig. 91, durch ein angehängtes Gewicht G genau so gebogen wird wie durch ein anderes, genau ebenso angehängtes, z. B. in dieselbe Wagschale W, gelegtes Gewicht G_1, so sind diese Gewichte, und deshalb auch die Schwerkräfte in beiden Körpern, gleich. Wenn ebenso eine belastete Wage (franz. und engl. balance) sowohl durch das Gewicht G als auch durch ein anderes Gewicht G_1, welches man an die Stelle von G setzt, zum Einspielen gebracht §. 54.

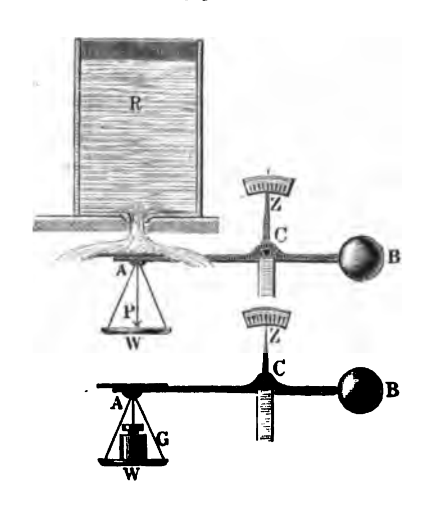
Fig. 91.



wird, so sind diese Gewichte G und G_1 gleich, die Wage mag übrigens gleich- oder ungleicharmig, und die übrige Belastung derselben mag groß oder klein sein.

Ein Druck oder Gewicht (Kraft) ist 2, 3, 4 u. s. w. und überhaupt $n$mal so groß als ein anderer Druck u. s. w., wenn er dieselbe Wirkung hervorbringt als 2, 3, 4 . . . n Drücke der zweiten Art zusammen. Wenn eine übrigens beliebig belastete Wage durch ein Gewicht (G) ebenso zum Einspielen gebracht wird, als durch Auflegen von 2, 3, 4 u. s. w. gleichen Gewichten (G_1), so ist jenes Gewicht (G) 2, 3, 4 u. s. w. mal so groß als dieses Gewicht (G_1). Wenn z. B. das Gewicht G die Federwage FF, Fig. 91, genau so stark spannt oder ausbiegt, wie die drei gleichen Gewichte G_1, G_1, G_1 zusammen, so ist das Gewicht $G = 3\,G_1$. Und wenn die Stoßkraft P des aus dem Gefäße R fließenden Wassers die Zunge Z der Schnellwage ACB, Fig. 92, genau so zum Einspielen bringt, wie ein auf die Wagschale W gelegtes Gewicht G, so ist $P = G$.

Fig. 92.



§. 55. **Materie.** Materie (franz. matière; engl. matter) ist Dasjenige, wodurch die Körper der Außenwelt, die wir, im Gegensatz zu den Körpern der Geometrie, auch materielle oder physische Körper nennen, auf unsere Sinne wirken. Masse (franz. und engl. masse) ist das Quantum der einen Körper bildenden Materie.

Körper von gleichem Volumen (franz. und engl. volume) oder gleichem geometrischen Inhalte haben gewöhnlich verschiedene Gewichte, wenn sie aus verschiedenartigen Materien bestehen. Man kann daher aus dem Volumen eines Körpers auf dessen Gewicht noch nicht schließen; es ist dazu vielmehr nöthig, daß man das Gewicht von einer Volumeneinheit, z. B. von einem Cubikfuß, Cubikmeter u. s. w., der Materie des Körpers kenne.

§. 56. **Gewichtseinheit.** Das Messen von Gewichten oder Kräften besteht in einer Vergleichung derselben mit einem gegebenen und unveränderlichen,

zur Einheit angenommenen Gewichte. Die Auswahl dieser Gewichts- oder Krafteinheit ist zwar an sich willkürlich, es ist jedoch praktisch vortheilhaft, hierzu das Gewicht von einem allgemein verbreiteten Körper bei einem der gebräuchlichen Raumeinheit gleichen Volumen hierzu auszuwählen.

Eine derartige Gewichtseinheit ist das Gramm, welches durch das Gewicht von einem Cubikcentimeter reinen Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit (bei ungefähr 4° C. Temperatur) gegeben wird. Aber auch das alte preußische Pfund ist eine auf das Gewicht des Wassers zurückgeführte Einheit, es wiegt nämlich ein preußischer Cubikfuß destillirten Wassers im luftleeren Raume und bei 15° R. Temperatur, 66 preußische Pfund. Nun ist aber ein preußischer Fuß = 139,13 Pariser Linien = 0,3138535 Meter, es folgt daher ein preußisches Pfund = 467,711 Gramm. Das preußische Neu- oder Zollpfund ist genau $^1/_2$ Kilogramm.

Trägheit. Trägheit oder Beharrungsvermögen (franz. inertie; engl. inertia) ist diejenige Eigenschaft der Materie, vermöge welcher dieselbe durch sich allein weder Bewegung annehmen, noch erhaltene Bewegung abändern kann. Jeder materielle Körper bleibt so lange in Ruhe, als keine Kraft auf ihn einwirkt, und jeder einmal in Bewegung gesetzte materielle Körper bleibt in einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung, so lange als er ohne Einwirkung einer Kraft ist. Wenn also in dem Bewegungszustande eines materiellen Körpers Veränderungen vor sich gehen, wenn ein Körper seine Bewegungsrichtung verändert, oder wenn er eine größere oder kleinere Geschwindigkeit annimmt, so ist dieselbe nicht dem Körper, als einem gewissen Quantum von Materie, an sich beizumessen, sondern es muß eine fremde Ursache, d. i. eine Kraft, dieselbe herbeigeführt haben. §. 57.

Insofern bei jeder Aenderung im Bewegungszustande eines materiellen Körpers eine Kraftentwickelung vor sich geht, insofern läßt sich die Trägheit auch den Kräften beizählen.

Könnten wir die auf eine bewegte Masse wirkenden Kräfte gänzlich entfernen, so würde dieselbe sich ohne Ende gleichförmig fortbewegen; wir finden aber eine solche gleichförmige Bewegung nirgends, weil es uns nicht möglich ist, eine Masse der Einwirkung aller Kräfte zu entziehen. Bewegt sich eine Masse auf einem horizontalen Tische, so übt zwar die nun vom Tische aufgenommene Schwerkraft eine unmittelbare Wirkung auf den Körper nicht aus, allein aus dem Drucke des Körpers gegen den Tisch entsteht ein Widerstand, den wir in der Folge unter dem Namen Reibung näher kennen lernen werden, welcher dem bewegten Körper unaufhörlich Geschwindigkeit entzieht, weshalb er aus diesem Grunde eine verzögerte Bewegung annimmt und endlich zur Ruhe übergeht. Indessen auch die Luft setzt dem bewegten Körper einen Widerstand entgegen, und wenn auch die Reibung des Körpers ganz

beseitigt werden könnte, so würde schon dieses Hindernisses wegen eine allmälige Abnahme an Geschwindigkeit eintreten. Wir finden aber, daß der Verlust an Geschwindigkeit um so kleiner wird, die Bewegung sich also um so mehr und mehr einer gleichförmigen nähert, je mehr wir diese Widerstände der Zahl und Stärke nach vermindern, und können daraus schließen, daß bei Beseitigung aller bewegenden Kräfte und Widerstände eine gänzlich gleichförmige Bewegung eintreten muß.

§. 58. **Kräftemaass.** Die Kraft (P), welche eine träge Masse (M) accelerirt, ist proportional der Acceleration (p) und proportional der Masse (M) selbst; sie wächst bei einerlei Massen wie die in unendlich kleinen Zeiten erlangten Zunahmen an Geschwindigkeit und nimmt bei gleichen Geschwindigkeitszunahmen in demselben Maße zu, als die Massen größer werden. Die $m$fache Acceleration einer und derselben Masse oder gleicher Massen erfordert eine $m$fache Kraft und die $n$fache Masse macht bei einerlei Acceleration auch die $n$fache Kraft nöthig.

Da wir aber bis jetzt ein Maß der Massen noch nicht ausgewählt haben, so können wir deshalb sogleich:

$$P = Mp,$$

die Kraft gleich dem Producte aus Masse und Acceleration annehmen, und zugleich statt Kraft ihre Wirkung, d. i. den von ihr hervorgebrachten Druck einsetzen.

Die Richtigkeit dieses allgemeinen Bewegungsgesetzes läßt sich allerdings wohl durch directe Versuche darthun, indem man z. B. gleiche und verschiedene, auf einem horizontalen Tische bewegliche Massen durch gebogene Stahlfedern fortschnellen läßt, indessen liegt dieselbe auch schon darin, daß alle aus diesem Gesetze gemachten Folgerungen und entwickelten Regeln für zusammengesetzte Bewegungen den Beobachtungen und Erscheinungen in der Natur vollkommen entsprechen.

§. 59. **Masse.** Alle Körper fallen an einem und demselben Orte der Erde und im luftleeren Raume gleich schnell nieder, nämlich mit der unveränderlichen Acceleration $g = 9{,}81$ Meter $= 31^1/_4$ Fuß (§. 15); ist daher die Masse eines Körpers $= M$ und das die Schwerkraft desselben messende Gewicht $= G$, so hat man nach der letzten Formel auch:

$$G = Mg,$$

d. i. das Gewicht eines Körpers ist ein Product aus dessen Masse und der Acceleration der Schwere, und umgekehrt:

$$M = \frac{G}{g},$$

d. i. Masse eines Körpers ist Gewicht desselben dividirt durch

die Beschleunigung der Schwere, oder Masse ist dasjenige Gewicht eines Körpers, welches derselbe haben würde, wenn die Acceleration der Schwere = Eins, z. B. ein Meter, ein Fuß u. s. w. wäre. An dem Punkte auf oder in der Nähe der Erde oder eines anderen Weltkörpers, wo die Körper nicht mit 9,81 Meter, sondern mit 1 Meter Geschwindigkeit (nach der ersten Secunde) niederfallen, wird hiernach die Masse, oder vielmehr nur das Maß derselben, durch das Gewicht des Körpers unmittelbar angegeben.

Je nachdem wir die Beschleunigung der Schwere in Metern oder Fußen ausdrücken, haben wir nun die Masse:

$$M = \frac{G}{9,81} = 0,1019\, G$$

oder

$$M = \frac{G}{31,25} = 0,032\, G.$$

Hiernach ist z. B. die Masse von einem 20 Pfund schweren Körper, $M = 0,032 \,.\, 20 = 0,64$ Pfund, und umgekehrt, das Gewicht einer Masse von 20 Pfund, $G = 31,25 \,.\, 20 = 625$ Pfund.

Wenn wir die Beschleunigung (g) der Schwere als unveränderlich annehmen, so folgt, daß die Masse eines Körpers dem Gewichte desselben vollkommen proportional ist, daß also für die Massen M und M_1 mit den Gewichten G und G_1 ist: §. 60.

$$\frac{M}{M_1} = \frac{G}{G_1}.$$

Wir erhalten hiernach das Gewicht als Maß der Masse eines Körpers, so daß also ein Körper um so mehr Masse hat, je größer sein Gewicht ist.

Allerdings ist die Beschleunigung der Schwere etwas veränderlich; sie wird größer, je näher man den Erdpolen kommt, und nimmt um so mehr ab, je mehr man sich dem Erdäquator nähert, ist also an den Polen am größten und am Aequator am kleinsten. Auch nimmt sie ab, je mehr ein Körper über dem Niveau des Meeres befindlich ist, und verändert sich mit der Tiefe des fallenden Körpers unter dem Niveau des Meeres. Da nun aber eine Masse, so lange man zu ihr Nichts hinzunimmt und von ihr Nichts wegnimmt, etwas Unveränderliches ist, also auf allen Punkten der Erde und selbst außerhalb derselben, z. B. auf dem Monde, noch dieselbe bleibt, so folgt daraus, daß auch das Gewicht eines Körpers veränderlich und von dem Orte der Körper abhängig, überhaupt aber der dem Orte entsprechenden Acceleration der Schwere proportional, oder $\frac{G}{G_1} = \frac{g}{g_1}$ sein müsse.

Es wird also hiernach eine und dieselbe Stahlfeder durch ein und dasselbe

Gewicht an verschiedenen Orten der Erde, verschieden gebogen, am **Aequator** und auf hohen Bergen am schwächsten, in der Nähe der Erdpole und im Niveau des Meeres am stärksten.

§. 61. **Absolutes und specifisches Gewicht.** In der Folge verstehen wir unter dem specifischen Gewichte eines Stoffes oder einer gewissen Materie (franz. poids spécifique; engl. specific-weight, specific-gravity, oder nach Rankine, heaviness) das Gewicht einer Volumeneinheit derselben, und unter dem absoluten Gewichte das Gewicht eines Körpers von irgend einem Volumen. Bezeichnet γ das specifische Gewicht und V das Volumen eines Körpers, so hat man hiernach das absolute Gewicht (franz. poids absolu; engl. absolute-weight) desselben:

$$G = V\gamma,$$

d. i. Volumen mal specifisches Gewicht zu setzen.

So ist z. B. das specifische Gewicht oder das Gewicht eines Cubikmeters Wasser $\gamma = 1000$ Kilogramm, und daher das absolute Gewicht desselben bei dem Volumen V Cubikmeter, $G = 1000\, V$ Kilogramm, z. B. von dem Wasserquantum $V = 15$ Cubikmeter,

$$G = 1000 . 15 = 15000 \text{ Kilogramm.}$$

Umgekehrt ist das specifische Gewicht:

$$\gamma = \frac{G}{V},$$

sowie das Volumen:

$$V = \frac{G}{\gamma},$$

und das Volumen der Gewichtseinheit, welches im Folgenden das specifische Volumen genannt werden soll, $v = \frac{1}{\gamma}$, also die Reciproke des specifischen Gewichts. Z. B. für Wasser ist

$$v = \frac{1}{1000} = 0{,}001 \text{ Cubikmeter,}$$

d. i. ein Kilogramm Wasser nimmt den Raum von 0,001 Cubikmeter = 1 Cubikdecimeter ein. Für stark gehämmertes Kupfer ist dagegen das specifische Volumen $v = \frac{1}{8000} = 0{,}000125$ Cubikmeter = 125 Cubikcentimeter, weil das specifische Gewicht, d. i. das eines Cubikmeters Kupfer, 8000 Kilogramm beträgt.

Auch ist hiernach

$$G = \frac{V}{v},\quad v = \frac{V}{G}$$

und $V = Gv$, d. i. das absolute Volumen gleich dem absoluten Gewicht mal specifisches Volumen. Z. B. für Kupfer ist $V = 125\ G$ Cubikcentimeter, daher das Volumen von 20 Kilogramm Kupfer:

$$V = 125 . 20 = 2500 \text{ Cubikcentimeter.}$$

Anmerkung. Die Werthe der specifischen Gewichte und specifischen Volumina sind bei verschiedenen Maß- und Gewichtssystemen verschieden. Nach dem alten preußischen Maß- und Gewichtssystem ist z. B. das specifische Gewicht des Wassers, d. i. das Gewicht von einem Cubikfuß Wasser, $\gamma = 66$ Pfund, daher das absolute Gewicht eines Wasserquantums V, $G = 66\ V$ Pfund, z. B. für $V = 20$ Cubikfuß, $G = 66 . 20 = 1320$ Pfund. Auch ist hiernach das Volumen von 1 Pfund Wasser:

$$v = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{66} = 0{,}01515 \text{ Cubikfuß} = 26{,}18 \text{ Cubikzoll.}$$

Dichtigkeit. Dichtigkeit (franz. densité; engl. density) ist die Stärke der Raumerfüllung durch Materie. Ein Körper ist um so dichter, je mehr Materie derselbe in seinem Raume einschließt. Da sich das Quantum an Materie nur durch Gewichte messen läßt, so ist das natürliche Maß der Dichtigkeit eines Körpers das specifische Gewicht γ desselben. Uebrigens ist die Dichtigkeit der Körper entweder gleichförmig (franz. uniforme, homogène; engl. uniform) oder ungleichförmig (franz. variable, hétérogène; engl. variable); je nachdem gleiche Volumenelemente desselben gleich oder verschieden schwer sind. Es ist z. B. die Dichtigkeit der Metalle und Metalllegirungen gleichförmig oder es sind die Metalle und Metalllegirungen homogen, weil auch die kleinsten Theile derselben ein- und dasselbe specifische Gewicht haben; hingegen ist Granit ein Körper von ungleichförmiger Dichtigkeit, weil er aus Theilen von verschiedenen specifischen Gewichten zusammengesetzt ist. §. 62.

Das Verhältniß der Dichtigkeiten zweier Körper ist auch das Verhältniß $\frac{\gamma_1}{\gamma}$ der specifischen Gewichte γ_1 und γ derselben zu einander.

Nimmt man nun die Dichtigkeit der Materie eines Körpers, z. B. des Wassers, dessen specifisches Gewicht $= \gamma$ sein möge, als Einheit an, so ist hiernach das Maß der Dichtigkeit eines anderen Körpers vom specifischen Gewicht γ_1, oder die Dichtigkeit desselben schlechtweg

$$\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\gamma},$$

die Dichtigkeit eines Stoffes gleich dem Verhältniß seines specifischen Gewichtes zu dem des Wassers, sowie $\gamma_1 = \varepsilon \gamma$, d. i. das specifische Gewicht gleich der Dichtigkeit desselben, multiplicirt mit dem specifischen Gewicht des Wassers.

Auch hat man hiernach das absolute Gewicht G einer Masse vom Volumen und der Dichtigkeit ε,

$$G = V\gamma_1 = V\varepsilon\gamma.$$

Ebenso ist V

$$G = \frac{V}{v_1} = \frac{\varepsilon V}{v},$$

wenn v und v_1 die specifischen Volumina des Wassers und des gedachten Körpers bezeichnen, und es läßt sich das absolute Volumen desselben

$$V = \frac{G}{\gamma_1} = \frac{G}{\varepsilon\gamma} = G v_1 = \frac{G v}{\varepsilon} \text{ setzen.}$$

Beispiele. 1) Die Dichtigkeit des Quecksilbers $\varepsilon = 13{,}6$, also das Gewicht desselben 13,6mal so groß als das eines Wasserquantums von demselben Volumen angenommen, folgt das specifische Gewicht des Quecksilbers, $\gamma_1 = \varepsilon\gamma = 13{,}6 \,.\, 1000 = 13600$, also das eines Cubikdecimeters Quecksilber 13,6 Kilogramm. Auch wiegt hiernach eine Quecksilbermasse von 20 Cubikcentimeter Volumen: $G = V\varepsilon\gamma = 20 \,.\, 0{,}0136 = 0{,}272$ Kilogramm $= 272$ Gramm. Umgekehrt ist das Volumen einer Quecksilbermasse von 500 Kilogramm Gewicht

$$V = \frac{G}{\varepsilon\gamma} = \frac{500}{13{,}6} = 36{,}76 \text{ Cubikcentimeter.}$$

2) Das specifische Gewicht des reinen Silbers ist 633 Pfund und die des Wassers = 61,75 Altpfund, folglich die Dichtigkeit des ersteren (in Hinsicht auf Wasser) $= \frac{633}{61{,}75} = 10{,}25$, d. h. jede Silbermasse ist $10\frac{1}{4}$ mal so schwer als eine ebenso viel Raum einnehmende Wassermasse.

Anmerkung. Der Gebrauch des französischen Maßes und Gewichtes gewährt bei diesen Rechnungen den Vortheil, daß man die Multiplication von ε und γ durch bloßes Vorrücken des Decimalstriches vollziehen kann, weil ein Cubikcentimeter Wasser ein Gramm und ein Cubikmeter eine Million Gramm oder 1000 Kilogramm wiegt. Das specifische Gewicht des Quecksilbers ist hiernach für das französische Maß und Gewicht $\gamma_1 = 13{,}598 \,.\, 1000 = 13598$ Kilogramm, d. i. ein Cubikmeter Quecksilber wiegt 13598 Kilogramm.

§. 63. Folgende Tabelle enthält die Dichtigkeiten von einigen, vorzüglich in der praktischen Mechanik in Anwendung kommenden Körpern. Eine vollständige Zusammenstellung dieser Gewichte giebt der „Ingenieur“, S. 310.

Tabelle der Dichtigkeiten (ε) einiger Körper.

I. Feste Körper.

Mittlere Dichtigkeit		Ebenholz, Pockholz, trocken	= 1,28
der getrockneten Laubhölzer	= 0,659	Holzfaser	= 1,52
mit Wasser gesättigt	= 1,110	Anthracit	= 1,50
Mittleres specifisches Gewicht		Braunkohle	= 1,20
der getrockneten Nadelhölzer	= 0,453	Steinkohle	= 1,30
mit Wasser gesättigt	= 0,839*)	Coaks	= 0,45

*) Siehe das Wasseransaugen des Holzes, polytechnische Mittheilungen, Bd. II, 1845.

Platin	= 21,45	Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Bruchsteinen:	
Gold	= 19,33	frisch	= 2,46
Silber	= 10,51	trocken	= 2,40
Blei	= 11,37	Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Sandsteinen:	
Kupfer, gegossen und dicht	= 8,75	frisch	= 2,12
„ geschmiedet	= 8,97	trocken	= 2,05
Messing	= 8,55	Mauerwerk mit Kalkmörtel, von Ziegelsteinen:	
Eisen, Gußeisen, weißes	= 7,50	frisch	= 1,55 bis 1,70
„ „ graues	= 7,10	trocken	= 1,47 „ 1,59
„ „ halbirtes	= 7,06	Erde, lehmige, festgestampft:	
„ Stabeisen	= 7,60 bis 7,80	frisch	= 2,06
Zink, gegossen	= 7,05	trocken	= 1,93
„ gewalzt	= 7,54	Gartenerde:	
Zinn	= 7,30	frisch	= 2,05
Alumin	= 2,67	trocken	= 1,63
Granit	= 2,50 bis 3,05	trockene magere Erde	= 1,34
Gneiß	= 2,39 „ 2,71		
Kalkstein	= 2,40 „ 2,86		
Sandstein	= 1,90 „ 2,70		
Ziegelstein	= 1,40 „ 2,22		

II. Flüssige Körper.

Wasser, destillirtes	= 1,000	Alkohol, absoluter	= 0,793
Meerwasser	= 1,026	Schwefeläther	= 0,715
Quecksilber	= 13,598	Schwefelkohlenstoff	= 1,272
Schwefelsäure, concentrirte	= 1,840	Glycerin	= 1,260
Salpetersäure	= 1,500	Milch	= 1,030

Aggregatzustände. Die Körper erscheinen uns nach dem verschiedenen Zusammenhange ihrer Theile in drei Hauptzuständen, die wir die Aggregatzustände derselben nennen. Sie sind entweder fest (franz. solides; engl. rigid) oder flüssig (franz. fluides; engl. fluid) und im letzteren Falle wieder entweder tropfbar flüssig (franz. liquides; engl. liquid) oder elastisch flüssig (franz. gazeux, aëriformes; engl. aëriform). Feste oder starre Körper sind diejenigen, deren Theilchen so stark unter sich zusammenhängen, daß eine gewisse Kraft nöthig ist, die Gestalt dieser Körper zu verändern oder eine Zertheilung derselben zu bewirken. Flüssige Körper hingegen sind solche, deren Theile durch die kleinste Kraft an einander verschoben werden können. Die elastisch flüssigen Körper, deren Repräsentant die atmosphärische Luft ist, unterscheiden sich dadurch von den tropfbar flüssigen, durch das Wasser repräsentirten Körpern, daß denselben ein Bestreben, sich immer weiter und weiter auszudehnen, inne wohnt, welches Bestreben dem Wasser u. s. w. mangelt. §. 64.

Während die festen Körper eine eigenthümliche Gestalt und ein bestimmtes Volumen haben, besitzen die tropfbar flüssigen oder wasserförmigen Körper

nur ein bestimmtes Volumen ohne eigenthümliche Form, die elastisch- oder ausdehnsam flüssigen Körper endlich weder das eine noch das andere.

§. 65. Eintheilung der Kräfte. Ihrer Natur nach sind die Kräfte sehr verschieden; wir führen hier nur die vorzüglichsten an:

1) Die Schwerkraft, vermöge welcher sich alle Körper dem Mittelpunkte der Erde zu nähern suchen.
2) Die Kraft der Trägheit, welche bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen bewegter Massen hervortritt.
3) Die Muskelkraft der beseelten Wesen, oder die mittelst der Muskel von Menschen und Thieren ausgeübte (animalische) Kraft.
4) Die Elasticität oder Federkraft, welche Körper bei ihren Form- und Volumenveränderungen äußern.
5) Die Wärmekraft, vermöge welcher sich Körper beim Wechsel der Temperatur ausdehnen oder zusammenziehen.
6) Die Cohäsionskraft, die Kraft, mit welcher die Theile eines Körpers zusammenhängen, mit welcher also auch dieselben einer Trennung widerstehen.
7) Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei in nahe Berührung gebrachte Körper einander anhängen.
8) Die Magnetkraft, oder die Anziehungs- und Abstoßungskraft der Magnete.

Nächstdem noch die elektrischen und elektromagnetischen Kräfte u. s. w.

Die Widerstände der Reibung, Steifigkeit, Festigkeit u. s. w. entspringen vorzüglich aus der Cohäsionskraft, welche, wie die Elasticität u. s. w., aus der sogenannten Molekularkraft, oder der Kraft, mit welcher die Moleküle oder kleinsten Theile eines Körpers auf einander wirken, hervorgeht.

§. 66. Bestimmungsstücke einer Kraft. Bei einer jeden Kraft unterscheiden wir:

1) Den Angriffspunkt (franz. point d'application; engl. point of application), den Punkt des Körpers, auf welchen eine Kraft unmittelbar wirkt.
2) Die Kraftrichtung (franz. und engl. direction), die gerade Linie, in welcher eine Kraft den Angriffspunkt fortbewegt, oder fortzubewegen oder dessen Bewegung zu verhindern sucht. Die Kraftrichtung hat, wie jede Bewegungsrichtung, zwei Seiten; sie kann von links nach rechts oder von rechts nach links, ferner von oben nach unten oder von unten nach oben gehen. Man nennt die eine die positive und die andere die negative. Da wir von links nach rechts und von oben

nach unten lesen und schreiben, so wäre es am geeignetsten, diese Bewegungen positive und die entgegengesetzten Bewegungen negative zu nennen.

3) Die absolute Größe oder Intensität (franz. grandeur absolue, intensité; engl. intensity) der Kraft, die nach dem Obigen durch Gewichte, z. B. Pfunde, Kilogramme u. s. w., gemessen wird.

Man stellt die Kräfte graphisch durch gerade Linien dar, welche durch ihre Richtung und Länge die Richtung und Größe oder Stärke, sowie durch ihre Anfangspunkte die Angriffspunkte der Kräfte angeben.

Wirkung und Gegenwirkung. Die erste Wirkung, welche eine Kraft in einem Körper hervorbringt, ist eine mit Ausdehnung oder Zusammendrückung verbundene Form- oder Volumenveränderung, welche im Angriffspunkt ihren Anfang nimmt und sich von da aus immer weiter und weiter im Körper ausbreitet. Durch diese innere Veränderung des Körpers wird aber die in ihm liegende Elasticität angeregt, die sich mit der äußeren Kraft ins Gleichgewicht setzt und deshalb derselben gleich ist und ihr entgegengesetzt wirkt. Man sagt hiernach: Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich und entgegengesetzt. Dieses Gesetz findet nicht nur bei den durch Berührung erzeugten Einwirkungen der Kräfte, sondern auch bei den sogenannten Anziehungs- und Abstoßungskräften, wohin die magnetische und selbst die Schwerkraft zu rechnen sind, statt. So stark ein Magnet einen Eisenstab anzieht, ebenso stark wird der Magnet vom Eisenstabe selbst angezogen. Die Kraft, mit welcher der Mond von der Erde angezogen wird (durch die Schwerkraft), ist gleich der Kraft, mit welcher der Mond auf die Erde zurückwirkt. §. 67.

Die Kraft, mit welcher ein Gewicht auf eine Unterlage drückt, giebt diese in der entgegengesetzten Richtung zurück; die Kraft, womit ein Arbeiter an einer Maschine zieht, schiebt u. s. w., wirkt auf den Arbeiter zurück und sucht denselben in entgegengesetzter Richtung zu bewegen. Wenn ein Körper gegen einen anderen stößt, so drückt der erste den anderen genau so viel wie der andere den ersten.

Eintheilung der Mechanik. Die gesammte Mechanik wird nach den zwei Aggregatzuständen der Körper in zwei Hauptabtheilungen gebracht, nämlich: §. 68.

1) in die Mechanik der festen oder starren Körper, welche man auch wohl Geomechanik (franz. mécanique des corps solides; engl. mechanics of rigid bodies) nennt, und

2) in die Mechanik der flüssigen Körper, Hydromechanik, auch Hydraulik (franz. mécanique des fluides, hydraulique; engl. mechanics of fluids). Die letztere theilt man wieder ein

a) in die **Mechanik des Wassers** und der **tropfbar flüssigen Körper** überhaupt, **Hydromechanik**, auch Hydraulik (franz. hydraulique; engl. hydraulic), und

b) in die **Mechanik der Luft** und **anderer luftförmigen Körper** überhaupt, **Aëromechanik** (franz. mécanique des fluides aëriformes; engl. mechanics of elastic fluids).

Nimmt man nun noch auf die Eintheilung der Mechanik in **Statik** und **Dynamik** (§. 51) Rücksicht, so erhält man folgende Theile:

1) **Statik der festen Körper**, oder **Geostatik**,
2) **Dynamik der festen Körper**, oder **Geodynamik**,
3) **Statik des Wassers** u. s. w., oder **Hydrostatik**,
4) **Dynamik des Wassers** u. s. w., oder **Hydrodynamik**,
5) **Statik der Luft** (der Gase und Dämpfe), oder **Aërostatik**,
6) **Dynamik der Luft**, oder **Aërodynamik**, auch **Pneumatik**.

Von den festen und flüssigen Körpern sind noch die **lockeren** oder sogenannten **Erdmassen** (franz. terres lâches; engl. loose earths) zu unterscheiden. Die Gleichgewichtslehre dieser Massen bildet einen besondern Theil der Statik.

Ebenso bildet die **mechanische Wärmetheorie** sowie die **Theorie der Schwingungen des Aethers**, eines im ganzen Weltraume verbreiteten äußerst feinen elastischen Stoffes, einen besondern Theil der Dynamik (franz. thermo-dynamique; engl. thermo-dynamics).

Zweites Capitel.

Mechanik des materiellen Punktes.

Ein materieller Punkt (franz. point matériel; engl. material point) ist ein materieller Körper, dessen Dimensionen nach allen Seiten hin unendlich klein sind in Hinsicht auf die von ihm zurückgelegten Wege. Um den Vortrag zu vereinfachen, wird im Folgenden zunächst nur von der Bewegung und dem Gleichgewichte eines materiellen Punktes die Rede sein. Ein (endlicher) Körper ist eine stetige Verbindung von unendlich vielen materiellen Punkten oder Molekülen. Wenn sich die einzelnen Punkte oder Elemente eines Körpers alle vollkommen gleich, d. i. in parallelen geraden Linien gleich schnell bewegen, so kann man die Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auch auf die des ganzen Körpers anwenden, weil sich in diesem Falle annehmen läßt, daß gleiche Massentheile des Körpers durch gleiche Krafttheile getrieben werden. §. 69.

Einfache constante Kraft. Ist p die Acceleration, mit welcher eine Masse M durch eine Kraft fortgetrieben wird, so hat man nach §. 58 für diese: §. 70.

$$P = Mp, \text{ sowie umgekehrt, die Acceleration } p = \frac{P}{M}.$$

Setzen wir ferner die Masse $M = \frac{G}{g}$, wo G das Gewicht des Körpers und g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet, so ist die Kraft:

$$1)\ P = \frac{p}{g} G,$$

und die Acceleration:

$$2)\ p = \frac{P}{G} g.$$

Man findet also die Kraft (P), welche einen Körper mit einer gewissen Acceleration (p) forttreibt, wenn man das Gewicht (G) des Körpers durch das Verhältniß $\left(\frac{p}{g}\right)$ seiner Acceleration zu der der Schwere multiplicirt.

Es ergiebt sich umgekehrt die Acceleration (p), mit welcher ein

Körper durch eine Kraft (P) fortbewegt wird, indem man die Acceleration (g) der Schwere durch das Verhältniß $\left(\frac{P}{G}\right)$ zwischen Kraft und Gewicht des Körpers multiplicirt.

Beispiel. Man denke sich einen Körper auf einem horizontalen und sehr glatten Tische liegend, welcher dem Körper keine Hindernisse in den Weg setzt, wohl aber die Schwerkraft in demselben aufhebt. Wird dieser Körper von einer horizontal wirkenden Kraft gedrückt, so muß der Körper der Einwirkung derselben nachgeben und in der Richtung dieser Kraft fortgehen. Ist das Gewicht dieses Körpers: $G = 50$ Kilogramm und die auf ihn unausgesetzt drückende Kraft $P = 10$ Kilogramm, so wird er in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Acceleration $p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{10}{50} \cdot 9{,}81 = 1{,}962$ Meter übergehen. Ist hingegen die Acceleration, mit welcher ein 42 Kilogramm schwerer Körper durch eine Kraft (P) beschleunigt wird, $p = 3$ Meter, so wird diese Kraft $P = \frac{p}{g}\, G = \frac{3}{9{,}81} \cdot 42 = 0{,}1019 \,.\, 126 = 12{,}8$ Kilogramm betragen.

§. 71. Ist die Kraft, welche auf einen Körper wirkt, constant, so entsteht eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar eine gleichförmig beschleunigte, wenn die Kraftrichtung in die anfängliche Bewegungsrichtung fällt, und dagegen eine gleichförmig verzögerte, wenn die Kraftrichtung der anfänglichen Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Setzen wir nun in den phoronomischen Formeln (§. 13 und §. 14) statt p den Werth $\frac{P}{M} = \frac{P}{G} g$ ein, so bekommen wir Folgendes:

I. Für gleichförmig beschleunigte Bewegungen:

1) $v = c + \frac{P}{G} g t = c + 9{,}81 \frac{P}{G} t$ Meter $= c + 31{,}25 \frac{P}{G} t$ Fuß,

2) $s = c t + \frac{P}{G}\frac{g t^2}{2} = c t + 4{,}905 \frac{P}{G} t^2$ Meter $= c t + 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$ Fuß.

II. Für gleichförmig verzögerte Bewegungen:

1) $v = c - \frac{P}{G} g t = c - 9{,}81 \frac{P}{G} t$ Meter $= c - 31{,}25 \frac{P}{G} t$ Fuß,

2) $s = c t - \frac{P}{G}\frac{g t^2}{2} = c t - 4{,}905 \frac{P}{G} t^2$ Meter $= c t - 15{,}625 \frac{P}{G} t^2$ Fuß.

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich alle Fragen, welche sich in Ansehung der durch eine beständige Kraft veranlaßten geradlinigen Bewegungen von Körpern stellen lassen, beantworten.

Beispiele. 1) Ein 2000 Kilogramm schwerer Wagen geht mit $1\frac{1}{2}$ Meter Geschwindigkeit auf einer horizontalen, ihm keine Hindernisse entgegensetzenden Bahn fort, und wird 15 Secunden lang durch eine unveränderliche Kraft von 25 Kilogramm vorwärts geschoben; mit welcher Geschwindigkeit wird er nach Einwirkung dieser Kraft fortgehen? Es ist diese Geschwindigkeit $v = c + 9{,}81 \frac{P}{G} t$; da hier $c = 1\frac{1}{2}$, $P = 25$, $G = 2000$ und $t = 15$, so folgt

$$v = 1{,}5 + 9{,}81 \cdot \frac{25}{2000} \cdot 15 = 1{,}5 + 1{,}839 = 3{,}339 \text{ Meter.}$$

2) Unter gleichen Umständen wird ein 2500 Kilogramm schwerer Wagen, der vorher während 3 Minuten gleichförmig fortgehend 360 Meter zurückgelegt hat, durch eine 30 Secunden lang anhaltend wirkende Kraft so fortgetrieben, daß er später in 3 Minuten 650 Meter gleichförmig durchläuft. Welches war diese Kraft? Hier ist Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{360}{3\,.\,60} = 2$ Meter, und Endgeschwindigkeit $v = \frac{650}{3\,.\,60} = 3{,}611$ Meter, daher der Geschwindigkeitszuwachs

$$\frac{P}{G} g t = v - c = 1{,}611,$$

und die Kraft

$$P = \frac{1{,}611\,.\,G}{g t} = 0{,}1019\,.\,1{,}611 \cdot \frac{2500}{30} = 0{,}16416 \cdot \frac{250}{3} = 13{,}68 \text{ Kilogramm.}$$

3) Ein mit 15 Fuß Geschwindigkeit fortgleitender, 1500 Pfund schwerer Schlitten verliert in Folge der Reibung auf seiner horizontalen Unterlage innerhalb 25 Secunden seine ganze Bewegung; wie groß ist diese Reibung? Hier ist die Bewegung gleichförmig verzögert und die Endgeschwindigkeit $v = 0$, daher

$$c = 31{,}25 \frac{P t}{G},$$

und

$$P = 0{,}032 \frac{G c}{t} = 0{,}032 \cdot \frac{1500\,.\,15}{25} = 0{,}032\,.\,900 = 28{,}8 \text{ Pfund}$$

die in Frage stehende Reibung.

4) Ein anderer Schlitten von 1200 Pfund Gewicht und 12 Fuß Anfangsgeschwindigkeit hat bei seiner Bewegung eine Reibung von 45 Pfund zu überwinden; welche Geschwindigkeit besitzt derselbe nach 8 Secunden und wie groß ist der zurückgelegte Weg desselben? Die Endgeschwindigkeit ist

$$v = 12 - 31{,}25 \cdot \frac{45\,.\,8}{1200} = 12 - 9{,}375 = 2{,}625 \text{ Fuß,}$$

und der zurückgelegte Weg

$$s = \left(\frac{c + v}{2}\right) t = \left(\frac{12 + 2{,}625}{2}\right) \cdot 8 = 58{,}5 \text{ Fuß.}$$

Mechanische Arbeit. Leistung oder Arbeit einer Kraft (franz. travail mécanique; engl. work done, labouring force) ist diejenige Wirkung einer Kraft, welche dieselbe bei Ueberwindung eines Widerstandes, z. B. der Schwerkraft, der Reibung, der Trägheit u. s. w., hervorbringt. Man verrichtet also eine mechanische Arbeit, indem man Lasten empor- §. 72.

hebt, Massen eine größere Geschwindigkeit ertheilt, Körper in ihrer Form verändert, zertheilt u. s. w. Die Leistung oder Arbeit hängt nicht allein von der Kraft, sondern auch von dem Wege ab, auf welchem diese thätig ist oder einen Widerstand überwindet; sie wächst überhaupt proportional der Kraft und dem Wege zugleich. Heben wir einen Körper langsam genug in die Höhe, um seine Trägheit vernachlässigen zu können, so ist die verrichtete Arbeit seinem Gewichte und der Höhe, auf welche der Körper gehoben wird, proportional; denn 1) die Wirkung ist dieselbe, ob ein Körper vom m (3) fachen Gewichte (mG) auf eine gewisse Höhe gehoben wird oder ob m (3) Körper vom einfachen Gewichte (G) auf dieselbe Höhe gehoben werden; sie ist nämlich $m$mal so groß als die nöthige Wirkung zum Aufheben des einfachen Gewichtes auf die nämliche Höhe; auch ist 2) die Leistung dieselbe, ob ein und dasselbe Gewicht auf die n (5) fache Höhe (nh) oder ob es n (5) mal auf die einfache Höhe gehoben wird, überhaupt aber n (5) mal so groß, als wenn dasselbe Gewicht um die einfache Höhe (h) emporsteigt. Ebenso ist die von einem langsam sinkenden Gewichte verrichtete Arbeit der Größe dieses Gewichtes und der Höhe, von welcher es herabgesunken ist, proportional. Diese Proportionalität findet aber auch bei jeder anderen Art der Arbeitsverrichtung statt; um bei einerlei Tiefe einen Sägeschnitt von doppelter Länge auszuführen, sind noch einmal so viel Theilchen zu trennen, als beim Schnitt von der einfachen Länge, ist also auch die Arbeit doppelt so groß; die doppelte Länge erfordert aber auch den doppelten Weg der Kraft, es ist folglich die Arbeit dem Wege proportional. Ebenso wird die Arbeit eines Mahlganges offenbar mit der Menge der Körner einer gewissen Getreideart, welche derselbe bis zu einem gewissen Grade zerreibt, wachsen. Diese Menge ist aber unter übrigens gleichen Umständen der Zahl der Umdrehungen oder vielmehr dem Wege, welchen der obere Mühlstein (Läufer) während des Mahlens dieser Getreidemenge gemacht hat, proportional; es wächst folglich auch die mechanische Arbeit mit dem Wege gleichmäßig.

§. 73. **Arbeitseinheit.** Die angegebene Abhängigkeit der Arbeit einer Kraft von der Größe und dem Wege der Kraft erlaubt uns diejenige Arbeit, welche bei Ueberwindung eines Widerstandes von der Größe der Gewichtseinheit (z. B. Kilogramm, Pfund u. s. w.) längs eines Weges von der Größe der Längeneinheit (z. B. Meter oder Fuß) aufgewendet wird, als Einheit der mechanischen Arbeit oder Leistung (franz. unité dynamique; engl. dynamical unit, unit of work) anzunehmen und nun das Maß dieser gleichzusetzen dem Producte aus Kraft oder Widerstand und aus dem während der Ueberwindung des Widerstandes in der Kraftrichtung zurückgelegten Wege.

Setzen wir die Größe des Widerstandes selbst $= P$, und den bei seiner

Ueberwindung von der Kraft oder vielmehr von ihrem Angriffspunkte zurückgelegten Weg, $= s$, so ist hiernach die bei Ueberwindung dieses Widerstandes aufgewendete Arbeit oder die Leistung

$$A = Ps \text{ Arbeitseinheiten.}$$

Um die Arbeitseinheit, für welche man auch den einfachen Namen Dynamie gebrauchen kann, näher zu bezeichnen, giebt man gewöhnlich die Einheiten beider Factoren P und s an, und sagt deshalb statt Arbeitseinheiten Kilogrammmeter, Pfundfuß, auch umgekehrt, Meterkilogramm, Fußpfund u. s. w., je nachdem Gewicht und Weg in Kilogramm und Meter oder in Pfund und Fuß ausgedrückt werden. Der Einfachheit wegen schreibt man statt Meterkilogramm *mk* oder *km*, und ebenso statt Fußpfund, Fpfd. Uebrigens ist

1 Kilogrammmeter $= 2{,}13807 \,.\, 3{,}1862 = 6{,}8123$ Fußpfd. preuß.
$= 2{,}20460 \,.\, 3{,}2809 = 7{,}233$ „ engl.

Beispiele. 1) Um einen Pochstempel von 150 Kilogramm Gewicht 36 Centimeter hoch zu heben, ist die mechanische Arbeit

$$A = 150 \,.\, 0{,}36 = 54 \text{ Kilogrammmeter nöthig.}$$

2) Durch eine mechanische Leistung von 1500 Fußpfund kann ein Schlitten, welcher bei seiner Bewegung 75 Pfund Reibung zu überwinden hat, um den Weg

$$s = \frac{A}{P} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ Fuß fortgezogen werden.}$$

Nicht nur bei unveränderlicher Kraft oder constantem Widerstande ist die Arbeit ein Product aus Kraft und Weg, sondern auch dann, wenn der Widerstand während seiner Ueberwindung veränderlich ist, läßt sich die Arbeit als das Product aus Kraft und Weg ausdrücken, wenn man nur als Kraft einen mittleren Werth aus der stetigen Folge von Kräften annimmt. Das Verhältniß ist hier dasselbe wie das zwischen Zeit, Geschwindigkeit und Raum; denn auch der letztere läßt sich ja als ein Product aus Zeit und einem mittleren Werthe der Geschwindigkeiten ansehen. Auch hier sind dieselben graphischen Darstellungen anwendbar. Es läßt sich die mechanische Arbeit als Flächeninhalt eines Rechteckes *ABCD*, Fig. 93, ansehen, dessen §. 74.

Fig. 93.

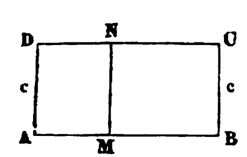
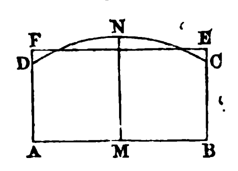


Fig. 94.



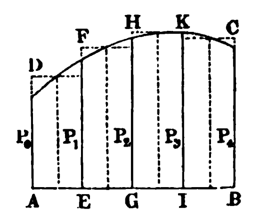
Grundlinie *AB* der zurückgelegte Weg (s) und dessen Höhe entweder die unveränderliche Kraft (P) selbst oder das Mittel von den verschiedenen Kraftwerthen ist. Im Allgemeinen läßt sich aber die Arbeit durch den Flächen-

raum einer Figur $ABCND$, Fig. 94 (a. v. S.), darstellen, die zur Grundlinie den Weg s hat und deren Höhe über jeder Stelle der Grundlinie gleich ist der dieser Stelle des Weges entsprechenden Kraft. Verwandelt man die Figur $ABCND$ in ein Rechteck $ABEF$ von gleicher Grundlinie und gleichem Inhalte, so erhält man in der Höhe $AF = BE$ desselben den mittleren Werth dieser Kraft.

§. 75. Die Arithmetik und Geometrie geben verschiedene Mittel an, um aus einer stetigen Folge von Größen einen mittleren Werth derselben ausfindig zu machen; man findet auch die vorzüglichsten im „Ingenieur" angegeben. Unter ihnen ist aber die sogenannte Simpson'sche Regel dasjenige, welches man in der Praxis am häufigsten anwendet, weil sie in vielen Fällen große Einfachheit mit einem hohen Grade von Genauigkeit in sich vereinigt.

In jedem Falle ist es nöthig, den Weg $AB = s$ (Fig. 95) in n (möglichst viel) gleiche Theile, wie $AE = EG = GI$ u. s. w., einzutheilen und die Kräfte $\overline{EF} = P_1$, $\overline{GH} = P_2$, $\overline{IK} = P_3$ u. s. w. an den Enden dieser Wegtheile zu ermitteln. Setzen wir dann noch die anfängliche Kraft $\overline{AD} = P_0$ und die Kraft BC am Ende $= P_n$, so erhalten wir die mittlere Kraft: $P = (\frac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_{n-1} + \frac{1}{2} P_n) : n$, und daher die Arbeit derselben:

Fig. 95.



$$Ps = (\tfrac{1}{2} P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + \tfrac{1}{2} P_n) \frac{s}{n}.$$

Ist die Anzahl (n) der Theile eine gerade, nämlich 2, 4, 6, 8 u. s. w., so giebt die Simpson'sche Regel noch genauer die mittlere Kraft:

$$P = (P_0 + 4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + \cdots + 4 P_{n-1} + P_n) : 3n,$$

und daher die entsprechende Arbeit:

$$Ps = (P_0 + 4 P_1 + 2 P_2 + 4 P_3 + \cdots + 4 P_{n-1} + P_n) \frac{s}{3n}.$$

Ist n ungerade, so läßt sich setzen:

$$Ps = [\tfrac{3}{8}(P_0 + 3 P_1 + 3 P_2 + P_3) + \tfrac{1}{3}(P_3 + 4 P_4 + 2 P_5 + \cdots + 4 P_{n-1} + P_n)] \frac{s}{n}.$$ (S. Art. 38 der analyt. Hülfslehren.)

Beispiel. Um die mechanische Arbeit eines Zugpferdes zu finden, welche dieses beim Fortziehen eines Wagens auf einer gewissen Straße verrichtet, bedient man sich eines Kraftmessers (Dynamometers), welcher auf der einen Seite mit dem Wagen und auf der anderen Seite mit den Strängen des Pferdes in Verbindung gesetzt ist, und beobachtet an demselben von Zeit zu Zeit die Größe

der Kraft. Wenn die anfängliche Kraft $P_0 = 110$ Pfund, die nach Zurücklegung von 25 Fuß Weg, 122 Pfund, nach Zurücklegung von 50 Fuß, 127 Pfund, bei einem Wege von 75 Fuß, 120 Pfund und am Ende des ganzen Weges von 100 Fuß, = 114 Pfund beträgt, so hat man den mittleren Kraftwerth nach der ersten Formel:

$$P = (\tfrac{1}{2} . 110 + 122 + 127 + 120 + \tfrac{1}{2} . 114) : 4 = 120{,}25 \text{ Pfund},$$

und die mechanische Arbeit:

$$Ps = 120{,}25 . 100 = 12025 \text{ Fußpfund};$$

nach der zweiten Formel aber:

$$P = (110 + 4 . 122 + 2 . 127 + 4 . 120 + 114) : (3 . 4) = \frac{1446}{12} = 120{,}5 \text{ Pfd.}$$

und die mechanische Leistung:

$$Ps = 120{,}5 . 100 = 12050 \text{ Fußpfund}.$$

Arbeit der Trägheitskraft. Setzen wir in der §. 13 entwickelten Formel der Phoronomie: **§. 76.**

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \text{ oder } p s = \frac{v^2 - c^2}{2}$$

für die Acceleration p ihren Werth $\frac{P}{G} g$ ein, so erhalten wir das der bewegten Masse M innewohnende mechanische Arbeitsvermögen (energy, nach Rankine):

$$A = Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G,$$

oder, wenn wir die Geschwindigkeitshöhen $\frac{v^2}{2g}$ und $\frac{c^2}{2g}$ durch h und k bezeichnen:

$$Ps = (h - k) G.$$

Diese für die praktische Mechanik überaus fruchtbringende Gleichung sagt: Die mechanische Arbeit (Ps), welche eine Masse entweder in sich aufnimmt, wenn sie aus einer kleineren Geschwindigkeit (c) in eine größere (v) übergeht, oder hervorbringt, wenn sie aus einer größeren Geschwindigkeit in eine kleinere überzugehen genöthigt wird, ist stets gleich dem Producte aus dem Gewichte dieser Masse und der Differenz der beiden Geschwindigkeiten entsprechenden Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right)$.

Beispiele. 1) Um einen 2000 Kilogramm schweren Wagen auf einer vollkommen glatten Schienenbahn in eine Geschwindigkeit von 10 Meter zu versetzen, ist eine mechanische Arbeit

$$Ps = \frac{v^2}{2g} G = 0{,}051\, v^2 G = 0{,}051 . 100 . 2000 = 10200 \text{ Kilogrammmeter}$$

aufzuwenden nöthig; und ebenso viel Arbeit wird dieser Wagen verrichten, wenn man ihm einen Widerstand entgegensetzt und ihn dadurch allmälig in Ruhe überzugehen nöthigt.

2) Ein anderer Wagen von 6000 Pfund geht mit 15 Fuß Geschwindigkeit fort und wird durch eine auf ihn wirkende Kraft in eine Geschwindigkeit von 24 Fuß versetzt; wie groß ist die von diesem Wagen in sich aufgenommene oder von der Kraft verrichtete Arbeit? Den Geschwindigkeiten 15 Fuß und 24 Fuß entsprechen die Geschwindigkeitshöhen

$$k = \frac{c^2}{2g} = 3{,}6 \text{ Fuß und } h = \frac{v^2}{2g} = 9{,}216 \text{ Fuß};$$

demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit:

$$Ps = (h - k)\,G = (9{,}216 - 3{,}600)\,.\,6000 = 5{,}616\,.\,6000 = 33696 \text{ Fpfd.}$$

Kennt man nun den Weg, auf welchem diese Geschwindigkeitsveränderung vor sich geht, so läßt sich die Kraft finden, kennt man dagegen diese, so kann man den Weg bestimmen. Soll z. B. im letzten Falle der Weg des Wagens nur 100 Fuß betragen, während dessen Zurücklegung die Geschwindigkeit von 15 Fuß in die von 24 Fuß übergeht, so hat man die Kraft

$$P = (h - k)\,\frac{G}{s} = \frac{33696}{100} = 336{,}96 \text{ Pfund.}$$

Wäre aber die Kraft selbst 2000 Pfund, so würde der Weg

$$s = (h - k)\,\frac{G}{P} = \frac{33696}{2000} = 16{,}848 \text{ Fuß betragen.}$$

3) Wenn ein 500 Kilogramm schwerer Schlitten in Folge der Reibung auf der Bahn seine Geschwindigkeit von 4 Meter nach Zurücklegung von 32 Meter Weg gänzlich verloren hat, so ist der Reibungswiderstand:

$$P = \frac{h\,G}{s} = 0{,}051\,.\,4^2\,\frac{500}{32} = 0{,}051\,.\,250 = 12{,}75 \text{ Kilogramm.}$$

§. 77. Die im vorigen Paragraphen gefundene Arbeitsformel:

$$A = Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = (h - k)\,G$$

gilt nicht allein für constante, sondern auch für veränderliche Kräfte, wenn man nur (nach §. 75) statt P den mittleren Kraftwerth einführt; denn da nach III*) in §. 19 für jede stetige Bewegung überhaupt

$$\frac{v^2 - c^2}{2} = ps \text{ ist,}$$

wenn $p = \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}$ die gleichen Wegelementen σ entsprechende mittlere Acceleration bei dem Durchlaufen des Weges s bezeichnet, so hat man auch

$$p = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n\,M},$$

folglich

$$\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \left(\frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}\right) s,$$

und

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M = \frac{v^2 - c^2}{2g} G = (h - k) G,$$

wenn $P = \frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}{n}$, das Mittel aller nach Zurücklegung der Wege $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \ldots \frac{ns}{n}$ gemessenen Kraftwerthe bezeichnet.

Uebrigens läßt sich natürlich P auch nach einer der letzteren Formeln des §. 75 berechnen, wenn zumal die Zahl n der Theile nicht sehr groß angenommen wird.

Sehr oft ist die Geschwindigkeitsveränderung zu ermitteln, welche eine gegebene Masse M bei Aufnahme einer gewissen mechanischen Arbeit Ps erleidet. Die gefundene Hauptgleichung wird dann in der Form

$$h = k + \frac{Ps}{G} \text{ oder } v = \sqrt{c^2 + 2g\frac{Ps}{G}}$$

angewendet.

Hat man mittels dieser Formel die den Wegen $\frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \cdots s$ entsprechenden Endgeschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ bestimmt, so kann man durch Anwendung der Formel

$$t = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \cdots + \frac{1}{v_n}\right)$$

die Zeit, in welcher der Weg s zurückgelegt wird, berechnen.

In der Form $G = Mg = \frac{2Ps}{v^2 - c^2} = \frac{Ps}{\frac{1}{2}(v + c)(v - c)}$ dient endlich die gefundene Hauptgleichung noch dazu, um die Masse M zu bestimmen, bei welcher die mechanische Arbeit Ps eine gegebene Geschwindigkeitsveränderung $v - c$ hervorbringt.

Wenn bei der (stetigen) Bewegung eines Körpers die Endgeschwindigkeit v gleich ist der Anfangsgeschwindigkeit c, so fällt die hierbei in Anspruch genommene Arbeit = Null aus, d. h. es nimmt der beschleunigte Theil der Bewegung gerade so viel Arbeit in Anspruch, als der verzögerte Theil derselben verrichtet.

Beispiel. 1) Wenn ein ohne Reibung auf einer Eisenbahn fortgehender Wagen von 2500 Pfund Gewicht zur Vermehrung seiner Geschwindigkeit, die anfangs nur 10 Fuß betrug, eine mechanische Arbeit von 8000 Fußpfund in sich aufgenommen hat, so wird seine Geschwindigkeit nach Aufnahme dieser Arbeit

$v = \sqrt{10^2 + 62{,}5 \cdot \frac{8000}{2500}} = \sqrt{100 + 200} = 17{,}32$ Fuß betragen.

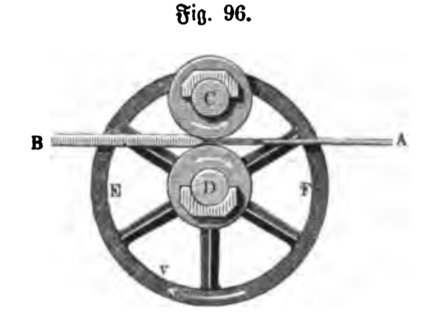
2) Wenn während des Auswalzens eines Metallstabes AB mittels der Walzen C und D, Fig. 96 (a. f. S.), die Umdrehungsgeschwindigkeit $v = 20$ Meter des mit der einen Walze verbundenen Schwungrades EF allmälig in $c = 3$ Meter

übergeht, so ist bei dem Gewichte $G = 10000$ Kilogramm des Schwungringes die von der Trägheitskraft desselben verrichtete und auf das Auswalzen verwendete mechanische Arbeit

$$A = \frac{v^2 - c^2}{2g} G$$
$$= 0{,}051 (400 - 9) 10000$$
$$= 391.510 = 199410$$ Kilogrammeter, sowie die mittlere Kraft, mit welcher der Metallstab bei der Länge $s = 4$ Meter desselben mittels der Trägheit des Schwungrades durch die Walzen gezogen wird,

$$P = \frac{A}{s} = \frac{199410}{4}$$
$$= 49852{,}5 \text{ Kilogr.}$$

Fig. 96.



Anmerkung. Man nennt, ohne einen besonderen Begriff damit zu verbinden, das Product aus Masse $M = \frac{G}{g}$ und Quadrat der Geschwindigkeit (v^2), also Mv^2, die lebendige Kraft (franz. force vive; engl., eigentlich lat. vis viva) der bewegten Masse, und kann hiernach die mechanische Arbeit, welche eine bewegte Masse in sich aufnimmt, gleichsetzen der halben lebendigen Kraft derselben. Geht eine träge Masse aus einer Geschwindigkeit c in eine andere v über, so ist sowohl die gewonnene als auch die verlorene Arbeit gleich der halben Differenz zwischen den lebendigen Kräften am Ende und am Anfange der Geschwindigkeitsveränderung. Dieses Gesetz von der mechanischen Leistung der Körper durch ihre Trägheit nennt man das Princip der lebendigen Kräfte (franz. principe des forces vives; engl. principle of vis viva).

§. 78. **Zusammensetzung der Kräfte.** Wirken zwei Kräfte P_1 und P_2 auf einen und denselben Körper 1) in gleicher oder 2) in entgegengesetzter Richtung, so ist die Wirkung dieselbe, als wenn nur eine Kraft auf den Körper wirkte, welche 1) der Summe oder 2) Differenz dieser Kräfte gleich ist, denn diese Kräfte ertheilen der Masse M die Acceleration:

$$p_1 = \frac{P_1}{M} \text{ und } p_2 = \frac{P_2}{M};$$

es ist folglich nach §. 31 die aus beiden resultirende Acceleration:

$$p = p_1 \pm p_2 = \frac{P_1 \pm P_2}{M},$$

und demnach die derselben entsprechende Kraft:

$$P = Mp = P_1 \pm P_2.$$

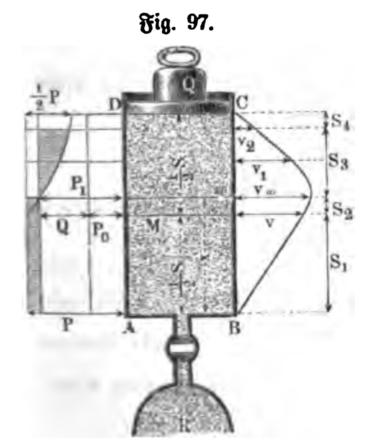
Man nennt die aus den beiden Kräften hervorgehende, gleich viel vermögende (äquipollente) Kraft P die Resultirende (franz. résultante; engl. resultant), die Bestandtheile P_1 und P_2 aber die Componenten (franz. composantes; engl. components).

Beispiele. 1) Ein auf der flachen Hand liegender Körper drückt nur so lange mit seinem absoluten Gewichte auf dieselbe, so lange die Hand in Ruhe ist oder mit dem Körper gleichförmig auf- oder abwärts bewegt wird; hebt man aber die Hand beschleunigt empor, so erleidet dieselbe einen stärkeren Druck, geht man dagegen beschleunigt mit der Hand senkrecht nieder, so wird der Druck kleiner als das Gewicht; er wird sogar Null, wenn man die Hand mit der Acceleration der Schwere herabführt. Ist der Druck auf die Hand $= P$, so fällt der Körper nur mit der Kraft $G - P$ nieder, während seine Masse $M = \frac{G}{g}$ ist; setzen wir daher die Acceleration, mit welcher die Hand mit dem darauf liegenden Körper niedergeht, $= p$, so folgt $G - P = \frac{G}{g} p$, und daher der Druck $P = G - \frac{p}{g} G = \left(1 - \frac{p}{g}\right) G$. Läßt man dagegen den Körper auf der Hand mit der Acceleration p aufsteigen, so ist p der Acceleration g entgegengesetzt, daher der Druck auf die Hand, $P = \left(1 + \frac{p}{g}\right) G$. Je nachdem man einen Körper mit 20 Fuß Beschleunigung ab- oder aufwärts steigen läßt, ist der Druck auf die Hand $= \left(1 - \frac{20}{31,25}\right) G = (1 - 0,64) G = 0,36$ des Körpergewichtes oder $= 1 + 0,64 = 1,64$ desselben.

2) Wenn ich mit der flachen Hand einen Körper von 3 Pfund Gewicht 14 Fuß hoch senkrecht in die Höhe schleudere, indem ich ihn auf die ersten zwei Fuß Höhe mit der Hand unausgesetzt forttreibe, so ist die verrichtete mechanische Arbeit $Ps = Gh = 3 . 14 = 42$ Fußpfund, und demnach der Druck des Körpers auf die Hand: $P = \frac{42}{2} = 21$ Pfund. Während also der ruhende Körper mit 3 Pfund drückt, wirkt er während des Werfens mit 21 Pfund Kraft auf die Hand zurück.

3) Welche Last Q vermag der in einem Cylinder $ABCD$, Fig. 97, bewegliche Kolben um $AD = s = 6$ Fuß hoch zu heben, wenn er auf der ersten Weghälfte AM von innen durch die aus einem großen Reservoir R zuströmende Luft mit der Kraft $P = 6000$ Pfund, und auf der zweiten Weghälfte MD durch die im Cylinder abgesperrte und nach dem Mariotte'schen Gesetze mit allmälig abnehmender Kraft wirkende Luft fortbewegt wird, während die äußere Luft constant auf den Kolben mit der Kraft $P_0 = 2000$ Pfund entgegenwirkt? Da sich die im Cylinder abgesperrte Luft am Ende der zweiten Hälfte des ganzen Kolbenweges um das Doppelte ausgedehnt hat, so ist die Kraft derselben zuletzt nur $\frac{1}{2} . P = 3000$ Pfund. Es drückt die im Cylinder abgesperrte Luft am Ende des Kolbenweges von 3 Fuß noch mit 6000 Pfund,

Fig. 97.



dagegen am Ende des Weges von 4 Fuß mit $\frac{3}{4} . 6000 = 4500$ Pfund, am Ende des Weges von 5 Fuß mit $\frac{3}{5} . 6000 = 3600$ Pfund, und am Ende des ganzen Weges von 6 Fuß mit $\frac{3}{6} . 6000 = 3000$ Pfund, wonach sich die mittlere Kraft während der Expansion $= \frac{1}{8} [6000 + 3 (4500 + 3600) + 3000] = \frac{33300}{8}$ $= 4162$ Pfund, und folglich die mittlere Kraft bei der ganzen Kolbenbewegung $P_1 = \frac{6000 + 4162}{2} = 5081$ Pfund ergiebt. Zieht man hiervon den constanten Gegendruck $P_0 = 2000$ Pfund ab, so folgt das vom Kolben aufzuhebende Gewicht

$$Q = P_1 - P_0 = 5081 - 2000 = 3081 \text{ Pfund.}$$

Die bewegende Kraft bei der ersten Weghälfte ist:

$$P - P_1 = 6000 - 5081 = 919 \text{ Pfund,}$$

folglich die Acceleration der Bewegung:

$$p = \left(\frac{P - P_1}{Q}\right) g = \frac{919}{3081} \cdot 31,25 = 9,32 \text{ Fuß,}$$

ferner die Geschwindigkeit am Ende des Kolbenweges

$$s_1 = \frac{s}{2} = 3 \text{ Fuß}: v = \sqrt{2 p s_1} = \sqrt{6 . 9,32} = \sqrt{55,92} = 7,478 \text{ Fuß,}$$

und die Zeit, in welcher dieser Kolbenweg zurückgelegt wird:

$$t_1 = \frac{2 s_1}{v} = \frac{6}{7,478} = 0,802 \text{ Secunden.}$$

Der Kolbenweg, bei welchem sich Kraft P_1 und Last $P_0 + Q$ das Gleichgewicht halten, also die bewegende Kraft und folglich auch die Acceleration Null, und die Kolbengeschwindigkeit ein Maximum ist, hat die Größe:

$$x = \frac{P}{P_1} \cdot \frac{s}{2} = \frac{6000 . 3}{5081} = \frac{18000}{5081} = 3,543 \text{ Fuß.}$$

Am Ende des Kolbenweges $\frac{6,543}{2} = 3,2715$ Fuß ist die mittlere Kolbenkraft $= \frac{6000 . 3}{3,2715} = 5502$, folglich die bewegende Kraft

$$= 5502 - 5081 = 421 \text{ Pfund,}$$

und der mittlere Werth derselben, während der Fortbewegung des Kolbens um

$$s_2 = 3,543 - 3 = 0,543 \text{ Fuß}, = \frac{919 + 4 . 421 + 0}{6} = 434 \text{ Pfund.}$$

Die entsprechende mittlere Acceleration ist

$$= \frac{434}{3081} g = \frac{434 . 31,25}{3081} = 4,402 \text{ Fuß,}$$

folglich die Maximalkolbengeschwindigkeit am Ende des Weges $x = s_1 + s_2$ $= 3,543$ Fuß:

$$v_m = \sqrt{v^2 + 2 p s_2} = \sqrt{55,92 + 2 . 4,402 . 0,543} = \sqrt{60,70} = 7,791 \text{ Fuß.}$$

Die Zeit zum Durchlaufen des Weges $s_2 = 0,543$ Fuß läßt sich setzen:

$$t_2 = \frac{s_2}{2} \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{v_m}\right) = 0,2715 \left(\frac{1}{7,478} + \frac{1}{7,791}\right) = 0,071 \text{ Secunden.}$$

Hat der Kolben den Weg 5,5 Fuß zurückgelegt, so ist die bewegende Kraft:

$$= \frac{18000}{5,500} - 5081 = - 1808 \text{ Pfund,}$$

steht aber der Kolben im Mittel zwischen diesem Punkte und dem Punkte der Maximalgeschwindigkeit, so ist diese Kraft:

$$= \frac{18000}{4,5215} - 5081 = -1100 \text{ Pfund},$$

und es sind die entsprechenden Accelerationen folgende:

$$= -\frac{1808 \,.\, 31,25}{3081} = -18,34 \text{ Fuß und } \frac{-1100 \,.\, 31,25}{3081} = -11,16 \text{ Fuß}.$$

Beim Durchlaufen des Wegstückes $s_3 = 5,500 - 3,543 = 1,957$ Fuß, ist folglich die mittlere Acceleration

$$= -\frac{0 + 4 \,.\, 11,16 + 18,34}{6} = -10,50 \text{ Fuß},$$

und demnach die am Ende dieses Weges erlangte Geschwindigkeit:

$$v_2 = \sqrt{60,70 - 2 \,.\, 10,50 \,.\, 1,957} = \sqrt{19,60} = 4,427 \text{ Fuß}.$$

Für die erste Hälfte 0,9785 Fuß des letzteren Wegstückes ist dagegen die mittlere Acceleration

$$= -\frac{0 + 11,16}{2} = -5,58 \text{ Fuß},$$

daher die Geschwindigkeit am Ende des Weges von 4,5215 Fuß:

$$v_1 = \sqrt{60,70 - 2 \,.\, 5,58 \,.\, 0,9785} = \sqrt{49,78} = 7,055 \text{ Fuß}.$$

Nun ergiebt sich die Zeit zum Durchlaufen des Wegstückes $s_3 = 1,957$ Fuß:

$$t_3 = \frac{s_3}{6}\left(\frac{1}{v_m} + \frac{4}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right) = 0,326\left(\frac{1}{7,791} + \frac{4}{7,055} + \frac{1}{4,427}\right)$$
$$= 0,326 \,.\, 0,9212 = 0,300 \text{ Secunden}.$$

Ferner läßt sich die Zeit für das letzte Stück $s_4 = 0,5$ Fuß des ganzen Kolbenweges, bei dessen Durchlaufung die Geschwindigkeit allmälig in Null übergeht,

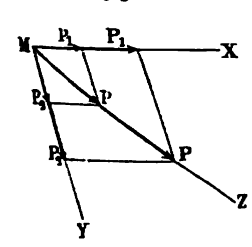
$$t_4 = \frac{2 s_4}{v_2} = \frac{1}{4,427} = 0,226 \text{ Secunden}$$

setzen, und es folgt nun die Zeit des ganzen Kolbenhubes:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0,802 + 0,071 + 0,300 + 0,226 = 1,40 \text{ Secunden}.$$

Parallelogramm der Kräfte. Wird eine Masse (ein materieller Punkt) M, Fig. 98, von zwei Kräften P_1 und P_2 ergriffen, deren Richtungen MX und MY einen Winkel $XMY = \alpha$ zwischen sich einschließen, so erzeugen diese nach eben diesen Richtungen die Accelerationen: §. 79.

Fig. 98.



$$p_1 = \frac{P_1}{M} \text{ und } p_2 = \frac{P_2}{M},$$

aus deren Vereinigung eine mittlere Acceleration (§. 37) in einer Richtung MZ entsteht, welche durch die Diagonale eines aus p_1, p_2 und α construirten Parallelogramms gegeben ist; auch ist diese mittlere oder resultirende Acceleration:

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2\, p_1 p_2 \cos.\alpha}$$

und für den Winkel α_1, den die Richtung derselben mit der Richtung MX der einen Acceleration p_1 einschließt, hat man:

$$\sin.\alpha_1 = \frac{p_2 \sin.\alpha}{p}.$$

Setzen wir in diese beiden Formeln die angegebenen Werthe von p_1 und p_2, so folgt:

$$p = \sqrt{\left(\frac{P_1}{M}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{M}\right)^2 + 2\left(\frac{P_1}{M}\right)\left(\frac{P_2}{M}\right) \cos.\alpha}$$

und

$$\sin.\alpha_1 = \left(\frac{P_2}{M}\right) \frac{\sin.\alpha}{p}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung durch M, so ergiebt sich:

$$Mp = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\, P_1 P_2 \cos.\alpha},$$

oder, da Mp die der Acceleration p entsprechende Kraft P ist:

$$1)\ P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\, P_1 P_2 \cos.\alpha},$$

und

$$2)\ \sin.\alpha_1 = \frac{P_2 \sin.\alpha}{P}.$$

Es wird also die Resultirende oder Mittelkraft sowohl ihrer Größe als auch ihrer Richtung nach aus den Componenten oder Seitenkräften genau so bestimmt, wie die mittlere Acceleration aus den Seitenaccelerationen.

Repräsentiren wir die Kräfte durch gerade Linien, indem wir diese in denselben Verhältnissen zu einander stehen lassen, wie sie in Gewichten, z. B. Kilogramm, in Wirklichkeit zu einander stehen, so läßt sich demnach die Resultirende durch die Diagonale desjenigen Parallelogramms darstellen, dessen Seiten durch die Seitenkräfte gebildet werden und wovon ein Winkel dem von den Richtungen der Seitenkräfte gebildeten Winkel gleich ist. Das so aus den Seitenkräften construirte und durch seine Diagonale die Mittelkraft ausdrückende Parallelogramm wird das Parallelogramm der Kräfte genannt.

Beispiel. Wenn ein auf einem vollkommen glatten Tische ruhender Körper, Fig. 99, von 150 Kilogramm Gewicht von zwei Kräften $P_1 = 30$ Kilogramm und $P_2 = 24$ Kilogramm ergriffen wird, welche einen Winkel $P_1 M P_2 = \alpha = 105$ Grad zwischen sich einschließen, so ist die Frage, nach welcher Richtung und mit welcher Acceleration die Bewegung vor sich gehen werde? Da $\cos.\alpha = \cos.105^0 = -\cos.75^0$, so folgt die Mittelkraft:

$$P = \sqrt{30^2 + 24^2 - 2.30.24 \cos.75^0} = \sqrt{900 + 576 - 1440 \cos.75^0}$$
$$= \sqrt{1476 - 372{,}7} = 33{,}22 \text{ Kilogramm};$$

und die ihr entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{Pg}{G} = \frac{33{,}22\,.\,9{,}81}{150} = 2{,}17 \text{ Meter.}$$

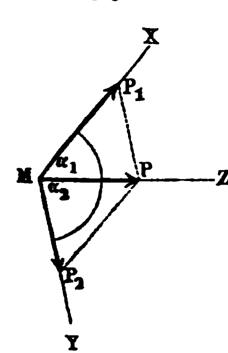
Die Bewegungsrichtung schließt mit der Richtung der ersten Kraft einen Winkel α_1 ein, der bestimmt ist durch

$$sin.\,\alpha_1 = \frac{24}{33{,}22}\,sin.\,105^0 = 0{,}7224\,sin.\,75^0 = 0{,}6978;$$

es ist also $\alpha_1 = 44^0\,15'$.

Anmerkung. Die Mittelkraft (P) hängt, den gefundenen Formeln zufolge, nur von den Seitenkräften, nie aber von der Masse (M) des Körpers, auf welche die Kräfte wirken, ab. Deshalb findet man in vielen Werken über Mechanik die Richtigkeit des Parallelogramms der Kräfte ohne Rücksicht auf die Masse, wohl aber mit Zugrundlegung irgend eines Grundgesetzes bewiesen. Solcher rein statischen Beweise giebt es viele. In jedem der folgenden Werke findet man einen anderen Beweis: Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Gerstner's Handbuch der Mechanik, Kayser's Handbuch der Statik, Möbius' Lehrbuch der Statik, Rühlmann's technische Mechanik. Der Beweis in Gerstner's Mechanik setzt die Theorie des Hebels voraus; er ist übrigens sehr einfach und findet sich in sehr vielen alten und auch in neuen Schriften, z. B. in denen von Kästner, Monge, Whewell u. s. w. Kayser's Beweis ist der Poisson'sche in elementarem Gewande. Möbius' Entwickelung ist auf eine besondere, von Poinsot (Elémens de Statique) eingeführte Theorie, auf die der Kräftepaare (des couples), gegründet. Einen eigenthümlichen Beweis liefert Duchayla in der Correspondance sur l'école polytechnique No. 4, denselben hat auch Brix in seinem Lehrbuch der Statik fester Körper, 2. Auflage, aufgenommen; er wird aber auch noch in vielen anderen Werken angewendet, z. B. in Moseley's Mechanical Principles u. s. w. Den Beweis des Parallelogramms der Kräfte, welchen Navier in seinen Leçons de mécanique (deutsch von Meyer, 1858) liefert, findet man auch in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik, Leipzig 1860. Eine auf die Bewegungsgesetze gegründete Theorie dieses Parallelogramms findet man schon in Newton's Principien; sie wird aber auch von vielen Neueren gebraucht, z. B. von Venturoli, Poncelet, Burg u. s. w. S. Elementi di Mecanica e d'Idraulica di Venturoli; Mécanique industrielle par Poncelet; Compendium der populären Mechanik und Maschinenlehre von Burg. Ein neuer Beweis von Möbius findet sich in den Berichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (1850), ein anderer von Ettingshausen in den Wiener akademischen Schriften (1851), ein dritter von Schlömilch in dessen Zeitschrift für Mathematik und Physik (1857) und ein vierter von John Stevelly im Philosophical Magazine Vol. XXXI, 1866. S. auch Wolf's Taschenbuch der Mathematik, Physik u. s. w. Zürich 1869.

Fig. 99.



Zerlegung der Kräfte. Mit Hülfe des Kräfteparallelogramms lassen sich nicht nur zwei oder mehrere Kräfte zu einer einzigen zusammensetzen, §. 80.

sondern auch gegebene Kräfte unter gegebenen Verhältnissen in zwei oder mehrere Kräfte zerlegen. Sind die Winkel α_1 und α_2 gegeben, welche die Seitenkräfte $\overline{MP_1} = P_1$ und $\overline{MP_2} = P_2$, Fig. 99, mit der gegebenen Kraft $\overline{MP} = P$ einschließen, so ergeben sich die Seitenkräfte oder Componenten durch die Formeln:

$$P_1 = \frac{P \sin. \alpha_2}{\sin.(\alpha_1 + \alpha_2)},\ P_2 = \frac{P \sin. \alpha_1}{\sin.(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Stehen die Seitenkräfte winkelrecht auf einander, ist also $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$ und $\sin.(\alpha_1 + \alpha_2) = 1$, so hat man:

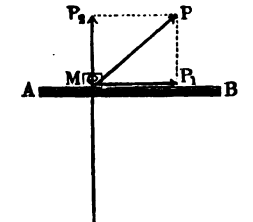
$$P_1 = P \cos. \alpha_1 \text{ und } P_2 = P \sin. \alpha_1.$$

Sind endlich α_1 und α_2 einander gleich, so ist auch:

$$P_2 = P_1, \text{ nämlich } = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. 2\alpha} = \frac{P}{2 \cos. \alpha}.$$

Beispiele. 1) Wie stark wird der Tisch AB, Fig. 100, von einem Körper M gedrückt, dessen Gewicht $G = 70$ Pfund ist, und auf den eine Kraft $P = 50$ Pfund wirkt, deren Richtung unter dem Winkel $PMP_1 = \alpha_1 = 40^0$ gegen den Horizont geneigt ist? Der horizontale Component von P ist:

Fig. 100.



$$P_1 = P \cos. \alpha_1 = 50 \cos. 40^0 = 38,30 \text{ Pfund},$$

und der verticale Component:

$$P_2 = P \sin. \alpha_1 = 50 \sin. 40^0 = 32,14 \text{ Pfund};$$

der letztere sucht den Körper vom Tische abzuziehen, es bleibt folglich der Druck auf den Tisch:

$$G - P_2 = 70 - 32,14 = 37,86 \text{ Pfund}.$$

2) Wenn ein Körper M, Fig. 99, von 110 Pfund Gewicht, auf einer horizontalen Unterlage durch zwei Kräfte so bewegt wird, daß er in der ersten Secunde einen Weg von 6,5 Fuß in einer Richtung durchläuft, welche von den beiden Kräfterichtungen um die Winkel $\alpha_1 = 52^0$ und $\alpha_2 = 77^0$ abweicht, so ergeben sich die Kräfte selbst durch Folgendes: Die Acceleration ist der doppelte Weg in der ersten Secunde, also hier $p = 2 . 6,5 = 13$ Fuß. Die Mittelkraft ist nun:

$$P = \frac{p\,G}{g} = 0,032 . 13 . 110 = 45,76 \text{ Pfund};$$

daher die eine Seitenkraft:

$$P_1 = \frac{P \sin. 77^0}{\sin.(52^0 + 77^0)} = \frac{45,76 \sin. 77^0}{\sin. 51^0} = 57,37 \text{ Pfund};$$

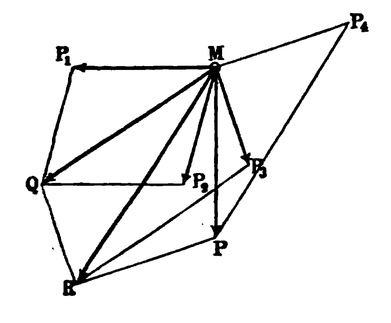
und die andere Seitenkraft:

$$P_2 = \frac{45,76 \sin. 52^0}{\sin. 51^0} = 46,40 \text{ Pfund}.$$

§. 81. **Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.** Um die Mittelkraft P zu einem Systeme von Seitenkräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. (Fig. 101)

zu finden, kann man genau denselben Weg (§. 34) einschlagen, welcher bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten befolgt wird; man kann nämlich durch wiederholte Anwendung des Kräfteparallelogramms je zwei und zwei Kräfte zu einer vereinigen, bis zuletzt nur noch eine übrig bleibt. Die Kräfte P_1 und P_2 geben z. B. durch das Parallelogramm MP_1QP_2 die Mittelkraft $\overline{MQ} = Q$; wenn man diese wieder mit P_3 vereinigt, erhält man im Parallelogramm $MQRP_3$ die Mittelkraft $\overline{MR} = R$, und die letztere wieder mit P_4 zu einem Parallelogramm verbunden, stellt sich in der Diagonale $\overline{MP} = P$ die letzte allen vier Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 zusammen äquivalente Mittelkraft heraus.

Fig. 101.



Es ist nicht nöthig, bei dieser Zusammensetzungsweise das Parallelogramm stets zu vollenden und dessen Diagonale anzugeben. Man bilde ein Polygon MP_1QRP, indem man die Seiten MP_1, P_1Q, QR, RP den gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3, P_4 parallel legt und gleichmacht; die letzte, das Polygon zuschließende Seite MP ist die gesuchte Mittelkraft P oder vielmehr das lineäre Maß derselben.

Anmerkung. Es ist sehr nützlich, die Aufgaben der Mechanik auch durch Construction aufzulösen; wenn die construirende Auflösung auch nicht so viel Genauigkeit gewährt als die rechnende, so sichert sie dagegen sehr vor groben Fehlern und kann deshalb immer als Prüfung der Rechnung dienen. In Fig. 101 hat man die Kräfte unter den gegebenen Winkeln $P_1MP_2 = 72^0 30'$, $P_2MP_3 = 33^0 20'$ und $P_3MP_4 = 92^0 40'$ an einander gestoßen und so aufgetragen, daß ein Kilogramm durch ein Millimeter repräsentirt wird. Die Kräfte $P_1 = 18{,}0$ Kilogr., $P_2 = 16{,}0$ Kilogr., $P_3 = 13{,}3$ Kilogr. und $P_4 = 19{,}0$ Kilogr. sind daher durch Seiten von 18,0 Millimeter, 16,0 Millimeter, 13,3 Millimeter und 19,0 Millimeter Länge ausgedrückt. Eine sorgfältige Construction des Kräftepolygons giebt die Größe der Mittelkraft $P = 22{,}0$ Kilogr. und die Abweichung ihrer Richtung MP von der Richtung MP_1 der ersten Kraft, = 87 Grad.

Einfacher und schärfer bestimmt sich die Mittelkraft P, wenn man jeden der gegebenen Componenten P_1, P_2, P_3 u. s. w. nach zwei rechtwinklig gegen einander stehenden Axenrichtungen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, Fig. 102, a. f. S., in Seitenkräfte wie Q_1 und R_1, Q_2 und R_2, Q_3 und R_3 u. s. w. zerlegt, die in eine und dieselbe Axenrichtung fallenden Kräfte algebraisch addirt und nun aus den sich ergebenden, unter einem Rechtwinkel zusammenstoßenden zwei Kräften Q und R die Größe und Richtung der Resultirenden sucht. Sind die Winkel P_1MX, P_2MX, P_3MX u. s. w., welche die Richtungen von den Kräften §. 82.

P_1, P_2, P_3 u. s. w. mit der Axe $X\overline{X}$ einschließen, $= \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ u. s. w., so hat man die Seitenkräfte $Q_1 = P_1 \cos.\alpha_1$, $R_1 = P_1 \sin.\alpha_1$; $Q_2 = P_2 \cos.\alpha_2$, $R_2 = P_2 \sin.\alpha_2$ u. s. w., weshalb folgt aus:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots,$$

1) $Q = P_1 \cos.\alpha_1 + P_2 \cos.\alpha_2 + P_3 \cos.\alpha_3 + \cdots,$

und ebenso aus $R = R_1 + R_2 + R_3 \ldots,$

2) $R = P_1 \sin.\alpha_1 + P_2 \sin.\alpha_2 + P_3 \sin.\alpha_3 + \cdots$

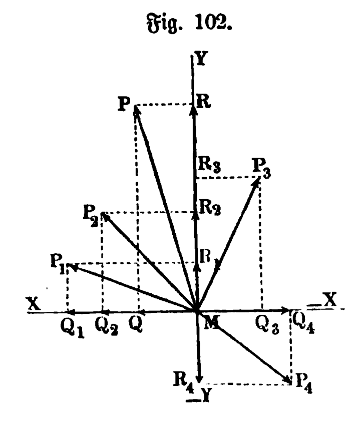
Aus den so gefundenen zwei Seitenkräften Q und R ergiebt sich nun die Größe der gesuchten Mittelkraft:

3) $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$

und der Winkel $PMX = \alpha$, den ihre Richtung mit $X\overline{X}$ einschließt, durch

4) $tang.\alpha = \frac{R}{Q}$.

Fig. 102.



Bei der algebraischen Addition der Kräfte hat man die Vorzeichen genau zu berücksichtigen; denn sind dieselben bei zwei Kräften verschieden, d. h. sind diese Kräfte vom Angriffspunkte M aus nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, so geht diese Addition in eine arithmetische Subtraction über (§. 78). Der Winkel α ist spitz, so lange Q und R positiv sind, er ist zwischen einem und zwei Rechtwinkeln, wenn Q negativ und R positiv, zwischen zwei und drei Rechten, wenn Q und R beide negativ sind, und liegt endlich zwischen drei und vier Rechten, wenn bloß R negativ ist.

Beispiel. Welches ist die Größe und Richtung der Mittelkraft aus den Seitenkräften $P_1 = 30$ Pfund, $P_2 = 70$ Pfund und $P_3 = 50$ Pfund, deren Richtungen, in einer Ebene liegend, die Winkel $P_1 M P_2 = 56^0$ und $P_2 M P_3 = 104^0$ zwischen sich einschließen? Legen wir die Axe $X\overline{X}$, Fig. 102, in die Richtung der ersten Kraft, so erhalten wir $\alpha_1 = 0^0$, $\alpha_2 = 56^0$ und $\alpha_3 = 56^0 + 104^0 = 160^0$; daher:

1) $Q = 30.\cos.0^0 + 70.\cos.56^0 + 50.\cos.160^0 = 30 + 39{,}14 - 46{,}98$
$= 22{,}16$ Pfund, und

2) $R = 30.\sin.0^0 + 70.\sin.56^0 + 50.\sin.160^0 = 0 + 58{,}03 + 17{,}10$
$= 75{,}13$ Pfund. Ferner:

3) $tang.\alpha = \frac{75{,}13}{22{,}16} = 3{,}3903,$

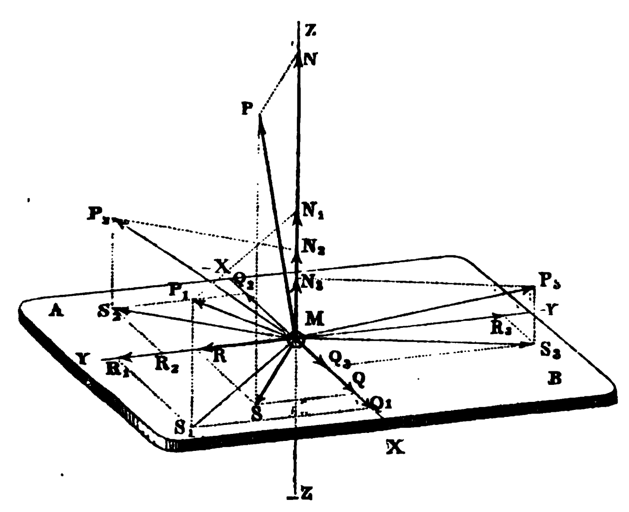
und hiernach den Winkel, welchen die Mittelkraft mit dem positiven Axentheile MX oder der Kraft P_1 einschließt, $\alpha = 73^0\,34'$, endlich diese Kraft selber:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \frac{Q}{cos.\alpha} = \frac{R}{sin.\alpha} = \frac{75{,}13}{sin.73^0 34'} = \frac{75{,}13}{0{,}9591} = 78{,}33 \text{ Pfund.}$$

Kräfte im Raume. Liegen die Kraftrichtungen nicht in einer und derselben Ebene, so lege man durch den Angriffspunkt der Kräfte eine Ebene und zerlege jede derselben in zwei andere, die eine derselben in der Ebene liegend, die andere rechtwinklig zur Ebene. Die so erhaltenen Seitenkräfte in der Ebene sind nun nach der Regel des vorigen Paragraphen zu einer, und die Seitenkräfte rechtwinklig zur Ebene durch bloße Addition zu einer anderen Mittelkraft zu vereinigen; zu den auf diese Weise erhaltenen zwei rechtwinkligen Componenten ist endlich nach der bekannten Regel (§. 79) die Mittelkraft zu finden. §. 83.

Fig. 103 führt das eben angegebene Verfahren mehr vor Augen. $\overline{MP_1} = P_1$, $\overline{MP_2} = P_2$, $\overline{MP_3} = P_3$ seien die einzelnen Kräfte, AB die

Fig. 103.



Ebene (Projectionsebene) und $Z\overline{Z}$ die Axe winkelrecht zu ihr. Aus der Zerlegung der Kräfte P_1, P_2 u. s. w. ergeben sich die Kräfte S_1, S_2 u. s. w. in der Ebene, und die Kräfte N_1, N_2 u. s. w. in der Normalen $Z\overline{Z}$. Jene werden wieder nach zwei Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$ in die Seitenkräfte Q_1, Q_2 u. s. w. R_1, R_2 u. s. w. zerlegt und geben die Componenten Q und R, woraus sich endlich die Mittelkraft S bestimmen läßt, welche, mit der algebraischen Summe N aller Normalkräfte N_1, N_2 u. s. w. vereinigt, die gesuchte Mittelkraft P giebt.

Setzen wir die Winkel, unter welchen die Kraftrichtungen gegen die Ebene AB, z. B. gegen den Horizont geneigt sind, β_1, β_2 u. s. w., so ergeben sich die Kräfte in der Ebene $S_1 = P_1 \cos.\beta_1$, $S_2 = P_2 \cos.\beta_2$ u. s. w., und die Normalkräfte $N_1 = P_1 \sin.\beta_1$, $N_2 = P_2 \sin.\beta_2$ u. s. w.; bezeichnen wir endlich die Winkel, welche die in der Ebene AB liegenden Projectionen der Kräfterichtungen mit der Axe $X\overline{X}$ einschließen, mit α_1, α_2 u. s. w., setzen wir also $XMS_1 = \alpha_1$, $XMS_2 = \alpha_2$ u. s. w., so stoßen wir auf folgende drei, die Kanten eines geraden Parallelepipeds (des Kräfteparallelepipeds) bildende Kräfte:

$$Q = S_1 \cos.\alpha_1 + S_2 \cos.\alpha_2 + \cdots,$$

oder

$$1)\ Q = P_1 \cos.\beta_1 \cos.\alpha_1 + P_2 \cos.\beta_2 \cos.\alpha_2 + \cdots,$$

ebenso

$$2)\ R = P_1 \cos.\beta_1 \sin.\alpha_1 + P_2 \cos.\beta_2 \sin.\alpha_2 + \cdots,$$

endlich

$$3)\ N = P_1 \sin.\beta_1 + P_2 \sin.\beta_2 + \cdots$$

Aus diesen drei Kräften folgt die letzte Resultirende:

$$4)\ P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2},$$

ferner der Neigungswinkel $PMS = \beta$ derselben gegen die Projectionsebene durch

$$5)\ tang.\beta = \frac{N}{S} = \frac{N}{\sqrt{Q^2 + R^2}},$$

endlich der Winkel $XMS = \alpha$, welchen die Projection der Resultirenden in der Ebene AB mit der ersten Axe $X\overline{X}$ einschließt, durch

$$6)\ tang.\alpha = \frac{R}{Q}.$$

Sind λ_1, λ_2 .. die Winkel, welche die Kräfte P_1, P_2 .. mit der Axe MX, ferner μ_1, μ_2 .. die Winkel, welche dieselben mit der Axe MY, und ν_1, ν_2 .. die Winkel, welche sie mit der Axe MZ einschließen, so hat man auch:

$$1^*)\ Q = P_1 \cos.\lambda_1 + P_2 \cos.\lambda_2 + \cdots,$$

$$2^*)\ R = P_1 \cos.\mu_1 + P_2 \cos.\mu_2 + \cdots,$$

und

$$3^*)\ N = P_1 \cos.\nu_1 + P_2 \cos.\nu_2 + \cdots.$$

Die Größe der Mittelkraft ist wieder durch die Formel

$$4^*)\ P = \sqrt{Q^2 + R^2 + N^2}$$

bestimmt, wogegen sich die Richtung derselben mittels der Formeln

$$5^*)\ \cos.\lambda = \frac{Q}{P},\ \cos.\mu = \frac{R}{P} \text{ und } \cos.\nu = \frac{N}{P}$$

berechnen läßt, in welchen λ, μ und ν die Winkel bezeichnen, welche P mit den Axen MX, MY und MZ einschließt.

Auch ist $\cos\lambda = \cos.\alpha\cos.\beta$, $\cos.\mu = \sin.\alpha\cos.\beta$ und $\nu = 90^0 - \beta$, also $\cos.\nu = \sin.\beta$.

Beispiel. Um ein Gewicht G, Fig. 104, I und II, mittels des über der Leitrolle B weggezogenen Seiles GBA senkrecht emporzuheben, ziehen an dem Seilende A drei Arbeiter mit den Kräften $P_1 = 50$ Pfund, $P_2 = 100$ Pfund und $P_3 = 40$ Pfund, deren Richtungen eine Neigung von 60 Grad gegen den Horizont haben, und welche die Horizontalwinkel $S_1AS_2 = S_2AS_3 = 135$ Grad und $S_3AS_1 = 90$ Grad unter sich einschließen; welches ist die Größe und Richtung der dem Gewichte G gleichzusetzenden Mittelkraft, und wie groß könnte dieses Gewicht sein, wenn die Kräfte eine und dieselbe Richtung hätten?

Fig. 104.

Die verticalen Componenten der Kräfte sind:

$N_1 = P_1 \sin.\beta_1 = 50 \sin.60^0 = 43{,}30$ Pfd.,
$N_2 = P_2 \sin.\beta_2 = 100 \sin.60^0 = 86{,}60$ Pfd.
und
$N_3 = P_3 \sin.\beta_3 = 40 \sin.60^0 = 34{,}64$ Pfd.,
folglich ist die in A vertical niederziehende Kraft

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = 164{,}54 \text{ Pfd.}$$

Ferner sind die horizontalen Componenten:

$S_1 = P_1 \cos.\beta_1 = 50 \cos.60^0 = 25$ Pfd.,
$S_2 = P_2 \cos.\beta_2 = 100 \cos.60^0 = 50$ Pfd.,
und
$S_3 = P_3 \cos.\beta_3 = 40 \cos.60^0 = 20$ Pfd.

Legt man eine Axe $X\overline{X}$ in der Richtung der Kraft S_1, so folgt die Seitenkraft in dieser Axe:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = S_1 \cos.\alpha_1 + S_2 \cos.\alpha_2 + S_3 \cos.\alpha_3 = 25 \cos.0^0 + 50 \cos.135^0 + 20 \cos.270^0 = 25 . 1 - 50 . 0{,}7071 - 20 . 0 = 25 - 35{,}355 = -10{,}355 \text{ Pfd.}$$

sowie die Seitenkraft in der zweiten Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = S_1 \sin.\alpha_1 + S_2 \sin.\alpha_2 + S_3 \sin.\alpha_3$$
$$= 25 \sin.0^0 + 50 \sin.135^0 + 20 \sin.270^0 = 50 . 0{,}7071 - 20$$
$$= 15{,}355 \text{ Pfund},$$

und die horizontale Mittelkraft:

$$S = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{10{,}355^2 + 15{,}355^2} = 18{,}520 \text{ Pfund}.$$

Der Winkel α, welchen diese Kraft mit der Axe AX einschließt, ist bestimmt durch

$$tang.\alpha = \frac{R}{Q} = -\frac{15,355}{10,355} = -1,4828,$$

wonach $\alpha = 180^0 - 56^0 = 124^0\,0'$ folgt.

Die vollständige Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{N^2 + S^2} = \sqrt{164,54^2 + 18,520} = 165,58 \text{ Pfund.}$$

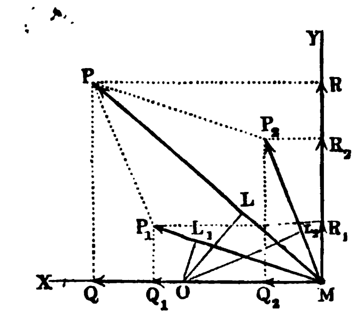
Der Neigungswinkel β dieser Kraft gegen den Horizont wird bestimmt durch

$$tang.\beta = \frac{N}{S} = \frac{164,54}{18,520} = 8,8848, \text{ wonach } \beta = 83^0\,35' \text{ folgt.}$$

Wenn die drei Kräfte in einer und derselben Richtung und zwar vertical wirkten, wäre die Mittelkraft $= 50 + 100 + 40 = 190$ Pfund, also um $190 - 165,58 = 24,42$ Pfund größer als die gefundene.

§. 84. **Zusammensetzung der mechanischen Arbeiten.** Aus den in dem Vorigen gefundenen Regeln über die Zusammensetzung der Kräfte lassen sich noch zwei andere, im praktischen Gebrauch wesentliche Dienste leistende, ableiten. Es sei in Fig. 105, M ein materieller Punkt, ferner seien $\overline{MP_1} = P_1$ und $\overline{MP_2} = P_2$ die auf ihn wirkenden Kräfte, und $\overline{MP} = P$ die Mittelkraft aus den Kräften P_1 und P_2. Legen wir durch M zwei Axen MX und MY winkelrecht gegen einander, und zerlegen wir die Kräfte P_1 und P_2 sowie ihre Mittelkraft P in nach diesen Axen gerichtete Seitenkräfte, also P_1 in Q_1 und R_1, P_2 in Q_2 und R_2, und P in Q und R, so erhalten wir die Kräfte in der einen Axe Q_1, Q_2 und Q, und die in der anderen R_1, R_2 und R, und es ist $Q = Q_1 + Q_2$ sowie $R = R_1 + R_2$.

Fig. 105.



Nehmen wir nun in der Axe MX irgend einen Punkt O an, und fällen von demselben Perpendikel OL_1, OL_2 und OL gegen die Richtungen der Kräfte P_1, P_2 und P, so erhalten wir rechtwinkelige Dreiecke MOL_1, MOL_2, MOL, welche den von den drei Kräften gebildeten Dreiecken ähnlich sind, nämlich:

$$\triangle MOL_1 \backsim \triangle MP_1Q_1,$$
$$\triangle MOL_2 \backsim \triangle MP_2Q_2,$$
$$\triangle MOL \backsim \triangle MPQ.$$

Diesen Aehnlichkeiten zufolge ist aber $\frac{MQ_1}{MP_1}$, d. i. $\frac{Q_1}{P_1}, = \frac{ML_1}{MO}$, ebenso

$\frac{Q_2}{P_2} = \frac{ML_2}{MO}$ und $\frac{Q}{P} = \frac{ML}{MO}$; setzen wir die hiernach bestimmten Werthe von Q_1, Q_2 und Q in die Gleichung $Q = Q_1 + Q_2$, so erhalten wir:

$$P.\overline{ML} = P_1.\overline{ML_1} + P_2.\overline{ML_2}.$$

Ebenso ist auch:

$$\frac{R_1}{P_1} = \frac{OL_1}{MO}, \frac{R_2}{P_2} = \frac{OL_2}{MO} \text{ und } \frac{R}{P} = \frac{OL}{MO},$$

daher:

$$P.\overline{OL} = P_1.\overline{OL_1} + P_2.\overline{OL_2}.$$

Diese Gleichungen gelten auch dann noch, wenn P die Mittelkraft aus drei oder mehreren Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. ist, weil man allgemein

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \text{ hat.}$$

Man kann daher allgemein:

1) $P.\overline{ML} = P_1.\overline{ML_1} + P_2.\overline{ML_2} + P_3.\overline{ML_3} + \cdots,$

2) $P.\overline{OL} = P_1.\overline{OL_1} + P_2.\overline{OL_2} + P_3.\overline{OL_3} + \cdots$ setzen.

Beiden Gleichungen muß die Mittelkraft P aus den Kräften P_1, P_2, P_3 u. s. w. entsprechen, es lassen sich daher auch diese Gleichungen zur Bestimmung von P anwenden.

Die erstere dieser beiden Gleichungen ist auch auf ein Kräftesystem im Raume, wie N, Q, R, Fig. 103, anwendbar, da auch hier

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots, \text{ oder}$$
$$P \cos. v = P_1 \cos. v_1 + P_2 \cos. v_2 + P_3 \cos. v_3 + \cdots,$$

also auch

$$P.\overline{MO} \cos. v = P_1.\overline{MO} \cos. v_1 + P_2 \overline{MO} \cos. v_2 + P_3 \overline{MO} \cos. v_3 + \cdots$$

ist u. s. w.

Rückt der Angriffspunkt M, Fig. 106 und Fig. 107, in einer geraden Linie nach O, oder denkt man sich den Angriffspunkt um den Weg $MO = x$ §. 85.

Fig. 106.

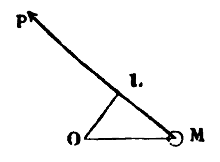
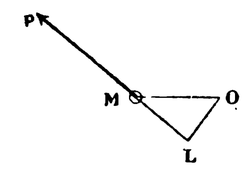


Fig. 107.



fortgegangen, so nennt man die Projection $ML = s$ dieses Weges x nach der Kraftrichtung MP den Weg der Kraft P, und das Product Ps aus

der Kraft und ihrem Wege: die Arbeit der Kraft. Führen wir nun diese Bezeichnungen in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen ein, so erhalten wir:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots,$$

es ist also die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte.

Bei der Summation dieser mechanischen Arbeiten hat man, wie bei der Summation von Kräften, auf die Zeichen derselben Rücksicht zu nehmen. Wirkt eine von den Kräften Q_1, Q_2 u. s. w. des vorigen Paragraphen den übrigen entgegengesetzt, so hat man sie als negative Kraft einzuführen; diese Kraft, wie z. B. Q_3 in Fig. 102, §. 82, ist aber Component einer Kraft P_3, die unter den Verhältnissen, wie sie im vorigen Paragraphen vorausgesetzt wurden, der Bewegung ML_3 ihres Angriffspunktes entgegengesetzt wirkt; man ist daher genöthigt, diejenige Kraft, Fig. 107, welche der Bewegung ML entgegengesetzt wirkt, als negativ zu behandeln, wenn man diejenige Kraft P, Fig. 106, welche in der Bewegungsrichtung ML wirkt, positiv setzt.

Sind die Kräfte ihrer Größe oder Richtung nach veränderlich, so hat die Formel

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots$$

nur für unendlich kleine Wege s, s_1, s_2 u. s. w. ihre Richtigkeit.

Man nennt die einer unendlich kleinen Verrückung σ des materiellen Punktes entsprechenden Wege σ_1, σ_2, σ_3 u. s. w. der Kräfte die virtuellen Geschwindigkeiten (franz. vitesses virtuelles; engl. virtual velocities) derselben und das der Formel $P\sigma = P_1\sigma_1 + P_2\sigma_2 + P_3\sigma_3 + \cdots$ entsprechende Gesetz das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 86. Uebertragung der mechanischen Arbeit auf die Trägheit.

Nach dem Principe der Arbeit der Trägheit ist für eine geradlinige Bewegung (§. 76) die mechanische Arbeit (Ps), welche eine Kraft (P) verrichtet, indem sie eine Masse M aus der Geschwindigkeit c in die Geschwindigkeit v versetzt:

$$Ps = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Ist nun aber P die Mittelkraft aus anderen, auf die Masse M wirkenden Kräften P_1, P_2 u. s. w., und sind die Wege, welche diese zurücklegen, s_1, s_2 u. s. w., während die Masse M selbst den Weg s macht, so hat man nach dem vorigen Paragraphen:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots,$$

es läßt sich daher folgende allgemeine Formel:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$$

angeben, und ihr zufolge die Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte gleichsetzen dem halben Gewinn der lebendigen Kraft der Masse.

Ist die Geschwindigkeit während der Bewegung unveränderlich, also $v = c$, und die Bewegung selbst gleichförmig, so hat man $v^2 - c^2 = 0$, also weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft, und daher:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \cdots = 0;$$

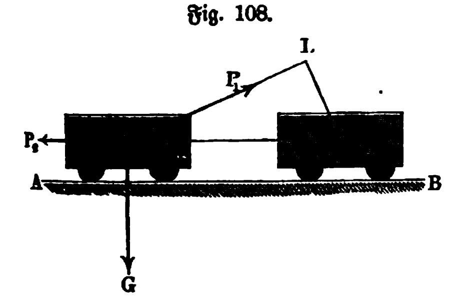
dann ist also die Summe der mechanischen Arbeiten von den einzelnen Kräften = Null.

Wenn umgekehrt die Summe der Arbeiten gleich Null ist, so verändern die Kräfte die Bewegung des Körpers in der gegebenen Richtung nicht; hatte der Körper nach der gegebenen Richtung keine Bewegung, so wird er auch durch Einwirkung der Kräfte in dieser Richtung nicht in Bewegung kommen; hatte er vorher eine gewisse Geschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung, so wird er dieselbe auch behalten.

Sind die Kräfte veränderlich, so kann die veränderliche Geschwindigkeit v nach einer gewissen Zeit wieder in die Anfangsgeschwindigkeit c übergehen, was bei allen periodischen Bewegungen, wie sie namentlich an vielen Maschinen vorkommen, eintritt. Nun giebt aber $v = c$, die Arbeit $\left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M$ = Null, es ist daher innerhalb einer Periode der Bewegung der Arbeitsverlust oder Gewinn = Null.

Beispiel. Ein Wagen, Fig. 108, von dem Gewichte $G = 5000$ Pfund wird auf einem horizontalen Wege durch eine unter dem Winkel $\alpha = 24$ Grad aufsteigende Kraft $P_1 = 660$ Pfund vorwärts bewegt und hat während der Bewegung den der Reibung entsprechenden horizontalen Widerstand $P_2 = 450$ Pfund zu überwinden. Welche Arbeit wird die Kraft (P_1) verrichten müssen, um jenen anfänglich mit 2 Fuß Geschwindigkeit fortgehenden Wagen in eine Geschwindigkeit von 5 Fuß zu versetzen?

Fig. 108.



Setzen wir den Weg MO des Wagens $= s$, so haben wir die Arbeit der Kraft P_1:

$$= P_1 . \overline{ML} = P_1 s \cos.\alpha = 660 . s \cos. 24^0 = 602{,}94 . s,$$

ferner die Arbeit der als Widerstand wirkenden Kraft P_2:

$$= (- P_2) . s = - 450 . s.$$

Hiernach bleibt dann die Arbeit der bewegenden Kraft:

$$Ps = P_1 s \cos.\alpha - P_2 s \cos. 0 = (602{,}94 - 450) s = 152{,}94 \text{ Fußpfund.}$$

Die Masse erfordert aber zu ihrer Geschwindigkeitsveränderung die Arbeit: $\left(\frac{v^2 - c^2}{2g}\right) G = \left(\frac{5^2 - 2^2}{2g}\right) . 5000 = 0{,}016 . (25 - 4) . 5000 = 1680$ Fußpfund; setzen wir daher beide Arbeiten einander gleich, so erhalten wir $152{,}94 . s = 1680$, folglich den Weg des Wagens:

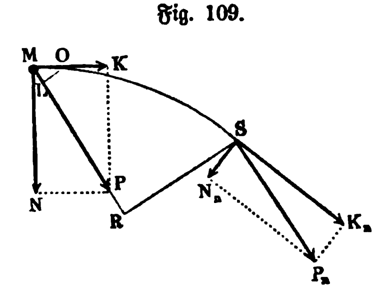
$$MO = s = \frac{1680}{152{,}94} = 10{,}98 \text{ Fuß},$$

und endlich die mechanische Arbeit der Kraft P_1:

$$P_1 s \cos. \alpha = 602{,}94 . 10{,}98 = 6620 \text{ Fußpfund}.$$

§. 87. **Krummlinige Bewegung.** Setzen wir unendliche kleine Wege (σ, σ_1 u. s. w.) voraus, so können wir die zuletzt gefundene Formel auch auf krumme Bahnen anwenden. Es sei MOS, Fig. 109, die Bahn des

Fig. 109.



materiellen Punktes M, und $\overline{MP} = P$, die Mittelkraft aller auf ihn wirkenden Kräfte. Zerlegen wir diese Kraft in zwei andere, wovon die eine $\overline{MK} = K$ tangential und die andere $\overline{MN} = N$ normal zur Curve gerichtet ist, so nennen wir jene Tangential- und diese Normalkraft.

Während der materielle Punkt das Element $MO = \sigma$ seines krummen Weges MOS durchläuft und seine Geschwindigkeit c in v_1 übergeht, nimmt die Masse M desselben die Arbeit $\left(\frac{v_1^2 - c^2}{2}\right) M$ in Anspruch, gleichzeitig verrichtet aber die Tangentialkraft K die Arbeit $K\sigma$, und die Normalkraft die Arbeit $N . 0 = 0$; es ist folglich:

$$K\sigma = \left(\frac{v_1^2 - c^2}{2}\right) M.$$

Wenn während der Zurücklegung des Weges $MOS = s = n\sigma$ die Tangentialgeschwindigkeit des Körpers aus c in v übergeht, und hierbei die Tangentialkraft nach und nach die Werthe $K_1, K_2, \cdots, K_n$ annimmt, so ist daher auch:

$$(K_1 + K_2 + \cdots + K_n)\sigma = \left(\frac{K_1 + K_2 + \cdots + K_n}{n}\right) s = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M,$$

also die mechanische Arbeit:

$$A = Ks = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right) M, \text{ wobei } K = \frac{K_1 + K_2 + \cdots + K_n}{n}$$

den Mittelwerth der veränderlichen Tangentialkraft bezeichnet (vergl. §. 77).

Setzt man die Projection $\overline{ML}$ des Wegelementes $\overline{MO} = \sigma$ in der Kraft-

richtung $\overline{ML} = \xi$, so hat man auch $P\xi = K\sigma$; wenn daher bei Durchlaufung des Weges $MOS = s = n\sigma$ die Mittelkraft P allmälig die Werthe $P_1, P_2 \ldots P_n$ annimmt und die Projectionen der Wegelemente nach und nach $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ sind, so hat man auch:

$$P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + \cdots + P_n\xi_n = (K_1 + K_2 + \cdots + K_n)\sigma,$$

und daher:

$$A = P_1\xi_1 + P_2\xi_2 + \cdots + P_n\xi_n = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right)M.$$

Wenn hierbei die Richtung der Kraft P constant bleibt, so bilden die sämmtlichen Projectionen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ der Wegtheile $\sigma, \sigma \ldots$ oder des ganzen Weges $s = n\sigma$ eine gerade Linie

$$\overline{MR} = x = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Setzt man dann noch $x = m\xi$, so kann man auch

$$A = (P_1 + P_2 + \cdots + P_m)\xi = (P_1 + P_2 + \cdots + P_m)\frac{x}{m}$$

durch Px ausdrücken, wo dann P das Mittel $\frac{P_1 + P_2 + \cdots + P_m}{m}$ aus den Kräften bezeichnet, welche gleichen Theilen $\xi = \frac{x}{m}$ der Projection des Weges in der gegebenen Kraftrichtung entsprechen.

Es ist daher auch

$$Px = \left(\frac{v^2 - c^2}{2}\right)M = (h - k)\,G,$$

wenn k die der Anfangsgeschwindigkeit c, sowie h die der Endgeschwindigkeit v entsprechende Geschwindigkeitshöhe, und G das Gewicht Mg des bewegten Körpers bezeichnet.

Also auch **bei einer krummlinigen Bewegung ist die ganze Arbeit der bewegenden Kraft gleich dem Producte aus dem Gewichte des bewegten Körpers und aus der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.**

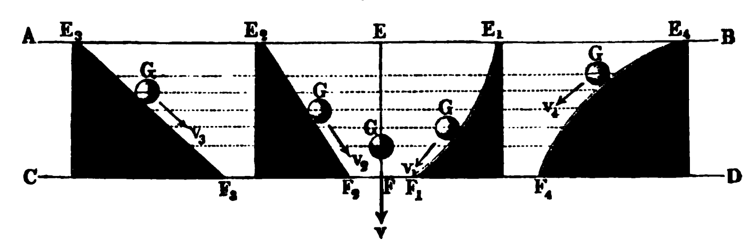
Anmerkung. Die gewonnene Formel, welche aus der Verbindung des Principes der lebendigen Kräfte mit dem der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgeht, ist vorzüglich in den Fällen anwendbar, wenn Körper durch feste Unterlagen oder durch Aufhängen gezwungen werden, eine bestimmte Bahn zu durchlaufen. Treibt einen solchen Körper die Schwerkraft allein, so ist die Arbeit, welche das Gewicht G desselben beim Herabsinken von einer Höhe, deren Verticalprojection s ist, verrichtet, $= Gs$, und daher:

$$Gs = (h - k)\,G, \text{ d. i. } s = h - k.$$

Welches also auch der Weg sei, in welchem ein Körper von einer horizontalen Ebene AB, Fig. 110 (a. f. S.), bis zu einer zweiten Horizontalebene CD herabsinkt, immer ist die Differenz der Geschwindigkeitshöhen gleich der senkrechten Fallhöhe EF. Körper, welche die Bahnen E_1F_1, E_2F_2 u. s. w. mit gleicher

Geschwindigkeit (c) zu durchlaufen anfangen, erlangen auch am Ende dieser Bahnen, obwohl zu verschiedenen Zeiten, gleiche Endgeschwindigkeiten. Ist z. B. die An-

Fig. 110.



fangsgeschwindigkeit $c = 10$ Fuß und die senkrechte Fallhöhe $s = 20$ Fuß, also $h = s + k = 20 + 0{,}016 \,.\, 10^2 = 21{,}6$ Fuß, so folgt die Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh} = 7{,}906 \sqrt{21{,}6} = 36{,}74 \text{ Fuß},$$

in welcher geraden oder krummen Linie auch das Herabfallen vor sich gehe.

Dritter Abschnitt.

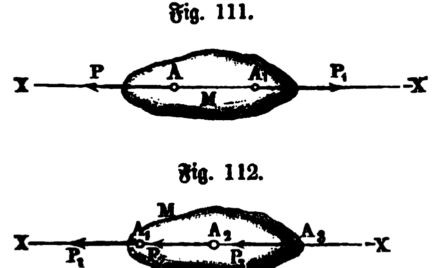
Statik fester Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Lehren der Statik fester Körper.

Verlegung des Angriffspunktes. Obgleich jeder feste Körper §. 88.
durch die auf ihn wirkenden Kräfte in seiner Form verändert, nämlich zusammengedrückt, ausgedehnt, gebogen wird u. s. w., so ist es doch gestattet, denselben in vielen Fällen als vollkommen starr anzusehen, weil diese Formveränderung oder Verrückung der Theile nicht allein oft sehr klein ist, sondern auch innerhalb eines sehr kurzen Zeitraumes vor sich geht. Wir werden deshalb zunächst und wenn es auch nicht besonders erwähnt wird, der Einfachheit wegen, jeden festen Körper als ein System fest unter einander verbundener Punkte ansehen.

Eine Kraft P, Fig. 111, welche auf einen Punkt A eines festen Körpers M wirkt, pflanzt sich in ihrer eigenen Richtung $X\overline{X}$ unverändert durch den ganzen Körper hindurch fort, und eine ihr gleiche Gegenkraft P_1 setzt sich mit ihr nur dann ins Gleichgewicht, wenn der Angriffspunkt A_1 derselben in der Richtung $X\overline{X}$ der ersten Kraft liegt.

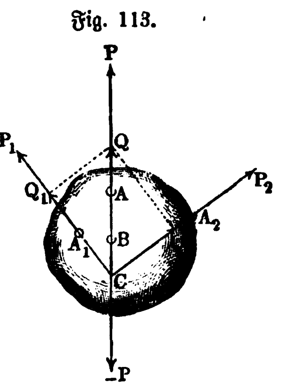


Die Entfernung dieser Angriffspunkte A und A_1 ist ohne Einfluß auf diesen Gleichgewichtszustand; die beiden Gegenkräfte halten sich bei jeder Entfernung das Gleichgewicht, wenn nur beide Punkte fest unter einander ver-

bunden sind. Hiernach läßt sich also behaupten: die Wirkung einer Kraft P (Fig. 112) bleibt dieselbe, in welchem Punkte A_1, A_2, A_3 u. s. w. ihrer Richtung sie auch angreift oder unmittelbar auf den Körper M wirkt. Sie ist daher nicht von einem Angriffspunkte, sondern von der Angriffslinie abhängig.

§. 89. Ergreifen zwei, in derselben Ebene wirkende Kräfte P_1 und P_2, Fig. 113, einen Körper in verschiedenen Punkten A_1 und A_2, so ist deren Wirkung auf den Körper dieselbe, als wenn sie den Punkt C zum gemeinschaftlichen Angriffspunkte hätten, in welchem sich die Richtungen beider schneiden; denn es läßt sich nach dem oben ausgesprochenen Satze jeder dieser Angriffspunkte nach C verlegen, ohne eine Aenderung in den Wirkungen dadurch hervorzubringen. Macht man deshalb

Fig. 113.



$$\overline{CQ_1} = \overline{A_1 P_1} = P_1 \text{ und}$$
$$\overline{CQ_2} = \overline{A_2 P_2} = P_2,$$

und vollendet jetzt das Parallelogramm $C Q_1 Q Q_2$, so giebt uns dessen Diagonale die Mittelkraft $\overline{CQ} = P$ von $\overline{CQ_1}$ und $\overline{CQ_2}$ und also auch von den Kräften P_1 und P_2, deren Angriffspunkt übrigens auch jeder andere Punkt A in der Richtung dieser Diagonale sein kann.

Setzt man der so gefundenen Mittelkraft $\overline{AP} = P$ eine gleich große, in irgend einem Punkte B der Diagonalrichtung CQ angreifende Gegenkraft $\overline{BP} = -P$ entgegen, so wird dadurch den gegebenen Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht gehalten, und es sind folglich P_1, P_2 und $-P$ drei Kräfte im Gleichgewichte.

§. 90. **Angriffslinie der Mittelkraft.** Fällt man von irgend einem Punkte O, Fig. 114, in der Kräfteebene Perpendikel OL_1, OL_2 und OL gegen die Richtungen der Seitenkräfte P_1 und P_2 und ihrer Mittelkraft P, so hat man dem §. 84 zufolge:

$$P . \overline{OL} = P_1 . \overline{OL_1} + P_2 . \overline{OL_2},$$

und es läßt sich demnach aus den Perpendikeln oder Abständen OL_1 und OL_2 der Seitenkräfte der Abstand OL der Angriffslinie der Mittelkraft finden, indem man setzt:

$$\overline{OL} = \frac{P_1 . \overline{OL_1} + P_2 . \overline{OL_2}}{P}.$$

Während man die Richtung und Größe der Mittelkraft durch Anwendung des Kräfteparallelogramms findet, ergiebt sich der Ort L ihres Angriffspunktes mit Hülfe der letzten Formel durch Bestimmung des Abstandes OL.

Schließen die gehörig verlängerten Kraftrichtungen den Winkel $P_1 C P_2 = \alpha$ zwischen sich ein, so hat man die Größe der Mittelkraft:

$$1)\quad P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos.\alpha}.$$

Fig. 114.

Bildet ferner die Mittelkraft den Winkel $PCP_1 = \alpha_1$ mit der Richtung der Seitenkraft P_1, so ist:

$$2)\quad \sin.\alpha_1 = \frac{P_2 \sin.\alpha}{P}.$$

Stehen endlich die Richtungen CP_1 und CP_2 der gegebenen Kräfte um $OL_1 = a_1$ und $OL_2 = a_2$ von einem willkürlichen Punkte O ab, so ist der Abstand $OL = a$ der Richtung CP der Mittelkraft von eben diesem Punkte:

$$3)\quad a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{P}.$$

Mit Hülfe dieses letzten Abstandes a ergiebt sich aber die Angriffslinie der Mittelkraft ohne Rücksichtnahme auf den Hülfspunkt C, wenn man mit a aus O einen Kreis construirt und an diesen eine Tangente LP legt, deren Richtung durch den Winkel α_1 bestimmt ist.

Beispiel. Es wirken auf einen Körper die Kräfte $P_1 = 20$ Pfund und $P_2 = 34$ Pfund, deren Richtungen unter einem Winkel $P_1 C P_2 = \alpha = 70$ Grad zusammenstoßen und von einem gewissen Punkte O um $OL_1 = a_1 = 4$ Fuß und $OL_2 = a_2 = 1$ Fuß abstehen; welches ist die Größe, die Richtung und der Ort der Mittelkraft? Die Größe der Mittelkraft ist:

$$P = \sqrt{20^2 + 34^2 + 2 . 20 . 34 \cos. 70^0} = \sqrt{400 + 1156 + 1360 . 0{,}34202}$$
$$= \sqrt{2021{,}15} = 44{,}96 \text{ Pfund};$$

für ihre Richtung ist ferner:

$$\sin.\alpha_1 = \frac{34 . \sin. 70^0}{44{,}96},\ Log. \sin.\alpha_1 = 0{,}85163 - 1,$$

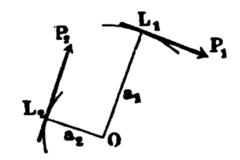
daher $\alpha_1 = 45^0\ 17'$ der Winkel, um welchen diese Mittelkraft von der Richtung der Kraft P_1 abweicht. Der Ort oder die Angriffslinie dieser Mittelkraft ist endlich bestimmt durch ihren Abstand OL von O, welcher ist:

$$a = \frac{20 . 4 + 34 . 1}{44{,}96} = \frac{114}{44{,}96} = 2{,}536 \text{ Fuß}.$$

Hebelarme der Kräfte und Kraftmomente. Man nennt die Normalabstände $OL_1 = a_1$, $OL_2 = a_2$ u. s. w. der Kraftrichtungen von einem willkürlichen Punkte O, Fig. 115 (a. f. S.), die Hebelarme der §. 91.

Kräfte (franz. bras du levier; engl. arms of lever), weil sie bei der in der Folge abzuhandelnden Theorie des Hebels ein wesentliches Element ausmachen. Das Product Pa aus Kraft und Hebelarm hat den Namen statisches oder Kraftmoment (franz. moment des forces; engl. momentum of the forces) erhalten. Nun ist aber $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$; folglich das statische Moment der Mittelkraft gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte.

Fig. 115.



Bei der Addition der Momente ist noch auf Plus und Minus Rücksicht zu nehmen. Wirken die Kräfte P_1 und P_2, wie in Fig. 115, nach gleicher Richtung um den Punkt O herum, stimmen z. B. die Kraftrichtungen mit den Bewegungsrichtungen der Zeiger einer Uhr überein, so nennt man diese Kräfte, und deshalb auch ihre Momente, gleichbezeichnete; wird also die eine positiv angenommen, so muß die andere ebenfalls positiv gesetzt werden. Wirken hingegen, wie im Fig. 116, die Kräfte in entgegengesetzten Richtungen um den

Fig. 116.

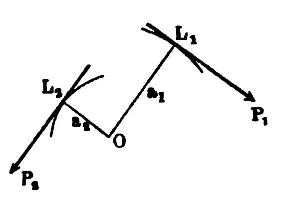
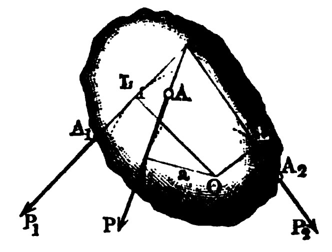


Fig. 117.

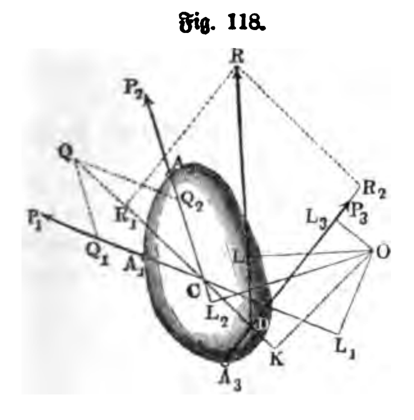


Punkt O herum, so nennt man dieselben, sowie ihre statischen Momente, entgegengesetzte, und es ist nun die eine negativ zu setzen, wenn man die andere positiv annimmt. Bei der in Fig. 117 repräsentirten Zusammensetzung hat man z. B. $Pa = P_1 a_1 - P_2 a_2$, weil P_2 der Kraft P_1 entgegengesetzt, also ihr Moment $P_2 a_2$ negativ ist, während bei der Zusammensetzung in Fig. 114, $Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2$ ausfällt.

§. 92. **Zusammensetzung der Kräfte in einer Ebene.** Ergreifen drei Kräfte P_1, P_2, P_3, Fig. 118, einen Körper in verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3 einer Ebene, so vereinige man nach der letzten Regel erst zwei (P_1, P_2) dieser Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CQ} = Q$, und diese nachher, nach derselben Regel, mit der dritten Kraft (P_3), indem man aus $DR_1 = CQ$ und $DR_2 = A_3 P_3$ das Parallelogramm $DR_1 R R_2$ construirt. Die Diagonale DR ist nun die gesuchte Mittelkraft P zu P_1, P_2 und P_3. Es ist hiernach auch leicht einzusehen, wie beim Hinzukommen einer vierten Kraft P_4 die Mittelkraft gefunden werden kann, u. s. w.

Bei dieser Zusammensetzung der Kräfte wird die Größe und Richtung der Mittelkraft genau so gefunden, als wenn die Kräfte in einem einzigen Punkte angegriffen (s. §. 82), es sind daher die in §. 84 angegebenen Rechnungsregeln anzuwenden, um diese beiden ersten Elemente der Mittelkraft zu bestimmen; um aber das dritte Element, nämlich den Ort der Mittelkraft oder ihre Angriffslinie zu finden, hat man von der Gleichung zwischen den statischen Momenten Gebrauch zu machen. Sind auch hier $OL_1 = a_1$, $OL_2 = a_2$, $OL_3 = a_3$ und $OL = a$ die Hebelarme der drei Seitenkräfte P_1, P_2, P_3 und ihrer Mittelkraft P in Hinsicht auf einen willkürlichen Punkt O und ist Q die Mittelkraft aus P_1 und P_2 sowie $\overline{OK}$ der Hebelarm derselben, so hat man:

Fig. 118.



$$Pa = Q . \overline{OK} + P_3 a_3 \text{ und } Q . \overline{OK} = P_1 a_1 + P_2 a_2.$$

Verbinden wir aber diese beiden Gleichungen mit einander, so erhalten wir:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3,$$

und ebenso stellt sich für mehrere Kräfte heraus:

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3 + \cdots,$$

d. h. es ist allemal das (statische) **Moment der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den (statischen) Momenten der Seitenkräfte.**

Sind nun P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig 119 (a. f. S.), die einzelnen Kräfte eines Kräftesystemes, sind ferner α_1, α_2, α_3 u. s. w. die Winkel $P_1 D_1 X$, $P_2 D_2 X$, $P_3 D_3 X$ u. s. w., unter welchen eine beliebig angenommene Axe $X\overline{X}$ von den Kraftrichtungen geschnitten wird, und bezeichnen endlich a_1, a_2, a_3 u. s. w. die Hebelarme OL_1, OL_2, OL_3 u. s. w. dieser Kräfte hinsichtlich des Durchschnittspunktes O zwischen beiden Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$, so hat man nach den §§. 82 und 92: §. 93.

1) die Seitenkraft parallel zur Axe $X\overline{X}$:

$$Q = P_1 \cos. \alpha_1 + P_2 \cos. \alpha_2 + \cdots,$$

2) die Seitenkraft parallel zur Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = P_1 \sin. \alpha_1 + P_2 \sin. \alpha_2 + \cdots,$$

3) die **Mittelkraft** des ganzen Systemes:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

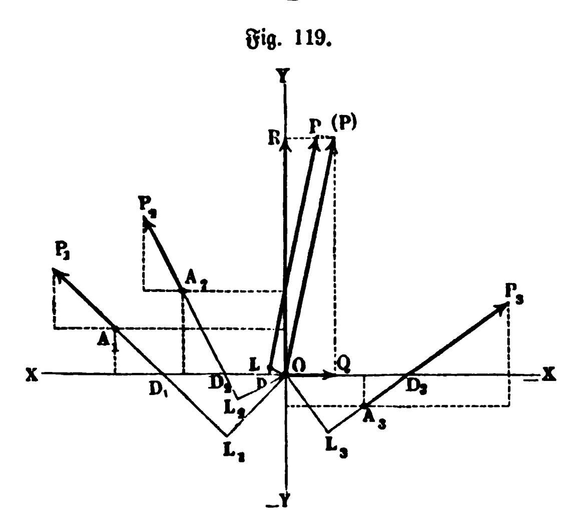
4) den **Winkel** α, unter welchem die Mittelkraft die Axe schneidet, durch

$$tang.\,\alpha = \frac{R}{Q},$$

5) den **Hebelarm der Mittelkraft**, oder den Halbmesser des Kreises, welchen die Richtung der Mittelkraft tangirt:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P}.$$

Fig. 119.



Bezeichnen b, b_1, b_2 u. s. w. die Abschnitte OD, OD_1 OD_2 u. s. w. von der Axe $X\overline{X}$, so ist:

$$a = b\, sin.\,\alpha,\; a_1 = b_1\, sin.\,\alpha_1,\; a_2 = b_2\, sin.\,\alpha_2 \text{ u. s. w.},$$

und daher auch:

$$b = \frac{P_1 b_1\, sin.\,\alpha_1 + P_2 b_2\, sin.\,\alpha_2 + \cdots}{P\, sin.\,\alpha} = \frac{R_1 b_1 + R_2 b_2 + \cdots}{R}.$$

Ersetzt man die Mittelkraft (P) durch eine ihr gleiche Gegenkraft $(-P)$, so halten sich die Kräfte P_1, P_2, P_3 ... $(-P)$ das Gleichgewicht.

Bezeichnen noch x_1, x_2 ... sowie y_1, y_2 ... die Coordinaten der Angriffspunkte A_1, A_2 ... der gegebenen Kräfte P_1, P_2 ..., so sind die Momente der Componenten der letzteren: $R_1 x_1, R_2 x_2$ ... sowie $Q_1 y_1, Q_2 y_2$ ..., und es ist das **Moment der Mittelkraft**:

$$Pa = (R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots) - (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots),$$

daher der Hebelarm derselben:

$$a = \frac{(R_1 x_1 + R_2 x_2 + \cdots) - (Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + \cdots)}{\sqrt{(R_1 + R_2 + \cdots)^2 + (Q_1 + Q_2 + \cdots)^2}}.$$

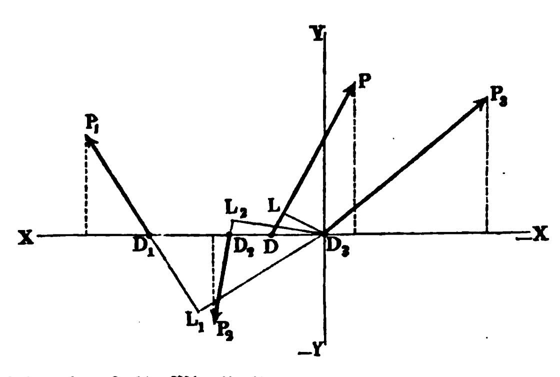
Beispiel. Die Kräfte $P_1 = 40$ Pfund, $P_2 = 30$ Pfund, $P_3 = 70$ Pfund, Fig. 120, durchschneiden die Axe $X\overline{X}$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 60^0$, $\alpha_2 = -80^0$, $\alpha_3 = -142^0$, und es sind die Entfernungen zwischen den Durchschnittspunkten D_1, D_2, D_3 der Kraftrichtungen mit der Axe, $D_1 D_2 = 4$ Fuß und $D_2 D_3 = 5$ Fuß. Man sucht die sämmtlichen Bestimmungsstücke der Mittelkraft. Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $X\overline{X}$ ist:

$$Q = 40 cos. 60^0 + 30 cos. (-80^0) + 70 cos. 142^0$$
$$= 40 cos. 60^0 + 30 cos. 80^0 - 70 cos. 38^0$$
$$= 20 + 5,209 - 55,161 = -29,952 \text{ Pfund.}$$

Die Summe der Seitenkräfte parallel zur Axe $Y\overline{Y}$:

$$R = 40 sin. 60^0 + 30 sin. (-80^0) + 70 sin. 142^0$$
$$= 40 sin. 60^0 - 30 sin. 80^0 + 70 sin. 38^0$$
$$= 34,641 - 29,544 + 43,096 = 48,193.$$

Fig. 120.



Nun folgt die gesuchte Mittelkraft:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \sqrt{29,952^2 + 48,193^2} = \sqrt{3219,68} = 56,742 \text{ Pfund.}$$

Der Winkel α, unter welchem sie die Axe schneidet, ist ferner bestimmt durch:

$$tang. \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{48,193}{-29,952} = -1,6090,$$

es ergiebt sich daher:

$$\alpha = 180^0 - 58^0 8' = 121^0 52'.$$

Verlegt man den Axpunkt O nach D_3, so hat man den Hebelarm der Mittelkraft:

$$\overline{OL} = a = \frac{P_1 sin. \alpha_1 . b_1 + P_2 sin. \alpha_2 . b_2 + \cdots}{P} = \frac{R_1 b_1 + R_2 b_2 + \cdots}{P}$$

$$= \frac{34,641 . (4 + 5) - 29,544 . 5 + 0}{56,742} = \frac{164,049}{56,742} = 2,891 \text{ Fuß,}$$

und dagegen den Abschnitt:

$$OD = b = \frac{164{,}049}{48{,}193} = 3{,}404 \text{ Fuß}.$$

§. 94. **Parallelkräfte.** Sind die Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w., Fig. 121, eines festen Systemes unter sich parallel, so fallen die Hebelarme OL_1, OL_2, OL_3 u. s. w. über einander; zieht man nun durch den Anfangspunkt O eine willkürliche Linie $X\overline{X}$, so schneiden hiervon die Kraftrichtungen die Stücke OD_1, OD_2, OD_3 u. s. w. ab, welche den Hebelarmen OL_1, OL_2, OL_3 u. s. w. proportional sind, weil $\triangle OD_1L_1 \backsim \triangle OD_2L_2 \backsim \triangle OD_3L_3$ u. s. w. ist. Bezeichnet man den Winkel $D_1OL_1 = D_2OL_2$ u. s. w. durch α, die Hebelarme OL_1, OL_2 u. s. w. durch a_1, a_2 u. s. w., die Abschnitte OD_1, OD_2 u. s. w. durch b_1, b_2 u. s. w., so hat man:

$$a_1 = b_1 \cos.\alpha,\ a_2 = b_2 \cos.\alpha \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die Formel:

$$Pa = P_1a_1 = P_2a_2 + \cdots,$$

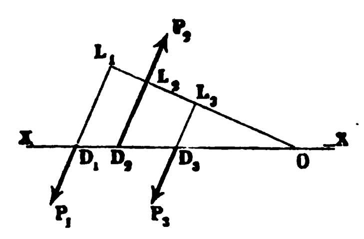
so erhält man:

$$Pb\cos.\alpha = P_1b_1\cos.\alpha + P_2b_2\cos.\alpha + \cdots,$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $\cos.\alpha$ wegläßt:

$$Pb = P_1b_1 + P_2b_2 + \cdots$$

Fig. 121.



Es ist also bei jedem Systeme paralleler Kräfte gestattet, die Hebelarme durch die von irgend einer Linie $X\overline{X}$ abgeschnittenen schiefen Entfernungen, wie OD_1, OD_2 u. s. w., zu ersetzen. Da die Größe und Richtung der Mittelkraft eines Kräftesystemes mit verschiedenen Angriffspunkten dieselbe ist, wie die eines Systemes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen, so hat die Mittelkraft des Systemes paralleler Kräfte mit den einzelnen Kräften gleiche Richtung und ist gleich der algebraischen Summe derselben; es ist also:

$$1)\ P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \text{ und}$$

$$2)\ a = \frac{P_1a_1 + P_2a_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}, \text{ oder auch:}$$

$$b = \frac{P_1b_1 + P_2b_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Beispiel. Es seien die Kräfte $P_1 = 12$ Pfund, $P_2 = -32$ Pfund, $P_3 = 25$ Pfund, und ihre Richtungen mögen eine gerade Linie in den Punkten D_1, D_2 und D_3, Fig. 121 (a. v. S.), schneiden, deren Abstände von einander folgende sind: $D_1 D_2 = 21$ Zoll, $D_2 D_3 = 30$ Zoll. Man soll die Mittelkraft angeben. Die Größe dieser Kraft ist:

$$P = 12 - 32 + 25 = 5 \text{ Pfund},$$

und die Entfernung $D_1 D$ ihres Angriffspunktes D in der Axe $X\overline{X}$, vom Punkte D_1 aus gemessen:

$$b = \frac{12 . 0 - 32 . 21 + 25 . (21 + 30)}{5} = \frac{0 - 672 + 1275}{5} = 120{,}6 \text{ Zoll}.$$

Kräftepaare. Zwei gleich große, zwar parallel, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P_1 und P_1, Fig. 122, haben die Mittelkraft: §. 95.

$$P = P_1 + (-P_1) = P_1 - P_1 = \text{Null},$$

mit dem Hebelarme

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{0} = \infty \text{ (unendlich groß)}.$$

Fig. 122.

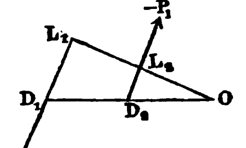
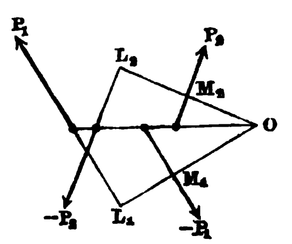


Fig. 123



Zur Herstellung des Gleichgewichtes mit einem solchen Kräftepaare ist diesemnach eine einzige endliche und in endlicher Entfernung wirkende Kraft P nicht hinreichend, wohl aber können zwei solcher Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten. Sind P_1 und $-P_1$ sowie $-P_2$ und P_2, Fig. 123, zwei solche Paare, und $OL_1 = a_1$, $OM_1 = OL_1 - L_1 M_1 = a_1 - b_1$, ferner $OL_2 = a_2$ und $OM_2 = OL_2 - L_2 M_2 = a_2 - b_2$ die Hebelarme derselben, von einem gewissen Punkte O aus genommen, so hat man für das Gleichgewicht:

$$P_1 a_1 - P_1 (a_1 - b_1) - P_2 a_2 + P_2 (a_2 - b_2) = 0, \text{ d. i.:}$$
$$P_1 b_1 = P_2 b_2.$$

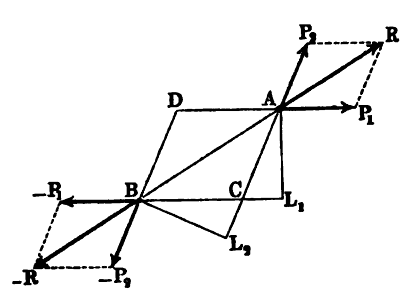
Zwei solche Kräftepaare sind also im Gleichgewichte, wenn das Product aus einer Kraft und ihrem Abstande von der Gegenkraft bei einem Paare so groß ist wie bei dem anderen.

Ein Paar von gleichen Gegenkräften nennt man schlechtweg ein Kräftepaar oder Gegenpaar (franz. und engl. couple), und das Product aus einer Kraft desselben und dem Normalabstande von der anderen Kraft heißt das Moment

des **Kräftepaares**. Nach dem Vorigen sind zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräftepaare im Gleichgewichte, wenn sie gleiche Momente besitzen.

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auch direct auf folgende Weise darthun. Verlegen wir die Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2 und $-P_1, -P_2$ der Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, Fig. 124, nach den Durchschnitten A und B ihrer Angriffslinien, und vereinigen wir sowohl P_1 mit P_2, als auch $-P_1$ mit $-P_2$ durch ein Kräfteparallelogramm zu den Mittelkräften R und $-R$. Fallen nun die Richtungen dieser Mittelkräfte in die Fortsetzungen der Linie AB, so sind diese Kräfte und folglich auch die ihnen entsprechenden Kräftepaare $(P_1, -P_1)$, $(P_2, -P_2)$, mit einander im Gleichgewichte.

Fig. 124.



Damit dies eintrete, muß das durch AB und durch die Richtungen der Kräfte $-P_1$ und P_2 gebildete Dreieck ABC ähnlich sein den Dreiecken RAP_1 und $B\bar{R}\bar{P}_1$, und daher der Proportion:

$$\frac{CB}{CA} = \frac{P_1}{P_2} \text{ oder der Gleichung: } P_1 . \overline{CA} = P_2 . \overline{CB}$$

Genüge geschehen.

Nun sind aber die Perpendikel $AL_1 = b_1$ und $BL_2 = b_2$ zwischen den Richtungen der Kräftepaare den Hypotenusen CA und CB der einander ähnlichen rechtwinkligen Dreiecke ACL_1 und BCL_2 proportional, folglich ist auch

$$P_1 b_1 = P_2 b_2$$

zu setzen. Es sind also Momente der beiden im Gleichgewichte befindlichen Kräftepaare einander gleich.

Setzen wir in der Formel (§. 93) für den Hebelarm a der Mittelkraft:

$$a = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{P}$$

$P = 0$, während die Summe der statischen Momente einen endlichen Werth hat, so bekommen wir ebenfalls $a = \infty$, ein Beweis, daß in diesem Falle gleichfalls keine Mittelkraft, sondern nur ein Kräftepaar möglich ist.

Damit sich die Kräfte eines Kräftesystems das Gleichgewicht halten, ist also nicht bloß nöthig, daß die Mittelkraft $P = \sqrt{Q^2 + R^2}$, oder jeder der Componenten Q und R, sondern auch ihr Moment

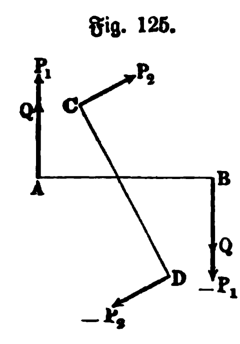
$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots = \text{Null sei.}$$

Beispiel. Besteht ein Kräftepaar aus den Kräften $P_1 = 25$ Pfund und $-P_1 = -25$ Pfund, ein anderes aber aus den Kräften $-P_2 = -18$ Pfund und $P_2 = 18$ Pfund, und ist der Normalabstand b_1 des ersteren Paares $= 3$ Fuß, so muß für den Gleichgewichtszustand, der Normalabstand oder Hebelarm des zweiten

$$b_2 = \frac{25 \cdot 3}{18} = 4^1/_6 \text{ Fuß betragen.}$$

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare. Die Zusammensetzung und Zerlegung der in einer und derselben Ebene wirkenden Kräftepaare wird durch eine einfache algebraische Addition bewirkt, und ist daher viel einfacher als die Zusammensetzung und Zerlegung einzelner Kräfte. Da sich zwei entgegengesetzte Kräftepaare einander das Gleichgewicht halten, wenn sie einerlei Momente haben, so sind auch die Wirkungen zweier gleichgerichteten Kräftepaare einander gleich, wenn das Moment des einen Kräftepaares gleich ist dem Moment des anderen. Sind daher zwei Kräftepaare $(P_1, -P_1)$ und $(P_2, -P_2)$, Fig. 125, mit einander zu vereinigen, so kann man das eine $(P_2, -P_2)$ durch ein anderes ersetzen, welches mit dem ersteren Paar $(P_1, -P_1)$ den Hebelarm $AB = b_1$ gemeinschaftlich hat, und dann die Kräfte desselben zu denen des anderen addiren, so daß man ein einziges Kräftepaar erhält. Ist b_2 der Hebelarm CD des anderen Kräftepaares und ist $(Q, -Q)$ das reducirte Kräftepaar, so hat man $Q b_1 = P_2 b_2$, folglich §. 96.

Fig. 125.



$$Q = \frac{P_2 b_2}{b_1},$$

daher einen Componenten des zusammengesetzten Kräftepaares:

$$P_1 + Q = P_1 + \frac{P_2 b_2}{b_1},$$

und das gesuchte Moment des resultirenden Kräftepaares:

$$(P_1 + Q) b_1 = P_1 b_1 + P_2 b_2.$$

Auf gleiche Weise findet man das aus drei Kräftepaaren resultirende Kräftepaar. Sind $P_1 b_1$, $P_2 b_2$ und $P_3 b_3$ die Momente dieser Kräftepaare, so kann man:

$$P_2 b_2 = Q b_1 \text{ und } P_3 b_3 = R b_1,$$

oder

$$Q = \frac{P_2 b_2}{b_1} \text{ und } R = \frac{P_3 b_3}{b_1}$$

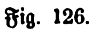
setzen, so daß nun das Moment des resultirenden Kräftepaares

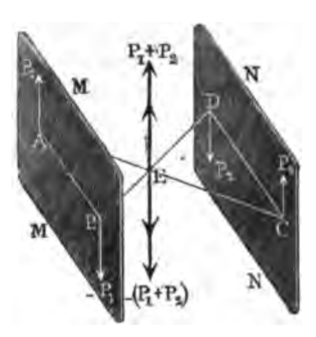
$$(P_1 + Q + R)b_1 = P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3$$

sich ergiebt.

Bei dieser Vereinigung von Kräftepaaren zu einem einzigen Kräftepaare ist natürlich auch auf die Vorzeichen Rücksicht zu nehmen, da die Momente derjenigen Kräftepaare, welche nach der einen Umdrehungsrichtung wirken, das positive, und die Momente derjenigen Kräftepaare, welche den Körper nach der entgegengesetzten Richtung umzudrehen suchen, das negative Zeichen erhalten müssen. Ueber die Umdrehungsrichtung eines Kräftepaares kann man sich sogleich Rechenschaft ablegen, wenn man zwischen den Angriffslinien des Paares einen Drehungspunkt willkürlich annimmt. Haben dann die Kräfte des Paares die Richtung, in welcher sich die Zeiger einer Uhr umdrehen, so kann man das Kräftepaar, und also auch sein Moment, ein positives nennen, und wirken die Kräfte eines Paares der Umdrehungsbewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt, d. i. von rechts nach links, so erhält dann dieses Kräftepaar, und also auch sein Moment, das negative Zeichen.

Die vorstehende Regel über die Zusammensetzung der Kräftepaare ist dann noch anwendbar, wenn die Kräftepaare in parallelen Ebenen wirken. Wenn die parallelen Kräftepaare (P_1, $-P_1$) und (P_2, $-P_2$) Fig. 126, in parallelen Ebenen MM und NN mit gleichen Momenten $P_1 b_1$ und $P_2 b_2$ einander entgegenwirken, so halten sie einander ebenfalls das Gleichgewicht; denn es resultiren aus denselben zwei Mittelkräfte $P_1 + P_2$ und $-(P_1 + P_2)$, welche einander vollständig aufheben, da sie in demselben Punkte E angreifen, der bestimmt ist durch die Gleichungen:


Fig. 126.



$$\overline{EA} . P_1 = \overline{EC} . P_2,\ \overline{EB} . P_1 = \overline{ED} . P_2,$$

und

$$P_1 b_1 = P_2 b_2, \text{ d. i. } \overline{AB} . P_1 = \overline{CD} . P_2,$$

wonach

$$EA : EB : AB = EC : ED : CD$$

folgt, und daher dieser Punkt E mit dem Durchschnitte der Transversalen AC und BD zusammenfällt.

Da dem Kräftepaare (P_2, $-P_2$) jedes andere Kräftepaar das Gleichgewicht hält, welches mit demselben in einerlei Ebene wirkt, und das entgegengesetzte Moment hat, so folgt auch, daß jedes Kräftepaar durch ein anderes ersetzt werden kann, welches mit demselben einerlei Moment hat, und in einer Ebene wirkt, welche der Ebene des ersten parallel läuft.

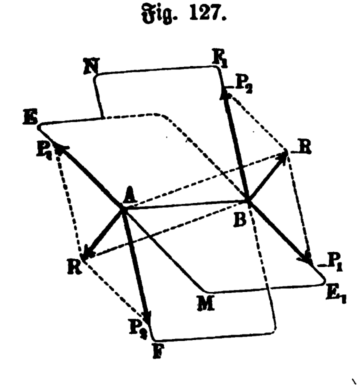
Wenn daher auf einen Körper mehrere Kräftepaare wirken, deren Wirkungsebenen parallel sind, so lassen sich dieselben durch ein einziges Kräftepaar ersetzen, dessen Moment die algebraische Summe von den Momenten dieser Paare ist, und dessen übrigens willkürliche Wirkungsebene mit den Ebenen des gegebenen Systems parallel läuft.

Kräftepaare in verschiedenen Ebenen. Wirken zwei Kräftepaare §. 97.
$(P_1, - P_1)$ und $(P_2, - P_2)$ in zwei Ebenen EME_1 und FNF_1, Fig. 127, welche sich unter einem gewissen Winkel

$$EAF = E_1BF_1 = \alpha$$

in der geraden Linie AB schneiden, so lassen sich dieselben, nachdem man sie auf einen und denselben Hebelarm AB reducirt hat, durch das Kräfteparallelogramm zu einem Kräftepaare vereinigen. Durch diese Zusammensetzung erhält man aus P_1 und P_2 die Mittelkraft R, sowie aus $-P_1$ und $-P_2$ die Mittelkraft $-R$. Beide Mittelkräfte sind gleich groß und einander entgegengesetzt gerichtet, und bilden folglich wieder ein Kräftepaar $(R, - R)$, dessen Ebene durch die Richtungen von R und $-R$ bestimmt ist.

Fig. 127.



Durch Rechnung bestimmt sich nach §. 79 die Mittelkraft R mittelst der Formeln:

$$R = \sqrt{P_1 + P_2^2 + 2\, P_1 P_2 \cos.\alpha} \text{ und}$$

$$\sin.\beta = \frac{P_2 \sin.\alpha}{R},$$

wo β den Winkel $EAR = E_1BR$ bezeichnet, welchen die Richtung der Mittelkraft R mit der der Seitenkraft P_1 einschließt.

Ist nun der Hebelarm $AB = c$, und setzt man das Moment $P_1 c = Pa$ und das Moment $P_2 c = Qb$, oder $P_1 = \frac{Pa}{c}$ und $P_2 = \frac{Qb}{c}$, so erhält man

$$R = \sqrt{\left(\frac{Pa}{c}\right)^2 + \left(\frac{Qb}{c}\right)^2 + 2\,\frac{Pa}{c}\cdot\frac{Qb}{c}\cos.\alpha},$$

also das Moment des aus den Kräftepaaren $(P, - P)$ und $(Q, - Q)$ resultirenden Kräftepaares:

$$Rc = \sqrt{(Pa)^2 + (Qb)^2 + 2\,Pa\,.\,Qb\,.\cos.\alpha},$$

und ebenso für den Winkel β, um welchen die Ebene desselben von der des ersten Kräftepaares $(P, -P)$ abweicht:

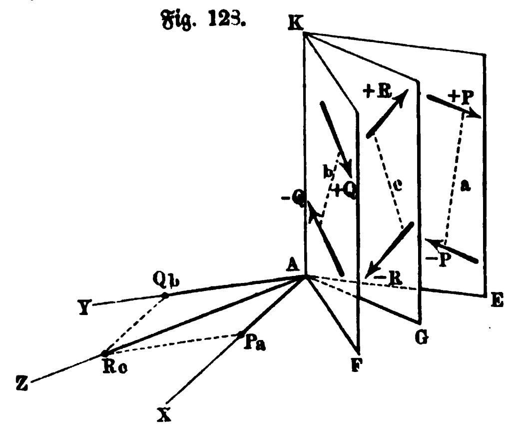
$$sin. \beta = \frac{Qb}{Rc} sin. \alpha.$$

Es lassen sich also die in verschiedenen Ebenen wirkenden Kräftepaare genau so zusammensetzen und zerlegen, wie die in einem Punkte angreifenden einfachen Kräfte, wenn man statt der letzteren die Momente der ersteren, und statt der Winkel, unter welchen sich die Richtungen der ersteren schneiden, die Winkel einsetzt, um welchen die Ebenen der letzteren von einander abweichen.

Diese Zurückführung der Theorie der Kräftepaare auf die Lehre von der Zusammensetzung und Zerlegung einfacher Kräfte läßt sich noch durch Einführen von Umdrehungsaxen statt der Umdrehungsebenen der Paare besonders vereinfachen. Unter der Umdrehungsaxe oder Axe eines Kräftepaares versteht man jedes Perpendikel auf der Ebene desselben. Da sich jedes Kräftepaar in seiner Ebene beliebig verrücken läßt, ohne seine Wirkung auf den Körper zu verändern, so kann man auch die Axe des Paares durch jeden beliebigen Punkt legen.

In Folge der Rechtwinkligkeit zwischen der Ebene und der Axe eines Kräftepaares schließen die Axen AX, AY und AZ, Fig. 128, der Kräfte-

Fig. 128.

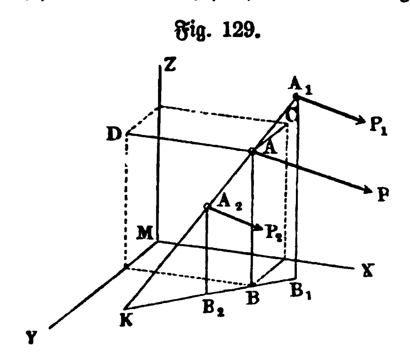


paare eines Körpers genau denselben Winkel zwischen sich ein, wie die Ebene AEK, AFK und AGK derselben. Ist das eine Kräftepaar die Resultante aus den beiden anderen, so bildet, dem Vorstehenden zufolge, dessen Moment Rc die Diagonale des aus den Momenten Pa und Qb construirten Parallelogramms, trägt man daher die Momente Pa und Qb auf die Axen AX und AY auf und vollendet man das dadurch angefangene Parallelogramm, so erhält man in der Diagonale desselben nicht allein die Axe AZ des resultirenden Kräftepaares, sondern auch dessen Moment Rc.

Hiernach sind also die Kräftepaare genau so zusammen zu setzen und zu zerlegen, wie die einzelnen in einem Punkte angreifenden Kräfte, vorausgesetzt, daß man die Axen dieser Paare mit den Richtungen, und die Momente derselben mit den Größen der einfachen Kräfte vertauscht. Alle in §. 78, §. 79 u. s. w. abgehandelten Lehren über die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte finden daher auch in diesem Sinne ihre Anwendung bei der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare.

Mittelpunkt paralleler Kräfte. Liegen die Parallelkräfte in verschiedenen Ebenen, so ist deren Vereinigung auf folgende Weise auszuführen. §. 98.

Fig. 129.



Verlängert man die Gerade $A_1 A_2$, Fig. 129, welche die Angriffspunkte zweier Parallelkräfte P_1 und P_2 verbindet, bis zur Ebene XY zwischen den rechtwinklig gegen einander stehenden Axen MX und MY, und nimmt man den Durchschnittspunkt K als den Anfangspunkt an, so erhält man für den Angriffspunkt A der Mittelkraft $P = P_1 + P_2$ dieser Kräfte:

$$(P_1 + P_2) \,.\, \overline{KA} = P_1 \,.\, \overline{KA_1} + P_2 \,.\, \overline{KA_2}.$$

Da nun B, B_1 und B_2 die Projectionen der Angriffspunkte A, A_1 und A_2 in der Ebene XY sind, so hat man:

$$AB : A_1 B_1 : A_2 B_2 = KA : KA_1 : KA_2,$$

und daher auch:

$$(P_1 + P_2) \,.\, \overline{AB} = P_1 \,.\, \overline{A_1 B_1} + P_2 \,.\, \overline{A_2 B_2}.$$

Bezeichnen wir die Normalabstände $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ der Angriffspunkte von der Grundebene XY durch respect. z_1 und z_2, sowie den Normalabstand AB des Angriffspunktes A von eben dieser Ebene durch z, so haben wir hiernach für zwei Kräfte:

$$(P_1 + P_2)\, z = P_1 z_1 + P_2 z_2.$$

Ferner ist für drei Kräfte P_1, P_2, P_3, Fig. 130 (a. f. S.), da $P_1 + P_2$ in einem Punkte L angreift, dessen Abstand von der Grundebene XY,

$$\overline{LN} = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}$$

ist,

$$(P_1 + P_2)\, \overline{LN} + P_3 z_3 = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3,$$

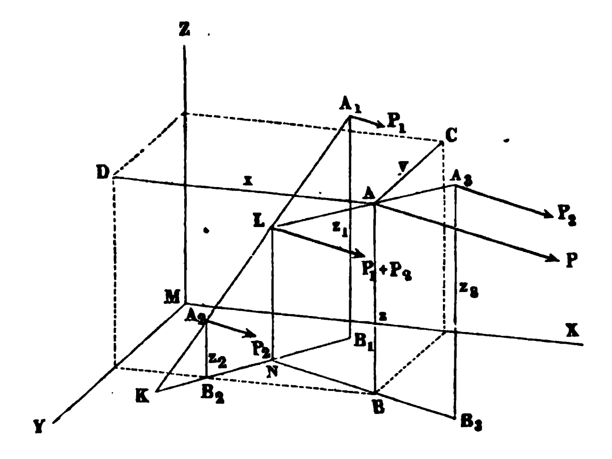
sowie allgemein für jede Anzahl von Kräften:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \cdots) z = P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 \cdots,$$

folglich:

$$1) \quad z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Fig. 130.



Bezeichnen wir ebenso die Abstände AC und AD des Angriffspunktes A der Mittelkraft von den Ebenen XZ und YZ durch y und x, sowie die Abstände der Angriffspunkte A_1, $A_2 \ldots$ von eben diesen Ebenen durch $y_1, y_2 \ldots$ und $x_1, x_2 \ldots$, so erhalten wir:

$$2) \quad y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}$$

und

$$3) \quad x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots}{P_1 + P_2 + \cdots}.$$

Die Abstände, x, y, z, von drei Grundebenen, wie z. B. von dem Fußboden und zwei Seitenwänden eines Zimmers, bestimmen aber den Punkt (A) vollständig, denn er ist der achte Eckpunkt des aus x, y und z zu construirenden Parallelepipedes; es giebt folglich nur einen einzigen Angriffspunkt der Mittelkraft eines solchen Kräftesystems.

Da die drei Formeln für x, y und z die Winkel, welche die Kräfte mit den Grundebenen einschließen, gar nicht enthalten, so ist der Angriffspunkt von diesen, und also auch von den Kraftrichtungen, gar nicht abhängig, es läßt sich demnach auch das ganze System um diesen Punkt drehen, ohne daß er aufhört, Angriffspunkt zu sein, wenn nur bei dieser Drehung der Parallelismus unter den Kräften bleibt.

Man nennt bei einem Systeme paralleler Kräfte das Product aus einer Kraft und dem Abstande ihres Angriffspunktes von einer Ebene oder Linie das **Moment** dieser Kraft hinsichtlich dieser Ebene oder Linie, auch ist es gewöhnlich, den Angriffspunkt der Mittelkraft selbst den **Mittelpunkt** des ganzen Systems (franz. centre des forces parallèles; engl. centre of parallel forces) zu nennen. Man erhält also den Abstand des Mittelpunktes eines Systems paralleler Kräfte von irgend einer Ebene oder Linie (letzteres, wenn die Kräfte in einer Ebene liegen), **wenn man die Summe der (statischen) Momente durch die Summe der Kräfte dividirt.**

Beispiel. Sind die Kräfte	P_n	5	-7	10	4 Kilogramm,
die Abstände oder Coordinaten der Angriffspunkte derselben .	x_n	1	2	0	9 Meter,
	y_n	2	4	5	3 „
	z_n	8	3	7	10 „
so hat man die Momente . . .	$P_n x_n$	5	-14	0	36 Meter-Kilogrm.
	$P_n y_n$	10	-28	50	12 „
	$P_n z_n$	40	-21	70	40 „

Nun ist aber die Kraftsumme $= 19 - 7 = 12$ Kilogramm; es folgen daher die Abstände des **Mittelpunktes** dieses Systems von den drei Grundebenen:

$$x = \frac{5 + 36 - 14}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} = 2{,}25 \text{ Meter},$$

$$y = \frac{10 + 50 + 12 - 28}{12} = \frac{44}{12} = \frac{11}{3} = 3{,}66 \text{ Meter und}$$

$$z = \frac{40 + 70 + 40 - 21}{12} = \frac{129}{12} = \frac{43}{4} = 10{,}75 \text{ Meter}.$$

Kräfte im Raume. Kommt es darauf an, ein aus verschieden gerichteten Kräften bestehendes System zu vereinigen, so lege man eine Ebene durch dasselbe, verlege sämmtliche Angriffspunkte in diese Ebene und zerlege jede Kraft in zwei Seitenkräfte, die eine winkelrecht auf diese Ebene und die zweite in die Ebene selbst fallend. Sind $\beta_1, \beta_2 \ldots$ die Winkel, unter welchen die Ebene von den Kraftrichtungen geschnitten wird, so folgen die Normalkräfte $P_1 \sin.\beta_1$, $P_2 \sin.\beta_2 \ldots$, dagegen die Kräfte in der Ebene $P_1 \cos.\beta_1$, $P_2 \cos.\beta_2$ u. s. w. Die letzteren lassen sich nach §. 93 und die ersteren nach dem letzten Paragraphen (98) zu einer Mittelkraft vereinigen. In der Regel werden sich die Richtungen beider Mittelkräfte nirgends schneiden, und es wird demnach auch eine Vereinigung dieser Kräfte nicht möglich sein; geht aber die Mittelkraft aus den parallelen Kräften durch einen Punkt K, §. 99.

Fig. 131, in der Richtung AB der Mittelkraft P aus den in der Ebene (der Papierebene) befindlichen Kräften, so ist eine Zusammensetzung möglich. Setzen wir die Abstände $OC = DK = u$ und $OD = CK = v$ für den Angriffspunkt K der ersten Mittelkraft, dagegen den Hebelarm OL der zweiten $= a$ und den Winkel BAO, unter welchem dieselbe die Axe $X\overline{X}$ schneidet, $= \alpha$, so ist die Bedingung für die Möglichkeit der Zusammensetzung:

$$u \sin. \alpha + v \cos. \alpha = a.$$

Wird dieser Gleichung nicht Genüge geleistet, geht z. B. die Mittelkraft aus den Normalkräften durch K_1, so ist die Zurückführung des ganzen Kräftesystems auf eine Mittelkraft gar nicht möglich, wohl aber läßt sich dasselbe

Fig. 131.

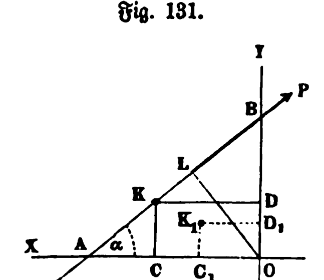
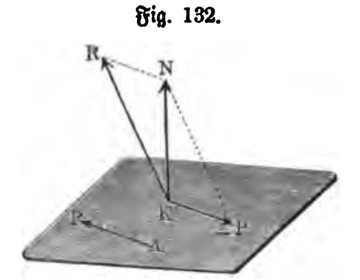


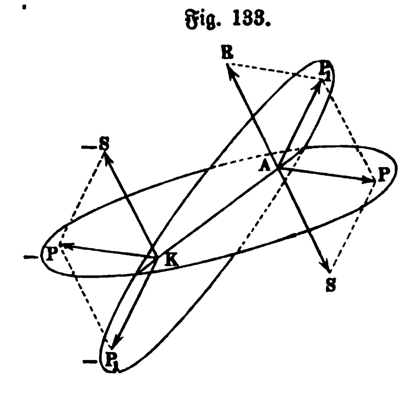
Fig. 132.



auf eine Mittelkraft R, Fig. 132, und ein Kräftepaar (P, — P) zurückführen, wenn man die Mittelkraft N der parallelen Seitenkräfte in die Kräfte — P und R zerlegt, von denen die eine der Mittelkraft P von den Kräften in der Ebene an Größe gleich, parallel und entgegengesetzt gerichtet ist.

Wenn man das Kräftepaar (P, —P), Fig. 133, in die Paare (P_1, —P_1) und (S, — S) zerlegt und den Componenten S derselben der Einzelkraft R gleichsetzt, so resultirt aus beiden das Kräftepaar (P_1, —P_1) und die Einzelkraft — $S = R$.

Fig. 133.



Sind nun α und β die Winkel PAR und P_1AR, um welche die Richtung der Einzelkraft R von den Ebenen der beiden Paare (P, — P) und (P_1, — P_1) abweicht, so hat man

$$R = \frac{P \sin. (\alpha - \beta)}{\sin. \beta}$$

und

$$P_1 = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. \beta},$$

und daher das **Moment** des neuen **Kräftepaares** $(P_1, -P_1)$

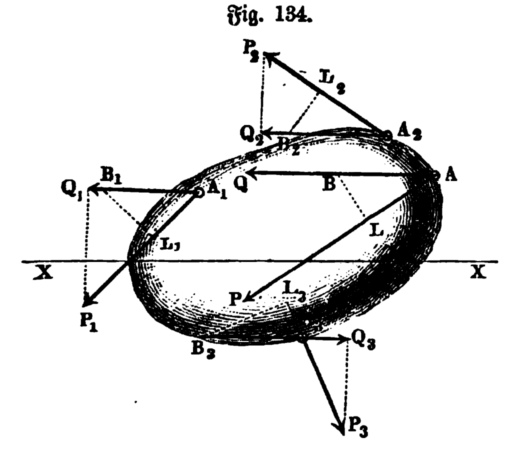
$$P_1 a = \frac{P a \sin. \alpha}{\sin. \beta}.$$

Dasselbe ist ein **Minimum**, und zwar $= P a \sin. \alpha$, wenn $\beta = 90^0$, wenn also die Einzelkraft R winkelrecht steht auf der Ebene $A P_1 K \overline{P_1}$ des resultirenden Paares $(P_1, -P_1)$.

Diese Zurückführung eines beliebigen Kräftesystems auf eine einzige Kraft und auf ein Kräftepaar läßt sich auch unmittelbar dadurch bewirken, daß man sich in einem beliebigen Punkte des Körpers, auf welchen dieses System von Kräften wirkt, noch ein System von Kräftepaaren angreifend denkt, deren positive Componenten den gegebenen Kräften in Größe und Richtung vollkommen gleich sind. Diese Kräftepaare ändern natürlich in dem Gleichgewichtszustande des Körpers nichts, da sie in demselben Punkte angreifen, sich folglich selbst aufheben; dagegen lassen sich die positiven Componenten derselben nach den bekannten Regeln (§. 83) zu einer Mittelkraft vereinigen, und es bilden die negativen Componenten derselben mit den gegebenen Kräften Kräftepaare, die sich nach §. 97 zu einem einzigen Kräftepaar zusammensetzen lassen. Es bleibt also zuletzt nur noch jene **Mittelkraft** und dieses **Kräftepaar** übrig.

Mechanische Arbeit der Mittelkraft. Wird ein System von Kräften P_1, P_2, P_3, Fig. 134, welche in einer und derselben Ebene wirken, **progressiv**, d. h. so fortgerückt, daß alle Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 ... §. 100.

Fig. 134.



gleiche Parallelwege $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ durchlaufen, so ist (in dem Sinne des §. 85) die Arbeit der Mittelkraft gleich der Summe aus den Arbeiten der Seitenkräfte, folglich im Zustande des Gleichgewichts dieselbe = Null.

Sind die in die Kraftrichtungen fallenden Projectionen A_1L_1, A_2L_2 u. s. w. des gemeinschaftlichen Weges $A_1B_1 = A_2B_2$ u. s. w. $= s_1, s_2$ u. s. w., so ist also die mechanische Arbeit der Mittelkraft:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$$

Dieses Gesetz folgt aus einer der Formeln des §. 93. Nach dieser Formel ist der mit einer Axe XX parallel laufende Component Q der Mittelkraft gleich der Summe:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots$$

der gleichlaufenden Componenten der Seitenkräfte P_1, P_2 u. s. w.; nun folgt aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A_1B_1L_1$ und $A_1P_1Q_1$ die Proportion

$$\frac{Q_1}{P_1} = \frac{A_1L_1}{A_1B_1} = \frac{s_1}{AB},$$

und hieraus:

$$Q_1 = \frac{P_1 s_1}{AB}, \text{ ebenso } Q_2 = \frac{P_2 s_2}{AB} \text{ u. s. w., sowie auch } Q = \frac{Ps}{AB},$$

man kann daher statt

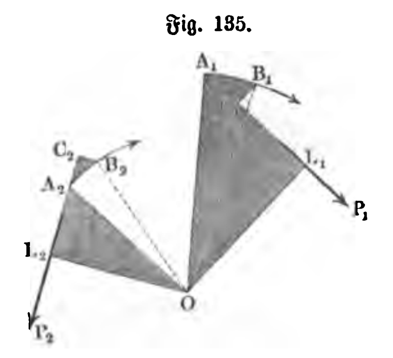
$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$$

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots \text{ setzen.}$$

Es ist also auch bei einem Kräftesystem mit verschiedenen Angriffspunkten für jede progressive oder fortschreitende Bewegung (franz. mouvement simple de translation, engl. straight translation, or shifting) die Arbeit der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe der Seitenkräfte.

§. 101. **Gleichgewicht bei einer Drehbewegung.** Wird das in einer Ebene wirkende Kräftesystem P_1, P_2 u. s. w., Fig. 135, um einen Punkt O sehr wenig gedreht, so gilt das in den Paragraphen 85 und 100 ausgesprochene Gesetz des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten oder der Zusammensetzung der mechanischen Arbeiten ebenfalls, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Nach §. 91 ist das Kraftmoment $P.\overline{OL} = Pa$ der Mittelkraft gleich der Summe von den Momenten der Seitenkräfte, also:

Fig. 135.



$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

Der einer Drehung um den kleinen Winkel $A_1OB_1 = \beta^0$ oder Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$ entsprechende Weg

$A_1 B_1$ ist auf dem Halbmesser OA_1 winkelrecht, daher das Dreieck $A_1 B_1 C_1$, welches entsteht, wenn man ein Loth $B_1 C_1$ gegen die Kraftrichtung fällt, dem durch den Hebelarm $OL_1 = a_1$ bestimmten Dreiecke $OA_1 L_1$ ähnlich und diesemnach:

$$\frac{OL_1}{OA_1} = \frac{A_1 C_1}{A_1 B_1}.$$

Setzt man die virtuelle Geschwindigkeit $\overline{A_1 C_1} = \sigma_1$ und den Bogen $\overline{A_1 B_1} = \overline{OA_1} . \beta$, so erhält man:

$$a_1 = \frac{OA_1 . \sigma_1}{OA_1 . \beta} = \frac{\sigma_1}{\beta}, \text{ ebenso } a_2 = \frac{\sigma_2}{\beta} \text{ u. s. w.}$$

Wenn man nun diese Werthe für a_1, a_2 u. s. w. in die obige Gleichung einsetzt, so erhält man:

$$\frac{P\sigma}{\beta} = \frac{P_1 \sigma_1}{\beta} + \frac{P_2 \sigma_2}{\beta} + \cdots \text{ u. s. w.},$$

oder, da β ein gemeinschaftlicher Divisor ist,

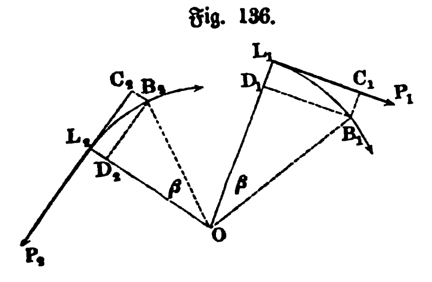
$$P\sigma = P_1 \sigma_1 + P_2 \sigma_2 + \cdots,$$

genau wie in §. 85.

Es ist also auch für kleine Drehungen (franz. und engl. rotations) die mechanische Arbeit ($P\sigma$) der Mittelkraft gleich der Summe aus den mechanischen Arbeiten der Seitenkräfte.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gilt sogar bei beliebig großen Drehungen, wenn man statt der virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspunkte die Projectionen $L_1 C_1$, $L_2 C_2$ u. s. w., Fig. 136, der in den Lothpunkten L_1, L_2 u. s. w. anfangenden Wege einführt; denn multiplicirt man die bekannte Gleichung der statischen Momente §. 102.

Fig. 136.



$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

durch $sin. \beta$, und setzt in der neuen Gleichung:

$$Pa \, sin. \beta = P_1 a_1 \, sin. \beta + P_2 a_2 \, sin. \beta + \cdots,$$

statt $a_1 \, sin. \beta$, $a_2 \, sin. \beta \ldots$ die Wege

$$OB_1 \, sin. L_1 O B_1 = D_1 B_1 = L_1 C_1 = s_1,$$
$$OB_2 \, sin. L_2 O B_2 = D_2 B_2 = L_2 C_2 = s_2 \text{ u. s. w.},$$

so folgt die Gleichung:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots$$

Ebenso behält dieses Princip bei endlichen Drehungen seine Richtigkeit, wenn sich die Kraftrichtungen mit dem Systeme gleichzeitig umdrehen, oder wenn sich der Angriffs- oder Lothpunkt L unaufhörlich und so verändert, daß die Hebelarme $OL_1 = OB_1$ u. s. w. unveränderlich bleiben; denn aus

$$Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots$$

folgt durch Multiplication mit β:

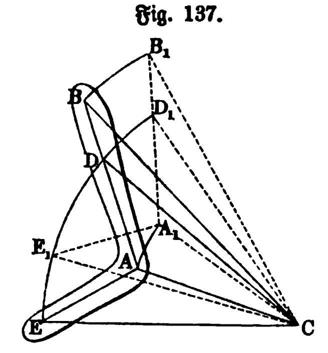
$$P a \beta = P_1 a_1 \beta + P_2 a_2 \beta + \cdots, \text{ d. i.}$$

$$P s = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \cdots,$$

wenn s_1, s_2 u. s. w. die bogenförmigen Wege $L_1 B_1$, $L_2 B_2$ u. s. w. der Loth- oder Angriffspunkte L_1, L_2 u. s. w. bezeichnen.

§. 103. Zurückführung einer kleinen Verrückung auf eine Drehung. Jede in einer Ebene vor sich gehende kleine Bewegung oder Verrückung eines Körpers läßt sich als eine kleine Drehung um einen beweglichen Mittelpunkt ansehen, wie in Folgendem bewiesen werden soll. Seien zwei Punkte A und B, Fig. 137, dieses Körpers (dieser Fläche oder Linie) bei einer kleinen Bewegung nach A_1 und B_1 fortgerückt, sei also auch $A_1 B_1 = AB$. Errichten wir in diesen Punkten Perpendikel auf die durchlaufenen kleinen Wege AA_1 und BB_1, so schneiden sich dieselben in einem Punkte C, aus dem man sich diese als Kreisbogen anzusehenden Wege AA_1 und BB_1 beschrieben denken kann. Nun sind aber wegen der Gleichheiten $AB = A_1 B_1$, $AC = A_1 C$ und $BC = B_1 C$ die Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C$ einander congruent; es ist daher auch der Winkel $B_1 C A_1$ gleich dem Winkel BCA und der Drehungswinkel ACA_1 gleich dem Drehungswinkel BCB_1. Macht man $A_1 D_1 = AD$, so bekommt man wegen der Gleichheit der Winkel $D_1 A_1 C$ und DAC und wegen der Gleichheit der Seiten CA_1 und CA, in $CA_1 D_1$ und CAD wieder zwei congruente Dreiecke, in welchen $CD_1 = CD$ und $\angle A_1 C D_1 = \angle ACD$ ist. Es ist folglich auch $\angle DCD_1 = \angle ACA_1$, und es geht daher bei der kleinen Verrückung der Linie AB, auch jeder beliebige Punkt D in ihr in einem kleinen Kreisbogen DD_1 fort. Ist endlich E ein außerhalb der Linie AB liegender und mit ihr fest verbundener Punkt, so ist noch der kleine Weg EE_1 desselben als ein Kreisbogen aus C anzusehen; denn macht man den Winkel $E_1 A_1 B_1 = EAB$ und die Entfernung $A_1 E_1 = AE$, so erhält man wieder zwei congruente Dreiecke $E_1 A_1 C$ und EAC mit den

Fig. 137.



gleichen Seiten CE_1 und CE und den gleichen Winkeln A_1CE_1 und ACE, und dasselbe läßt sich auch für jeden anderen mit AB fest verbundenen Punkt beweisen. Man kann folglich jede kleine Bewegung einer mit AB fest verbundenen Fläche oder eines festen Körpers als eine kleine Drehung um ein Centrum ansehen, das sich ergiebt, wenn man den Durchschnittspunkt C bestimmt, in welchem sich die Perpendikel zu den Wegen AA_1 und BB_1 zweier Punkte des Körpers schneiden.

Dieser Drehungspunkt, dessen Ort sich unaufhörlich verändern kann, heißt die momentane oder augenblickliche Drehungsaxe (franz. centre instantané de rotation, engl. instantaneous axis of rotation) des Kräftesystems.

Allgemeinheit des Principes der virtuellen Geschwindigkeiten. Nach einem vorhergehenden Paragraphen (101) ist für eine kleine Drehung des Kräftesystems die mechanische Arbeit der Mittelkraft gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten ihrer Componenten, nach dem letzten Paragraphen (103) läßt sich aber jede kleine Verrückung eines Körpers als eine kleine Drehung ansehen; es gilt daher das oben ausgesprochene Gesetz von dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten oder virtuellen mechanischen Arbeiten auch für jede beliebig kleine Bewegung eines festen Körpers oder Kräftesystems. §. 104.

Ist also in einem Kräftesysteme Gleichgewicht vorhanden, d. h. die Mittelkraft selbst gleich Null, so muß auch nach einer kleinen, übrigens beliebigen Bewegung die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null sein. Wenn umgekehrt für eine kleine Bewegung des Körpers die Summe der mechanischen Arbeiten gleich Null ist, so ist deshalb noch nicht Gleichgewicht nothwendig, es muß vielmehr bei allen möglichen kleinen Verrückungen diese Summe gleich Null ausfallen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll. Da die das Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten ausdrückende Formel nur eine Bedingung des Gleichgewichts erfüllt, so fordert das Gleichgewicht, daß diesem Gesetze wenigstens bei ebensoviel von einander unabhängigen Bewegungen entsprochen wird, als solcher Bedingungen gemacht werden können, z. B. für ein Kräftesystem in der Ebene bei drei von einander unabhängigen Bewegungen.

Zweites Capitel.

Die Lehre vom Schwerpunkte.

§. 105. **Schwerpunkt.** Die Gewichte von den Theilen eines schweren Körpers bilden ein System von Parallelkräften, dessen Mittelkraft das Gewicht des ganzen Körpers ist und dessen Mittelpunkt nach den drei Formeln des Paragraphen 98 bestimmt werden kann. Man nennt diesen Mittelpunkt der Schwerkräfte eines Körpers oder einer Körperverbindung den Schwerpunkt (franz. centre de gravité; engl. centre of gravity), auch wohl Mittelpunkt der Masse des Körpers oder der Verbindung von Körpern. Dreht man einen Körper um seinen Schwerpunkt, so hört dieser Punkt nicht auf, Mittelpunkt der Schwere zu sein, denn läßt man die drei Grundebenen, auf die man die Angriffspunkte der einzelnen Gewichte bezieht, mit dem Körper zugleich sich umdrehen, so ändert sich bei dieser Drehung nur die Lage der Kraftrichtungen gegen diese Ebenen, die Abstände der Angriffspunkte von diesen Ebenen hingegen bleiben unverändert. Der Schwerpunkt ist hiernach derjenige Punkt eines Körpers, in welchem das Gewicht desselben als vertical niederziehende Kraft wirkt, der also unterstützt oder festgehalten werden muß, um den Körper in jeder Lage in Ruhe zu erhalten.

§. 106. **Schwerlinie und Schwerebene.** Jede den Schwerpunkt enthaltende gerade Linie heißt Schwerlinie, und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene Schwerebene. Der Schwerpunkt bestimmt sich durch den Durchschnitt zweier Schwerlinien, oder durch den Durchschnitt einer Schwerlinie mit einer Schwerebene, oder durch das Sichkreuzen dreier Schwerebenen.

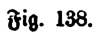
Da sich der Angriffspunkt einer Kraft in der Kraftrichtung beliebig verlegen läßt, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern, so ist ein Körper in einer Lage im Gleichgewichte, wenn irgend ein Punkt in der durch den Schwerpunkt gehenden Verticallinie festgehalten wird.

Hängt man einen Körper M, Fig. 138, an einem Faden CA auf, so erhält man hiernach in der Verlängerung AB dieses Fadens eine Schwerlinie, und hängt man ihn noch auf eine zweite Weise auf, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie DE. Der Durchschnittspunkt S beider Linien ist nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers.

Hängt man den Körper an einer Axe auf, oder bringt man ihn über einer scharfen Kante (Schneide eines Messers) ins Gleichgewicht, so erhält

man in der Verticalebene durch die Axe oder scharfe Kante eine Schwerebene u. s. w.

Empirische Bestimmungen des Schwerpunktes, wie sie eben angedeutet wurden, sind selten anwendbar; meistens hat man aber von den im Folgenden gegebenen geometrischen Regeln Gebrauch zu machen, um den Schwerpunkt mit Sicherheit zu bestimmen.


Fig. 138.



Bei manchen Körpern, z. B. bei Ringen, fällt der Schwerpunkt außerhalb der Masse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte festgehalten werden, so ist es nöthig, diesen durch einen zweiten Körper so mit dem ersten zu verbinden, daß die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen.

Schwerpunktsbestimmung. Sind x_1, x_2, x_3 u. s. w. die Abstände §. 107.
der Theile eines schweren Körpers von der einen Grundebene, y_1, y_2, $y_3 \ldots$ dieselben von der anderen, und z_1, z_2, $z_3 \ldots$ die von der dritten, sind endlich die Gewichte dieser Theile P_1, P_2, P_3 u. s. w., so hat man nach §. 98 die Abstände des Schwerpunktes dieses Körpers von diesen drei Ebenen:

$$x = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

$$y = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots},$$

$$z = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2 + P_3 z_3 + \cdots}{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots}.$$

Bezeichnet man die Volumina der Körpertheile durch V_1, V_2, V_3 u. s. w., und ihr specifisches Gewicht durch γ_1, γ_2, γ_3 u. s. w., so läßt sich auch setzen:

$$x = \frac{V_1 \gamma_1 x_1 + V_2 \gamma_2 x_2 + \cdots}{V_1 \gamma_1 + V_2 \gamma_2 + \cdots} \text{ u. s. w.}$$

Ist endlich der Körper homogen, haben also alle Theile desselben eine und dieselbe Dichtigkeit oder einerlei specifisches Gewicht γ, so ergiebt sich:

$$x = \frac{(V_1 x_1 + V_2 x_2 + \cdots)\gamma}{(V_1 + V_2 + \cdots)\gamma},$$

oder, indem man den gemeinschaftlichen Factor γ oben und unten hebt:

$$1)\ x = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

$$2)\ y = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

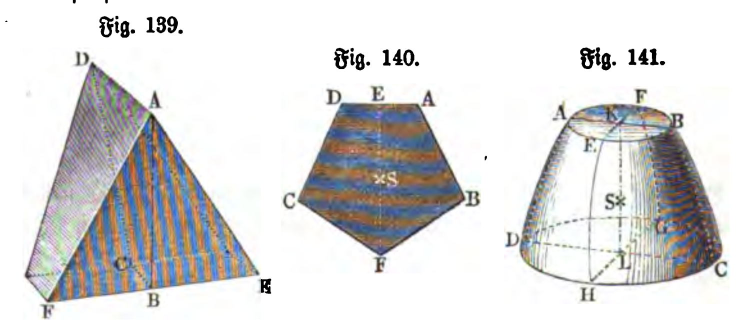
$$3)\ z = \frac{V_1 z_1 + V_2 z_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}.$$

Man kann also statt der Gewichte die Volumina der einzelnen Theile eines Körpers einsetzen, und bringt dadurch die Bestimmung des Schwerpunktes in das Gebiet der reinen Geometrie.

Wenn Körper nach einer oder nach zwei Raumdimensionen wenig ausgedehnt sind, wie z. B. dünne Bleche, feine Drähte u. s. w., so kann man sie als Flächen oder Linien ansehen und nun mit Hülfe der letzteren drei Formeln ihre Schwerpunkte ebenfalls bestimmen, wenn man statt der Volumina V_1, V_2 u. s. w., Flächeninhalte F_1, F_2 u. s. w. oder Längen l_1, l_2 u. s. w. einführt.

§. 108. Bei regelmäßigen Räumen fällt der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammen, z. B. bei dem Würfel, der Kugel, dem gleichseitigen Dreiecke, Kreise u. s. w. Symmetrische Räume haben ihren Schwerpunkt in der Ebene oder Axe der Symmetrie. Die Ebene der Symmetrie *ABCD* theilt einen Körper *ADFE*, Fig. 139, in zwei nur durch rechts und links verschiedene Hälften, es finden daher auf beiden Seiten dieser Ebene gleiche Verhältnisse statt; es sind also auch die Momente auf der einen Seite so groß, wie auf der anderen, und es fällt folglich der Schwerpunkt in diese Ebene selbst.

Fig. 139. Fig. 140. Fig. 141.



Weil ebenso die Axe *EF* der Symmetrie eine ebene Fläche *ABFCD*, Fig. 140, in zwei Theile zerschneidet, wovon der eine Spiegelbild des anderen ist, so sind auch hier die Verhältnisse auf der einen Seite dieselben wie auf der anderen; es sind folglich auch die Momente auf beiden Seiten gleich, und es liegt der Schwerpunkt des Ganzen in dieser Linie selbst.

Endlich ist auch die Symmetrieaxe KL eines Körpers $ABGH$, Fig. 141, Schwerlinie desselben, weil sie aus dem Durchschnitt von zwei Symmetrieebenen $ABCD$ und $EFGH$ hervorgeht. Aus diesem Grunde fällt der Schwerpunkt eines Cylinders, eines Kegels und eines durch Umdrehung einer Fläche, oder durch Abdrehung auf der Drehbank entstandenen Rotationskörpers überhaupt, in die Axe dieser Körper.

Schwerpunkte von Linien. Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in der Mitte derselben. §. 109.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens $AMB = b$, Fig. 142, befindet sich in dem Halbmesser CM, welcher in der Mitte M des Bogens ausläuft, denn dieser Halbmesser ist Axe der Symmetrie dieses Bogens. Um aber die Entfernung $CS = y$ des Schwerpunktes S vom Mittelpunkte zu finden, theile man den Bogen in sehr viele Theile und bestimme die statischen Momente derselben in Beziehung auf eine durch den Mittelpunkt C und mit der Sehne $AB = s$ parallel gehende Axe $X\overline{X}$. Ist PQ ein Theil des Bogens und PN dessen Abstand von $X\overline{X}$, so ist das statische Moment dieses Bogentheiles $= PQ \,.\, PN$. Zieht man nun den Halbmesser $PC = MC = r$ und die Projection QR von PQ parallel zu AB, so erhält man zwei ähnliche Dreiecke PQR und CPN, für welche gilt:

Fig. 142.

$$PQ : QR = CP : PN,$$

und woraus sich das statische Moment eines Bogenelementes

$$PQ \,.\, PN = QR \,.\, CP = QR \,.\, r$$

bestimmt.

Nun ist aber für die statischen Momente aller übrigen Elemente der Halbmesser r ein gemeinschaftlicher Factor und die Summe aller Projectionen QR der Bogenelemente gleich der der Projection des ganzen Bogens entsprechenden Sehne $AB = s$; es folgt daher auch das Moment des ganzen Bogens gleich Sehne s mal Halbmesser r. Setzt man dieses Moment gleich Bogen b mal Abstand y, also $by = sr$, so erhält man:

$$\frac{y}{r} = \frac{s}{b}, \text{ und } y = \frac{sr}{b}.$$

Es verhält sich also der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zum Halbmesser, wie die Sehne zum Bogen.

Ist der Centriwinkel ACB des Bogens b, $= \beta^0$, also der dem Halbmesser 1 entsprechende Bogen $\beta = \frac{\beta^0}{180^0} \cdot \pi$, so hat man $b = \beta r$ und $s = 2r \sin. \frac{\beta}{2}$, weshalb auch folgt:

$$y = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\beta . r}{\beta}.$$

Für den Halbkreis ist $\beta = \pi$ und $\sin. \frac{\beta}{2} = 1$, daher

$$y = \frac{2}{\pi} r = 0{,}6366 \ldots r, \text{ ungefähr } = \frac{7}{11} r.$$

Anmerkung. Der Abstand des Schwerpunktes S des Kreisbogens AB vom Mittelpunkt M desselben ist

$$MS = y_1 = r - y = r\left(1 - \frac{s}{b}\right) = r\left(1 - \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta}\right).$$

Für niedrige Bögen läßt sich

$$\sin. \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3$$

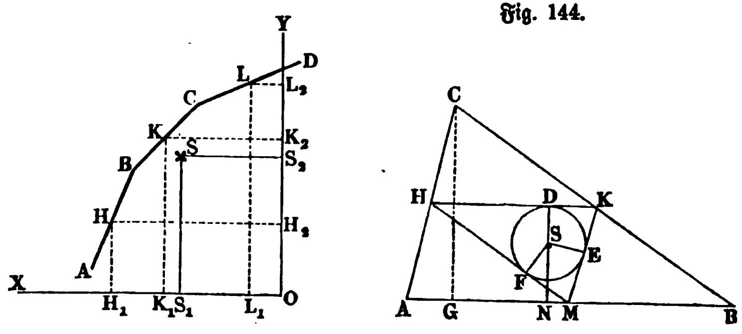
setzen (siehe Ingenieur S. 158), daher ist hier

$$y_1 = \frac{1}{24} r \beta^2 = \frac{1}{24} \frac{b^2}{r} = \frac{1}{3} \frac{b^2}{8r},$$

oder $y_1 = \frac{1}{3} h$, da die Bogenhöhe $h = \frac{b^2}{8r}$ gesetzt werden kann.

§. 110. Um den Schwerpunkt eines Polygons oder einer Linienverbindung $ABCD$, Fig. 143, zu finden, suche man die Abstände der Mittelpunkte H, K, L der Linien $AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$ u. s. w. von zwei

Fig. 143. Fig. 144.



Axen OX und OY, nämlich $HH_1 = y_1$, $HH_2 = x_1$, $KK_1 = y_2$, $KK_2 = x_2$ u. s. w.; die Abstände des gesuchten Schwerpunktes S von eben diesen Axen sind dann:

$$OS_1 = SS_2 = x = \frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots}{l_1 + l_2 + \cdots},$$

$$OS_2 = SS_1 = y = \frac{l_1 y_1 + l_2 y_2 + \cdots}{l_1 + l_2 + \cdots}.$$

Z. B. der Abstand des Schwerpunktes S eines im Triangel gebogenen Drahtes ABC, Fig. 144, von der Grundlinie AB ist:

$$NS = y = \frac{\frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh}{a + b + c} = \frac{a + b}{a + b + c} \cdot \frac{h}{2},$$

wenn die den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten durch a, b, c und die Höhe CG durch h bezeichnet werden.

Verbindet man die Mittelpunkte H, K, M der Dreiecksseiten unter einander, und construirt man in das so erhaltene Dreieck einen Kreis, so fällt dessen Mittelpunkt mit dem Schwerpunkte S zusammen, denn der Abstand dieses Punktes von der einen Seite HK ist:

$$SD = ND - NS = \frac{h}{2} - \frac{a + b}{a + b + c} \cdot \frac{h}{2} = \frac{ch}{2(a + b + c)}$$

$$= \frac{\triangle ABC}{a + b + c} = \frac{\text{Inhalt}}{\text{Umfang}},$$

also constant und daher gleich den Abständen SE und SF von den anderen Seiten.

Schwerpunkte ebener Figuren. Der Schwerpunkt eines Parallelogrammes $ABCD$, Fig. 145, liegt im Durchschnittspunkte S seiner Diagonalen, denn alle Streifen, wie KL, welche durch Legung von zu einer Diagonale BD parallelen Linien sich ergeben, werden durch die andere Diagonale AC halbirt, es ist also jede von den Diagonalen eine Schwerlinie. §. 111.

Fig. 145.

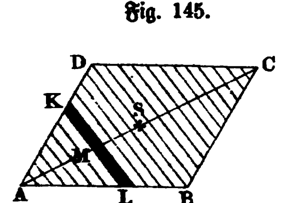
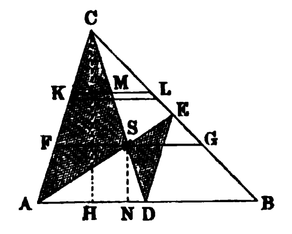


Fig. 146.



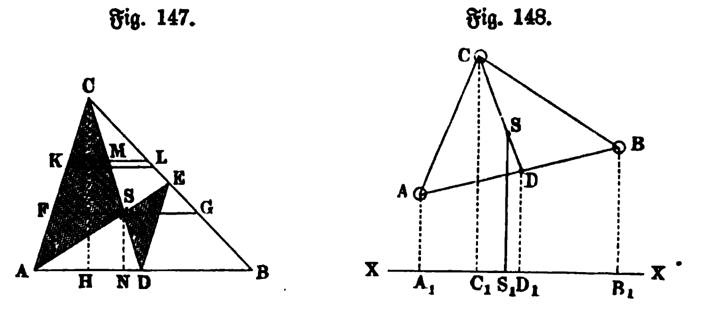
Bei einem Dreiecke ABC, Fig. 146, ist die Linie CD von einer Spitze nach der Mitte D der Gegenseite AB eine Schwerlinie, denn es halbirt dieselbe alle Elemente KL des Dreieckes, welche sich ergeben, wenn man dasselbe durch Parallellinien zu AB zerschneidet. Zieht man von einem zweiten Eckpunkte A nach der Mitte E der Gegenseite BC eine zweite

Schwerlinie, so giebt der Durchschnitt S beider Schwerlinien den Schwerpunkt des ganzen Dreieckes.

Weil $BD = \frac{1}{2} BA$ und $BE = \frac{1}{2} BC$, so ist DE parallel zu AC und gleich $\frac{1}{2} AC$, auch $\triangle DES$ ähnlich dem Dreiecke CAS und endlich $CS = 2\,SD$. Addirt man hierzu noch SD, so folgt $CS + SD$, d. i. $CD = 3\,DS$, und demnach umgekehrt $DS = \frac{1}{3} SD$. Es steht also der Schwerpunkt S um ein Drittel der Linie CD von dem Mittelpunkte D der Grundlinie und um zwei Drittel derselben von der Spitze C ab. Zieht man CH und SN winkelrecht zur Basis, so hat man auch $SN = \frac{1}{3} CH$; es steht also der Schwerpunkt S auch um ein Drittel der Höhe von der Basis des Dreieckes ab.

Auch findet man den Schwerpunkt S des Dreieckes ABC, wenn man $AF = \frac{1}{3} AC$ macht, FG parallel AB zieht und den Mittelpunkt von FG angiebt.

Fig. 147. Fig. 148.



Der Abstand des Schwerpunktes eines Dreieckes ABC, Fig. 148, von einer Axe $X\overline{X}$ ist $SS_1 = DD_1 + \frac{1}{3}(CC_1 - DD_1)$,

aber $DD_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1)$, folglich ist:

$$y = SS_1 = \frac{1}{3} CC_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

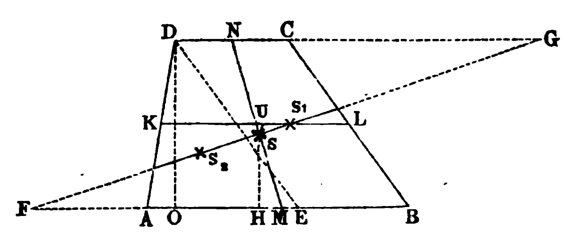
d. i. das arithmetische Mittel aus den Abständen der drei Eckpunkte von $X\overline{X}$.

Da der Abstand des Schwerpunktes von drei gleichen, in den Eckpunkten eines Dreieckes angebrachten Gewichten auf dieselbe Weise bestimmt wird, so fällt der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes mit dem Schwerpunkte von diesen drei gleichen Gewichten zusammen.

§. 112. Die Bestimmung des Schwerpunktes S eines Trapezes $ABCD$, Fig. 149, läßt sich auf folgende Weise bewerkstelligen. Die gerade Linie MN, welche die Mittelpunkte der beiden Grundlinien AB und CD mit einander verbindet, ist Schwerlinie des Trapezes, denn viele gerade Linien, parallel zu den Grundlinien gezogen, zerlegen das Trapez in schmale Streifen, deren Mittel- und Schwerpunkte in MN fallen. Um nun den Schwer-

punkt S vollständig zu bestimmen, hat man nur noch dessen Abstand HS von der einen Basis AB zu finden.

Fig. 149.



Es bezeichne b_1 die eine und b_2 die andere der parallelen Seiten AB und CD des Trapezes, sowie h die Höhe oder den Normalabstand dieser Seiten von einander. Zieht man nun DE parallel zur Seite CB, so erhält man ein Parallelogramm $BCDE$ mit dem Inhalte $b_2 h$ und dem Schwerpunkte S_1, dessen Abstand von AB, $= \frac{h}{2}$, und ein Dreieck ADE mit dem Inhalte $\frac{(b_1 - b_2)h}{2}$ und dem Schwerpunkte S_2, dessen Abstand von AB, $= \frac{h}{3}$ ist.

Das statische Moment des Trapezes hinsichtlich AB ist deshalb

$$Fy = b_2 h \cdot \frac{h}{2} + \frac{(b_1 - b_2)h}{2} \cdot \frac{h}{3} = (b_1 + 2b_2)\frac{h^2}{6},$$

aber der Inhalt des Trapezes ist $F = (b_1 + b_2)\frac{h}{2}$; es folgt daher der Normalabstand seines Schwerpunktes S von der Basis:

$$HS = y = \frac{\frac{1}{6}(b_1 + 2b_2)h^2}{\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h} = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}.$$

Der Abstand dieses Punktes von der Mittellinie $KL = \frac{b_1 + b_2}{2}$ des Trapezes ist:

$$US = \frac{h}{2} - HS = \left(\frac{3(b_1 + b_2) - 2(b_1 + 2b_2)}{b_1 + b_2}\right)\frac{h}{6}, \text{ d. i.}$$

$$y_1 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{6}.$$

Um den Schwerpunkt construirend zu finden, verlängere man die beiden Grundlinien, mache die Verlängerung $CG = b_1$ und die Verlängerung $AF = b_2$, und verbinde die dadurch erhaltenen Endpunkte F und G durch eine Gerade; der Durchschnittspunkt S dieser Linie mit der Mittellinie MN ist der gesuchte Schwerpunkt, denn aus $HS = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}$ folgt auch:

$$MS = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{MN}{3} \text{ und } NS = \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{MN}{3}; \text{ also:}$$

$$\frac{MS}{NS} = \frac{b_1 + 2b_2}{2b_1 + b_2} = \frac{\frac{1}{2}b_1 + b_2}{b_1 + \frac{1}{2}b_2} = \frac{MA + AF}{CG + NC} = \frac{MF}{NG},$$

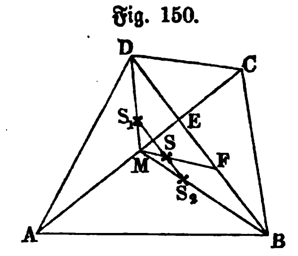
wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MSF und NSG wirklich hervorgeht.

Der Abstand des Schwerpunktes vom Eckpunkt A ist, wenn a die Projection AO der Seite AD auf AB bezeichnet, durch die Formel

$$AH = x = \frac{b_1^2 + b_1 b_2 + b_2^2 + a(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} \text{ bestimmt.}$$

§. 113. Um den Schwerpunkt irgend eines anderen Viereckes $ABCD$, Fig. 150, zu ermitteln, kann man dasselbe durch eine Diagonale AC in zwei Dreiecke zerlegen, nach dem Vorhergehenden die Schwerpunkte S_1 und S_2 derselben angeben und dadurch eine Schwerlinie S_1S_2 bestimmen. Zerlegt man nun noch das Viereck durch die Diagonale BD in zwei andere Dreiecke, und bestimmt deren Schwerpunkte, so stößt man auf eine zweite Schwerlinie, deren Durchschnitt mit der ersteren den Schwerpunkt des ganzen Viereckes giebt.

Fig. 150.



Einfacher geht man aber zu Werke, wenn man die Diagonale AC in M halbirt, das größere Stück BE der zweiten Diagonale über das kleinere trägt, so daß $DF = BE$ wird; zieht man hierauf FM und theilt diese Linie in drei gleiche Theile, so liegt im ersten Theilpunkte S von M aus der Schwerpunkt S, wie sich auf folgende Weise beweisen läßt. Es ist $MS_1 = \frac{1}{3} MD$ und $MS_2 = \frac{1}{3} MB$, folglich S_1S_2 parallel zu BD, aber SS_1 mal $\triangle ACD = SS_2$ mal $\triangle ACB$, oder $SS_1 . DE = SS_2 . BE$, daher $SS_1 : SS_2 = BE : DE$. Nun ist noch $BE = DF$ und $DE = BF$, folglich auch $SS_1 : SS_2 = DF : BF$. Die Gerade MF schneidet demnach die Schwerlinie S_1S_2 in dem Schwerpunkte S des ganzen Viereckes.

§. 114. Kommt es darauf an, den Schwerpunkt S eines Polygons $ABCDE$, Fig. 151, zu finden, so zerlege man dieses Polygon in Dreiecke und bestimme die statischen Momente derselben in Hinsicht auf zwei rechtwinklige Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$.

Sind die Coordinaten $OA_1 = x_1$, $OA_2 = y_1$, $OB_1 = x_2$, $OB_2 = y_2$ u. s. w. der Eckpunkte gegeben, so lassen sich die statischen Momente der einzelnen Dreiecke ABO, BCO, CDO u. s. w. einfach auf folgende Weise ermitteln. Der Inhalt des Dreieckes ABO ist, nach der unten stehenden

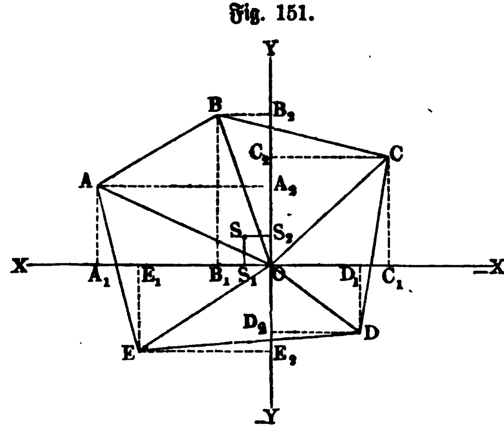
Anmerkung, $= D_1 = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$, der Inhalt des folgenden Dreieckes BCO, $= D_2 = \frac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2)$ u. s. w., die Abstände des Schwerpunktes des Dreieckes ABO von $Y\overline{Y}$, nach §. 111:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + 0}{3} = \frac{x_1 + x_2}{3},$$

von $X\overline{X} = v_1 = \frac{y_1 + y_2}{3}$, die des Schwerpunktes des Dreieckes BCO:

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3}{2} \text{ und } v_2 = \frac{y_2 + y_3}{3} \text{ u. s. w.}$$

Fig. 151.



Multiplicirt man diese Abstände mit den Inhalten der Dreiecke, so erhält man die Momente der letzteren, und setzt man die so erhaltenen Werthe in die Formeln:

$$u = \frac{D_1 u_1 + D_2 u_2 + \cdots}{D_1 + D_2 + \cdots} \text{ und } v = \frac{D_1 v_1 + D_2 v_2 + \cdots}{D_1 + D_2 + \cdots},$$

so erhält man die Abstände $u = OS_1$ und $v = OS_2$ des gesuchten Schwerpunktes S von den Axen $Y\overline{Y}$ und $X\overline{X}$.

Wenn man ein $n$seitiges Polygon auf zweierlei Weise durch eine Diagonale in ein Dreieck und ein $(n-1)$seitiges Polygon zerlegt, und jedes Mal den Schwerpunkt des ersteren mit dem des letzteren verbindet, so erhält man auf diese Weise zwei Schwerlinien des Polygons, welche sich in dem Schwerpunkt desselben schneiden. Durch wiederholte Anwendung dieser Bestimmung kann man den Schwerpunkt eines jeden Polygons auf dem Wege der Construction finden.

Beispiel. Ein Fünfeck $ABCDE$, Fig. 151, ist durch die folgenden Coordinaten seiner Eckpunkte A, B, C u. s. w. gegeben, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes:

Gegebene Coordinaten.		Die zweifachen Inhalte der Dreiecke.	Die dreifachen Coordinaten der Schwerpunkte.		Die sechsfachen statischen Momente.	
x	y		$3\,u_n$	$3\,v_n$	$6\,D_n\,u_n$	$6\,D_n\,v_n$
24	11	$24.21 - 7.11 = 427$	31	32	13237	13664
7	21	$7.15 + 21.16 = 441$	-9	36	-3969	15876
-16	15	$16.\ 9 + 12.15 = 324$	-28	6	-9072	1944
-12	-9	$12.12 + 18.\ 9 = 306$	$+6$	-21	1836	-6426
18	-12	$18.11 + 24.12 = 486$	$+42$	-1	20412	-486
		Summe 1984	—	—	22444	24572

Der Abstand des Schwerpunktes von der Axe $Y\overline{Y}$ ist nun:

$$SS_2 = u = \frac{1}{3} \cdot \frac{22444}{1984} = 3{,}771$$

und von der Axe $X\overline{X}$:

$$SS_1 = v = \frac{1}{3} \cdot \frac{24572}{1984} = 4{,}128.$$

Anmerkung. Sind $CA_1 = x_1$, $CB_1 = x_2$, $CA_2 = y_1$ und $CB_2 = y_2$ die Coordinaten von zwei Eckpunkten eines Dreieckes ABC, Fig. 152, dessen dritter Eckpunkt C mit dem Anfangspunkte des Coordinatensystemes zusammenfällt, so hat man den Inhalt dieses Dreiecks:

Fig. 152.

$D =$ Trapez ABB_1A_1 + Dreieck CBB_1 — Dreieck CAA_1

$$= \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)(x_1 - x_2) + \frac{x_2 y_2}{2} - \frac{x_1 y_1}{2}$$

$$= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Es ist also der Inhalt dieses Dreieckes die Differenz von zwei anderen Dreiecken CB_2A_1 und CA_2B_1, und es ist die eine Coordinate eines Punktes Grundlinie des einen und die andere Coordinate Höhe des anderen Dreieckes, ebenso die eine Coordinate des anderen Punktes Höhe des einen und die andere Coordinate Grundlinie des anderen Dreieckes.

§. 115. Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes ACB, Fig. 153, fällt mit dem Schwerpunkte S eines Kreisbogens A_1B_1 zusammen, der mit dem Ausschnitte einerlei Centriwinkel hat und dessen Halbmesser CA_1 zwei Drittel von dem Halbmesser CA des Ausschnittes ist, denn es

läßt sich der Ausschnitt durch unendlich viele Halbmesser in lauter schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte um zwei Drittel des Halbmessers von dem Centro C abstehen und deshalb in ihrer stetigen Folge den Bogen $A_1 M_1 B_1$ bilden. Es liegt also der Schwerpunkt S des Ausschnittes in dem dieses Flächenstück halbirenden Halbmesser CM und in der Entfernung

Fig. 153.

$$CS = y = \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot \frac{2}{3}\,\overline{CA}$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin.\,{}^1/_2\,\beta}{\beta} \cdot r,$$

insofern r den Halbmesser CA des Sectors und β den den Centriwinkel ACB desselben messenden Bogen bezeichnet.

Für die halbe Kreisfläche ist $\beta = \pi$, $\sin.\,{}^1/_2\,\beta = \sin.\,90^0 = 1$, daher:

$$y = \frac{4}{3\pi}\,r = 0{,}4244\,r \text{ oder ungefähr } \frac{14}{33}\,r.$$

Für einen Quadranten folgt:

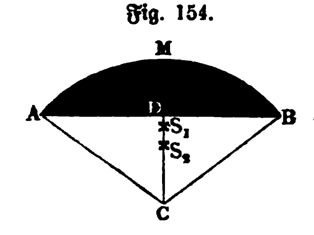
$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{{}^1/_2}}{{}^1/_2\,\pi}\,r = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\,r = 0{,}6002\,r$$

und für einen Sextanten:

$$y = \frac{4}{3} \cdot \frac{{}^1/_2}{{}^1/_3\,\pi}\,r = \frac{2}{\pi}\,r = 0{,}6366\,r.$$

Der Schwerpunkt eines Kreisabschnittes ABM, Fig. 154, ergiebt sich, wenn man das Moment des Abschnittes ABM gleich setzt der Differenz der Momente des Ausschnittes $ACBM$ und des Dreieckes ACB. Ist r der Halbmesser CA, s die Sehne AB, h die Höhe CD des Dreieckes ABC und A der Flächeninhalt des Segmentes ABM, so hat man das Moment des Ausschnittes: §. 116.

Fig. 154.



$$= \text{Ausschnitt mal } \overline{CS_1} = \frac{r\,.\,\text{Bogen}}{2} \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}} \cdot {}^2/_3\,r = {}^1/_3\,s r^2,$$

sowie das Moment des Dreieckes:

$$\frac{AB\,.\,CD}{2} \cdot {}^2/_3\,CD = {}^1/_3\,s h^2,$$

demnach das Moment des Abschnittes A:

$$A \cdot \overline{CS} = Ay = \frac{1}{3} s r^2 - \frac{1}{3} s h^2 = \frac{1}{3} s (r^2 - h^2),$$
$$= \frac{1}{3} s \cdot \frac{s^2}{4} = \frac{s^3}{12}$$

und folglich den gesuchten Abstand: $y = \frac{s^3}{12 A}$.

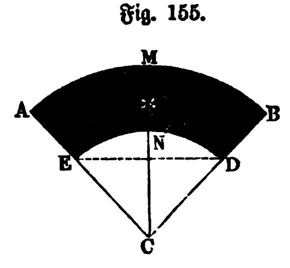
Für den Halbkreis ist $s = 2r$ und $A = \frac{1}{2} \pi r^2$, daher:

$$y = \frac{8 r^3}{12 \cdot \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4 r}{3 \pi},$$

wie oben (§. 115) gefunden wurde.

Auf gleiche Weise bestimmt sich auch der Schwerpunkt S eines Ringstückes $ABDE$, Fig. 155, denn dieses ist die Differenz zweier Sectoren ACB und DCE. Sind die Halbmesser $CA = r_1$ und $CE = r_2$ und die Sehnen $AB = s_1$ und $DE = s_2$, so erhält man die statischen Momente der Sectoren $\frac{s_1 r_1^2}{3}$ und $\frac{s_2 r_2^2}{3}$, daher das statische Moment des Ringstückes:

Fig. 155.



$$M = \frac{s_1 r_1^2 - s_2 r_2^2}{3}, \text{ oder, da } \frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1} \text{ ist,}$$
$$M = \frac{r_1^3 - r_2^3}{3} \cdot \frac{s_1}{r_1}.$$

Der Inhalt des Ringstückes ist $F = \frac{\beta r_1^2}{2} - \frac{\beta r_2^2}{2} = \beta \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{2}\right)$, wofern β den dem Centriwinkel ACB entsprechenden Bogen bezeichnet; es folgt demnach der Schwerpunkt S des Ringstückes durch den Abstand

$$CS = y = \frac{M}{F} = \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{s_1}{r_1 \beta} = \frac{2}{3} \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right) \cdot \frac{\text{Sehne}}{\text{Bogen}}$$
$$= \frac{4}{3} \frac{\sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Auch ist
$$y = \frac{2 \sin. \frac{1}{2}\beta}{\beta} \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{b}{r}\right)^2\right] r,$$

wenn r den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und b die Breite $AE = BD$ des Ringstückes bezeichnet.

Beispiel. Sind die Halbmesser der Stirnfläche eines Gewölbes $r_1 = 5$ Meter und $r_2 = 3\frac{1}{2}$ Meter, und ist der Centriwinkel dieser Fläche $\beta^0 = 130^0$, so folgt der Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Mittelpunkte:

$$y = \frac{4}{3}\,\frac{sin.\,65^0}{arc.\,130^0}\cdot\frac{5^3-3{,}5^3}{5^2-3{,}5^2} = \frac{4\,.\,0{,}9063}{3\,.\,2{,}2689}\cdot\frac{125-42{,}875}{25-12{,}25} = \frac{3{,}6252\,.\,82{,}125}{6{,}8067\,.\,12{,}75}$$
$= 3{,}430$ Meter.

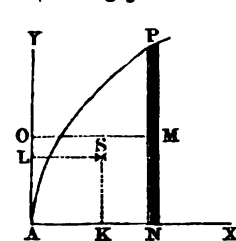
Schwerpunktsbestimmung durch den höheren Calcul. Die Bestimmung des Schwerpunktes ebener Flächen läßt sich mit Hülfe des höheren Calculs wie folgt bewirken. Es sei ANP, Fig. 156, die gegebene Fläche F, $AN = x$ ihre Abscisse und $NP = y$ die Ordinate derselben. Der Inhalt eines Elementes NMP der Fläche ist §. (117).

$$\partial F = y \partial x \text{ (vergl. analyt. Hülfslehren, §. 29),}$$

folglich das Moment desselben in Hinsicht auf die Ordinatenaxe AY:

$$\overline{OM}\,.\,\partial F = \overline{AN}\,.\,\partial F = xy\partial x;$$

Fig. 156.



setzt man daher den Abstand $LS = AK$ des Schwerpunktes S der ganzen Fläche F von der Axe AY, $= u$, so hat man:

$$Fu = \int xy\partial x,$$

und folglich:

$$1)\quad u = \frac{\int xy\partial x}{F} = \frac{\int xy\partial x}{\int y\partial x}.$$

Da der Mittel- oder Schwerpunkt M des Elementes NMP von der Abscissenaxe AX um $NM = \frac{1}{2}y$ absteht, so ist das Moment von ∂F in Hinsicht auf diese Axe AX:

$$\overline{NM}\,.\,\partial F = \tfrac{1}{2}y\partial F = \tfrac{1}{2}y^2\partial x;$$

setzt man nun den Abstand $KS = AL$ des Schwerpunktes S der ganzen Fläche F von der Axe AX, $= v$, so ist

$$Fv = \int \tfrac{1}{2}y^2\partial x, \text{ und daher}$$

$$2)\quad v = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\partial x}{F} = \tfrac{1}{2}\frac{\int y^2\partial x}{\int y\partial x}.$$

Z. B. für die Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ oder $y = \sqrt{p}\,.\,x^{1/2}$ ist, hat man

$$u = \frac{\int \sqrt{p}\,.\,x^{1/2}x\partial x}{\int \sqrt{p}\,.\,x^{1/2}\partial x} = \frac{\sqrt{p}\int x^{3/2}\partial x}{\sqrt{p}\int x^{1/2}\partial x} = \frac{\int x^{3/2}\partial x}{\int x^{1/2}\partial x}$$
$$= \frac{\frac{2}{5}x^{5/2}}{\frac{2}{3}x^{3/2}} = \tfrac{3}{5}\,x,$$

also:

$$LS = AK = \tfrac{3}{5}\,AN,$$

und dagegen

$$v = {}^1/_2 \frac{\int p x \partial x}{\sqrt{p} \int x^{1/2} \partial x} = {}^1/_2 \sqrt{p} \frac{\int x \partial x}{\int x^{1/2} \partial x} = {}^1/_2 \sqrt{p} \frac{{}^1/_2 x^2}{{}^2/_3 x^{3/2}}$$

$$= {}^3/_8 \sqrt{px} = {}^3/_8 y,$$

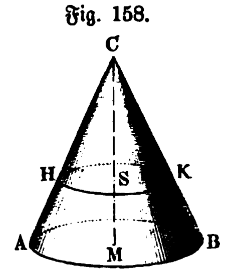
also:

$$KS = AL = {}^3/_8 NP.$$

§. 118. **Schwerpunkte krummer Flächen.** Der Schwerpunkt von der krummen Oberfläche (dem Mantel) eines Cylinders $ABCD$, Fig. 157, liegt in der Mitte S der Axe MN dieses Körpers; denn alle ringförmigen Elemente des Cylindermantels, welche man erhält, wenn man parallel zur Basis Schnitte durch den Körper führt, sind unter sich gleich und haben ihre Schwer- und Mittelpunkte in dieser Axe; es bilden also diese Schwerpunkte eine gleichförmig schwere Linie. Aus denselben Gründen liegt auch der Schwerpunkt von der Umfläche eines Prismas im Mittelpunkte der die Schwerpunkte der Umfänge beider Grundflächen verbindenden Geraden.

Fig. 157.

Fig. 158.



Der Schwerpunkt S des Mantels von einem geraden Kegel ABC, Fig. 158, liegt in der Axe CM des Kegels und ist um ein Drittel dieser Linie von der Basis oder um zwei Drittel von der Spitze C entfernt; denn diese krumme Fläche läßt sich durch gerade Linien, welche man Seiten des Kegels nennt, in unendlich viele, unendlich schmale Dreiecke zerlegen, deren Schwerpunkte einen Kreis HK bilden, welcher um zwei Drittel der Axe von der Spitze C absteht, und dessen Schwer- oder Mittelpunkt S in die Axe CM fällt.

Der Schwerpunkt einer geraden Kegelzone $ABDE$, Fig. 159, steht um

$$CS = y = \frac{r_1 + 2r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{h}{3}$$

von der Grundfläche AB derselben ab, vorausgesetzt, daß h die Höhe CM, sowie r_1 und r_2 die Halbmesser der Grundflächen AB und DE derselben bezeichnen, denn die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 aller trapezförmigen Elemente AE_1, A_1E_2 ... derselben stehen, §. 112 zufolge, um

$$AS_1 = \frac{AA_1 + 2EE_1}{AA_1 + EE_1} \cdot \frac{AE}{3} = \frac{r_1 + 2r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{AE}{3}$$

von dem Umfange der Grundfläche AB ab, bilden folglich in ihrer stetigen Folge einen Kreis, dessen Mittelpunkt der gesuchte Schwerpunkt der Kegelzone ist, und um

$$y = \frac{r_1 + 2r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{CM}{3}$$

von dem Mittelpunkte C der Grundfläche AB absteht.

Fig. 159.

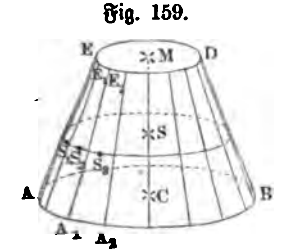
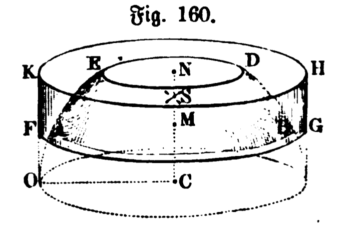


Fig. 160.



Der Schwerpunkt einer Kugelzone $ABDE$, Fig. 160, und ebenso der Schwerpunkt einer Kugelschale (Calotte) liegt im Mittelpunkte S ihrer Höhe MN; denn es hat, den Lehren der Geometrie zufolge, die Zone mit einem Cylindermantel $FGHK$ gleichen Inhalt, dessen Höhe gleich ist der Höhe MN und dessen Halbmesser gleich ist dem Kugelhalbmesser CO der Zone, und es findet diese Gleichheit auch unter den ringförmigen Elementen statt, die man erhält, wenn man durch diese beiden krummen Flächen unendlich viele Ebenen parallel zu den Grundkreisen derselben legt; es fällt diesemnach der Schwerpunkt S der Zone mit dem des Cylindermantels zusammen.

Anmerkung. Der Schwerpunkt von dem Mantel eines schiefen Kegels oder einer schiefen Pyramide steht zwar um ein Drittel der Höhe von der Basis ab, befindet sich aber nicht in der von der Spitze nach dem Schwerpunkte des Umfanges der Basis gehenden Geraden, weil Schnitte parallel zur Basis den Mantel in Ringe zerlegen, die an verschiedenen Stellen ihres Umfanges verschieden breit sind.

Schwerpunkte zusammengesetzter Flächen. Mit Hülfe der Momente lassen sich auch, wie folgt, die Schwerpunkte zusammengesetzter Flächen bestimmen. §. 119.

1) Bezeichnen r_1 und r_2 die Halbmesser der Grundflächen AB und DE einer kegelförmigen Gefäßwand $ABDE$, Fig. 159, während a die Länge einer Seite AE derselben vorstellt, so ist der Inhalt dieser Fläche

$$O = \pi a (r_1 + r_2),$$

und daher das Moment derselben, auf die Grundfläche AB bezogen, wenn man nach dem vorigen Paragraphen

$$y = \frac{r_1 + 2r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{h}{3}$$

einführt,

$$M = Oy = \frac{\pi a h}{3}(r_1 + 2r_2).$$

Durch Hinzufügung der Bodenfläche wird der Inhalt um πr_1^2 größer, während das Moment unverändert bleibt, es ist folglich auch

$$M = \frac{\pi a h}{3}(r_1 + 2r_2) = (O + \pi r_1^2)\, y_1 = \pi\,[a(r_1 + r_2) + r_1^2]\, y_1,$$

und daher der Abstand des Schwerpunktes der ganzen Oberfläche des Gefäßes von der Grundfläche AB,

$$y_1 = \frac{ah}{3} \cdot \frac{r_1 + 2r_2}{a(r_1 + r_2) + r_1^2} = \frac{a^2 \sin. \alpha}{3} \cdot \frac{r_1 + 2r_2}{a(r_1 + r_2) + r_1^2},$$

wenn α den Neigungswinkel der Seitenwand gegen die Bodenfläche bezeichnet.

Hat das Gefäß auch noch einen Deckel, so ist die ganze Oberfläche desselben

$$O + \pi(r_1^2 + r_2^2)$$

und deren Moment in Beziehung auf die Grundfläche AB

$$M = \frac{\pi a h}{3}(r_1 + 2r_2) + \pi r_2^2 h,$$

daher der Abstand ihres Schwerpunktes von der Basis

$$y_2 = \frac{{}^1/_3\, a\,(r_1 + 2r_2) + r_2^2}{a\,(r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2}\, h.$$

Wäre das Gefäß cylindrisch, so hätte man $\sin. \alpha = 1$ und $r_2 = r_1 = r$, sowie $h = a$, daher

$$y = \frac{h}{2},\ y_1 = \frac{h^2}{2h + r} \text{ und } y_2 = \frac{h}{2}.$$

2) Der Schwerpunkt S der Oberfläche O einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 161, deren Höhe $DL = h$ ist, steht von der Grundfläche ABC derselben um die Höhe

$$KS = y = \left(\frac{O - \triangle ABC}{O}\right)\frac{h}{3}$$

ab, weil die Schwerpunkte E, F und G der drei Seitenflächen dieses Körpers um eine und dieselbe Höhe $\frac{h}{3}$ über der gedachten Grundfläche liegen, und folglich das Moment der ganzen Oberfläche:

$$Oy = (\triangle ABD + \triangle ACD + \triangle BCD)\,\frac{h}{3} = (O - \triangle ABC)\,\frac{h}{3}$$

ist.

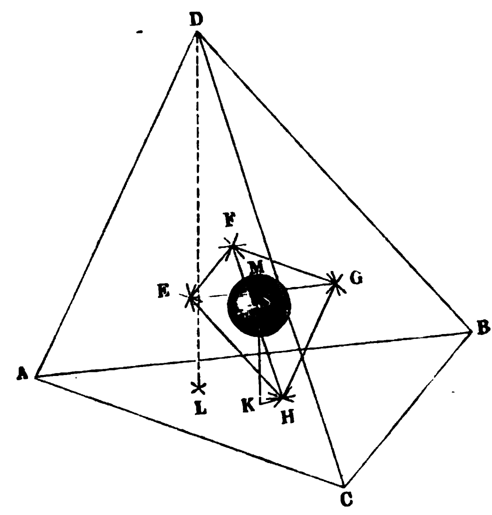
Hieraus folgt nun der Abstand des Schwerpunktes S von der durch E, F und G gelegten Ebene:

$$\overline{MS} = MK - SK = \frac{\triangle ABC}{O} \cdot \frac{h}{3},$$

oder für $\triangle ABC \cdot \frac{h}{3}$ das Volumen V der ganzen Pyramide eingesetzt,

$$\overline{MS} = \frac{V}{O}.$$

Fig. 161.



Da in diesem Ausdrucke die Grundfläche ABC gar nicht mehr vorkommt, so gilt derselbe auch für alle Grundflächen; es steht folglich der Schwerpunkt S der ganzen Oberfläche der Pyramide um eine und dieselbe Höhe $r = \frac{V}{O}$ von den Seitenflächen einer Pyramide $EFGH$ ab, deren Eckpunkte die Schwerpunkte E, F, G und H der Umgrenzungsflächen der gegebenen Pyramide sind, und es ist dieser Punkt zugleich der Mittelpunkt einer Kugel, welche von diesen Flächen umhüllt wird.

Schwerpunkte von Körpern. Der Schwerpunkt eines Prismas AK, Fig. 162 (a. f. S.), ist der Mittelpunkt S derjenigen geraden Linie, welche die Schwerpunkte M und N der beiden Grundflächen AD und GK verbindet; denn das Prisma läßt sich durch Schnitte parallel zur Basis in lauter congruente Scheiben zerlegen, deren Schwerpunkte in MN fallen, und in ihrer stetigen Folge die gleichförmig schwere gerade Linie MN selbst bilden. §. 120.

Aus demselben Grunde befindet sich auch der Schwerpunkt eines Cylinders in der Mitte der Axe desselben.

Der Schwerpunkt einer Pyramide *ADF*, Fig. 163, liegt in der geraden Linie *MF* von der Spitze *F* nach dem Schwerpunkte *M* der Basis;

Fig. 162.

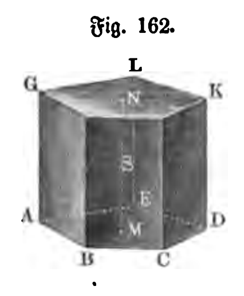
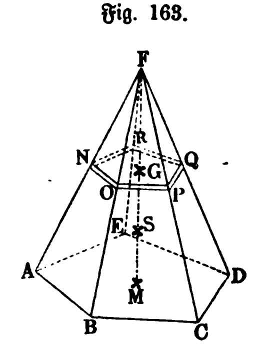


Fig. 163.



denn alle Schnitte, wie *NOPQR*, haben wegen ihrer Aehnlichkeit mit der Basis *ABCDE* ihre Schwerpunkte in dieser Linie.

Ist die Pyramide dreiseitig, wie *ABCD*, Fig. 164, so läßt sich jeder der vier Eckpunkte als Spitze und die gegenüberliegende Fläche als Basis ansehen; es bestimmt sich daher der Schwerpunkt *S* in dem Durchschnitte von zwei aus den Ecken *D* und *A* nach den Schwerpunkten *M* und *N* der gegenüberliegenden Flächen *ABC* und *BCD* gehenden geraden Linien.

Giebt man noch die geraden Linien *EA* und *ED* an, so hat man (nach §. 111) $EM = \frac{1}{3} EA$ und $EN = \frac{1}{3} ED$; es ist daher *MN* parallel zu *AD* und $= \frac{1}{3} AD$, sowie auch das Dreieck *MNS* ähnlich dem Dreiecke *DAS*. Dieser Aehnlichkeit zufolge hat man wieder $MS = \frac{1}{3} DS$, oder $DS = 3\,MS$, also $MD = MS + SD = 4\,MS$, und umgekehrt, $MS = \frac{1}{4} MD$. Der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide liegt also um ein Viertel derjenigen Linie von der Basis ab, welche die Spitze *D* der Pyramide mit dem Schwerpunkte *M* ihrer Basis verbindet.

Giebt man noch die Höhenlinien *DH* und *SG* an und zieht man die Linie *HM*, so erhält man die ähnlichen Dreiecke *DHM* und *SGM*, in welchen nach dem Vorigen $SG = \frac{1}{4} DH$ ist. Man kann also behaupten: der Abstand des Schwerpunktes *S* einer dreiseitigen Pyramide ist von der Basis gleich ein Viertel, und der von der Spitze gleich drei Viertel der Höhe von der ganzen Pyramide entfernt.

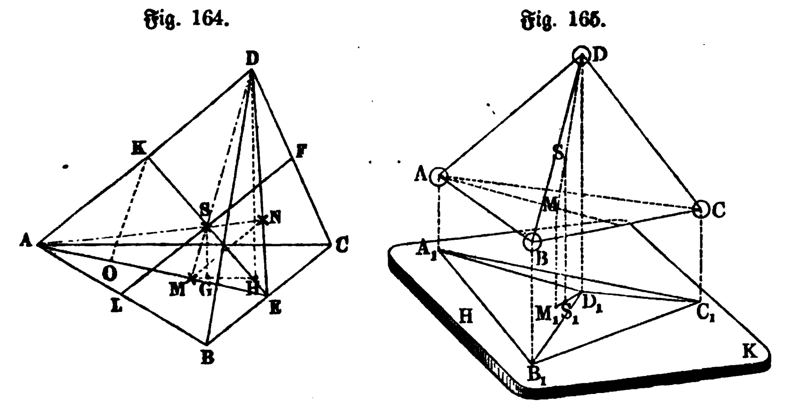
Der Schwerpunkt *S* einer dreiseitigen Pyramide halbirt auch die geraden Linien *EK* und *FL*, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Kanten *AD* und *BC*, sowie *AB* und *CD* derselben mit einander verbindet, denn

zieht man KO parallel zu DM, so schneidet man in O die Linie $AO = OM = ME = \frac{1}{3} AE$ ab, es ist folglich $EO = 2\,EM$, und also auch $EK = 2\,ES$, sowie umgekehrt $ES = \frac{1}{2} EK$.

Da endlich jede Pyramide, und ebenso jeder Kegel, aus lauter gleich hohen dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt ist, so steht auch der Schwerpunkt aller Pyramiden und Kegel um ein Viertel der Höhe von der Grundfläche, sowie um drei Viertel derselben von der Spitze ab.

Man findet also den Schwerpunkt einer Pyramide oder den eines Kegels, wenn man in dem Abstande, ein Viertel der Höhe von der Basis, eine Ebene parallel zu derselben legt und den Schwerpunkt des erhaltenen Querschnittes oder den Durchschnitt desselben mit der die Spitze und den Schwerpunkt der Basis verbindenden Geraden aufsucht.

Kennt man die Abstände AA_1, BB_1 u. s. w. der vier Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide $ABCD$, Fig. 165, von einer Ebene HK, so §. 121.



erhält man den Abstand SS_1 des Schwerpunktes S von dieser Ebene durch den Mittelwerth: $SS_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}$,

wie sich folgendergestalt beweisen läßt.

Der Abstand des Schwerpunktes M der Basis ABC von eben dieser Ebene ist (§. 111):

$$MM_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{3},$$

und der Abstand des Schwerpunktes S der Pyramide läßt sich setzen:

$$SS_1 = MM_1 + \frac{1}{4}(DD_1 - MM_1),$$

wofern DD_1 der Abstand der Spitze ist; es folgt daher aus der Verbindung der beiden letzten Gleichungen:

$$SS_1 = y = {}^3/_4\, MM_1 + {}^1/_4\, DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4}.$$

Fig. 166.

Der Abstand des Schwerpunktes von vier gleichen, in den Eckpunkten der dreiseitigen Pyramide angebrachten Gewichten ist ebenfalls gleich dem arithmetischen Mittel

$$y = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1}{4};$$

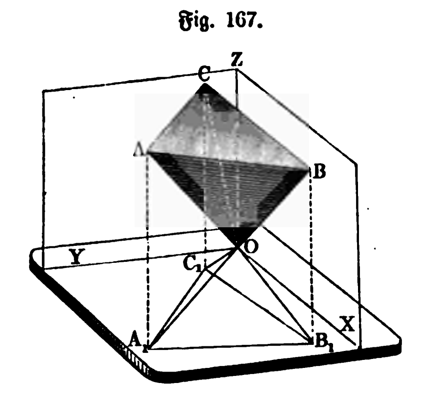
folglich fällt der Schwerpunkt der Pyramide mit dem Schwerpunkte von diesem Gewichtssysteme zusammen.

Anmerkung. Auch die Volumenbestimmung einer dreiseitigen Pyramide aus den Coordinaten ihrer Eckpunkte ist eine sehr einfache. Legen wir durch die Spitze O einer solchen Pyramide $ABCO$, Fig. 167, drei Grundebenen XY, XZ, YZ, und bezeichnen wir die Abstände der Eckpunkte A, B, C von diesen Ebenen durch z_1, z_2, z_3; y_1, y_2, y_3 und x_1, x_2, x_3, so ist das Volumen der Pyramide:

$$V = \pm\, {}^1/_6\, [x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - (x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 + x_3 y_2 z_1)],$$

wie sich ergiebt, wenn man die Pyramide als das Aggregat von vier schief abgeschnittenen Prismen ansieht.

Fig. 167.

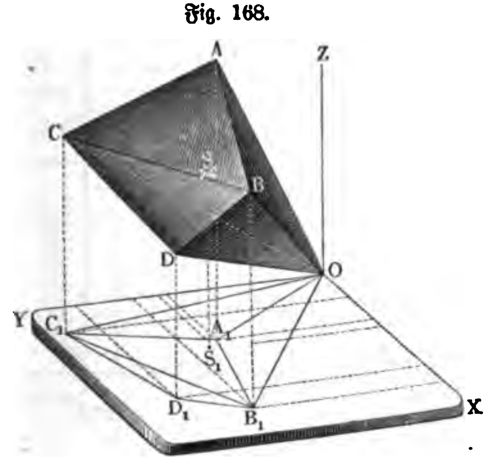


Die Abstände des Schwerpunktes dieser Pyramide von den drei Grundebenen YZ, XZ und XY sind:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4},\ y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4},\ \text{und}\ z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4}.$$

Da sich jedes Polyeder, wie $ABCDO$, Fig. 168, in lauter dreiseitige §. 122.
Pyramiden, wie $ABCO$, $BCDO$, zerlegen läßt, so kann man auch den

Fig. 168.



Schwerpunkt S desselben finden, wenn man die Volumina und statischen Momente der einzelnen Pyramiden berechnet.

Sind die Abstände der Eckpunkte A, B, C u. s. w. von den durch die gemeinschaftliche Spitze O aller Pyramiden gelegten Coordinatenebenen YZ, XZ und XY: x_1, x_2, x_3 u. s. w., y_1, y_2, y_3 u. s. w. und z_1, z_2, z_3 u. s. w., so hat man die Volumina der einzelnen Pyramiden:

$$V_1 = \pm \, {}^1/_6 \, (x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1),$$

$$V_2 = \pm \, {}^1/_6 \, (x_2 y_3 z_4 + x_3 y_4 z_2 + x_4 y_2 z_3 - x_2 y_4 z_3 - x_3 y_2 z_4 - x_4 y_3 z_2)$$

u. s. w. und die Abstände ihrer Schwerpunkte von den gedachten Ebenen:

$$u_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{4}, \; v_1 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{4}, \; w_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{4},$$

$$u_2 = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{4}, \; v_2 = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{4}, \; w_2 = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{4} \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen Werthen berechnen sich endlich die Abstände u, v, w des Schwerpunktes S des ganzen Körpers mittelst der Formeln:

$$u = \frac{V_1 u_1 + V_2 u_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}, \; v = \frac{V_1 v_1 + V_2 v_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots} \text{ und}$$

$$w = \frac{V_1 w_1 + V_2 w_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots}.$$

Beispiel. Ein von sechs Dreiecken begrenzter Körper $ABCDO$, Fig. 168, ist durch folgende Coordinatenwerthe seiner Eckpunkte bestimmt, und man sucht die Coordinaten seines Schwerpunktes.

Gegebene Coordinaten.			Die sechsfachen Inhalte der dreiseitigen Pyramiden $ABCO$ und $BCDO$.	Vierfache Coordinaten der Schwerpunkte.			Vierundzwanzigfache statische Momente.		
x	y	z		$4u_n$	$4v_n$	$4w_n$	$24V_n u_n$	$24V_n v_n$	$24V_n w_n$
20	23	41							
			$6V = \begin{Bmatrix} 20.29.28 \\ 23.30.12 \\ 41.45.40 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 20.40.30 \\ 23.28.45 \\ 41.12.29 \end{Bmatrix} = 31072$	77	92	99	2392544	2858624	3076128
45	29	30							
12	40	28							
			$6V = \begin{Bmatrix} 45.35.28 \\ 29.20.12 \\ 30.38.40 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 45.40.20 \\ 29.28.38 \\ 30.12.35 \end{Bmatrix} = 17204$	95	104	78	1634380	1789216	1341912
38	35	20							
			Summe 48276	. . . . .			4026924	4647840	4418040

Aus den Ergebnissen dieser Rechnung folgen nun die Abstände des Schwerpunktes S des ganzen Körpers von den Ebenen YZ, XZ und XY:

$$u = \frac{1}{4} \cdot \frac{4026924}{48276} = 20{,}853,$$

$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{4647840}{48276} = 24{,}069,$$

$$w = \frac{1}{4} \cdot \frac{4418040}{48276} = 22{,}879.$$

Anmerkung. Man kann natürlich den Schwerpunkt eines Polyeders auch dadurch finden, daß man dasselbe auf zweierlei Weise durch je eine Ebene in zwei Stücke zerlegt, die Schwerpunkte je zweier Stücke durch eine Gerade verbindet und den Durchschnitt von beiden Geraden angiebt. Da beide Geraden Schwerlinien des Polyeders sind, so ist natürlich ihr Durchschnitt auch Schwerpunkt des Körpers. Wenn das Polyeder sehr viele Ecken hat, so ist jedoch diese Bestimmungsweise sehr weitläufig, da man dann die Zerlegung des Körpers in Stücke sehr oft wiederholen muß. Bei dem fünfeckigen Körper in Fig. 168, welcher auf zweierlei Weise in je zwei dreiseitige Pyramiden zu zerlegen ist, liegt der Schwerpunkt im Durchschnitt der Schwerlinien, welche die Schwerpunkte von je zwei dieser Pyramiden mit einander verbinden.

§. 123. **Der Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide $ADQN$**, Fig. 169, liegt in der Linie GM, welche die Schwerpunkte beider (parallelen) Grundflächen verbindet. Um noch den Abstand dieses Punktes von einer der Grundflächen zu bestimmen, hat man die Volumina und Momente der vollständigen Pyramide ADF und der Ergänzungspyramide NQF zu ermitteln. Sind die Inhalte der Grundflächen AD und NQ, $= G_1$ und G_2,

und ist der Normalabstand beider von einander $= h$, so bestimmt sich die Höhe x der Ergänzungspyramide aus der Formel:

Fig. 169.

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{(h + x)^2}{x^2},$$

welche

$$\frac{h}{x} + 1 = \sqrt{\frac{G_1}{G_2}},$$

also

$$x = \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}},$$

sowie

$$h + x = \frac{h\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}}$$

giebt.

Das Moment der ganzen Pyramide in Beziehung auf die Basis G_1 ist nun:

$$\frac{G_1(h + x)}{3} \cdot \frac{h + x}{4} = {}^1/_{12} \cdot \frac{h^2 G_1^2}{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2},$$

sowie das der Ergänzungspyramide:

$$\frac{G_2 x}{3}\left(h + \frac{x}{4}\right) = {}^1/_3 \frac{h^2\sqrt{G_2^3}}{\sqrt{G_1} - \sqrt{G^2}} + {}^1/_{12} \cdot \frac{h^2 G_2^2}{(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^3};$$

es folgt daher das Moment der abgekürzten Pyramide:

$$\frac{h^2}{12(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})^2} \cdot [G_1^2 - 4(\sqrt{G_1 G_2^3} - G_2^2) - G_2^2]$$

$$= \frac{h^2(G_1^2 - 4\,G_2\sqrt{G_1 G_2} + 3\,G_2^2)}{12(G_1 - 2\sqrt{G_1 G_2} + G_2)} = \frac{h^2}{12} \cdot (G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3\,G_2).$$

Nun ist noch der Inhalt der abgekürzten Pyramide:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2)\,\frac{h}{3};$$

daher ergiebt sich endlich der Abstand SS_1 ihres Schwerpunktes S von der Basis:

$$y = \frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3\,G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Der Abstand $S_0 S$ dieses Punktes von der Mittelebene KL, welche die Höhe h der Pyramide halbirt und mit den Grundflächen derselben parallel läuft, ist:

$$y_1 = \frac{h}{4} - y = \frac{[2(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2) - (G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2} + 3G_2)]}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2}\frac{h}{4}$$

$$= \left(\frac{G_1 - G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2}\right)\frac{h}{4}.$$

Sind die Halbmesser der Grundflächen eines abgekürzten Kegels r_1 und r_2, ist also $G_1 = \pi r_1^2$ und $G_2 = \pi r_2^2$, so hat man für diesen

$$y = \frac{r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4} \text{ und}$$

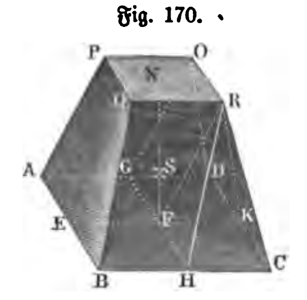
$$y_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2} \cdot \frac{h}{4}.$$

Beispiel. Der Schwerpunkt eines abgekürzten Kegels von der Höhe $h = 20$ Zoll und den Halbmessern $r = 12$ und $r_1 = 8$ Zoll liegt, wie alle Mal, in der die Mittelpunkte beider kreisförmigen Grundflächen verbindenden Linie, und steht von der größeren um

$$y = {}^{20}/_4 \cdot \frac{12^2 + 2.12.8 + 3.8^2}{12^2 + 12.8 + 8^2} = \frac{5.528}{304} = \frac{2640}{304} = 8{,}684 \text{ Zoll ab.}$$

§. 124. Ein Obelisk, d. i. ein von zwei unähnlichen rectangulären Grundflächen und von vier Trapezen umschlossener Körper $ACOQ$, Fig. 170, läßt sich in ein Parallelepiped $AFRP$, in zwei dreiseitige Prismen $EHRQ$ und $GKRO$ und in eine vierseitige Pyramide HKR zerlegen; man kann daher mit Hülfe der Momente dieser Bestandtheile den Schwerpunkt des ganzen Körpers finden.

Fig. 170.



Es läßt sich sehr leicht einsehen, daß die gerade Linie von der Mitte der einen Basis nach der Mitte der anderen, Schwerlinie dieses Körpers ist; es bleibt also nur noch der Abstand des Schwerpunktes von der einen Basis zu bestimmen übrig. Bezeichnen wir die Länge BC und Breite AB der einen Basis durch l_1 und b_1, sowie die Länge QR und Breite PQ der anderen Basis durch l_2 und b_2, und die Höhe des Körpers oder den Abstand beider Grundflächen von einander, durch h. Dann ist der Inhalt des Parallelepipeds $= b_2 l_2 h$, und das Moment desselben $b_2 l_2 h \cdot \frac{h}{2} = {}^1/_2\, b_2 l_2 h^2$, ferner der Inhalt der beiden dreiseitigen Prismen

$$= ([b_1 - b_2]\, l_2 + [l_1 - l_2]\, b_2)\, \frac{h}{2},$$

und deren Moment

$$= ([b_1 - b_2]\, l_2 + [l_1 - l_2]\, b_2)\, \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3},$$

endlich der Inhalt der Pyramide

$$= (b_1 - b_2)\,(l_1 - l_2)\, \frac{h}{3},$$

und deren Moment

$$= (b_1 - b_2)\,(l_1 - l_2)\, \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4}.$$

Hieraus folgt das Volumen des ganzen Körpers:

$$V = (6 b_2 l_2 + 3 b_1 l_2 + 3 l_1 b_2 - 6 b_2 l_2 + 2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 - 2 b_1 l_2 - 2 b_2 l_1) \cdot \frac{h}{6}$$

$$= (2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 + b_1 l_2 + l_1 b_2)\, \frac{h}{6},$$

sowie dessen Moment:

$$Vy = (6 b_2 l_2 + 2 b_1 l_2 + 2 l_1 b_2 - 4 b_2 l_2 + b_1 l_1 + b_2 l_2 - b_1 l_2 - l_1 b_2) \cdot \frac{h^2}{12}$$

$$= (b_1 l_1 + 3 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1)\, \frac{h^2}{12},$$

und es ergiebt sich der Abstand seines Schwerpunktes S von der Grundfläche $b_1 l_1$:

$$y = \frac{b_1 l_1 + 3 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1}{2 b_1 l_1 + 2 b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

Es läßt sich auch (s. die Planimetrie und Stereometrie von C. Koppe):

$$V = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot \frac{l_1 + l_2}{2} \cdot h + \frac{b_1 - b_2}{2} \cdot \frac{l_1 - l_2}{2} \cdot \frac{h}{3}$$

setzen. Der Abstand des Schwerpunktes y_1 von der mittleren Querschnittsebene bestimmt sich durch die Formel:

$$y_1 = \frac{h}{2} - y = \frac{b_1 l_1 - b_2 l_2}{3 (b_1 + b_2)(l_1 + l_2) + (b_1 - b_2)(l_1 - l_2)} \cdot h.$$

Anmerkung. Diese Formel findet auch ihre Anwendung bei Körpern mit elliptischen Grundflächen. Sind die Halbaxen der einen Grundfläche a_1 und b_1 und die der anderen a_2 und b_2, so ist das Volumen eines solchen Körpers (Kübels):

$$V = \frac{\pi h}{6}\, (2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

und der Abstand seines Schwerpunktes von der Basis $\pi a_1 b_1$:

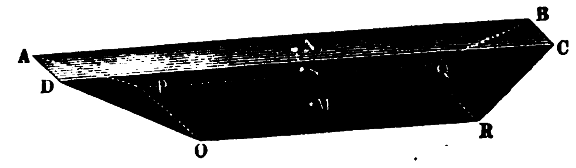
$$y = \frac{a_1 b_1 + 3 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1}{2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1} \cdot \frac{h}{2}.$$

Beispiel. Ein Teichdamm $ACOQ$, Fig. 170, von 20 Fuß Höhe, ist unten 250 Fuß lang und 40 Fuß breit, dagegen oben 400 Fuß lang und 15 Fuß breit; man sucht den Abstand seines Schwerpunktes von der Basis. Hier ist $b_1 = 40$, $l_1 = 250$, $b_2 = 15$, $l_2 = 400$, und $h = 20$, daher der gesuchte Verticalabstand:

$$y = \frac{40 \,.\, 250 + 3 \,.\, 15 \,.\, 400 + 40 \,.\, 400 + 15 \,.\, 250}{2 \,.\, 40 \,.\, 250 + 2 \,.\, 15 \,.\, 400 + 40 \,.\, 400 + 15 \,.\, 250} \cdot {}^{20}/_{2}$$

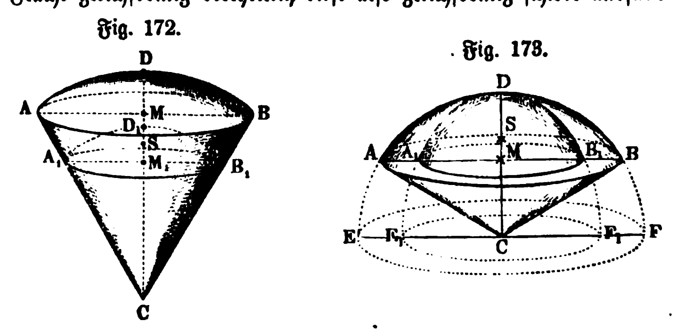
$$= \frac{4775}{5175} \cdot 10 = \frac{1910}{207} = 9{,}227 \text{ Fuß}.$$

Fig. 171.



§. 125. Dreht sich ein Kreisausschnitt ACD, Fig. 172, um seinen Halbmesser CD, so entsteht ein Kugelausschnitt ACB, dessen Schwerpunkt wie folgt bestimmt wird. Man kann sich diesen Körper als einen Inbegriff von unendlich vielen und unendlich dünnen Pyramiden vorstellen, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt C ist und deren Grundflächen die Kugelmütze ADB bilden. Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden stehen um $^3/_4$ des Kugelhalbmessers CD vom Mittelpunkte C ab, es bilden daher dieselben eine zweite Kugelmütze $A_1 D_1 B_1$ vom Halbmesser $CD_1 = {}^3/_4\, CD$. Der Schwerpunkt S dieser krummen Fläche ist aber auch der Schwerpunkt des Kugelausschnittes, weil sich die Gewichte der Elementarpyramiden auf diese Fläche gleichförmig vertheilen, diese also gleichförmig schwer ausfällt.

Fig. 172. Fig. 173.



Setzen wir nun den Halbmesser $CA = CD = r$ und die Höhe DM der äußeren Calotte $= h$, so erhalten wir für die innere Calotte $CD_1 = {}^3/_4\, r$, und $M_1 D_1 = {}^3/_4\, h$, folglich (§. 118) $SD_1 = {}^1/_2\, M_1 D_1 = {}^3/_8\, h$ und den Abstand des Schwerpunktes des Kugelausschnittes vom Mittelpunkte C:

$$CS = CD_1 - SD_1 = {}^3/_4\, r - {}^3/_8\, h = {}^3/_4 \left(r - \frac{h}{2}\right).$$

Für die Halbkugel ist z. B. $h = r$, daher der Abstand ihres Schwerpunktes S vom Mittelpunkte C:

$$CS = {}^3/_4 \cdot \frac{r}{2} = {}^3/_8\, r.$$

Den Schwerpunkt S von einem Kugelsegmente ABD, Fig. 173, erhält man, indem man das Moment dieses Segmentes gleichsetzt der Differenz zwischen dem Momente des Ausschnittes $ADBC$ und dem des Kegels ABC. Bezeichnen wir wieder den Kugelhalbmesser CD durch r und die Höhe DM durch h, so erhalten wir das Moment des Ausschnittes §. 126.

$$= {}^2/_3\, \pi r^2 h \,.\, {}^3/_8 (2r - h) = {}^1/_4\, \pi r^2 h\, (2r - h),$$

und das des Kegels

$$= {}^1/_3\, \pi h (2r - h) \,.\, (r - h) \,.\, {}^3/_4 (r - h) = {}^1/_4\, \pi h\, (2r - h)\, (r - h)^2;$$

daher ist das Moment des Kugelsegmentes

$$Vy = {}^1/_4\, \pi h\, (2r - h)\, (r^2 - [r - h]^2) = {}^1/_4\, \pi h^2\, (2r - h)^2.$$

Der Inhalt dieses Segmentes ist aber

$$V = {}^1/_3\, \pi h^2\, (3r - h);$$

es folgt daher der in Frage stehende Abstand:

$$CS = y = \frac{{}^1/_4\, \pi h^2\, (2r - h)^2}{{}^1/_3\, \pi h^2\, (3r - h)} = {}^3/_4 \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Setzt man wieder $h = r$, so geht das Segment in eine Halbkugel über, und es folgt wie oben $CS = {}^3/_8\, r$.

Diese Formel gilt selbst für das Segment eines Sphäroides A_1DB_1, welches entsteht, wenn sich der elliptische Bogen DA_1 um die große Halbaxe $CD = r$ dreht; denn zerschneidet man beide Segmente durch Ebenen parallel zur Basis AB in lauter dünne Scheiben, so ist das Verhältniß von je zwei derselben unveränderlich $= \frac{\overline{MA_1^2}}{\overline{MA^2}} = \frac{\overline{CE_1^2}}{\overline{CE^2}} = \frac{b^2}{r^2}$, wenn b die kleine Halbaxe der Ellipse bezeichnet. Man muß also sowohl das Volumen, als auch das Moment des Kugelsegmentes durch $\frac{b^2}{r^2}$ multipliciren, um das Volumen und das Moment des Segmentes vom Sphäroid zu erhalten, und verändert dadurch den Quotienten $CS = \frac{\text{Moment}}{\text{Volumen}}$, um Nichts.

Es ist überhaupt

$$CS = y = {}^3/_4\, \frac{(2r - h)^2}{3r - h},$$

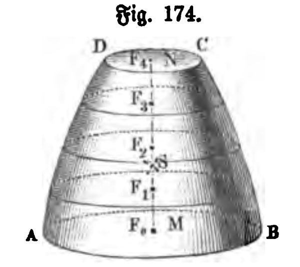
wobei r die Größe derjenigen Halbaxe bezeichnet, um welche sich die Ellipse bei Entstehung des Sphäroides dreht.

Anwendung der Simpson'schen Regel. Um den Schwerpunkt eines ungesetzmäßigen Körpers $ABCD$, Fig. 174 (a. f. S.), zu finden, zerlege man denselben durch gleich viel von einander abstehende Ebenen in dünne Scheiben, bestimme die Inhalte der erhaltenen Durchschnitte und deren §. 127.

Momente in Hinsicht auf die als Basis dienende erste Parallelebene AB, und vereinige endlich beide durch die Simpson'sche Regel.

Sind die Inhalte dieser Durchschnitte F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 und ist die ganze Höhe oder der Abstand MN zwischen den äußersten Parallelebenen, $= h$, so hat man das Volumen des Körpers nach der Simpson'schen Regel (annähernd):

Fig. 174.



$$V = (F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4)\frac{h}{12}.$$

Multiplicirt man noch in dieser Formel jede Fläche durch ihren Abstand von der Basis, so erhält man das Moment des Körpers, nämlich:

$$Vy = (0 \,.\, F_0 + 1 \,.\, 4F_1 + 2 \,.\, 2F_2 + 3 \,.\, 4F_3 + 4F_4)\frac{h}{4} \cdot \frac{h}{12},$$

und es giebt die Division beider Ausdrücke durch einander den gesuchten Abstand des Schwerpunktes S von der Basis AB:

$$MS = y = \frac{(0 \,.\, F_0 + 1 \,.\, 4F_1 + 2 \,.\, 2F_2 + 3 \,.\, 4F_3 + 4 \,.\, F_4)}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + F_4}\frac{h}{4}.$$

Ist die Zahl der plattenförmigen Elemente $= 6$, so hat man:

$$y = \frac{0.F_0 + 1.4F_1 + 2.2F_2 + 3.4F_3 + 4.2F_4 + 5.4F_5 + 6.F_6}{F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + F_6} \cdot \frac{h}{6}.$$

Es ist leicht zu erachten, wie man diese Formel umzuändern hat, wenn die Zahl der Schnitte eine andere ist. Nur fordert diese Regel, daß die Zahl der abgeschnittenen Stücke eine gerade, die Flächenzahl also eine ungerade ist.

In vielen Fällen der Anwendung genügt die Bestimmung eines Abstandes, weil außerdem noch eine Schwerlinie bekannt ist. Die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Körper sind auf der Drehbank erzeugte Rotationskörper, deren Rotationsaxe eine Schwerlinie der Körper ist.

Endlich findet die Formel auch ihre Anwendung bei Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche, in welchem Falle die Querschnitte F_0, F_1, F_2 rc. in Linien übergehen.

Beispiel 1. Für das parabolische Conoid ABC, Fig. 175, welches durch Umdrehung des Parabelstückes ABM um seine Axe AM entstanden ist, erhält man, wenn man nur einen Mittelschnitt DNE durchführt, Folgendes:

Es sei die Höhe $AM = h$, der Halbmesser $BM = r$, $AN = NM = \frac{h}{2}$ und daher der Radius $DN = r\sqrt{1/2}$. Der Inhalt des Schnittes durch A ist $F_0 = 0$, durch N, $F_1 = \pi\,\overline{DN}^2 = \frac{\pi r^2}{2}$ und durch M, $F_2 = \pi r^2$. Hiernach folgt das Volumen dieses Körpers:

$$V = \frac{h}{6}(0 + 4F_1 + F_2) = \frac{h}{6}(2\pi r^2 + \pi r^2) = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2}F_2 h;$$

sowie das Moment desselben:

$$Vy = \frac{h^2}{12}(1 \,.\, 2\pi r^2 + 2 \,.\, \pi r^2) = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2 = \frac{1}{3}F_2 h^2,$$

und daher der Abstand seines Schwerpunktes S vom Scheitel:

$$AS = y = \frac{\frac{1}{3}F_2 h^2}{\frac{1}{2}F_2 h} = \frac{2}{3}h.$$

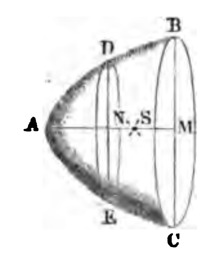


Fig. 175.

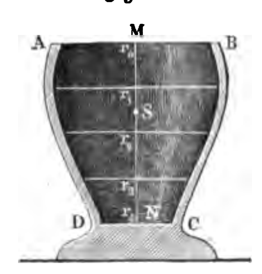


Fig. 176.

Beispiel 2. Das Gefäß $ABCD$, Fig. 176, hat die mittleren halben Weiten $r_0 = 1$ Zoll, $r_1 = 1{,}1$ Zoll, $r_2 = 0{,}9$ Zoll, $r_3 = 0{,}7$ Zoll, $r_4 = 0{,}4$ Zoll bei einer Höhe $MN = 2{,}5$ Zoll; man sucht den Schwerpunkt S seines Fassungsraumes. Die Querschnitte sind $F_0 = 1\,.\,\pi$, $F_1 = 1{,}21\,.\,\pi$, $F_2 = 0{,}81\,.\,\pi$, $F_3 = 0{,}49\,.\,\pi$, $F_4 = 0{,}16\,.\,\pi$, es ist daher der Abstand seines Schwerpunktes von der Horizontalebene AB:

$$MS = \frac{0\,.\,1\pi + 1\,.\,4\,.\,1{,}21\,.\,\pi + 2\,.\,2\,.\,0{,}81\pi + 3\,.\,4\,.\,0{,}49\pi + 4\,.\,0{,}16\,.\,\pi}{1\pi + 4\,.\,1{,}21\pi + 2\,.\,0{,}81\pi + 4\,.\,0{,}49\pi + 0{,}16\,.\,\pi} \cdot \frac{2{,}5}{4}$$

$$= \frac{14{,}60}{9{,}58} \cdot \frac{2{,}5}{4} = \frac{36{,}50}{38{,}32} = 0{,}9502 \text{ Zoll}.$$

Der Fassungsraum ist $V = 9{,}58\pi\,.\,\frac{2{,}5}{12} = 6{,}270$ Cub.-Zoll.

Schwerpunktsbestimmung von Rotationsflächen und Rotationskörpern. Die Schwerpunkte krummer Flächen und krummflächiger Körper von bestimmten Formen lassen sich allgemein nur mit Hülfe der Differenzial- und Integralrechnung bestimmen. In der Praxis kommen vorzüglich die Rotationsflächen und Rotationskörper vor, daher möge im Folgenden auch nur von der Bestimmung der Schwerpunkte dieser Gebilde die Rede sein. Dreht sich die ebene Curve AP, Fig. 177 (a. f. S.), um die Axe AC, so beschreibt sie eine sogenannte Rotationsfläche APP_1, und dreht sich die von der Curve AP und ihren Coordinaten AM und MP begrenzte Fläche APM um eben diese Axe, so wird dadurch ein von der Rotationsfläche APP_1 und von einer Kreisfläche PMP_1 begrenzter Rotationskörper erzeugt. (§. 128.)

Bezeichnen wir die Abscisse AM durch x, die entsprechende Ordinate MP durch y, sowie den zugehörigen Bogen AP durch s, ferner das Abscissenelement $MN = PR$ durch ∂x, das Ordinatenelement QR durch ∂y und das Curvenelement PQ durch ∂s, so haben wir den Inhalt des bei der Rotation von ∂s durchlaufenen gürtelförmigen Elementes PQQ_1P_1 der Rotationsfläche $APP_1 = O$,

Fig. 177.

$$\partial O = 2\pi \,.\, PM \,.\, PQ = 2\pi y \partial s,$$

und dagegen den Inhalt des von diesem Flächenelemente umgürteten Elementes des Rotationskörpers $APP_1 = V$:

$$\partial V = \pi \overline{PM}^2 \,.\, MN = \pi y^2 \partial x.$$

Weil beide Elemente um die Abscisse x von einer durch A gehenden und auf der Axe AC winkelrecht stehenden Ebene abstehen, so ist das Moment von ∂O:

$$x \partial O = 2\pi x y \partial s,$$

und das von ∂V:

$$x \partial V = \pi x y^2 \partial x.$$

Da nun

$$O = \int 2\pi y \partial s = 2\pi \int y \partial s,$$

und

$$V = \int \pi y^2 \partial x = \pi \int y^2 \partial x$$

ist, und dem letzteren zufolge das Moment von O:

$$\int 2\pi x y \partial s = 2\pi \int x y \partial s,$$

und das von V:

$$\int \pi x y^2 \partial x = \pi \int x y^2 \partial x$$

sich ergiebt, so ist demnach der Abstand $AS = y$ des Schwerpunktes S von dem Anfangspunkte A:

1) für die Rotationsfläche:

$$u = \frac{2\pi \int x y \partial s}{2\pi \int y \partial s} = \frac{\int x y \partial s}{\int y \partial s}, \text{ und dagegen}$$

2) für den Rotationskörper:

$$u = \frac{\pi \int x y^2 \partial x}{\pi \int y^2 \partial x} = \frac{\int x y^2 \partial x}{\int y^2 \partial x}.$$

Z. B. für eine Kugelcalotte mit dem Halbmesser $CQ = r$ hat man, da hier

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{CQ}{QN}, \text{ d. i. } \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{r}{y},$$

also $y\partial s = r\partial x$ ist:

$$AS = u = \frac{\int x r \partial x}{\int r \partial x} = \frac{\int x \partial x}{\int \partial x} = \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}AM.$$

(Vergleiche §. 118.)

Für das Kugelsegment ist dagegen, da sich $y^2 = 2rx - x^2$ setzen läßt:

$$AS = u = \frac{\int (2rx - x^2)x\partial x}{\int (2rx - x^2)\partial x} = \frac{\int 2rx^2\partial x - \int x^3 \partial x}{\int 2rx\partial x - \int x^2 \partial x}$$

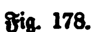
$$= \frac{\frac{2}{3}rx^3 - \frac{1}{4}x^4}{rx^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{(\frac{2}{3}r - \frac{1}{4}x)x}{r - \frac{1}{3}x} = \left(\frac{8r - 3x}{3r - x}\right)\frac{x}{4},$$

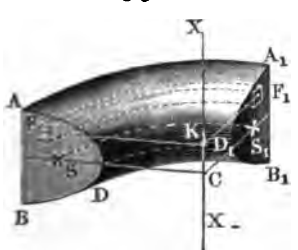
und folglich:

$$CS = r - u = \frac{3}{4}\frac{(2r - x)^2}{3r - x}. \quad \text{(Vergl. §. 126.)}$$

Guldinische Regel. Eine interessante und zuweilen sehr nützliche Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist die Guldinische Regel oder die barycentrische Methode (franz. méthode centrobarique; engl. the properties of Guldinus). Dieser zufolge ist der Inhalt eines Rotationskörpers (oder einer Rotationsfläche) gleich dem Producte aus der Erzeugungsfläche (oder Erzeugungslinie) und dem bei der Erzeugung des Rotationskörpers (oder der Rotationsfläche) durchlaufenen Wege ihres Schwerpunktes. Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun. §. 129.

Dreht sich die ebene Fläche ABD, Fig. 178, um eine Axe $X\overline{X}$, so beschreibt jedes Element F_1, F_2 u. s. w. derselben einen Ring; sind die Entfernungen F_1K_1, F_2K_2 u. s. w. dieser Elemente von der Umdrehungsaxe $X\overline{X}_1 = r_1, r_2$ u. s. w. und ist der Umdrehungswinkel $FK_1F_1 = SCS_1 = \alpha^0$, also der entsprechende Bogen für den Halbmesser 1, $= \alpha$, so sind die bogenförmigen Wege der Elemente $= r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. s. w. Die von den Elementen F_1, F_2 u. s. w. durchlaufenen Räume lassen sich als krummgebogene Prismen von den Grundflächen F_1, F_2 u. s. w. und von den Höhen $r_1\alpha$, $r_2\alpha$ u. s. w. ansehen, haben also die Inhalte $F_1r_1\alpha$, $F_2r_2\alpha$ u. s. w., und es ist sonach das Volumen des ganzen Körpers $ABDD_1B_1A_1$:


Fig. 178.



$$V = F_1 r_1 \alpha + F_2 r_2 \alpha \ldots = (F_1 r_1 + F_2 r_2 + \ldots) . \alpha.$$

Ist $CS = y$, der Abstand des Schwerpunktes S der Erzeugungsfläche von der Umdrehungsaxe, so hat man auch:

$$(F_1 + F_2 + \cdots)\, y = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \cdots,$$

und folglich das **Volumen des ganzen Körpers**:

$$V = (F_1 + F_2 + \cdots)\, y \alpha.$$

Aber $F_1 + F_2 + \cdots$ ist der Inhalt der ganzen Fläche F und $y\alpha$ ist der vom Schwerpunkte S durchlaufene Kreisbogen $SS_1 = w$; es folgt daher $V = Fw$, wie oben behauptet wurde.

Diese Formel gilt auch für die Rotation einer Linie, weil sich dieselbe als eine Fläche von unendlich kleiner Breite ansehen läßt, es ist nämlich $F = lw$, d. h. die **Rotationsfläche** ist ein Product aus der Erzeugungslinie (l) und dem Wege (w) ihres Schwerpunktes.

Beispiel 1. Bei einem halben Ringe mit **elliptischem Querschnitte** $ABED$, Fig. 179, seien die Halbaxen des Querschnittes $CA = a$ und $CB = b$, und sei die Entfernung CM des Mittelpunktes C dieses Schnittes von der Axe $X\overline{X}, = r$. Dann ist die elliptische Erzeugungsfläche $F = \pi a b$, und der Weg ihres Schwerpunktes (C), $w = \pi r$; daher das Volumen dieses halben Ringes: $V = \pi^2 a b r$, und das des ganzen Ringes: $V_1 = 2V = 2\pi^2 a b r$.

Sind die Dimensionen folgende: $a = 5$ Zoll, $b = 3$ Zoll, $r = 6$ Zoll, so ist das Volumen eines **Viertelringes**:

$$\tfrac{1}{2} . \pi^2 . 5 . 3 . 6 = 9{,}8696 . 5 . 9 = 444{,}132 \text{ Cubikzoll.}$$

Fig. 179.

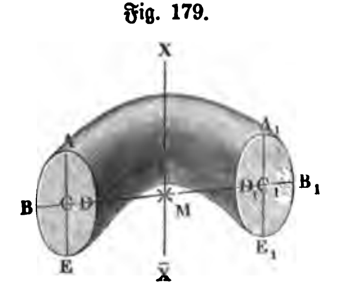
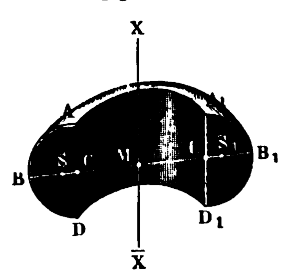


Fig. 180.



Beispiel 2. Für einen Ring mit **halbkreisförmigem Querschnitte** ABD, Fig. 180, ist, wenn $CA = CB = a$, den Halbmesser dieses Querschnittes und $MC = r$, den des hohlen Raumes oder Halses bezeichnet, das Volumen

$$V = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi \left(r + \frac{4a}{3\pi}\right) = \pi a^2 \left(\pi r + \tfrac{4}{3} a\right).$$

Beispiel 3. Dreht sich ein Kreissegment ADB, Fig. 181, um eine durch den Mittelpunkt C desselben gehende Axe CK, so beschreibt es eine Kugel AD_1B mit einer conischen Aushöhlung ABB_1A_1. Ist nun A der Inhalt dieses Segmentes sowie s die Größe der Sehne $AB = A_1B_1$ desselben und β der Winkel $CKB = CKB_1$, welchen die Sehne mit der Umdrehungsaxe CK ein-

schließt, so hat man nach §. 116 den Abstand seines Schwerpunktes S' vom Mittelpunkte C:

$$\overline{CS} = \frac{s^3}{12A},$$

und den von der Axe CK:

$$\overline{MS} = y + \overline{CS} \, . \cos. \beta = \frac{s^3 \cos. \beta}{12A},$$

und daher das Volumen der erzeugten Hohlkugel:

$$V = 2\pi y A = 2\pi \frac{s^3 \cos. \beta}{12} = \frac{\pi s^3 \cos. \beta}{6}.$$

Auch ist $V = \frac{\pi h s^2}{6}$, wenn h die Axenlänge $\overline{LN}$ der Bohrung bezeichnet.

Bei einer axialen cylindrischen Bohrung ist $s = h$, daher $V = \frac{\pi h^3}{6}$, und bei einer Vollkugel $h =$ dem Durchmesser d der Kugel, daher wie bekannt, $V = \frac{\pi d^3}{6}$.

Beispiel 4. Es sei die Oberfläche und der Inhalt der Kuppel ADB, Fig. 182, eines Klostergewölbes zu finden, und zu diesem Zwecke die halbe Weite

Fig. 181.

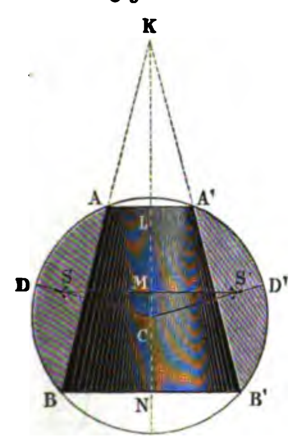
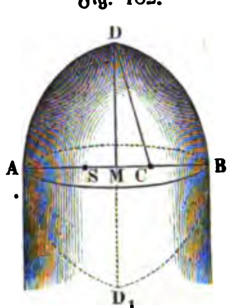


Fig. 182.



$MA = MB = a$ und die Höhe $MD = h$ gegeben. Aus beiden Dimensionen folgt der Halbmesser $CA = CD$ des Erzeugungskreises:

$$r = \frac{a^2 + h^2}{2a},$$

und der Centriwinkel $ACD = \alpha^0$, wenn man setzt:

$$\sin. \alpha = \frac{h}{r}.$$

Der Schwerpunkt S eines Bogens

$$DAD_1 = 2AD$$

ist bestimmt durch die Entfernung:

$$CS = r \cdot \frac{\text{Sehne } MD}{\text{Bogen } AD} = \frac{r\, sin.\, \alpha}{\alpha}, \text{ ferner } CM = r\, cos.\, \alpha,$$

es ist folglich der Abstand des Schwerpunktes S von der Axe MD:

$$MS = \frac{r\, sin.\, \alpha}{\alpha} - r\, cos.\, \alpha = r\left(\frac{sin.\, \alpha}{\alpha} - cos.\, \alpha\right),$$

und der Weg des Schwerpunktes bei Erzeugung der Fläche ADB:

$$w = 2\pi r\left(\frac{sin.\, \alpha}{\alpha} - cos.\, \alpha\right).$$

Die Erzeugungslinie DAD_1 ist $2r\alpha$, folglich ihre Hälfte AD, $= r\alpha$, und die von der letzteren beschriebene Rotationsfläche ADB:

$$O = r\alpha . 2\pi r\left(\frac{sin.\, \alpha}{\alpha} - cos.\, \alpha\right) = 2\pi r^2\,(sin.\, \alpha - \alpha\, cos.\, \alpha) \text{ zu setzen.}$$

Sehr gewöhnlich ist $\alpha^0 = 60^0$, also:

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ sin.\, \alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und } cos.\, \alpha = \tfrac{1}{2};$$

daher folgt dann der gesuchte Inhalt:

$$O = \pi r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 2{,}1515 . r^2.$$

Für das Segment $DAD_1 = A = r^2\,(\alpha - \tfrac{1}{2}\, sin.\, 2\alpha)$ ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte C:

$$= \frac{(2 . MD)^3}{12 A} = \tfrac{2}{3} . \frac{r^3\, sin.\, \alpha^3}{A},$$

daher Abstand von der Axe:

$$MS = CS - CM = \tfrac{2}{3}\frac{r^3\, sin.\, \alpha^3}{A} - r\, cos.\, \alpha,$$

endlich der Weg dieses Schwerpunktes bei einer Umdrehung um MD:

$$w = \frac{2\pi r}{A}\left(\tfrac{2}{3} r^3 sin.\, \alpha^3 - A\, cos.\, \alpha\right) = \frac{2\pi r^3}{A}\left[\tfrac{2}{3} sin.\, \alpha^3 - (\alpha - \tfrac{1}{2} sin.\, 2\alpha)\, cos.\, \alpha\right].$$

Das Volumen des ganzen durch das Segment DAD_1 erzeugten Körpers ergiebt sich, wenn man diesen Weg durch A multiplicirt, und das Volumen der Kuppel wird gefunden, wenn man hiervon die Hälfte nimmt, also:

$$V = \pi r^3\left[\tfrac{2}{3} sin.\, \alpha^3 - (\alpha - \tfrac{1}{2} sin.\, 2\alpha)\, cos.\, \alpha\right] \text{ setzt.}$$

Z. B. für $\alpha^0 = 60^0$, also:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \text{ ist } sin.\, \alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ sin.\, 2\alpha = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ und } cos.\, \alpha = \tfrac{1}{2},$$

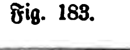
daher:

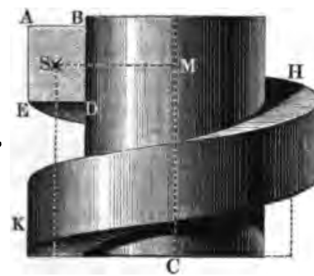
$$V = \pi r^3\left(\tfrac{3}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}3956 . r^3.$$

§. 130. Die Guldini'sche Regel findet auch ihre Anwendung bei solchen Körpern, welche entstehen, wenn sich die Erzeugungsfläche beim Fortrücken ihres Schwerpunktes längs irgend einer Curve stets winkelrecht gegen dieselbe stellt, weil sich jede Curve aus unendlich vielen und unendlich kleinen Kreisbögen zusammensetzen läßt. Es ist auch hier das Volumen des erzeugten Körpers das Product aus der Erzeugungsfläche und dem Wege ihres Schwerpunktes.

Ebenso ist diese Regel noch dann anwendbar, wenn die Erzeugungsfläche bei ihrer Fortbewegung immer gegen die Projection des Weges ihres Schwerpunktes auf irgend eine Ebene, rechtwinkelig gerichtet bleibt. Es ist hier aber die Erzeugungsfläche nicht mit dem Wege, sondern mit der Projection des Weges zu multipliciren.

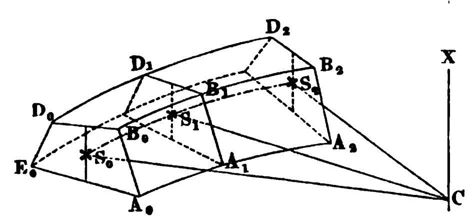
Hiernach wird z. B. das Volumen eines Schraubengewindes AHK, Fig. 183, bestimmt, durch das Product aus dem Querschnitt $ABDE$ desselben und aus dem Umfang des Kreises, dessen Halbmesser der Abstand MS des Schwerpunktes S der Fläche $ABDE$ von der Axe CM der Schraubenspindel ist.


Fig. 183.



In manchen Fällen kann man auch bei Bestimmung körperlicher Räume die Guldini'sche Regel mit der Simpson'schen Regel vereinigt anwenden. Um z. B. den Inhalt des krummen Dammkörpers $A_0 D_0 B_1 D_2 A_2$, Fig. 184, zu finden, hat man nur nöthig, den Krümmungswinkel $S_0 C S_2 = 2\, S_0 C S_1 = 2\, S_1 C S_2 = \beta$, ferner die Querschnitte $\overline{A_0 D_0} = F_0$, $A_1 D_1 = F_1$ und $A_2 D_2 = F_2$, sowie die Abstände $C S_0 = r_0$, $C S_1 = r_1$ und $C S_2 = r_2$ der Schwerpunkte S_0, S_1 und S_2 dieser Querschnitte von der verticalen Centralaxe CX zu kennen. Das Volumen V dieses Körpers bestimmt sich dann durch die Formel:

Fig. 184.



$$V = \beta \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right) = \frac{\beta^0 \pi}{180^0} \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right)$$

$$= 0{,}01745\, \beta^0 \left(\frac{F_0 r_0 + 4 F_1 r_1 + F_2 r_2}{6}\right).$$

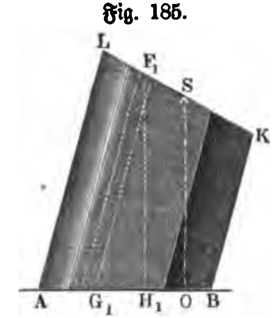
Sind die Halbmesser r_0, r_1 und r_2 einander gleich, oder wenig von einander verschieden, so kann man $r_0 = r_1 = r_2 = r$, und daher

$$V = 0{,}01745\, \beta^0 r \left(\frac{F_0 + 4 F_1 + F_2}{6}\right) \text{ setzen.}$$

§. 131. Volumen schief abgeschnittener Prismen. Eine andere, mit der letzten Regel in naher Verbindung stehende Anwendung der Lehre vom Schwerpunkte ist folgende.

Man kann annehmen, daß jeder schief abgeschnittene, prismatische Körper $ABKL$, Fig. 185, aus lauter unendlich dünnen Prismen wie $\overline{F_1 G_1}$ bestehe. Sind nun G_1, G_2 u. s. w. die Grundflächen und h_1, h_2 u. s. w. die Höhen dieser prismatischen Elemente, so hat man ihre Inhalte:

Fig. 185.



$$G_1 h_1,\ G_2 h_2 \text{ u. s. w.},$$

und sonach das Volumen des ganzen schief abgeschnittenen Prismas:

$$V = G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

Nun verhält sich aber ein Element F_1 des schiefen Schnittes KL zum Elemente G_1 der Basis $AB = G$, wie die ganze schiefe Fläche F zur Basis G; es folgt daher:

$$G_1 = \frac{G}{F} F_1,\ G_2 = \frac{G}{F} F_2 \text{ u. s. w., und}$$

$$V = \frac{G}{F}(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots).$$

Da endlich $F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$ das Moment Fh des ganzen schiefen Schnittes ist, so ergiebt sich:

$$V = \frac{G}{F} \cdot Fh = Gh,$$

d. i. der Inhalt des schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Inhalte eines vollständigen Prismas, welches mit demselben auf einerlei Grundfläche steht und dessen Höhe gleich ist dem Abstande SO des Schwerpunktes S des schiefen Schnittes von der Basis.

1) Bei einem geraden und schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma AEC, Fig. 186, ist, wenn h_1, h_2 und h_3 die Längen der drei Seitenkanten AF, BE und CD desselben sind, der Abstand des Schwerpunktes des schiefen Schnittes von der Basis $ABC = G$ (siehe §. 111):

$$h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3},$$

daher folgt das Volumen dieses Prismas:

$$V = Gh = G\,\frac{(h_1 + h_2 + h_3)}{3}.$$

2) Das Volumen des Keiles ABE, Fig. 187, ist hiernach, wenn die Länge oder Schärfe BC desselben durch b_1, die mit derselben parallel laufende

Seitenlänge $AD = EF$ durch b_2, die Höhe HL der Basis durch h und die Rückenhöhe $HK = AF$ durch a bezeichnet wird:

$$V = Gh = \frac{(b_1 + b_2)h}{2} \cdot \overline{S_0 S} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2} \cdot \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{a}{3}$$

$$= (b_1 + 2b_2)\frac{ah}{6} \text{ (s. §. 112).}$$

Fig. 186.

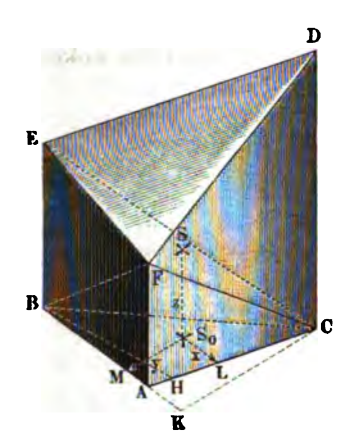


Fig. 187.

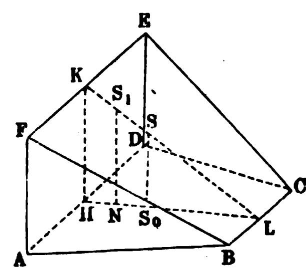
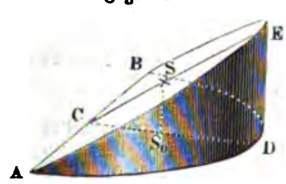


Fig. 188.



3) Für einen Keil ADE, Fig. 188, mit halbkreisförmiger Grundfläche ABD ist, wenn der Halbmesser $CA = CD$ der letzteren durch r und die Höhe DE des Körpers durch h bezeichnet wird:

$$V = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \overline{S_0 S} = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{CS}{CE} \cdot DE = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4h}{3\pi} = {}^2/_3\, r^2 h.$$

Anmerkung 1. Das schiefabgeschnittene Prisma ACE, Fig. 186, besteht:

1) aus der dreiseitigen Pyramide $ABCF$ vom Inhalt $V_1 = {}^1/_3\, G h_1$ und dem Moment $V_1 \frac{h_1}{4} = {}^1/_{12}\, G h_1^2$,

2) aus der dreiseitigen Pyramide $BEFC$ vom Inhalt $V_2 = {}^1/_3\, G h_2$ und dem Moment $V_2 \left(\frac{h_1 + h_2}{4}\right) = {}^1/_{12}\, G h_2 (h_1 + h_2)$,

3) aus der dreiseitigen Pyramide $CDEF$ vom Inhalt $V_3 = \frac{1}{3}\, G h_3$ und dem Moment $V_3 = \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{4}\right) = \frac{1}{12}\, G h_3\, (h_1 + h_2 + h_3)$,

folglich ist das Moment des ganzen Körpers in Hinsicht auf die Basis $ABC = G$

$$M = \frac{1}{12}\, G\, (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3),$$

und der Abstand seines Schwerpunktes S von derselben

$$\overline{S_0 S} = z = \frac{M}{V} = \frac{1}{4} \cdot \frac{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3}{h_1 + h_2 + h_3}.$$

Ebenso sind die Abstände $L S_0 = x$ und $M S_0 = y$ des Schwerpunktes S von den Seitenflächen AD und AE des Prismas, wenn a und b die Abstände $\overline{BH}$ und $\overline{CK}$ der Seitenkanten $\overline{BE}$ und $\overline{CD}$ von eben diesen Seitenflächen bezeichnen, durch die Formeln

$$x = \frac{V_1 \frac{a}{4} + V_2 \frac{2a}{4} + V_3 \frac{a}{4}}{V_1 + V_2 + V_3} = \left(\frac{h_1 + 2h_2 + h_3}{h_1 + h_2 + h_3}\right) \frac{a}{4} \text{ und}$$

$$y = \frac{V_1 \frac{b}{4} + V_2 \frac{b}{4} + V_3 \frac{2b}{4}}{V_1 + V_2 + V_3} = \left(\frac{h_1 + h_2 + 2h_3}{h_1 + h_2 + h_3}\right) \frac{b}{4}$$

zu bestimmen.

Für ein gewöhnliches dreiseitiges Prisma ist z. B. $h_1 = h_2 = h_3 = h$, daher $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$ und $z = \frac{h}{2}$.

Anmerkung 2. Das Moment des Keils ABE, Fig. 187, in Hinsicht auf die vertikale Endfläche AE (den Rücken) ist

$$M = \text{Moment } \frac{a b_1 h}{2} \cdot \frac{a}{3} \text{ eines dreiseitigen Prismas}$$

$$+ \text{ Moment } a\,(b_2 - b_1)\,\frac{h}{3} \cdot \frac{a}{4} \text{ einer vierseitigen Pyramide, und zwar}$$

$$M = \frac{1}{12}\, a^2 h\, (b_1 + b_2),$$

folglich der Horizontalabstand seines Schwerpunktes S_1 von dieser Endfläche

$$HN = x = \frac{M}{V} = \frac{a\,(b_1 + b_2)}{2\,(b_1 + 2\,b_2)}.$$

Ebenso folgt der Vertikalabstand dieses Punktes von der Horizontalebene AC, da hier das Moment

$$M_1 = \frac{a b_1 h^2}{6} + \frac{a h^2\,(b_2 - b_1)}{8} = \frac{a h^2}{24}\,(b_1 + 3\,b_2) \text{ ist,}$$

$$NS_1 = y = \frac{M_1}{V} = \frac{h\,(b_1 + 3\,b_2)}{4\,(b_1 + 2\,b_2)}.$$

Drittes Capitel.

Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper.

Befestigungsarten. Die im ersten Capitel dieses Abschnittes entwickelten Regeln über das Gleichgewicht fester Kräftesysteme finden ihre Anwendung auch auf feste, von Kräften ergriffene Körper, wenn man das Gewicht des Körpers als eine im Schwerpunkte desselben angreifende und vertical abwärts wirkende Kraft behandelt. §. 132.

Die durch Kräfte im Gleichgewichte erhaltenen Körper sind entweder frei beweglich, d. h. sie können der Einwirkung der Kräfte folgen, oder sie sind in einem oder mehreren Punkten festgehalten, oder sie werden von anderen Körpern unterstützt.

Wird nur ein Punkt C, Fig. 189, eines festen Körpers AB festgehalten, so kann jeder andere P desselben eine Bewegung annehmen, deren Weg in die Oberfläche KK einer Kugel fällt, die sich aus dem festgehaltenen Punkte mit der Entfernung CP des anderen Punktes, als Halbmesser, beschreiben läßt; hält man hingegen einen Körper in zwei Punkten C und D fest, so sind bei jeder noch möglichen Bewegung die Wege von den übrigen Punkten P, P_1 Kreise, die sich als die Durchschnitte OPQ, $O_1 P_1 Q_1$ .. von je zweien, aus den festgehaltenen Punkten C und D beschriebenen Kugeloberflächen herausstellen. Diese Kreise sind unter sich parallel und winkelrecht auf der geraden Linie, welche die festen Punkte mit einander verbindet. Die Punkte M, M_1 .. der letzten Linie bleiben unbeweglich; es dreht sich also der Körper um diese Linie CD, die man deshalb auch Umdrehungsaxe (franz. axe de rotation; engl. axis of rotation) des Körpers nennt. Die auf dieser Axe winkelrecht stehenden Ebenen, in welchen die verschiedenen Punkte umlaufen, heißen die Um-

Fig. 189.

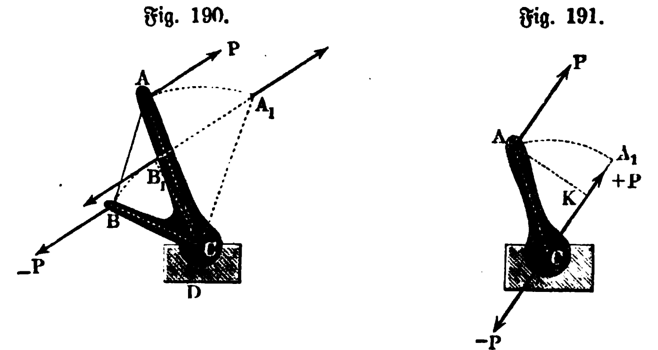
drehungsebenen (franz. plans de rotation; engl. planes of rotation) des Körpers.

Man findet den Halbmesser MP des Kreises OPQ, in welchem sich ein Punkt P bewegt, wenn man von demselben ein Perpendikel gegen die Umdrehungsaxe CD fällt. Je größer dieses Perpendikel ausfällt, desto größer ist auch der Kreis, in welchem der Punkt um die Axe herumgeht, und daher auch die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes.

Werden von einem Körper drei nicht in eine gerade Linie fallende Punkte festgehalten, so kann der Körper in keiner Beziehung eine Bewegung annehmen, weil sich die drei Kugeloberflächen, in welchen sich ein vierter Punkt bewegen müßte, nur in einem Punkte schneiden.

§. 133. **Gleichgewicht unterstützter Körper.** Jede Kraft, welche durch den festgehaltenen Punkt eines Körpers, z. B. durch den Mittelpunkt eines Kugelgelenkes geht, wird von der Stütze des Körpers aufgenommen, und hat daher auf den Gleichgewichtszustand keinen Einfluß. Ebenso, wenn ein Körper in zwei Punkten oder Zapfen unterstützt ist, so wird jede Kraft, deren Richtung die Axe schneidet, welche sich durch diese festgehaltenen Punkte legen läßt, von den beiden Stützpunkten aufgenommen werden, ohne daß eine andere Wirkung auf den Körper übrig bleibt. Auch wird ein Kräftepaar von den Stützpunkten eines Körpers aufgenommen, wenn dessen Ebene die durch diese Punkte bestimmte Drehungsaxe enthält oder mit dieser Linie parallel läuft. Jedes andere Kräftepaar, z. B. $(P, -P)$ in Fig. 190, bringt dagegen eine Drehung des Körpers ACB um die Drehungsaxe C

Fig. 190. Fig. 191.



hervor, wenn es nicht durch ein anderes Kräftepaar (s. §. 97 und 99) im Gleichgewicht erhalten wird. Behält das Kräftepaar bei der Drehung seine Richtung bei, so ist der Hebelarm und folglich auch das Moment desselben veränderlich, und es fallen beide bei einer gewissen Stellung des Körpers sogar Null aus. Wenn bei dem Körper ACB, Fig. 190, welcher in einem Punkte C festgehalten wird, die Kraftrichtung um den Winkel $BAP = \alpha$

von der Linie AB durch beide Angriffspunkte A und B abweicht, so ist eine Drehung von $ACA_1 = BCB_1 = \beta^0 = 180^0 - \alpha$ nöthig, um das Moment des Kräftepaares $(P, -P)$ zu annulliren, und ebenso ist es bei einem in zwei Punkten oder einer Axe festgehaltenen Körper, welcher von einem Kräftepaare ergriffen wird, dessen Ebene winkelrecht zur Axe steht.

Wird ein in einem Punkte C festgehaltener Körper AC, Fig. 191, von einer Kraft P ergriffen, deren Richtung nicht durch C geht, so kann man durch Hinzufügung zweier Gegenkräfte, $+P$ und $-P$, diese Kraft in ein Kräftepaar $(P, -P)$ und in eine in C angreifende und vom Stützpunkte aufzunehmende Kraft $+P$ zerlegen. Ebenso ist es, wenn ein Körper in einer Axe festgehalten wird, und die Kraft in einer Umdrehungsebene wirkt. Hier vertheilt sich aber der Druck $+P$ auf beide Stützpunkte. Ist a die Entfernung CA des Angriffspunktes A der Kraft von der Axe C, und α der Winkel ACA_1, um welchen die Linie CA von der Kraftrichtung abweicht, so hat man den Hebelarm des Kräftepaares $(P, -P)$, $AK = a \sin. \alpha$, und das Moment, mit welchem dasselbe den Körper um C umzudrehen sucht:

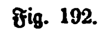
$$M = Pa \sin. \alpha.$$

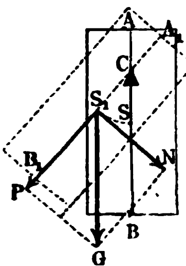
Bleibt während der Drehung die Richtung der Kraft P unverändert, so ändert sich M mit α und ist für $\alpha = 90^0$ ein Maximum (Pa), sowie für $\alpha = 0$ oder 180^0, $=$ Null. Die mechanische Arbeit, welche bei Drehung des Körpers um $ACA_1 = \alpha$, die Kraft P, oder das Kräftepaar $(P, -P)$ verrichtet, ist

$$A = P \,.\, \overline{KA_1} = Pa\,(1 - \cos. \alpha).$$

Stabilität eines aufgehangenen Körpers. Besteht die Kraft eines §. 134.
in einem Punkte oder einer Linie unterstützten Körpers nur im Gewichte desselben, so erfordert das Gleichgewicht dieses Körpers, daß sein Schwerpunkt unterstützt sei, d. i. daß die verticale Schwerlinie desselben durch den festen Punkt oder durch die feste Linie gehe.

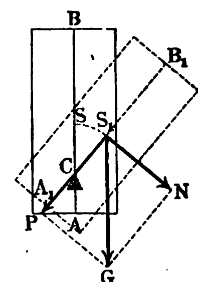
Fällt der Schwerpunkt mit dem festgehaltenen oder sogenannten Aufhängepunkte zusammen, so hat man ein indifferentes Gleichgewicht (franz. équilibre indifférent; engl. indifferent equilibrium), weil der Körper im Gleichgewichte bleibt, man mag ihn um den festen Punkt drehen wie man will. Wird hingegen ein Körper AB, Fig. 192, in einem über dem Schwerpunkte S liegenden Punkte C festgehalten oder unterstützt, so befindet sich der Körper in einem sicheren oder stabilen Gleichgewichte (franz. und engl. stable), weil, wenn man diesen Körper in eine andere Lage bringt, aus dem Gewichte G desselben eine Seitenkraft N hervorgeht,


Fig. 192.



die den Körper in die erste Lage zurückführt, während die andere Seitenkraft P der feste Punkt C aufnimmt. Wird endlich der Körper AB, Fig. 193, in einem Punkte C festgehalten, der unter dem Schwerpunkte S liegt, so ist der Körper in einem unsicheren oder labilen Gleichgewichte (franz. équilibre instable, engl. unstable equilibrium); denn wenn man den Schwerpunkt von der Verticalen durch C entfernt, so geht aus dem Gewichte G des Körpers eine Seitenkraft N hervor, die den Körper in seine erste Lage nicht nur nicht zurückführt, sondern denselben davon noch mehr abzieht und ihn so weit umdreht, bis der Schwerpunkt unter den festen Punkt zu liegen kommt.

Fig. 193.



Dieselben Beziehungen finden auch bei einem in zwei Punkten oder in einer Axe festgehaltenen Körper statt; derselbe ist im indifferenten, stabilen oder labilen Gleichgewichte, je nachdem der Schwerpunkt in, vertical unter oder vertical über der festen Axe befindlich ist.

Wenn der Körper in einem Punkte, oder in einer horizontalen Axe unterstützt wird, so ist das Moment, mit welchem sich der Körper in der stabilen Gleichgewichtslage zurückzudrehen sucht, $M = G a \sin. \alpha$, wobei G das Gewicht, a den Abstand CS_1 des Schwerpunktes S_1 von der Axe C, und α den Drehungswinkel SCS_1 bezeichnet. Die mechanische Arbeit, welche hierbei das Gewicht G verrichtet, ist

$$A = G a (1 - \cos. \alpha).$$

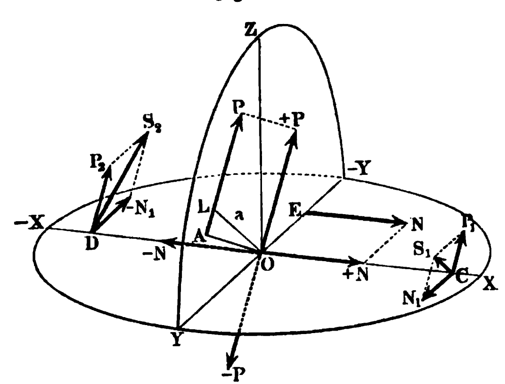
§. 135. **Druck auf die Stützpunkte eines Körpers.** Wenn ein in zwei Punkten C und D oder einer Axe CD festgehaltener Körper CAD, Fig. 194, von einem Kräftesysteme ergriffen wird, so führt man, um die Bedingungen seines Gleichgewichtes zu ermitteln, nach §. 99, das ganze System auf zwei Kräfte zurück, und zwar auf eine Kraft parallel zur Axe und auf eine Kraft, deren Richtung in einer Normalebene zu dieser Linie liegt. Es sei $\overline{EN} = N$ die erstere, mit der durch die festen Punkte C und D gehenden Axe $X\overline{X}$ parallel wirkende Kraft, und $\overline{AP} = P$ die zweite Kraft, welche in einer auf $X\overline{X}$ normalstehenden Ebene $YZ\overline{Y}$ wirkt. Aus der ersteren resultirt eine Kraft $+N$, welche die Axe CD in ihrer eigenen Richtung fortzuschieben sucht, und ein Kräftepaar $(N, -N)$, welches sich als ein anderes Kräftepaar $(N_1, -N_1)$ auf die festen Punkte C und D fortpflanzt, dessen Componenten

$$N_1 = \frac{d}{l} N \text{ und } - N_1 = - \frac{d}{l} N$$

sind, wenn d den Abstand $\overline{OE}$ der Parallelkraft N von der Axe CD und l die Entfernung $\overline{CD}$ der beiden Stützpunkte C und D von einander bezeichnen.



Fig. 194.



Ebenso zerlege man die Kraft P in eine Kraft $+P$ und in ein Kräftepaar $(P, -P)$, sowie die erstere wieder in die Seitenkräfte P_1 und P_2, wovon die eine in C und die andere in D angreift. Bezeichnen wir wieder die Abstände CO und DO des Angriffspunktes O von den beiden Stützpunkten C und D durch l_1 und l_2, so haben wir:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P \text{ und } P_2 = \frac{l_1}{l} P,$$

und es läßt sich nun leicht aus N_1 und P_1 der Mitteldruck S_1 in C, sowie aus $-N_1$ und P_2 der Mitteldruck S_2 in D durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes bestimmen.

Bezeichnen wir den Winkel $YO\,(+P)$, unter welchem die Ebene NOX von der Richtung der Kraft P oder $+P$ geschnitten wird, durch α, so ist auch der Winkel $N_1CP_1 = \alpha$, sowie $\overline{N}_1DP_2 = 180^0 - \alpha$, und es ergeben sich daher die resultirenden Drücke in C und D:

$$S_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2\,N_1P_1 \cos.\alpha} \text{ und}$$
$$S_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2\,N_1P_2 \cos.\alpha}.$$

Bezeichnet endlich a das Loth OL auf die Richtung der Kraft P, so ist das Moment des Umdrehungskräftepaares $(P, -P)$, $M = Pa$.

Im Gleichgewichtszustande muß natürlich $a =$ Null sein, und daher P durch die Axe CD hindurchgehen.

Beispiel. Es sei das ganze Kräftesystem eines in der Axe $\overline{XX}$ festgehaltenen Körpers auf die Normalkraft $P = 36$ Kilogramm und auf die Parallelkraft $N = 20$ Kilogramm zurückgeführt; es sei der Abstand der letzteren Kraft von der Axe OE, $d = 60$ Centimeter, und der Abstand CD zwischen den fest-

gehaltenen Punkten, $l = 160$ Centimeter; man sucht die von der Axe oder von den festen Punkten C und D aufzunehmenden Kräfte, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft P um den Winkel $\alpha = 65$ Grad von der Grundebene XY abweiche und ihr Angriffspunkt O um $\overline{CO} = l_1 = 40$ Centimeter von dem festen Punkte C abstehe.

Die Kraft $N = 20$ Kilogramm ertheilt der Axe in ihrer eigenen Richtung den Schub $N = 20$ Kilogramm, außerdem erzeugt sie noch die Kräfte:

$$N_1 = \frac{d}{l}\, N = \frac{60}{160} \cdot 20 = 7{,}5 \text{ Kilogramm und } -N_1 = -7{,}5 \text{ Kilogramm},$$

welche die festen Punkte C und D aufnehmen. Aus der Kraft P entspringen die Kräfte:

$$P_1 = \frac{l_2}{l}\, P = \frac{160 - 40}{160} \cdot 36 = 27 \text{ Kilogr. und } P_2 = \frac{l_1}{l}\, P = \tfrac{1}{4} \cdot 36 = 9 \text{ Kilogr.},$$

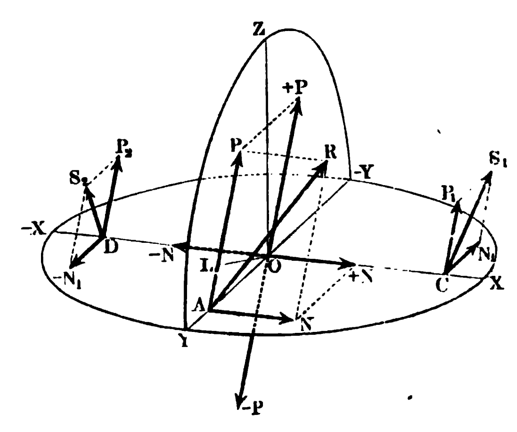
aus welchen endlich durch Vereinigung mit den ersteren Kräften die Mittelkräfte:

$$S_1 = \sqrt{7{,}5^2 + 27^2 + 2 \cdot 7{,}5 \cdot 27 \cdot \cos. 65^0} = \sqrt{56{,}25 + 729 + 171{,}160}$$
$$= \sqrt{956{,}410} = 30{,}926 \text{ Kilogr. und}$$
$$S_2 = \sqrt{7{,}5^2 + 9^2 - 2 \cdot 7{,}5 \cdot 9 \cdot \cos. 65^0} = \sqrt{56{,}25 + 81 - 57{,}054}$$
$$= \sqrt{80{,}196} = 8{,}955 \text{ Kilogr.}$$

hervorgehen.

§. 136. Wird ein in zwei Punkten C und D festgehaltener Körper CAD, Fig. 195, nur von einer Kraft R ergriffen, deren Richtung um den Winkel $PAR = \beta$

Fig. 195.



von der Umdrehungsebene YOZ abweicht, so zerlege man dieselbe in die Seitenkräfte:

$$\overline{AP} = P = R \cos. \beta \text{ und}$$
$$\overline{AN} = N = R \sin. \beta,$$

wovon die erstere in der Umdrehungsebene und die zweite parallel zur Axe wirkt, und behandele diese genau so wie die resultirenden Kräfte P und N

eines ganzen Systemes im vorigen Paragraphen. Es ist hiernach die Kraft, welche die Axe in ihrer Richtung aufzunehmen hat, und weshalb das eine Axenlager ein besonderes Widerlager erhalten muß:

$$N = R \sin. \beta,$$

sowie jeder der Componenten des Kräftepaares (N_1, $-N_1$), welcher in C und D nach entgegengesetzten Richtungen winkelrecht gegen CD wirkt,

$$N_1 = \frac{d}{l} N = \frac{d}{l} R \sin. \beta \text{ und } -N_1 = -\frac{d}{l} R \sin. \beta,$$

wofern wieder l die Entfernung $\overline{CD}$ der beiden Stützpunkte C und D von einander, so wie d den Abstand $\overline{OA}$ des Angriffspunktes A der Kraft R vom Axpunkt O bezeichnet.

Ebenso ist die Kraft, welche in O winkelrecht auf CD wirkt:

$$+ P = R \cos. \beta,$$

und der Component derselben in C:

$$P_1 = \frac{l_2}{l} P = \frac{l_2}{l} R \cos. \beta,$$

sowie der in D:

$$P_2 = \frac{l_1}{l} P = \frac{l_1}{l} R \cos. \beta,$$

wenn wieder l_1 und l_2 die Abstände $\overline{CO}$ und $\overline{DO}$ der Punkte C und D von der Umdrehungsebene $YZ\overline{Y}$ bezeichnen.

Führt man diese Werthe von N_1, P_1 und P_2 in die Formeln:

$$S_1 = \sqrt{N_1^2 + P_1^2 + 2 N_1 P_1 \cos. \alpha} \text{ und}$$
$$S_2 = \sqrt{N_1^2 + P_2^2 - 2 N_1 P_2 \cos. \alpha}$$

für die Normaldrücke in C und D ein, wobei man wieder mit α den Winkel YAP bezeichnet, um welchen die Richtung der Seitenkraft P von der Ebene ACD abweicht, so erhält man:

$$S_1 = \frac{R}{l} \sqrt{(d \sin. \beta)^2 + (l_2 \cos. \beta)^2 + 2 d l_2 \sin. \beta \cos. \beta \cos. \alpha} \text{ und}$$

$$S_2 = \frac{R}{l} \sqrt{(d \sin. \beta)^2 + (l_1 \cos. \beta)^2 - 2 d l_1 \sin. \beta \cos. \beta \cos. \alpha}.$$

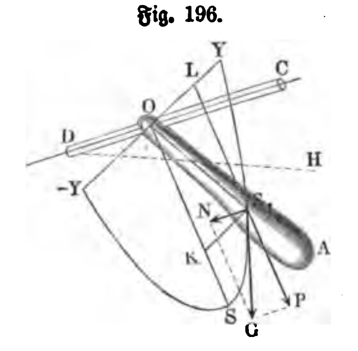
Das noch freibleibende Umdrehungskräftepaar (P, $-P$) hat das Moment

$$P \cdot \overline{OL} = Pa = Rd \sin. \alpha \cos. \beta.$$

Diese Formeln finden ihre Anwendung auf die Stabilität eines um eine geneigte Axe CD drehbaren Körpers OA, Fig. 196 (a. f. S.). Es ist hier R das Gewicht G des Körpers, d der Abstand $OS = OS_1$ seines Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe, α der Elongationswinkel

$SOS_1 = OS_1L$, um welchen der Schwerpunkt S_1 von seiner Gleichgewichtslage S durch Drehung in der auf CD rechtwinkelig stehenden Ebene $YS\overline{Y}$ verrückt ist, und β der Winkel GS_1P, welchen die Umdrehungsebene $YS\overline{Y}$ mit der Verticalen, folglich auch die Drehungsaxe CD mit der Horizontalen DH einschließt.

Fig. 196.



Das **Umdrehungsmoment**, mit welchem der Körper durch sein Gewicht in die Gleichgewichtslage und S_1 nach S zurückgeführt wird, ist

$$Pa = Gd\, sin.\, \alpha\, cos.\, \beta,$$

und die entsprechende **mechanische Arbeit**

$$A = G \,.\, \overline{KS}\, cos.\, \beta = Gd\, cos.\, \beta\, (1 - cos.\, \alpha).$$

§. 137. **Gleichgewicht von Kräften um eine Axe.** Die Mittelkraft P resultirt aus allen denjenigen Seitenkräften, deren Richtungen in einer oder mehreren Normalebenen zur Axe liegen. Nun ist aber in diesem Falle, nach §. 91, das statische Moment Pa der Mittelkraft gleich der Summe $P_1a_1 + P_2a_2 + \cdots$ der statischen Momente der Seitenkräfte, und für den Gleichgewichtszustand des festgehaltenen Körpers, der Hebelarm a der Mittelkraft = Null, weil diese durch die Axe selbst geht; es ist daher auch die Summe

$$P_1a_1 + P_2a_2 + \cdots = 0,$$

d. h. **ein in einer Axe festgehaltener Körper ist im Zustande des Gleichgewichtes, bleibt also ohne Umdrehung, wenn die Summe der statischen Momente seiner Kräfte hinsichtlich dieser Axe = Null, oder die Summe der Momente der nach der einen Umdrehungsrichtung wirkenden Kräfte eben so groß ist als die Summe der Momente von den nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräften.**

Mit Hülfe der letzten Formel läßt sich ein Element des im Gleichgewicht befindlichen Kräftesystemes, entweder eine Kraft, oder ein Hebelarm finden, so wie eine Umdrehungskraft von einem Hebelarme auf einen andern reduciren.

Kommt es darauf an, einen um eine feste Axe drehbaren Körper, dessen Umdrehungsmoment Pa ist, ins Gleichgewicht zu setzen, so hat man nur noch nöthig, entweder eine Umdrehungskraft Q, oder ein Umdrehungskräftepaar mit dem Moment $Qb = Pa$ hinzuzufügen, wobei nur der Unterschied statthat, daß durch Hinzufügung eines Kräftepaares $(Q, -Q)$ der Axen-

druck nicht verändert wird, dagegen durch Anschließen einer Kraft Q, zum Axendruck noch die Kraft $+ Q$ hinzutritt.

Je nachdem man die Kraft Q oder den Hebelarm b derselben giebt, läßt sich

$$b = \frac{Pa}{Q}, \text{ oder } Q = \frac{Pa}{b}$$

berechnen.

Man nennt im letzteren Falle Q die vom Hebelarm a auf den Hebelarm b reducirte Kraft P, und kann hiernach die gegebene Umdrehungskraft P auf jeden beliebigen Hebelarm reduciren, also auch durch eine andere, an jedem beliebigen Hebelarm wirkende Kraft ersetzen, oder ins Gleichgewicht bringen.

Auch kann man durch die Formel $Q = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots}{b}$ ein ganzes System von Umdrehungskräften auf einen und denselben Hebelarm reduciren.

Beispiel. An einem um eine Axe drehbaren Körper wirken die Umdrehungskräfte $P_1 = 50$ Pfund und $P_2 = -35$ Pfund an den Armen $a_1 = 1\frac{1}{4}$ Fuß und $a_2 = 2\frac{1}{2}$ Fuß; man sucht die Kraft P_3, welche an einem Hebelarme $a_3 = 4$ Fuß wirken soll, um Gleichgewicht herzustellen, oder eine Umdrehung um die Axe zu verhindern. Es ist:

$$50 \,.\, 1{,}25 - 35 \,.\, 2{,}5 + 4 P_3 = 0, \text{ daher:}$$

$$P_3 = \frac{87{,}5 - 62{,}5}{4} = 6{,}25 \text{ Pfund.}$$

Hebel. Ein um eine feste Axe drehbarer und von Kräften ergriffener Körper hat den Namen Hebel (franz. levier; engl. lever) erhalten. Denkt man sich denselben gewichtslos, so heißt er ein mathematischer Hebel, außerdem aber ein materieller oder physischer. §. 138.

In der Regel nimmt man an, daß die Kräfte eines Hebels in einer winkelrecht zur Axe stehenden Ebene wirken, und ersetzt die Axe durch einen festen Punkt, den man den Ruhe-, Dreh- oder Stützpunkt (franz. point d'appui; engl. fulcrum, hypomochlion) nennt. Die von diesem Punkte nach den Richtungen der Kräfte gefällten Perpendikel heißen (§. 91) Hebelarme. Sind die Richtungen der Kräfte eines Hebels unter sich parallel, so bilden die Hebelarme eine einzige gerade Linie, und der Hebel heißt dann ein geradliniger oder gerader Hebel (franz. levier droit; engl. straight lever); stoßen aber die Hebelarme unter Winkeln zusammen, so heißt der Hebel ein Winkelhebel (franz. levier courbé; engl. bent lever). Der geradlinige von nur zwei Kräften ergriffene Hebel ist entweder einarmig oder doppelarmig, je nachdem die Angriffspunkte auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten des Stützpunktes liegen. Man unterscheidet auch wohl Hebel der ersten, zweiten und dritten Art von einander, indem man den doppelarmigen Hebel, Hebel der ersten Art, den einarmigen Hebel aber ent-

weder Hebel der zweiten oder Hebel der dritten Art nennt, je nachdem die vertical abwärts wirkende Kraft (Last), oder die vertical aufwärts wirkende Kraft (Kraft) dem Stützpunkte näher liegt.

§. 139. Die Theorie des Gleichgewichtes am Hebel ist im Vorhergehenden vollständig begründet, wir haben daher nur noch eine Specialisirung derselben nöthig.

Bei dem doppelarmigen Hebel ACB, Fig. 197, ist, wenn man den Hebelarm CA der Kraft P durch a und den Hebelarm CB der anderen Kraft Q, die man gewöhnlich Last nennt, mit b bezeichnet, nach der allgemeinen Theorie: $Pa = Qb$, d. i. Moment der Kraft gleich Moment der Last, oder auch: $P : Q = b : a$, d. i. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Hebelarm der letzteren zu dem Hebelarme der ersteren. Der Druck im Stützpunkte ist $R = P + Q$.

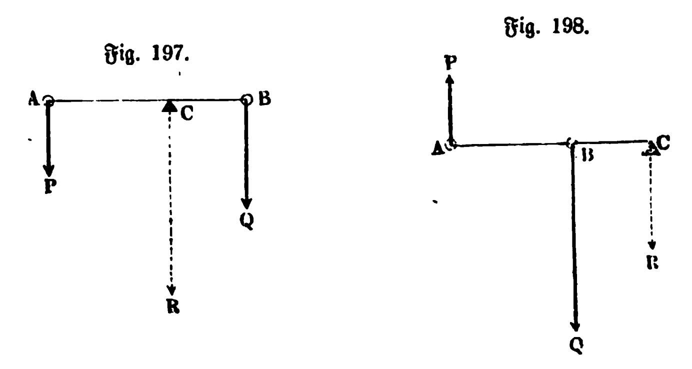


Fig. 197.

Fig. 198.

Bei den einarmigen Hebeln ABC, Fig. 198, und BAC, Fig. 199, findet dieselbe Beziehung zwischen Kraft (P) und Last (Q) statt, es ist hier aber die Kraft der Last entgegengesetzt gerichtet, und deshalb der Druck im Stützpunkte gleich der Differenz beider, und zwar im ersten Falle:

$R = Q - P$, und im zweiten Falle: $R = P - Q$.

Auch beim Winkelhebel ACB mit den Hebelarmen $CN = a$ und $CO = b$, Fig. 200, bleibt $P : Q = b : a$, nur ist hier der Druck im Stützpunkte gleich der Diagonale R desjenigen Parallelogrammes CP_1RQ_1, welches sich aus der Kraft P und Last Q und dem Winkel $P_1CQ_1 = PDQ = \alpha$, unter welchem die Richtungen derselben zusammenstoßen, construiren läßt.

Ist G das Gewicht des Hebels und $CE = e$, Fig. 201, der Abstand des Drehpunktes C von der Verticallinie SG durch den Schwerpunkt desselben, so hat man $Pa \pm Ge = Qb$ zu setzen und das Pluszeichen von G zu nehmen, wenn der Schwerpunkt auf der Seite der Kraft P liegt, das Minuszeichen aber, wenn er auf der Seite der Last Q sich befindet.

Die Theorie des Hebels findet bei vielen Werkzeugen und Maschinen ihre Anwendung. Der Kniehebel $ABCD$, Fig. 202, welcher zuweilen als ein besonderer Hebel aufgeführt wird, ist ein bloßer Winkelhebel. Der um die Axe C drehbare Arm wird an seinem Ende A von einer Kraft P ergriffen und wirkt mittels einer Stange BD auf die in D angreifende Last Q, welche den Arm unter einem spitzen Winkel $ABD = CBE = \alpha$ schneidet. Bezeichnet a die Armlänge CA und b die Armlänge CB, so hat man den Hebelarm von Q:

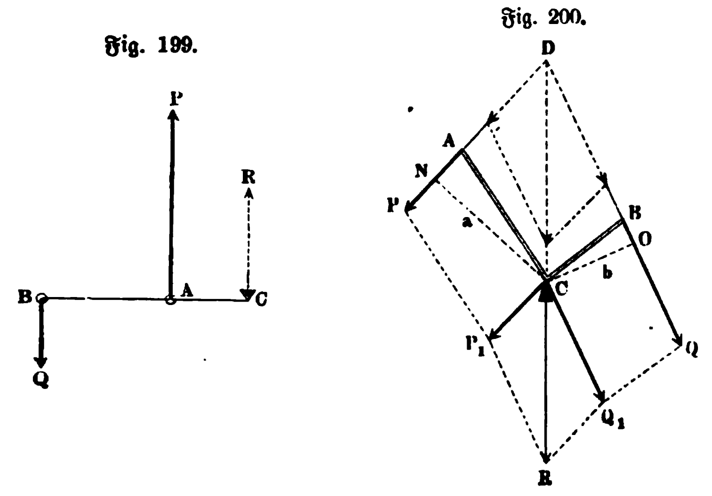


Fig. 199. Fig. 200.

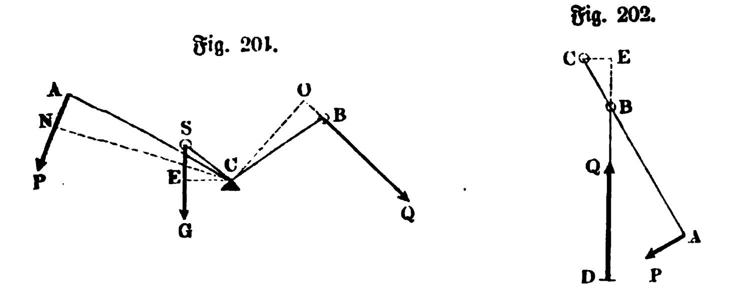


Fig. 201. Fig. 202.

$$\overline{CE} = b \sin. \alpha, \text{ daher:}$$

$$Pa = Qb \sin. \alpha, \text{ oder:}$$

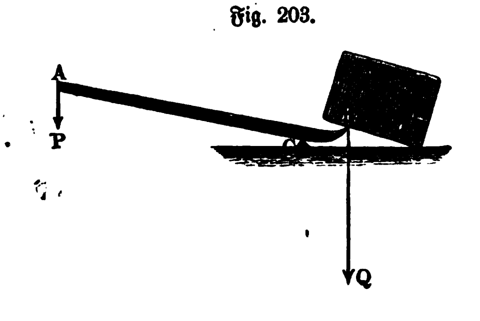
$$P = \frac{b}{a} Q \sin. \alpha, \text{ und umgekehrt:}$$

$$Q = \frac{a}{b} \frac{P}{\sin. \alpha}.$$

Man wendet diesen Hebel oft zum Zusammenpressen von Stoffen an. Die Preßkraft Q wächst hiernach direct wie P und $\frac{a}{b}$, dagegen umgekehrt wie $sin. \alpha$. Durch Verkleinern des Winkels α läßt sich also diese Kraft Q beliebig vergrößern.

Beispiele. 1) Wenn man das Ende A einer Brechstange ACB, Fig. 203, mit einer Kraft P von 60 Pfund niederdrückt, und es ist der Hebelarm CA der Kraft 12 mal so groß als der Hebelarm CB der Last, so wird diese, oder vielmehr die in B ausgeübte Kraft Q, 12 mal so groß als P sein, also

Fig. 203.

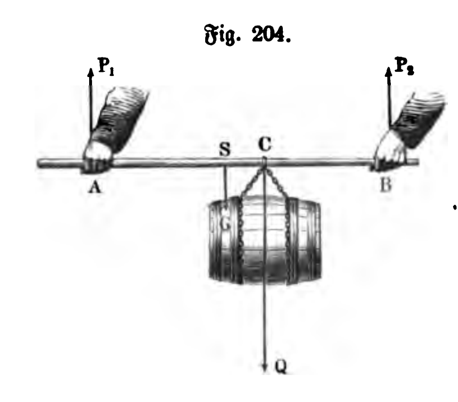


$$Q = 12 . 60 = 720 \text{ Pfund}$$

betragen.

2) Wird eine an einer Stange hängende Last Q, Fig. 204, von zwei Arbeitern fortgetragen, von denen der eine in A und der andere in B angreift, so kann man ermitteln, wie viel Druck jeder der beiden Arbeiter auszuhalten hat. Es sei die Last $Q = 60$ Kilogramm, das Gewicht der Stange, $G = 6$ Kilogramm, die Entfernung AB der beiden Angriffspunkte von einander, $= 240$ Centimeter, die Entfernung der Last von einem dieser Punkte B, $BC = 100$ Centimeter, und die Entfernung des Schwerpunktes S der Stange von eben demselben:

Fig. 204.



$$BS = 140 \text{ Centimeter.}$$

Sehen wir B als Stützpunkt an, so hat die Kraft P_1 in A den Lasten Q und G das Gleichgewicht zu halten; es ist also:

$$P_1 . \overline{BA} = Q . \overline{BC} + G . \overline{BS}, \text{ d. i.:}$$

$$240 \; P_1 = 100 . 60 + 140 . 6 = 6000 + 840 = 6840, \text{ daher:}$$

$$P_1 = \frac{6840}{240} = 28,5 \text{ Kilogramm.}$$

Wird hingegen A als Stützpunkt angesehen, so ist zu setzen:

$$P_2 . \overline{AB} = Q . \overline{AC} + G . \overline{AS},$$

also in Zahlen:

$$240 \; P_2 = 140 . 60 + 100 . 6 = 8400 + 600 = 9000,$$

daher ist die Kraft des zweiten Arbeiters:

$$P_2 = \frac{9000}{240} = 37,5 \text{ Kilogramm;}$$

auch ist, sehr richtig, die Summe der nach oben wirkenden Kräfte

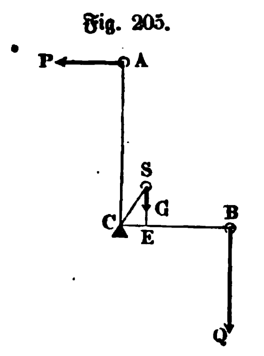
$$P_1 + P_2 = 28{,}5 + 37{,}5 = 66 \text{ Kilogramm}$$

so groß wie die Summe der nach unten wirkenden Kräfte

$$Q + G = 60 + 6 = 66 \text{ Kilogramm}.$$

3) Bei einem 150 Pfund schweren Winkelhebel ACB, Fig. 205, ist die vertical ziehende Last $Q = 650$ Pfund und ihr Hebelarm $CB = 4$ Fuß, dagegen der Hebelarm der Kraft P, $CA = 6$ Fuß und der Hebelarm des Gewichtes, $CE = 1$ Fuß. Wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthige Kraft P und der Druck R im Zapfen? Es ist:

Fig. 205.



$$\overline{CA} \cdot P = \overline{CB} \cdot Q + \overline{CE} \cdot G, \text{ d. i.:}$$

$$6P = 4 \cdot 650 + 1 \cdot 150 = 2750,$$

folglich ist die Kraft:

$$P = \frac{2750}{6} = 458\tfrac{1}{3} \text{ Pfund};$$

der Zapfendruck besteht aus der Verticalkraft $Q + G = 650 + 150 = 800$ Pfund und die Horizontalgewalt P beträgt $458\frac{1}{3}$ Pfund, folglich ist der Zapfendruck:

$$R = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2}$$
$$= \sqrt{(800)^2 + (458\tfrac{1}{3})^2}$$
$$= \sqrt{850070} = 922 \text{ Pfund}.$$

Es können an einem Hebel auch mehr als zwei Kräfte P und Q wirken; auch ist es nicht nöthig, daß die Kräfte eines Hebels in einer und derselben Umdrehungsebene wirken. Sind Q_1, Q_2, Q_3 die Lasten eines Hebels ACB_3, Fig. 206, so wie b_1, b_2, b_3 die Hebelarme CB_1, CB_2, CB_3 derselben, während die Kraft P am Hebelarme $\overline{CA} = a$ wirkt, so hat man §. 140.

$$Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + Q_3 b_3,$$

und wenn der Hebel ein geradliniger ist, den Druck im Stützpunkte:

$$R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Fig. 206.

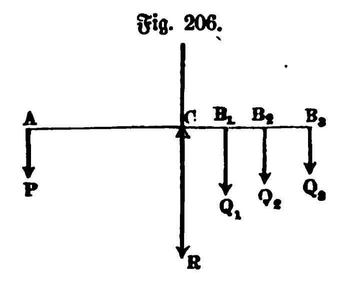
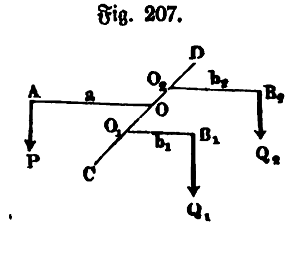


Fig. 207.

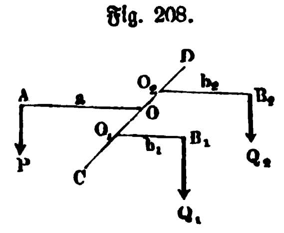


Wirken die Kräfte eines Hebels in verschiedenen Umdrehungsebenen des Hebels $ACDB_1B_2$, Fig. 207, so ändert sich deshalb die Momentenformel

$Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + \cdots$ nicht, nur findet hier eine besondere Vertheilung des gesammten Axendrucks

$$R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Fig. 208.



auf die beiden Stützpunkte oder sogenannten Zapfenlager C und D statt. Bezeichnet wieder l die Länge der Hebelaxe CD oder die Entfernung ihrer Stützpunkte von einander, und sind $l_0, l_1, l_2 \ldots$ die Abstände $CO, CO_1, CO_2 \ldots$ der Umdrehungsebenen der Kräfte vom Stützpunkte C, so hat man für die Zapfendrücke R_2 und R_1 in D und C folgende Formeln:

$$R_2 = \frac{Pl_0 + Q_1 l_1 + Q_2 l_2 + \cdots}{l}, \text{ und}$$

$$R_1 = R - R_2 = \frac{P(l - l_0) + Q_1 (l - l_1) + Q_2 (l - l_2)}{l}.$$

Bei einem Winkelhebel, wo die Kräfte nicht parallel wirken, bleibt zwar der Ausdruck

$$Pa = Q_1 b_1 + Q_2 b_2 + \cdots$$

unverändert, nur wirken dann die auf die Stützpunkte reducirten Axendrücke, wie z. B. $\frac{Pl_0}{l}, \frac{Q_1 l_1}{l}, \frac{Q_2 l_2}{l} \cdots$, in verschiedenen Richtungen und lassen sich daher nicht mehr durch Addition vereinigen, sondern müssen wie die in einem und demselben Punkte angreifenden und in einer Ebene wirkenden Kräfte vereinigt werden (s. §. 81 und §. 82).

Beispiel. Wenn der Hebel in Fig. 208 in den Abständen $CO_1 = l_1 = 12$ Zoll und $CO_2 = l_2 = 24$ Zoll vom Zapfen C die an den Hebelarmen $O_1 B_1 = b_1 = 16$ Zoll und $O_2 B_2 = b_2 = 10$ Zoll wirkenden Lasten $Q_1 = 300$ Pfund und $Q_2 = 480$ Pfund trägt, wie groß ist die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige und an dem Hebelarm $OA = a = 60$ Zoll wirkende Kraft P, und wie groß sind die Zapfendrücke in C und D, vorausgesetzt, daß die Kraft im Abstande $CO = l_0 = 18$ Zoll vom Zapfen C wirkt, und die ganze Axenlänge $CD = l = 32$ Zoll mißt?

Es ist die Größe der erforderlichen Kraft:

$$P = \frac{Q_1 b_1 + Q_2 b_2}{a} = \frac{300 \,.\, 16 + 480 \,.\, 10}{60} = \frac{30 \,.\, 16 + 480}{6} = 80 + 80 = 160 \text{ Pfd.}$$

und es sind die Zapfendrücke

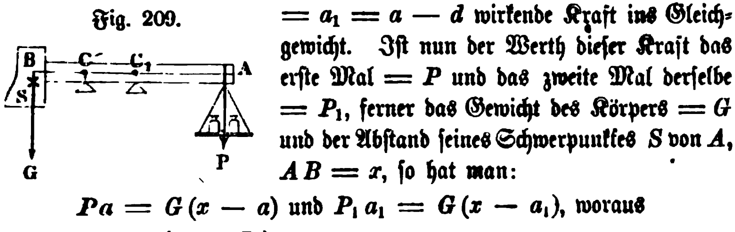
$$R_2 = \frac{160 \,.\, 18 + 300 \,.\, 12 + 480 \,.\, 24}{32} = 562{,}5 \text{ Pfund, und}$$

$$R_1 = R - R_2 = 300 + 480 + 160 - 562{,}5 = 377{,}5 \text{ Pfund.}$$

§. 141. Die Wirkung der Schwere am Hebel läßt sich mit Vortheil auch anwenden, um den Schwerpunkt S und das Gewicht G eines Körpers AB, Fig. 209, zu ermitteln. Man unterstütze den Körper erst in einem Punkte C und dann

in einem Punkte C_1, welcher um $CC_1 = d$ vom ersten absteht, und bringe den Körper beide Mal durch eine in den Abständen $CA = a$ und $C_1A = a_1 = a - d$ wirkende Kraft ins Gleichgewicht. Ist nun der Werth dieser Kraft das erste Mal $= P$ und das zweite Mal derselbe $= P_1$, ferner das Gewicht des Körpers $= G$ und der Abstand seines Schwerpunktes S von A, $AB = x$, so hat man:

Fig. 209.



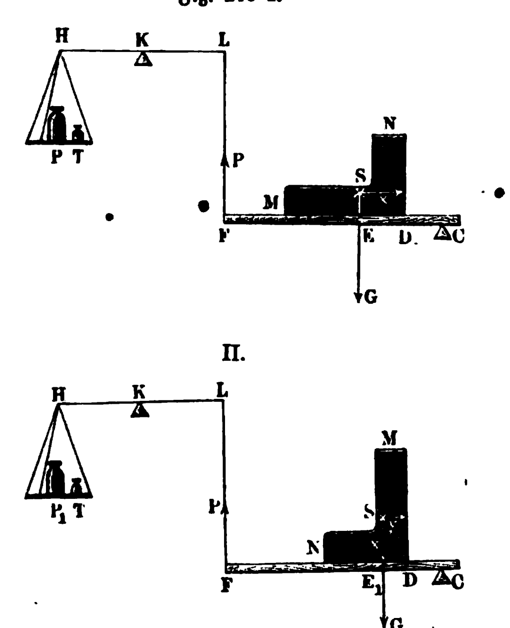
$$Pa = G(x - a) \text{ und } P_1a_1 = G(x - a_1), \text{ woraus}$$

$$x = \frac{(P - P_1)\,aa_1}{Pa - P_1a_1}, \text{ sowie}$$

$$G = \frac{Pa - P_1a_1}{a_1 - a} \text{ folgt.}$$

Bei Anwendung einer gleicharmigen Wage HKL, Fig. 210, I und II, und eines auf einer Schneide C ruhenden einarmigen Hebels CF kann man

Fig. 210 I.



auf demselben Wege das Gewicht G und den Schwerpunkt S eines Körpers MN ebenfalls bestimmen. Man legt denselben auf den Hebel CF, welcher durch ein Seil oder eine Kette FL mit dem Armende L des Wagebalkens

HKL verbunden ist, und bringt ihn mit einem auf die Wagschale aufzulegenden Gewichte *P* ins Gleichgewicht. Bezeichnet *a* den Hebelarm *CF*, *b* den Abstand *CD* (I) eines markirten Punktes *D* des Körpers von dem Stützpunkte *C* und *x* den Horizontalabstand *DE* der verticalen Schwerlinie *SG* von *D*, so läßt sich setzen

$$Pa = G\,(b + x),$$

sowie auch

$$P_1 a = G\,(b_1 + x),$$

wenn zur Herstellung des Gleichgewichts das Gewicht P_1 auf die Wagschale zu legen ist, nachdem man den Körper *MN* um $b_1 - b$ auf seiner Unterlage *CF* verschoben hat.

Aus beiden Gleichungen folgt

$$1) \quad x = \frac{Pb_1 - P_1 b}{P_1 - P} \text{ und}$$

$$2) \quad G = \frac{(P - P_1)\,a}{b - b_1}.$$

Bezeichnet in einer anderen Lage des Körpers *MN* (s. II) *c* den Abstand *CD* des markirten Punktes *D* von der Stütze *C*, sowie *y* den Abstand DE_1 der verticalen Schwerlinie *SG* von *D*, und P_2 die Größe des zur Herstellung des Gleichgewichts aufzulegenden Gewichts, so hat man wieder

$$P_2 a = G\,(c + y), \text{ daher}$$

$$3) \quad y = \frac{P_2 a}{G} - c.$$

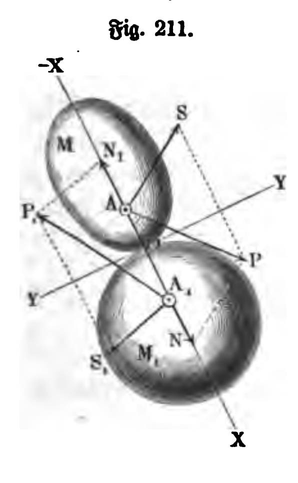
Ist nun der Körper in Beziehung auf die Verticalebene durch *CF* symmetrisch, so bestimmen die Coordinaten *x* und *y* den Schwerpunkt desselben vollständig, außerdem hat man aber bei einer dritten Lage des Körpers auf *CF* auf demselben Wege noch eine dritte Coordinate *z* des Schwerpunktes zu ermitteln.

Um die Gewichte der Wagen, Wagschalen u. s. w. unbeachtet lassen zu können, bringt man die leere Wage vor dem Gebrauche durch ein sogenanntes Tarirgewicht *T* zum Einspielen.

§. 142. **Druck der Körper auf einander.** Das in §. 67 ausgesprochene Erfahrungsgesetz: „Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich," ist die Basis der Bau- und Maschinenmechanik. Es ist an diesem Orte nöthig, die Bedeutung desselben noch näher auseinanderzusetzen. Wirken zwei Körper *M* und M_1, Fig. 211, mit den Kräften *P* und P_1 auf einander, deren Richtungen von der gemeinschaftlichen Normale $X\overline{X}$ zu den in Berührung befindlichen Oberflächentheilen beider Körper abweichen, so tritt stets eine Zerlegung der Kräfte ein; es geht nur diejenige Seitenkraft *N* oder N_1

von einem Körper auf den anderen über, welche die Richtung der Normale hat, die andere Seitenkraft S oder S_1 hingegen bleibt im Körper zurück und muß durch eine andere Kraft oder ein anderes Hinderniß aufgenommen werden, um die Körper im Gleichgewichte zu erhalten. Zwischen den normalen Seitenkräften N und N_1 aber findet, dem angeführten Principe zufolge, vollkommene Gleichheit statt.

Fig. 211.



Weicht die Richtung der Kraft P um den Winkel $NAP = \alpha$ von der Normale AX und um den Winkel $SAP = \beta$ von der Richtung der zweiten Seitenkraft S ab, so hat man (s. §. 80):

$$N = \frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)},$$

$$S = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)}.$$

Bezeichnet man ebenso $N_1 A_1 P_1$ durch α_1 und $S_1 A_1 P_1$ durch β_1, so hat man auch:

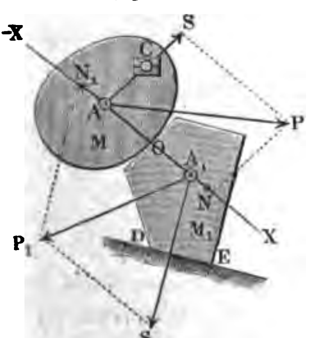
$$N_1 = \frac{P_1 \sin. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)} \text{ und } S_1 = \frac{P_1 \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)};$$

endlich wegen der Gleichheit $N = N_1$:

$$\frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{P_1 \sin. \beta_1}{\sin. (\alpha_1 + \beta_1)}.$$

Beispiel. Welche Kraftzerlegungen treten ein, wenn der durch ein Hinderniß DE aufgehaltene Körper M_1, Fig. 212, durch einen anderen, um eine Axe C drehbaren Körper M mit einer Kraft $P = 250$ Kilogramm gedrückt wird, und die Richtungswinkel folgende sind:

Fig. 212.



$$PAN = \alpha = 35^0,$$
$$PAS = \beta = 48^0,$$
$$P_1 A_1 N_1 = \alpha_1 = 65^0,$$
$$P_1 A_1 S_1 = \beta_1 = 50^0.$$

Aus der ersten Formel bestimmt sich der Normaldruck zwischen den beiden Körpern:

$$N = N_1 = \frac{P \sin. \beta}{\sin. (\alpha + \beta)}$$
$$= \frac{250 \sin. 48^0}{\sin. 83^0} = 187{,}18 \text{ Kilogr.};$$

aus der zweiten folgt ferner der Druck gegen die Axe oder den Zapfen C:

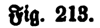
$$S = \frac{P \sin. \alpha}{\sin. (\alpha + \beta)} = \frac{250 \sin. 35^0}{\sin. 83^0} = 144{,}47 \text{ Kilogr.};$$

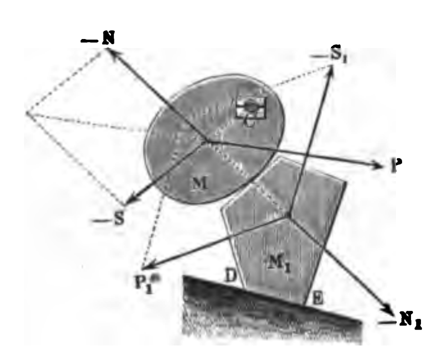
endlich aus der Verbindung der dritten und vierten Gleichung ergiebt sich der Seitendruck gegen das Hinderniß DE:

$$S_1 = \frac{N_1 \sin. \alpha_1}{\sin. \beta_1} = \frac{187{,}18 \sin. 65^0}{\sin. 50^0} = 221{,}46 \text{ Kilogr.}$$

§. 143. **Vergleichung des Gleichgewichts unterstützter oder theilweise festgehaltener Körper mit dem Gleichgewicht freier Körper.** Wegen der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung wird das Gleichgewicht eines unterstützten Körpers nicht gestört, wenn man statt der Stütze eine Kraft anbringt, welche den auf die Stütze übergehenden Druck oder Zug aufnimmt, und daher demselben an Größe gleich und der Richtung nach entgegengesetzt ist. Nach Einführung dieser Kräfte läßt sich daher jeder irgendwie unterstützter oder theilweise festgehaltener Körper auch als ein völlig freier Körper ansehen, und folglich auch der Gleichgewichtszustand desselben wie der eines freien Körpers oder eines freien Kräftesystemes behandeln.

Wenn z. B. bei dem um die Axe C drehbaren Körper M, Fig 213, die Kraft N auf einen zweiten Körper M_1 übergeht, und die Kraft S von der Axe C aufgenommen wird, so kann man auch annehmen, daß derselbe ganz frei sei und außer der Kraft P noch von zwei Kräften $-N$ und $-S$ ergriffen werde. Wenn ebenso der Körper M_1 mit der Kraft N_1 auf M und mit der Kraft S_1 gegen die feste Ebene DE drückt, so wird deshalb das Gleichgewicht nicht gestört, wenn man statt dieser Stützen zwei Gegenkräfte $-N_1$ und $-S_1$ einführt, und dieselben mit den Kräften, welche überdies noch auf diesen Körper wirken, z. B. mit P_1, vereinigt. Im Gleichgewichtszustande muß natürlich sowohl die Mittelkraft des einen Körpers, als auch die des anderen = Null sein, daher sowohl die Mittelkraft aus $-N$ und $-S$ durch P, als auch die aus $-N_1$ und $-S_1$ durch P_1 aufgehoben werden.

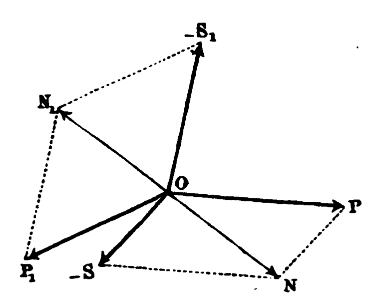

Fig. 213.



Da sich die Kräfte N und N_1, mit welchen die beiden Körper auf einander wirken, das Gleichgewicht halten, so werden folglich auch im Gleichgewichtszustande der Körperverbindung (M, M_1) die Kräfte P, $-S$, P_1

und $-S_1$ im Gleichgewicht sein. Man nennt jene Kräfte N, N_1 innere, und die Kräfte P, $-S$, P_1 und $-S_1$ äußere Kräfte der Körperverbindung oder des Kräftesystemes (M, M_1) und kann hiernach behaupten, daß im Gleichgewichtszustande des letzteren, sich nicht allein die inneren Kräfte das Gleichgewicht halten, sondern auch die äußeren Kräfte im Gleichgewicht sind, wenn man dieselben, wie Fig. 214 darstellt, bei unveränderter Größe und Richtung, in irgend einem Punkte O angreifend annimmt.

Fig. 214.



Stabilität. Wenn ein sich auf eine Horizontalebene stützender Körper außer der Schwerkraft von keiner anderen Kraft getrieben wird, so besitzt derselbe kein Bestreben zur fortschreitenden Bewegung, weil das vertical abwärts wirkende Gewicht von dieser Ebene vollständig aufgenommen wird; wohl aber ist eine Drehung des Körpers möglich. Ruht der Körper $ADBF$, Fig. 215, mit einem Punkte D auf der Horizontalebene HR, so bleibt derselbe in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt S unterstützt ist, d. h. in der durch den Stützpunkt D gehenden Verticallinie (verticalen Schwerlinie) liegt. Stützt sich aber ein Körper in zwei Punkten gegen die horizontale Oberfläche eines anderen, so erfordert das Gleichgewicht desselben, daß die verticale Schwerlinie die die beiden Stützpunkte verbindende Gerade durchschneide. Ruht endlich ein Körper in drei oder mehreren Punkten auf einer Horizontalebene auf, so besteht Gleichgewicht, wenn die verticale Schwerlinie durch das Dreieck oder Polygon hindurchgeht, welches entsteht, wenn man die Stützpunkte durch gerade Linien mit einander verbindet. §. 144.

Fig. 215.

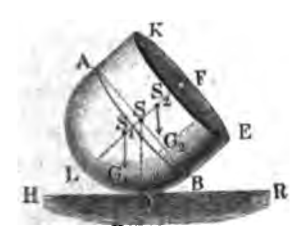
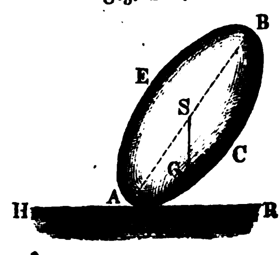


Fig. 216.



Uebrigens sind auch bei den unterstützten Körpern stabiles und labiles Gleichgewicht von einander zu unterscheiden. Das Gewicht G eines Körpers AB, Fig. 216, zieht den Schwerpunkt S desselben abwärts; stellt sich

num dieser Kraft kein Hinderniß entgegen, so bringt sie in dem Körper eine Drehung hervor, die so weit fortgeht, bis der Schwerpunkt seinen tiefsten Ort einnimmt und der Körper ins Gleichgewicht kommt. Es läßt sich nun behaupten, daß das Gleichgewicht stabil ist, wenn der Schwerpunkt die möglich tiefste Lage, Fig. 217, daß es nur labil ist, wenn er die höchste Lage einnimmt (Fig. 218), und daß es endlich ein indifferentes Gleichgewicht ist, wenn der Schwerpunkt bei jeder Stellung des Körpers auf einerlei Höhe bleibt (Fig. 219).

Fig. 217.

Fig. 218.

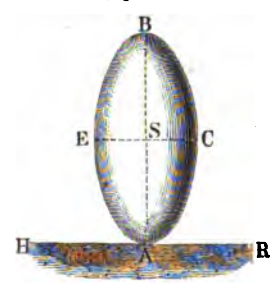
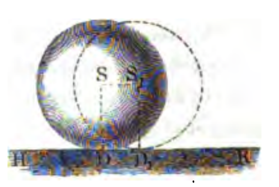
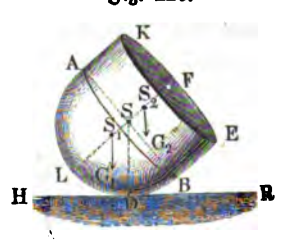


Fig. 219.



Beispiele. 1) Der homogene, aus einer Halbkugel und einem Cylinder bestehende Körper $ADBF$, Fig. 220, ruht auf einer Horizontalebene HR. Welche Höhe $SF = h$ muß der cylindrische Theil desselben haben, damit dieser Körper Gleichgewicht annehme? Der Halbmesser einer Kugel steht auf der entsprechenden Berührungsebene winkelrecht; nun ist aber die Horizontalebene eine solche Ebene, folglich muß auch der Halbmesser SD auf der Horizontalebene rechtwinkelig stehen und in ihm zugleich der Schwerpunkt des Körpers liegen. Die durch den Kugelmittelpunkt gehende Axe FSL des Körpers ist eine zweite Schwerlinie desselben; es ist daher der Mittelpunkt S, als Durchschnitt beider Schwerlinien, Schwerpunkt des Körpers. Setzen wir den Kugel- und Cylinderhalbmesser $SA = SB = SL = r$ und die Cylinderhöhe $SF = BE = h$, so haben wir für das Volumen der Halbkugel: $V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3$, für das Volumen des Cylinders: $V_2 = \pi r^2 h$, für den Abstand des Kugelschwerpunktes S_1, $SS_1 = \frac{3}{8} r$, und für den des Cylinderschwerpunktes S_2, $SS_2 = \frac{1}{2} h$. Damit nun der Schwerpunkt des ganzen Körpers nach S falle, ist das Moment $\frac{2}{3}\pi r^3 . \frac{3}{8} r$ der Halbkugel gleichzusetzen dem Moment $\pi r^2 h . \frac{1}{2} h$ des Cylinders; hieraus aber ergiebt sich:

Fig. 220.



$$h^2 = \frac{1}{2} r^2, \text{ d. i. } h = r\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071 . r.$$

Ist der Körper nicht homogen, sondern hat der halbkugelförmige Theil desselben das specifische Gewicht γ_1 und der cylindrische Theil das specifische Gewicht γ_2, so sind die Momente dieser Theile, $\frac{2}{3}\pi r^3 . \gamma_1 \frac{3}{8} r$ und $\pi r^2 h \gamma_2 . \frac{1}{2} h$, und es folgt durch Gleichsetzung derselben mit einander:

$$2 \gamma_2 h^2 = \gamma_1 r^2, \text{ d. i. } h = r \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}} = 0{,}7071 \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} . r.$$

2) Der Druck, welchen jedes der drei Beine A, B, C, Fig. 221, eines beliebig belasteten Tisches auszuhalten hat, bestimmt sich auf folgende Weise. Es sei S Schwerpunkt des belasteten Tisches, und es seien SE, CD Perpendikel auf AB. Bezeichnen wir nun das Gewicht des ganzen Tisches durch G und den Druck in C durch R, so können wir, AB als Axe behandelnd, setzen: Moment von R = Moment von G, d. i.:

Fig. 221.



$$R . \overline{CD} = G . \overline{SE},$$

und erhalten nun:

$$R = \frac{SE}{CD} \cdot G = \frac{\Delta ABS}{\Delta ABC} \cdot G;$$

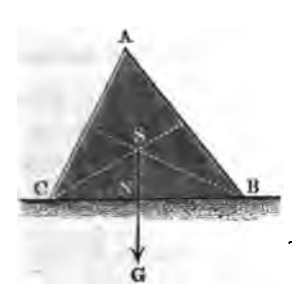
ebenso auch den Druck in B:

$$Q = \frac{\Delta ACS}{\Delta ABC} \cdot G, \text{ und den in } A:$$

$$P = \frac{\Delta BCS}{\Delta ABC} \cdot G.$$

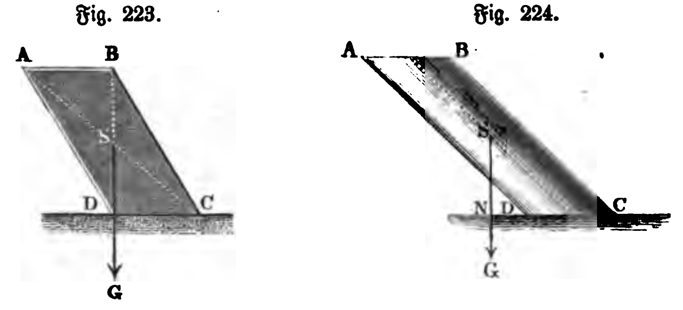
Beschäftigen wir uns mit dem Falle, wenn ein Körper mit einer ebenen §. 145.
Basis auf einer horizontalen Ebene ruht, etwas specieller. Ein solcher Körper besitzt Stabilität oder ist im stabilen Gleichgewichte, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, d. h. wenn das den Schwerpunkt enthaltende Loth durch die Basis des Körpers hindurchgeht, weil in diesem Falle die durch das Gewicht des Körpers angeregte Drehung durch die Festigkeit desselben verhindert wird. Geht das Loth durch den Umfang der Basis, so befindet sich der Körper im labilen Gleichgewichte, und geht endlich dasselbe gar nicht durch die Basis, so findet gar kein Gleichgewicht statt, der Körper dreht sich um eine Seite des Umfanges seiner Basis und stürzt um. Das dreiseitige Prisma ABC, Fig. 222, ist hiernach stabil, weil das Loth SG durch einen Punkt N der Basis BC hindurchgeht; das Parallelepiped $ABCD$, Fig. 223 (a. f. S.), ist im labilen Gleichgewichte, weil das Loth SG eine Seite D der Basis CD durchschneidet; der Cylinder $ABCD$, Fig. 224 (a. f. S.), ist endlich ohne Stabilität, weil das Loth SG dessen Basis CD nicht durchschneidet.

Fig. 222.



Stabilität oder Standfähigkeit (franz. stabilité; engl. stability) ist das Vermögen eines Körpers, durch sein Gewicht allein seine Stellung

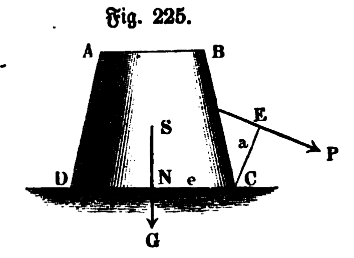
Fig. 223. Fig. 224.



zu behaupten und einer Umdrehungsursache Widerstand entgegenzusetzen. Kommt es darauf an, ein Maß für die Stabilität eines Körpers auszuwählen, so muß unterschieden werden, ob nur auf eine Verrückung oder ob auf ein wirkliches Umstürzen Rücksicht genommen werden soll. Ziehen wir zunächst nur das erste Verhältniß in Betracht.

§. 146. **Stabilitätsformeln.** Eine nicht vertical gerichtete Kraft P sucht einen Körper $ABCD$, Fig. 225, nicht allein umzustürzen, sondern auch fortzuschieben; nehmen wir indessen an, daß diesem Fortschieben, oder nach Befinden Fortziehen, ein Hinderniß entgegengesetzt sei, berücksichtigen wir also nur das Umdrehen um eine Basiskante C. Fällen wir von dieser Kante ein Perpendikel $CE = a$ gegen die Kraftrichtung und ein anderes Perpendikel $CN = e$ gegen die verticale Schwerlinie SG des Körpers, so haben wir es mit einem Winkelhebel ECN zu thun, für welchen

Fig. 225.



gilt: $Pa = Ge$, also $P = \frac{e}{a} G$; ist folglich die äußere Kraft P wenig größer als $\frac{eG}{a}$, so nimmt der Körper eine Drehung um C an und verliert also seine Stabilität. Es hängt hiernach seine Stabilität von dem Producte (Ge) aus dem Gewichte des Körpers und aus dem kürzesten Abstande zwischen einer Seite des Umfanges der Basis und dem Lothe durch den Schwerpunkt ab, und es läßt sich daher Ge als Maß der Stabilität ansehen und deshalb auch schlechtweg Stabilität selbst nennen.

Man ersieht hieraus, daß die Stabilität mit dem Gewichte G und dem Abstande e gleichmäßig wächst, und schließt hiernach, daß unter übrigens glei-

chen Umständen eine doppelte, dreimal so schwere Mauer u. s. w. nicht mehr Standfähigkeit besitzt, als eine Mauer vom einfachen Gewichte und dem doppelten, dreifachen Abstande oder Hebelarme e u. s. w.

1) Ein Parallelepiped $ABCD$, Fig. 226, von der Länge l, Breite $AB = CD = b$ und Höhe $AD = BC = h$ hat das Gewicht $G = V\gamma = bhl\gamma$, und die Stabilität §. 147.

$$St = G.\overline{DN} = G.\,{}^1/_2\,\overline{CD} = \frac{Gb}{2} = {}^1/_2\,b^2hl\gamma,$$

insofern γ das specifische Gewicht der Masse des Parallelepipedes bezeichnet.

Fig. 226.

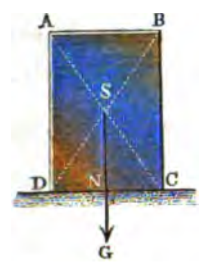
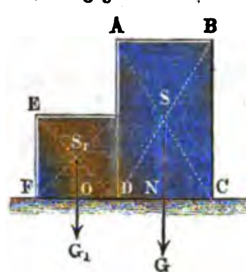


Fig. 227.



2) Bei einem aus zwei Parallelepipeden bestehenden Körper BDE, Fig. 227, sind die Stabilitäten in Hinsicht auf die beiden Basiskanten C und F verschieden von einander. Sind die Höhen BC und EF beziehungsweise $= h$ und h_1 und die Breiten CD und DF beziehungsweise $= b$ und b_1, so hat bei der Länge $= l$ man die Gewichte der Theile G und G_1 beziehungsweise $= bhl\gamma$ und $b_1h_1l\gamma$; sowie die Hebelarme in Beziehung auf C, $CN = {}^1/_2 b$ und $CO = b + {}^1/_2 b_1$, und in Beziehung auf F, $FO = {}^1/_2 b$, und $FN = b + {}^1/_2 b_1$; es ist demnach die Stabilität: erstens für eine Umdrehung um C:

$$St = {}^1/_2\,Gb + G_1\,(b + {}^1/_2\,b_1), = ({}^1/_2\,b^2h + bb_1h_1 + {}^1/_2\,b_1^2h_1)\,l\gamma,$$

dagegen zweitens, in Beziehung auf F:

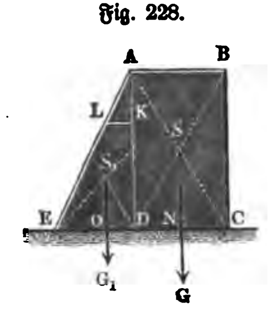
$$St_1 = G\,(b_1 + {}^1/_2\,b) + {}^1/_2\,G_1\,b_1 = ({}^1/_2\,b_1^2h_1 + bb_1h + {}^1/_2\,b^2h)\,l\gamma.$$

Die letztere Stabilität ist um $St_1 - St = (h - h_1)\,bb_1l\gamma$ größer als die erstere; will man die Stabilität einer Mauer AC durch Banquets DE vergrößern, so sind diese demnach auf derjenigen Seite der Mauer anzubringen, wohin die Umdrehungskraft (Wind-, Wasser-, Erddruck u. s. w.) wirkt.

Von einer auf einer Seite geböschten Mauer $ABCE$, Fig. 228 (a. f. S.), ergiebt sich folgende Stabilität. Es sei die Länge dieser Mauer $= l$, die obere Breite derselben, $AB = b$, ihre Höhe $BC = h$, ferner die Böschung $= v$, d. h. auf $AK = 1$ Meter Höhe, $KL = v$ Ausladung, also auf h Meter: $DE = vh$. Das Gewicht des Parallelepipedes AC ist $G = bhl\gamma$, das

des dreiseitigen Prismas $ADE = G_1 = \frac{1}{2} v h . h l \gamma$, die Hebelarme für eine Umdrehung um E sind

Fig. 228.



$$EN = ED + \frac{1}{2} b = vh + \frac{1}{2} b \text{ und}$$
$$EO = \frac{2}{3} ED = \frac{2}{3} v h;$$

es ist folglich die Stabilität;

$$St = G(vh + \frac{1}{2} b) + \frac{2}{3} G_1 v h$$
$$= (\frac{1}{2} b^2 + vhb + \frac{1}{3} v^2 h^2) h l \gamma.$$

Eine parallelepipedische Mauer von gleichem Volumen hat die Breite $b + \frac{1}{2} vh$, daher die Stabilität:

$$St_1 = \frac{1}{2}(b + \frac{1}{2} vh)^2 h l \gamma$$
$$= (\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} vhb + \frac{1}{8} v^2 h^2) h l \gamma;$$

ihre Stabilität ist daher um $St - St_1 = (b + \frac{5}{12} vh) . \frac{1}{2} v h^2 l \gamma$ kleiner als die der geböschten Mauer.

Für eine auf der entgegengesetzten Seite geböschte Mauer ist die Stabilität:

$$St_2 = (b^2 + vhb + \frac{1}{3} v^2 h^2) . \frac{1}{2} h l \gamma,$$

demnach auch kleiner als St, und zwar um

$$St - St_2 = (b + \frac{1}{3} vh) . \frac{1}{2} v h^2 l \gamma,$$

wiewohl um $St_2 - St_1 = \frac{1}{24} v^2 h^3 l \gamma$ größer als die Stabilität der parallelepipedischen Mauer.

Beispiel. Wie groß ist die Stabilität einer Bruchsteinmauer von 3 Meter Höhe und 0,4 Meter oberer Breite für jedes Meter Länge, bei $\frac{1}{5}$ Böschung an der Rückseite? Die Dichtigkeit der Mauermasse (§. 63) = 2,4 angenommen, folgt das specifische Gewicht derselben $\gamma = 1000 . 2,4 = 2400$ Kilogr., nun ist $l = 1$, $h = 3$, $b = 0{,}4$ und $\nu = \frac{1}{5} = 0{,}2$; es folgt daher die gesuchte Stabilität:

$$St = [\tfrac{1}{2} . (0{,}4)^2 + 0{,}2 . 0{,}4 . 3 + \tfrac{1}{3} (0{,}2)^2 . 3^2]\ 3 . 1 . 2400$$
$$= (0{,}08 + 0{,}24 + 0{,}12) . 7200 = 0{,}44 . 7200 = 3168 \text{ Kilogrammmeter.}$$

Bei derselben Menge an Material und unter übrigens gleichen Umständen wäre die Stabilität einer parallelepipedischen Mauer:

$$St_1 = [\tfrac{1}{2} . (0{,}4)^2 + \tfrac{1}{2} . 0{,}2 . 0{,}4 . 3 + \tfrac{1}{8} . 0{,}2^2 . 3^2] . 7200$$
$$= (0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}045) . 7200 = 0{,}245 . 7200 = 1764 \text{ Kilogrammmeter.}$$

Endlich hätte dieselbe Mauer mit geböschter Vorderseite die Stabilität:

$$St_2 = [\tfrac{1}{2} . (0{,}4)^2 + \tfrac{1}{2} . 0{,}2 . 0{,}4 . 3 + \tfrac{1}{6} . (0{,}2)^2 . 3^2] . 7200$$
$$= (0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}06 \ldots) . 7200 = 0{,}26 . 7200 = 1872 \text{ Kilogrammmeter.}$$

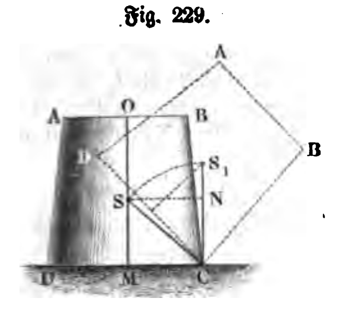
Anmerkung. Man ersieht aus dem Vorhergehenden, daß es eine Ersparung an Material gewährt, die Mauern zu böschen, oder mit Pfeilern zu versehen, ihnen Banquets zu geben, sie auf Plinten zu setzen u. s. w. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes giebt der zweite Theil, wo vom Erddruck, von den Gewölben, Brücken u. s. w. gehandelt wird.

§. 148. Arbeitsstabilität. Von dem im letzten Paragraphen abgehandelten Maße der Stabilität eines Körpers ist ein anderes Maß derselben zu

unterscheiden, wobei wir die zum Umstürzen eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit in Betracht ziehen. Es ist die Leistung oder Arbeit einer Kraft gleich dem Producte aus Kraft und Weg, ferner die Kraft eines schweren Körpers ist das Gewicht G und der Weg desselben die Verticalprojection des vom Schwerpunkte durchlaufenen Weges, folglich kann auch im letzteren Sinne zum Maße der Stabilität eines Körpers das Product Gs dienen, wenn s die senkrechte Höhe ist, auf welche der Schwerpunkt des Körpers steigen muß, um den Körper aus seinem stabilen Gleichgewichtszustande in einen labilen zu bringen.

Es sei C die Drehungsaxe und S der Schwerpunkt eines Körpers $ABCD$, Fig. 229, dessen dynamische Stabilität wir angeben wollen. Drehen wir den Körper, so daß sein Schwerpunkt S nach S_1, d. h. senkrecht über C kommt, so ist der Körper im labilen Gleichgewichte, denn wenn er nur noch wenig weiter gedreht wird, so gelangt er zum Umsturz. Ziehen wir die Horizontale SN, so schneidet diese die Höhe $NS_1 = s$ ab, auf welche der Schwerpunkt gestiegen ist, und aus welcher sich die Stabilität Gs ergiebt. Ist nun

Fig. 229.



$$CS = CS_1 = r,\; CM = NS = e$$

und die Höhe $CN = MS = a$, so folgt der Weg:

$$NS_1 = s = r - a = \sqrt{a^2 + e^2} - a,$$

und die Stabilität im letzteren Sinne:

$$St = G\,(\sqrt{a^2 + e^2} - a).$$

Der Factor $s = \sqrt{a^2 + e^2} - a$ giebt für $a = 0$, $s = e$, für $a = e$, $s = e\,(\sqrt{2} - 1) = 0{,}414\,e$, sowie für $a = ne$ $s = (\sqrt{n^2 + 1} - n)\,e$, annähernd $= \left(n + \frac{1}{2n} - n\right)e = \frac{e}{2n}$, also für $a = 10\,e$, $s = \frac{e}{20}$ und für $a = \infty$, $s = \frac{e}{\infty} = 0$; es ist also die Arbeits-Stabilität um so größer, je tiefer der Schwerpunkt liegt, und sie nähert sich immer mehr und mehr der Null, je höher sich der Schwerpunkt über der Basis befindet. Schlitten, Wagen, Schiffe u. s. w. sind deshalb so zu beladen, daß der Schwerpunkt des Ganzen nicht nur möglichst tief, sondern auch nahe über die Mitte der Basis zu liegen kommt.

Ist der Körper ein Prisma mit symmetrisch trapezoidalem Querschnitte, wie Fig. 229 im Durchschnitt vorstellt, und sind die Dimensionen folgende:

Länge $= l$, Höhe $MO = h$, untere Breite $CD = b_1$ und obere Breite $AB = b_2$, so hat man:

$$MS = a = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} \text{ (§. 113) und}$$

$$CM = e = \frac{1}{2} b_1, \text{ daher:}$$

$$CS = r = \sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2},$$

und die Arbeitsstabilität oder die zum Umstürzen dieses Körpers nöthige mechanische Arbeit:

$$St = G\left[\sqrt{\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right)^2} - \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3}\right].$$

Beispiel. Wie groß ist die Arbeitsstabilität oder die mechanische Arbeit zum Umstürzen des Obelisken $ABCD$, Fig. 230, aus Granit, wenn dessen Höhe $h = 30$ Fuß, obere Länge und Breite $l_1 = 1\frac{1}{2}$ und $b_1 = 1$ Fuß sowie dessen untere Länge und Breite $l_2 = 4$ Fuß und $b_2 = 3\frac{1}{2}$ Fuß beträgt? Das Volumen dieses Körpers ist (§. 124):

Fig. 230.



$$V = (2b_1 l_1 + 2b_2 l_2 + b_1 l_2 + b_2 l_1)\frac{h}{6}$$
$$= (2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} + 1 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}) \cdot \frac{30}{6}$$
$$= 40{,}25 \cdot 5 = 201{,}25 \text{ Cubikfuß;}$$

wiegt um 1 Cubikfuß Granit, $\gamma = 3 \cdot 61{,}74 = 185{,}22$ Pfund, so ist das ganze Gewicht dieses Körpers:

$$G = 201{,}25 \cdot 185{,}22 = 37275 \text{ Pfund.}$$

Die Höhe seines Schwerpunktes über der Basis beträgt:

$$a = \frac{b_2 l_2 + 3b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2}{2b_2 l_2 + 2b_1 l_1 + b_2 l_1 + b_1 l_2} \cdot \frac{h}{2}$$
$$= \frac{4 \cdot \frac{7}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 4 + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}}{40{,}25} \cdot \frac{30}{2}$$
$$= \frac{27{,}75 \cdot 15}{40{,}25} = 10{,}342 \text{ Fuß.}$$

Eine Umdrehung um die längere Basiskante vorausgesetzt, ist der Horizontalabstand des Schwerpunktes von dieser Kante, $e = \frac{1}{2} b_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{4}$ Fuß, daher die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe:

$$CS = r = \sqrt{a^2 + e^2} = \sqrt{(1{,}75)^2 + (10{,}342)^2} = \sqrt{110{,}002} = 10{,}489;$$

und die Höhe, auf welche der Schwerpunkt zu heben ist, um ein Umstürzen herbeizuführen:

$$s = r - a = 10{,}489 - 10{,}342 = 0{,}147 \text{ Fuß,}$$

sowie endlich die entsprechende mechanische Arbeit oder Stabilität:

$$St = Gs = 37275 \cdot 0{,}147 = 5479 \text{ Fußpfund.}$$

§. 149. **Arbeit beim Fortschaffen eines schweren Körpers.** Um die mechanische Arbeit zu finden, welche nöthig ist, um den Ort eines schweren

Körpers durch Drehung zu verändern, hat man einen ähnlichen Weg einzuschlagen, wie bei der Berechnung der Arbeitsstabilität desselben. Dreht man einen schweren Körper AC, Fig. 231, um eine horizontale Axe C so viel, daß sich die Neigung $MCS = \alpha$ der Schwerlinie $CS = r$ in $MCS_1 = \alpha_1$ umändert, so legt hierbei der Schwerpunkt S in verticaler Richtung den Weg

Fig. 231.

$HS_1 = M_1 S_1 - MS = s = r (sin. \alpha_1 - sin. \alpha)$

zurück, und es ist daher, wenn G das Gewicht des Körpers bezeichnet, die hierzu nöthige mechanische Arbeit:

$$A_1 = G s_1 = G r\ (sin. \alpha_1 - sin. \alpha).$$

Wäre die Drehungsaxe nicht horizontal, sondern um den Winkel β gegen den Horizont geneigt, so würde

$$s_1 = r\ cos. \beta\ (sin. \alpha_1 - sin. \alpha) \text{ und}$$

$$A_1 = G r\ cos. \beta\ (sin. \alpha_1 - sin. \alpha) \text{ sein.}$$ (Vergl. §. 136.)

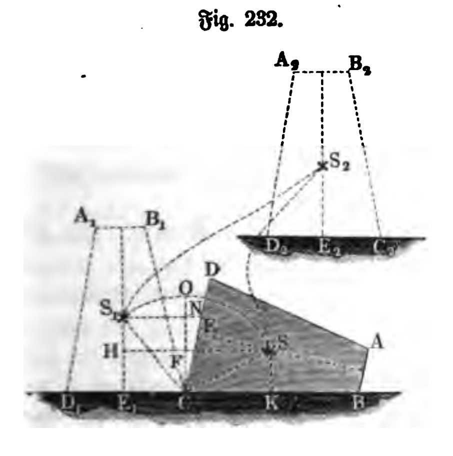
Wird der Körper außerdem noch so fortbewegt, daß er seine Lage gegen die Richtung der Schwere nicht ändert, aber sein Schwerpunkt sowie alle seine Theile einen und denselben Weg durchlaufen, dessen Verticalprojection $= s_2$ ist, so erfordert die Verrückung oder Fortbewegung des Körpers, die mechanische Arbeit, noch den Zusatz $A_2 = G s$, und es ist daher die gesammte mechanische Arbeit:

$$A = A_1 + A_2 = G\ [r\ cos. \beta\ (sin. \alpha_1 - sin. \alpha) + s_2].$$

Der Weg des Körpers in horizontaler Richtung kommt natürlich ganz außer Betracht, wenn man eine sehr langsame Bewegung voraussetzt, wobei die Arbeit der Trägheit Null zu setzen ist.

Bei dem Körper AC, Fig. 232, welcher auf einer horizontalen Ebene BC aufruht, und auf eine andere Horizontalebene $C_2 D_2$ gestellt werden soll, hat man $\beta = 0^\circ$, also $cos. \beta = 1$; ferner wenn a und e die verticalen und horizontalen Coordinaten vom Schwerpunkt S_1 des Körpers in aufgerichteter Stellung bezeichnen, den Radius $CS_1 = r = \sqrt{a^2 + e^2}$, und die Höhe $E_1 S_1 = a = r\, sin. \alpha_1$. Ist α der Neigungswinkel BCS der Seitenfläche BC des Körpers gegen die Schwerlinie CS,

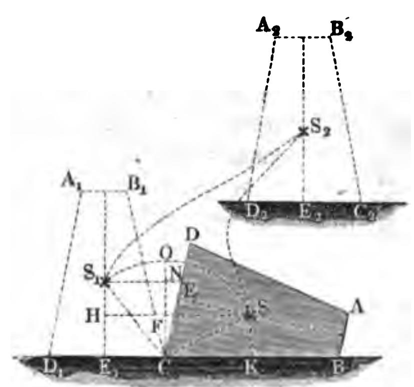
Fig. 232.



so ergiebt sich die anfängliche Höhe des Schwerpunktes S über der Auflagerungsfläche:

$$KS = CS\, sin.\, BCS = r\, sin.\, \alpha = \sqrt{a^2 + e^2}\,.\, sin.\, \alpha,$$

Fig. 233.



und es folgt die Höhe, auf welche der Schwerpunkt S des Körpers beim Aufrichten steigt:

$$HS_1 = s_1 = E_1\, S_1 - E_1\, H = a - \sqrt{a^2 + e^2}\,.\, sin.\, \alpha.$$

Ist nun noch s_2 die senkrechte Höhe der Standebene $C_2 D_2$ über der ersten Lagerebene BC, so hat man die ganze mechanische Arbeit zum Aufheben des Körpers von BC auf $C_2 D_2$:

$$A = G\,(a - \sqrt{a^2 + e^2}\,.\, sin.\, \alpha + s_2).$$

Diese Bestimmung der Arbeit zum Fortschaffen eines Körpers hat nur dann ihre volle Richtigkeit, wenn der Schwerpunkt stetig von S nach S_2 gehoben wird; in dem Falle hingegen, wo der Körper erst aufgerichtet und dann emporgehoben wird, ist die erforderliche mechanische Arbeit:

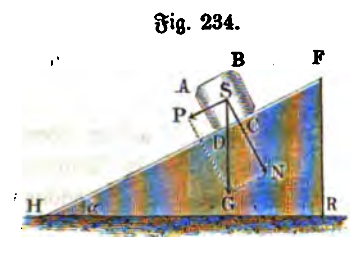
$$A = G(\overline{FO} + s_2) = G(\overline{CO} - KS + s_2) = G\left[\sqrt{a^2 + e^2}(1 - sin.\, \alpha) + s_2\right],$$

weil die Arbeit $G\,.\,\overline{ON} = G\,(\sqrt{a^2 + e^2} - a)$, welche der Körper beim Niedersinken des Schwerpunktes von O nach S_1 verrichtet, verloren geht.

§. 150. Stabilität eines Körpers auf der geneigten Ebene. Ein Körper AC, Fig. 234, auf einer schiefen, d. h. gegen den Horizont geneigten Ebene (franz. plan incliné; engl. inclined plane) kann zwei Bewegungen annehmen, er kann von der schiefen Ebene herabgleiten, er kann sich auch um eine seiner Basiskanten umdrehen und umstürzen. Ist der Körper sich selbst überlassen, so zerlegt sich das Gewicht G des Körpers in eine Kraft N normal und eine Kraft P parallel zur Basis; die erstere nimmt die schiefe

Ebene vollkommen auf, die letztere aber treibt den Körper auf der Ebene abwärts. Setzen wir den Neigungswinkel FHR der schiefen Ebene gegen den Horizont $= \alpha$, so haben wir auch den Winkel $GSN = \alpha$, und daher den Normaldruck:

Fig. 234.



$$N = G\ cos.\ \alpha,$$

sowie die Kraft zum Herabgleiten:

$$P = G\ sin.\ \alpha.$$

Geht die verticale Schwerlinie SG durch die Basis CD, wie Fig. 234 zeigt, so kann nur eine gleitende Bewegung entstehen, geht aber, wie in Fig. 235, diese Schwerlinie außerhalb der Basis vorbei, so tritt auch noch ein Umstürzen ein, es ist also der Körper

Fig. 235.

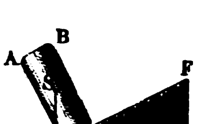
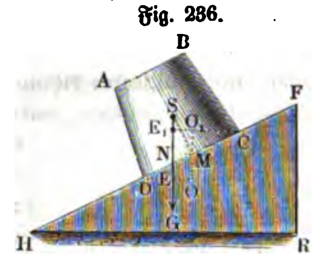


Fig. 236.



ohne Stabilität. Uebrigens hat ein Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 236, eine andere Stabilität als auf der Horizontalebene HR. Sind $DM = e$ und $MS = a$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Schwerpunktes S, so hat man den Hebelarm der Stabilität:

$$DE = DO - MN = e\ cos\ \alpha - a\ sin.\ \alpha,$$

während er $= e$ ist, wenn der Körper auf der Horizontalebene steht. Da $e > e\ cos.\ \alpha - a\ sin.\ \alpha$ ist, so fällt auf der schiefen Ebene die Stabilität in Beziehung auf die untere Kante D kleiner aus, als auf der horizontalen Ebene; sie ist sogar Null für $e\ cos.\ \alpha = a\ sin.\ \alpha$, d. i. für $tang.\ \alpha = \frac{e}{a}$.

Wenn also der anfangs auf einer Horizontalebene mit der Stabilität Ge stehende Körper später auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, deren Neigungswinkel α dem Ausdrucke $tang.\ \alpha = \frac{e}{a}$ entspricht, so verliert derselbe seine Stabilität. Auf der anderen Seite kann aber auch ein Körper auf der schiefen Ebene zur Stabilität gelangen, die ihm mangelt, wenn er auf der Horizontalebene steht. Für eine Drehung um die obere Kante C ist der Hebelarm

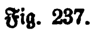
$$CE_1 = CO_1 + MN = e_1\ cos.\ \alpha + a\ sin.\ \alpha,$$

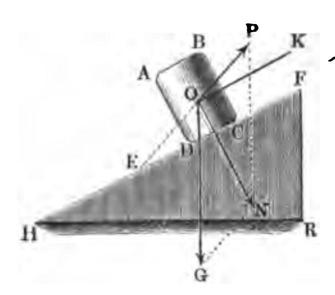
während er beim Stande auf der Horizontalebene, $= CM = e_1$ ausfällt. Ist nun e_1 negativ, so hat der Körper keine Stabilität, so lange er auf der Horizontalebene steht; ruht er aber auf einer geneigten Ebene, für deren Neigungswinkel α, $tang.\,\alpha > \frac{e_1}{a}$ ist, so gelangt der Körper in eine stabile Gleichgewichtslage.

Wirkt außer der Schwerkraft noch eine andere Kraft P auf den Körper $ABCD$, Fig. 225, so behält derselbe seine Stabilität, wenn die Mittelkraft N aus dem Gewichte G des Körpers und aus der Kraft P eine Richtung hat, welche die Basis CD des Körpers durchschneidet.

Beispiel. Bei dem Obelisken im Beispiele des Paragraphen 148 ist $e = \frac{7}{4}$ Fuß und $a = 10{,}342$ Fuß, es verliert folglich derselbe seine Stabilität, wenn er auf eine schiefe Ebene zu stehen kommt, für deren Neigungswinkel ist: $tang.\,\alpha = \frac{7}{4\,.\,10{,}342} = \frac{7000}{41368} = 0{,}16922$, deren Neigung folglich $\alpha = 9^0 36'$ beträgt.

§. 151. **Theorie der schiefen Ebene.** Da die schiefe Ebene nur denjenigen Druck in sich aufnimmt, welcher winkelrecht gegen sie gerichtet ist, so bestimmt sich die Kraft P, welche nöthig ist, um einen übrigens vor dem Umstürzen geschützten Körper auf der schiefen Ebene zu erhalten, indem man die Bedingung festsetzt, daß die aus P und G hervorgehende Mittelkraft N, Fig. 237, winkelrecht zur schiefen Ebene stehe. Der Theorie des Parallelogrammes der Kräfte zufolge hat man:


Fig. 237.



$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,PNO}{sin.\,PON};$$

nun ist aber der Winkel $PNO =$ Winkel $GON = FHR = \alpha$, und der Winkel $PON = POK + KON = \beta + 90^0$, insofern man den Winkel $FEP = KOP$, um welchen die Kraftrichtung von der schiefen Ebene abweicht, mit β bezeichnet; man erhält daher:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,(90 + \beta)},\ \text{d. i.}\ \frac{P}{G} = \frac{sin.\,\alpha}{cos.\,\beta},$$

also die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene erhält:

$$P = \frac{G\,sin.\,\alpha}{cos.\,\beta}.$$

Für den Normaldruck N ist

$$\frac{N}{G} = \frac{sin.\,OGN}{sin.\,ONG},$$

aber Winkel $OGN = 90^0 - (\alpha + \beta)$ und $ONG = PON = 90 + \beta$, daher folgt

$$\frac{N}{G} = \frac{sin. [90^0 - (\alpha + \beta)]}{sin. (90^0 + \beta)} = \frac{cos. (\alpha + \beta)}{cos. \beta},$$

und der Normaldruck gegen die schiefe Ebene:

$$N = \frac{G\ cos. (\alpha + \beta)}{cos. \beta}.$$

Ist $\alpha + \beta > 90$ Grad, also $\beta > 90 - \alpha$, so fällt N negativ aus, und es ist dann, wie Fig. 238 darstellt, die schiefe Ebene HF über den von der Kraft P ergriffenen Körper O zu legen.

Fig. 238.

Geht die Kraft P mit der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = 0$ und $cos. \beta = 1$, daher

$$P = G\ sin. \alpha \text{ und } N = G\ cos. \alpha.$$

Wirkt die Kraft P vertical, so ist $\alpha + \beta = 90^0$, daher

$$cos. \beta = sin. \alpha, \text{ ferner } cos. (\alpha + \beta) = 0,$$

und $P = G$ sowie $N = 0$; dann hat also die schiefe Ebene keinen Einfluß auf den Körper.

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so ist $\beta = -\alpha$ und $cos. \beta = cos. \alpha$, daher

$$P = \frac{G\ sin. \alpha}{cos. \alpha} = G\ tang. \alpha, \text{ sowie } N = \frac{G\ cos. 0}{cos. \alpha} = \frac{G}{cos. \alpha}.$$

Beispiel. Um einen Körper von 500 Pfund auf einer schiefen Ebene von 50^0 Neigung gegen den Horizont zu erhalten, wird eine Kraft aufgewendet, deren Richtung 75^0 mit dem Horizonte einschließt; wie groß ist diese Kraft und wie stark drückt der Körper gegen die schiefe Ebene? Die Kraft ist:

$$P = \frac{500\ sin. 50^0}{cos. (75 - 50)} = \frac{500\ sin. 50^0}{cos. 25^0} = 422{,}6 \text{ Pfund},$$

und der Druck gegen die Ebene:

$$N = \frac{500 . cos. 75^0}{cos. 25^0} = 142{,}8 \text{ Pfund}.$$

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten. Bringt man das §. 152.
in §. 142 näher auseinandergesetzte Princip von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 85 und §. 100) in Verbindung, so stellt sich folgende Regel heraus: Halten zwei Körper, M_1 und M_2, Fig. 239 (a. f. S.), einander das Gleichgewicht, so ist für eine endliche geradlinige und auch für eine unendlich kleine krummlinige Bewegung des Druck- oder Berührungspunktes A, nicht allein die Summe der mechanischen Arbeiten von den Kräften jedes einzelnen Körpers, sondern auch die Summe der mechani-

schen **Arbeiten von den äußeren Kräften beider Körper, zusammengenommen, gleich Null.** Sind P_1 und S_1 die Kräfte des einen Körpers, P_2 und S_2 die des anderen, so entsprechen denselben bei einer Verrückung des Berührungspunktes von A nach B die Wege AD_1, AE_1, AD_2 und AE_2, und es ist nach dem oben ausgesprochenen Gesetze:

$$P_1 \,.\, \overline{AD_1} + S_1 \,.\, \overline{AE_1} + P_2 \,\overline{AD_2} + S_2 \,.\, \overline{AE_2} = 0,$$

oder ohne Rücksicht auf die Richtung:

$$P_1 \,.\, \overline{AD_1} + S_1 \,.\, \overline{AE_1} = P_2 \,.\, \overline{AD_2} + S_2 \,.\, \overline{AE_2}.$$

Die Richtigkeit dieses Satzes läßt sich auf folgende Weise darthun. Da die Normaldrücke N_1 und N_2 einander gleich sind, so findet auch Gleichheit zwischen ihren Arbeiten $N_1 \,.\, \overline{AC}$ und $N_2 \,.\, \overline{AC}$ statt, nur mit dem Unterschiede, daß die Arbeit der einen Kraft positiv und die der anderen negativ ist. Nun hat man aber nach dem Früheren, die Arbeit $N_1 \,.\, \overline{AC}$ der Mittelkraft N_1 gleich der Summe $P_1 \,.\, \overline{AD_1} + S_1 \,.\, \overline{AE_1}$ der Arbeiten ihrer Componenten P_1 und S_1, und ebenso $N_2 \,.\, \overline{AC} = P_2 \,.\, \overline{AD_2} + S_2 \,.\, \overline{AE_2}$; es ist daher auch:

$$P_1 \,.\, \overline{AD_1} + S_1 \,.\, \overline{AE_1} = P_2 \,.\, \overline{AD_2} + S_2 \,.\, \overline{AE_2}.$$

Fig. 239.

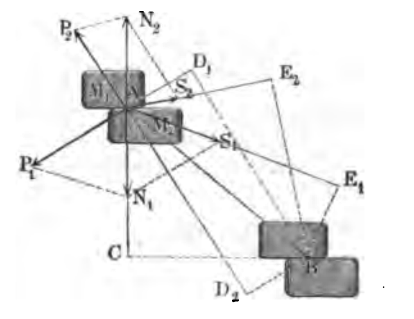
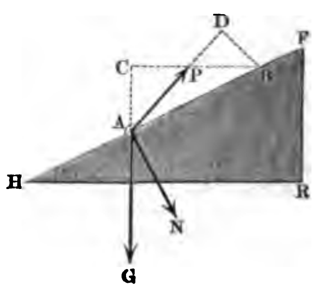


Fig. 240.



Die Anwendung des so allgemeiner gemachten Princips der virtuellen Geschwindigkeiten gewährt bei statischen Untersuchungen oft große Vortheile, indem durch sie die Entwickelung der Gleichgewichtsformeln sehr vereinfacht wird. Verrückt man z. B. einen Körper A auf der schiefen Ebene FH, Fig. 240, um den Weg AB, so ist der entsprechende Weg seines Gewichtes G,

$$= AC = AB \,.\, sin. ABC = AB \,.\, sin. FHR = AB \,.\, sin\, \alpha,$$

dagegen der Weg der Kraft P, $= AD = AB \,.\, cos. BAD = AB \,.\, cos. \beta$ und endlich der Weg der Normalkraft N, $= 0$; nun ist aber die Arbeit von N gleich der Arbeit von G plus der Arbeit von P, man hat daher zu setzen:

$$N \,.\, 0 = - G \,.\, \overline{AC} + P \,.\, \overline{AD},$$

und findet auf diese Weise die Kraft, welche den Körper auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht erhält:

$$P = \frac{AC}{AD} \cdot G = \frac{G \sin. \alpha}{\cos. \beta},$$

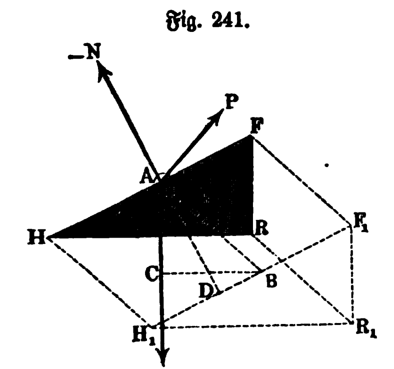


Fig. 241.

ganz in Uebereinstimmung mit dem vorigen Paragraphen.

Um dagegen den Normaldruck N zu finden, rücken wir diese schiefe Ebene HF, Fig 241, um einen beliebigen Weg AB rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung AP fort, bestimmen die entsprechenden Wege der äußeren Kräfte und setzen die Arbeit des Gewichtes G und die der Kraft P des Körpers A gleich der Arbeit der Kraft N der schiefen Ebene oder des Druckes zwischen beiden Körpern.

Der Weg von N ist:

$$AD = AB \cos. BAD = AB \cos. \beta,$$

der Weg von G ist:

$$AC = AB \cos. BAC = AB \cos. (\alpha + \beta)$$

und der Weg von P ist $= 0$, daher Arbeit:

$$N . \overline{AD} = G . \overline{AC} + P . 0,$$

und $$N = \frac{G . \overline{AC}}{\overline{AD}} = G \cdot \frac{\cos. (\alpha + \beta)}{\cos. \beta},$$

wie im vorigen Paragraphen ebenfalls gefunden worden ist.

Theorie des Keiles. Sehr einfach entwickelt sich hiernach die Theorie des Keiles. Der Keil (franz. coin; engl. wedge) ist eine durch ein dreiseitiges Prisma FHG, Fig. 242, gebildete, bewegliche schiefe Ebene. In der Regel wirkt die Kraft $\overline{KP} = P$ rechtwinkelig auf den Rücken FG des Keiles und hält einer anderen Kraft oder Last $AQ = Q$, welche gegen die eine Seitenfläche §. 153.

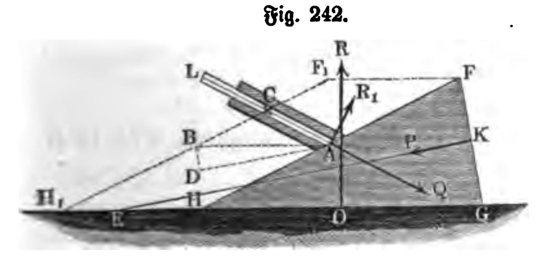
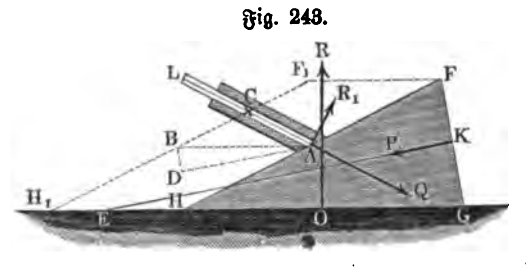


Fig. 242.

FH desselben drückt, das Gleichgewicht. Ist der die Schärfe des Keiles messende Winkel $FHG = \alpha$, ferner der Winkel, um welchen die Kraft-

richtung KP oder AD von der Seitenfläche GH abweicht, also $GEK = BAD, = \delta$, und endlich der Winkel LAH, um den die Richtung der Last Q von der Seitenfläche FH abweicht, $= \beta$, so ergeben sich die Wege, welche beim Verrücken des Keiles aus der Lage FHG in die Lage $F_1 H_1 G_1$ zurückgelegt werden, auf folgende Weise. Der Weg des Keiles ist:

Fig. 243.



$$AB = FF_1 = HH_1,$$

ferner der Weg der Kraft ist:

$$AD = AB\ cos. BAD = AB\ cos. \delta,$$

und der Weg der Stange AL oder Last Q mißt:

$$AC = \frac{AB\ sin. ABC}{sin. ACB} = \frac{AB\ sin. \alpha}{sin. HAC} = \frac{AB\ sin. \alpha}{sin. \beta}.$$

Dagegen ist der Weg der dem Drucke auf die Grundfläche EG entsprechenden Reaction R, so wie der Weg von der dem Drucke gegen die Leitung der Stange AC entgegengesetzten Reaction R_1, $=$ Null. Setzt man nun die Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte P, Q, R und $R_1 =$ Null, also:

$$P . \overline{AD} - Q . \overline{AC} + R . 0 + R_1 . 0 = 0,$$

so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$P = \frac{Q . \overline{AC}}{AD} = \frac{Q . \overline{AB}\ sin. \alpha}{\overline{AB}\ cos. \delta\ sin. \beta} = \frac{Q\ sin. \alpha}{sin. \beta\ cos. \delta},$$

wie sich allerdings auf dem Wege der Kraftzerlegung ebenfalls finden läßt.

Wenn die Kraftrichtung KE durch die Kante H des Keiles geht, und die Schärfe FHG halbirt, so hat man $\delta = \frac{\alpha}{2}$, und daher

$$P = \frac{Q\ sin. \alpha}{sin. \beta\ cos. \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\ Q\ sin \frac{\alpha}{2}}{cos. \beta}.$$

Geht die Kraftrichtung parallel zur Basis oder Seitenfläche GH, so ist $\delta = 0$, daher:

$$P = \frac{Q\ sin. \alpha}{sin. \beta},$$

und ist noch die Lastrichtung winkelrecht zur Seitenfläche FH, also $\beta = 90^0$, so folgt:

$$P = Q\ sin. \alpha.$$

Beispiel. Die Schärfe $FHG = \alpha$ eines Keiles betrage 25°, die Kraft sei parallel zur Basis HG gerichtet, es sei also $\delta = 0$, und die Last Q wirke winkelrecht zur Seitenfläche FH, also β sei $= 90°$, in welchem Verhältnisse stehen Kraft und Last zu einander? Es ist:

$$P = Q\, sin.\, \alpha, \text{ also } \frac{P}{Q} = sin.\, 25^0 = 0{,}4226.$$

Für eine Last Q von 130 Kilogramm stellt sich hiernach die Kraft:

$$P = 130\, .\, 0{,}4226 = 54{,}938 \text{ Kilogramm heraus.}$$

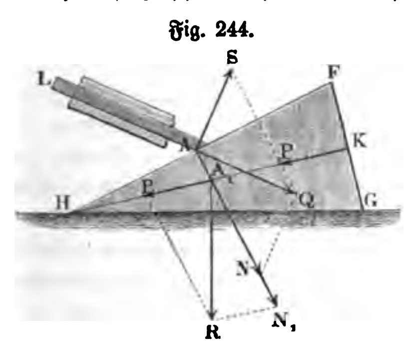
Um die Last oder Stange ein Meter fortzuschieben, muß der Keil den Weg

$$AB = \frac{AC}{sin.\, \alpha} = \frac{1}{0{,}4226} = 2{,}3662 \text{ Meter}$$

zurücklegen.

Anmerkung 1. Durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes bestimmt sich das Verhältniß zwischen Kraft P und Last Q des Keiles FGH, Fig. 244, wie folgt. Die Stangenlast, $\overline{AQ} = Q$ zerlegt sich in eine Seitenkraft $\overline{AN} = N$ normal auf die Seitenfläche FH des Keiles, und in eine Seitenkraft $\overline{AS} = S$ normal auf die Stangenaxe LA. Während S von der Leitung der Stange aufgenommen wird, geht $\overline{AN} = N$ auf den Keil über und vereinigt sich hier als $\overline{A_1 N_1}$ mit der Kraft $\overline{KP} = \overline{A_1 P} = P$ des Keiles zu einer Mittelkraft $\overline{A_1 R} = R$, deren Richtung winkelrecht auf der Grundfläche GH des Keiles stehen muß, damit sie vollständig auf die Unterstützung des Keiles übergeht. Das Kräfteparallelogramm $A_1 PRN_1$ giebt:

Fig. 244.



$$\frac{P}{N_1} = \frac{sin.\, RA_1N_1}{sin.\, A_1RN_1} = \frac{sin.\, FHG}{sin.\, PA_1R} = \frac{sin.\, \alpha}{cos.\, \delta},$$

und dem Kräfteparallelogramme $ANQS$ zufolge ist:

$$\frac{N}{Q} = \frac{sin.\, NQA}{sin.\, ANQ} = \frac{sin.\, QAS}{sin.\, LAH} = \frac{1}{sin.\, \beta};$$

da nun $N_1 = N$ ist, so ergiebt sich hiernach durch Multiplication dieser Proportionen:

$$\frac{P}{N} \cdot \frac{N}{Q} = \frac{P}{Q} = \frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \beta\ cos.\, \delta}, \text{ also:}$$

$$P = \frac{Q\ sin.\, \alpha}{sin.\, \beta\ cos.\, \delta},$$

wie auch im Haupttext gefunden worden ist.

Anmerkung 2. Die Theorien des Hebels, der schiefen Ebene und des Keiles finden eine weitere Entwickelung im fünften Capitel, wo noch der Einfluß der Reibung in Betracht gezogen wird.

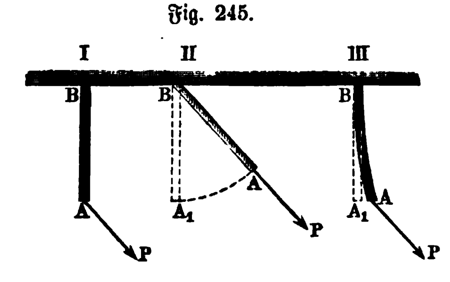
Viertes Capitel.

Gleichgewicht an den Seilmaschinen.

§. 154. **Seilmaschine.** Wir haben seither die festen Körper als vollkommen starre oder steife Körper (franz. corps rigides; engl. rigid, stiff bodies), d. i. als solche angesehen, welche durch die Einwirkung äußerer Kräfte weder in Form noch im Volumen verändert werden; bei manchen Körpern und in vielen Fällen der Anwendung der Mechanik auf die Praxis ist jedoch die Annahme der vollkommenen Starrheit fester Körper nicht mehr zulässig, und deshalb nöthig, diese Körper insbesondere noch in zwei anderen Zuständen zu betrachten. Diese Zustände sind die vollkommene Biegsamkeit und die Elasticität, und wir unterscheiden hiernach noch die biegsamen Körper (franz. corps flexibles; engl. flexible bodies), und die elastischen Körper (franz. corps élastiques; engl. elastic bodies) von einander. Die biegsamen Körper nehmen nur Kräfte von einer gewissen Richtung ohne Formveränderung auf, folgen dagegen den Kräften, welche nach anderen Richtungen hinwirken, vollständig; die elastischen Körper hingegen geben bis zu einer gewissen Grenze jeder auf sie wirkenden Kraft nach.

Ein starrer Körper AB, Fig. 245, I, widersteht einer Kraft P vollständig, ein biegsamer Körper AB, Fig. 245, II, folgt dagegen der auf ihn wirkenden Kraft P, wobei seine Axe die Richtung der Kraft annimmt, und ein

Fig. 245.



elastischer Körper AB, Fig. 245, III, widersteht der Kraft P nur bis zu einem gewissen Grade, wobei seine Axe eine gewisse Biegung erleidet. Schnüre, Seile, Riemen, und in gewisser Beziehung auch Ketten, sind die Repräsentanten der biegsamen Körper, wiewohl sie eine vollkommene Biegsamkeit nicht besitzen. Diese Körper sind der Gegenstand dieses Capitels; von den elastischen

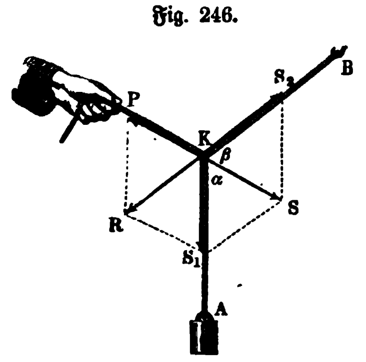
Körpern, oder vielmehr von der Elasticität der festen Körper wird dagegen erst im vierten Abschnitt gehandelt.

Wir verstehen in der Folge unter einer **Seilmaschine** (franz. machine funiculaire; engl. machine of strings) ein Seil oder eine Verbindung von Seilen (das Wort Seil im allgemeinen Sinne genommen), welche von Kräften angespannt wird, und beschäftigen uns in diesem Capitel mit der Theorie des Gleichgewichtes dieser Maschinen. Derjenige Punkt einer Seilmaschine, wo eine Kraft angreift und deshalb das Seil einen Winkel bildet oder eine Richtungsveränderung erleidet, heißt ein **Knoten** (franz. noeud; engl. knot). Derselbe ist entweder **fest** (franz. fixe; engl. fixed), oder **beweglich** (franz. coulant; engl. moveable). **Spannung** (franz. und engl. tension) ist die Kraft, welche ein gespanntes Seil in der Richtung seiner Axe fortpflanzt. Die Spannungen an den Enden eines geraden Seiles oder Seilstückes sind gleich und entgegengesetzt (§. 88); auch kann das gerade Seil andere Kräfte als die in der Axenrichtung wirkende Spannung nicht fortpflanzen, weil es sich sonst biegen müßte, also nicht gerade bleiben könnte.

Gleichgewicht in einem Knoten. Gleichgewicht einer Seilmaschine findet statt, wenn in jedem Knoten derselben Gleichgewicht vorhanden ist. Es sind daher zunächst die Verhältnisse des Gleichgewichts an einem Knoten kennen zu lernen. §. 155.

In einem Knoten K, welchen ein Seilstück AKB, Fig. 246, bildet, findet Gleichgewicht statt, wenn die sich aus den Seilspannungen $\overline{KS_1} = S_1$ und $\overline{KS_2} = S_2$ ergebende Mittelkraft $\overline{KS} = S$ gleich und entgegengesetzt gerichtet ist der im Knoten angreifenden Kraft P, denn die Seilspannungen S_1 und S_2 bringen im Knoten K dieselben Wirkungen hervor wie zwei ihnen gleiche und gleichgerichtete Kräfte, und drei Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn die eine von ihnen gleich ist und entgegengesetzt wirkt der Mittelkraft aus den beiden anderen (§. 89). Ebenso ist aber auch die Mittelkraft R aus der Kraft P und der einen Spannung S_1 gleich und entgegengesetzt gerichtet der zweiten Seilspannung S_2 u. s. w. Jedenfalls läßt sich diese Gleichheit dazu benutzen, zwei Bestimmungsstücke, z. B. die Spannung und Richtung des einen Seiles, zu ermitteln. Ist z. B. die Kraft P, sowie die Spannung S_1 und der von beiden eingeschlossene Winkel

Fig. 246.



$$AKP = 180 - AKS = 180^0 - \alpha$$

gegeben, so hat man für die zweite Spannung

$$S_2 = \sqrt{P^2 + S_1^2 - 2\,PS_1\, cos.\,\alpha}$$

und für ihre Richtung oder Abweichung $BKS = \beta$, von KS:

$$sin.\,\beta = \frac{S_1\, sin.\,\alpha}{S_2}.$$

Beispiel. Wenn das Seil AKB, Fig. 246, am Ende B aufgehangen, am Ende A aber durch ein Gewicht $G = 135$ Pfund und in der Mitte K durch eine Kraft $P = 109$ Pfund, welche unter einem Neigungswinkel von 25 Grad aufwärts zieht, angespannt wird, so ist die Frage nach der Richtung und Spannung des Seilstückes KB. Die Größe der gesuchten Spannung ist:

$$S_2 = \sqrt{109^2 + 135^2 - 2\,.\,109\,.\,135\; cos.\,(90^0 - 25^0)}$$

$$= \sqrt{11881 + 18225 - 29430\,.\,cos.\,65^0} = \sqrt{17668{,}3} = 132{,}92 \text{ Pfund}.$$

Für den Winkel β hat man:

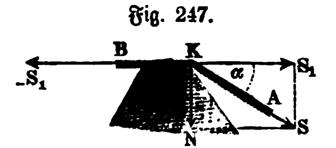
$$sin.\,\beta = \frac{S_1\, sin.\,\alpha}{S_2} = \frac{135\;.\;sin.\,65^0}{132{,}92},\; Log.\,sin.\,\beta = 0{,}96401 - 1,$$

daher ist $\beta = 67^0\,0'$, und die Neigung des Seilstückes KB gegen den Horizont:

$$\beta^0 - 25^0 = 67^0,\,0' - 25^0,\,0' = 42^0,\,0'.$$

§. 156. Wenn ein Seil AKB, Fig. 247, dadurch einen festen Knoten K bildet, daß sich das eine Seilstück BK gegen eine feste Stütze M anlegt, während das andere Seilstück AK durch eine Kraft $\overline{KS} = S$ gespannt wird, deren Richtung um einen gewissen Winkel $SKS_1 = \alpha$ von der Richtung des ersteren abweicht, so ist die Spannung des Seilstückes KB:

Fig. 247.



$$KS_1 = S_1 = S\, cos.\,\alpha,$$

weil der zweite Componente $\overline{KN} = N = S\, sin.\,\alpha$ der Spannung S von der Stütze M aufgenommen wird.

Uebrigens ist auch

$$S_1 = S\,\sqrt{1 - (sin.\,\alpha)^2},$$

und daher für einen kleinen Ablenkungswinkel α:

$$S_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\,(sin.\,\alpha)^2\right) S = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) S, \text{ dagegen}$$

$$S = \frac{S_1}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} = \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) S_1 \text{ zu setzen.}$$

Wenn sich ein Seil AB, Fig. 248, um einen prismatischen Körper M legt, und dabei in seiner Richtung um die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ abgelenkt wird,

so wiederholt sich die vorige Kraftzerlegung, so daß im Knoten K_1 die Spannung S in:

$$S_1 = S \cos. \alpha_1,$$

Fig. 248.

im Knoten K_2 die Spannung S_1 in:

$$S_2 = S_1 \cos. \alpha_2 = S \cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2,$$

und im Knoten K_3 die Spannung S_2 in:

$$S_3 = S_2 \cos. \alpha_3 = S \cos. \alpha_1 \cos. \alpha_2 \cos. \alpha_3 \text{ übergeht.}$$

Sind die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha$, also einander gleich, so hat man:

$S_3 = S (\cos. \alpha)^3$, oder allgemein, bei n Ablenkungen:

$S_n = S (\cos. \alpha)^n$.

Geht das Prisma M in einen Cylinder über, so ist α unendlich klein, und n unendlich groß, daher:

$$S_n = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)^n S = \left(1 - \frac{n\alpha^2}{2}\right) S,$$

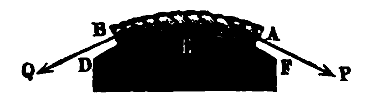
oder wenn man den ganzen Ablenkungswinkel $n\alpha$ durch β bezeichnet:

$$S_n = \left(1 - \frac{\alpha\beta}{2}\right) S, \text{ d. i.:}$$

$S_n = S$, weil α und folglich auch $\frac{\alpha\beta}{2}$ unendlich klein gegen 1 ist.

Wenn also ein Seil AB, Fig. 249, so um einen glatten Körper DEF gelegt ist, daß es einen Theil vom Umfang seines Querschnittes bedeckt, so

Fig. 249.



wird dadurch seine Spannung nicht geändert, es sind also auch im Gleichgewichtszustande, die Spannungen P und Q an den beiden Enden A und B desselben einander gleich.

Gleichgewicht eines losen Knotens. Ist der Knoten K ein loser oder beweglicher, wirkt z. B. die Kraft P mittels eines Ringes auf das §. 157.

durchgezogene Seil AKB, Fig. 250, so ist zwar wieder die Mittelkraft S aus den Seilspannungen S_1 und S_2 gleich und entgegengesetzt gerichtet der Kraft P am Ringe: außerdem sind aber noch die Seilspannungen unter sich gleich. Diese Gleichheit folgt zwar schon aus §. 156, läßt sich aber auch leicht auf folgende Weise nachweisen. Zieht man das Seil um einen gewissen Weg s in dem Ringe fort, so legt die eine Spannung S_1 den Weg s und die andere Spannung S_2 den Weg $-s$, die Kraft P aber den Weg Null zurück; es ist folglich, vollkommene Biegsamkeit vorausgesetzt, die Arbeit:

$$P \,.\, 0 = S_1 \,.\, s - S_2 \,.\, s, \text{ d. i. } S_1 s = S_2 s \text{ und } S_1 = S_2.$$

Aus dieser Gleichung der Spannungen folgt wieder die Gleichheit der Winkel AKS und BKS, unter welchen die Richtung der Mittelkraft S von den Seilrichtungen abweicht; setzen wir diese Winkel $= \alpha$, so giebt die Auflösung des Rhombus KS_1SS_2:

$$S = P = 2\, S_1 \; cos.\, \alpha, \text{ und umgekehrt:}$$

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2\; cos.\, \alpha}.$$

Fig. 250.

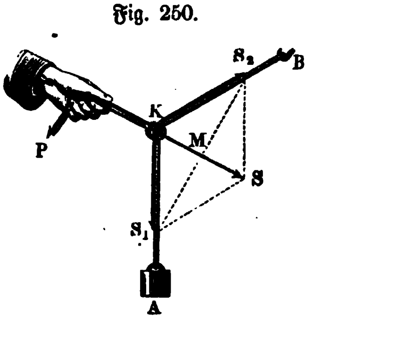
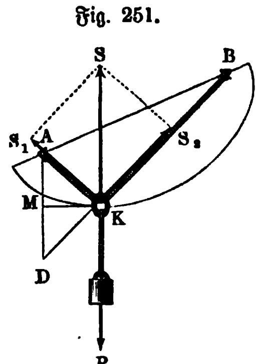


Fig. 251.



Sind A und B, Fig. 251, feste Punkte eines Seiles AKB von gegebener Länge $(2 \cdot a)$ mit einem beweglichen Knoten K, so findet man den Ort dieses Knotens durch Construction einer Ellipse aus deren Brennpunkte A und B und deren der Seillänge $2\,a$ gleichen großen Axe, wenn man eine Tangente an diese Curve winkelrecht zur gegebenen Kraftrichtung legt: der sich ergebende Berührungspunkt ist der Ort des Knotens, weil bei der Ellipse die Normale KS mit den Fahrstrahlen KA und KB gleiche Winkel einschließt, gerade so wie die Mittelkraft S mit den Seilspannungen S_1 und S_2.

Zieht man AD parallel zur gegebenen Kraftrichtung, macht BD gleich der gegebenen Seillänge, halbirt AD in M und errichtet hierauf das Perpendikel MK, so erhält man den Ort des Knotens K auch ohne eine Ellipsenconstruction, denn da dann Winkel $AKM =$ Winkel DKM und

$AK = DK$ ist, so folgt auch Winkel AKS = Winkel BKS und $AK + KB = DK + KB = DB = 2a$.

Beispiel. Zwischen den Punkten A und B, Fig. 252, ist ein Seil von 9 Meter Länge durch ein mittels eines Ringes angehängtes Gewicht G von 170 Kilogramm ausgespannt; die Horizontalentfernung AC beider Punkte ist $6^1/_2$ Meter und der Verticalabstand $CB = 2$ Meter; man sucht den Ort des Knotens sowie die Seilspannungen und Seilrichtungen. Aus der Länge $AD = 9$ Meter als Hypotenuse und der Horizontalen $AC = 6^1/_2$ Meter folgt die Verticale:

Fig. 252.

$$CD = \sqrt{9^2 - 6,5^2} = \sqrt{81 - 42,25}$$
$$= \sqrt{38,75} = 6,225 \text{ Meter};$$

und hieraus die Basis des gleichschenkligen Dreieckes BDK:

$BD = CD - CB = 6,225 - 2 = 4,225$ Meter.

Die Aehnlichkeit der Dreiecke DKM und DAC giebt nun:

$$DK = BK = \frac{DM}{DC} \cdot DA = \frac{4,225 \, . \, 9}{2 \, . \, 6,225} = 3,054 \text{ Meter};$$

hieraus folgt:

$$AK = 9 - 3,054 = 5,946 \text{ Meter},$$

und für den Winkel α, um welchen die Seilstücke von der Verticalen abweichen:

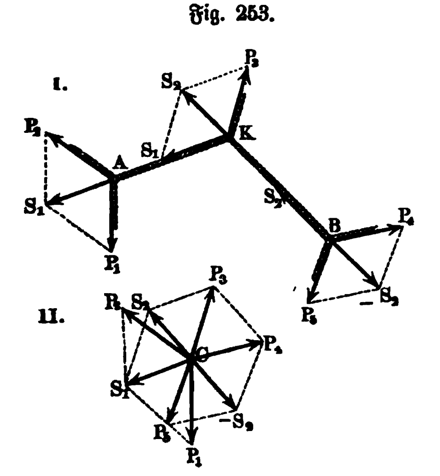
$$cos.\,\alpha = \frac{BM}{BK} = \frac{2,1125}{3,054} = 0,6917, \text{ daher } \alpha = 46^0\ 14',$$

und endlich die Spannung der Seile:

$$S_1 = S_2 = \frac{G}{2\,cos.\,\alpha} = \frac{170}{2\,.\,0,6917} = 122,9 \text{ Kilogramm}.$$

Gleichgewicht des ganzen Seilpolygons. Die Verhältnisse des Gleichgewichtes an einem *Seilpolygone*, d. i. an einem angespannten Seile, welches an verschiedenen Punkten von Kräften ergriffen wird, sind in Uebereinstimmung mit den Verhältnissen des Gleichgewichtes von Kräften, welche in einem Punkte angreifen. Es sei AKB, Fig. 253 I, ein von den Kräften §. 158.

Fig. 253.

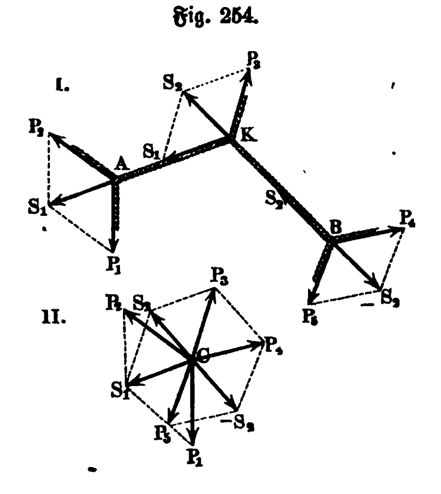


$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5$$

angespanntes Seil, P_1 und P_2 greifen in A, P_3 in K und P_4 und P_5 in B an. Setzen wir die Spannung des Seilstückes AK, $= S_1$

und die des Stückes $BK, = S_2$, so erhalten wir S_1 als Mittelkraft von den in A angreifenden Kräften P_1 und P_2, und tragen wir den Angriffspunkt A dieser Spannung von A auf K, so ergiebt sich wieder S_2 als Mittelkraft von S_1 und P_3 oder von P_1, P_2 und P_3; transportiren wir endlich den Angriffspunkt der Kraft S_2 von K nach B, so erhalten wir in S_2, P_4 und P_5, oder, da S_2 Mittelkraft von P_1, P_2 und P_3 ist, auch in P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ein sich das Gleichgewicht haltendes Kräftesystem. Wir können hiernach behaupten: wenn gewisse Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. ein Seilpolygon im Gleichgewichte erhalten, so werden sie sich auch selbst das Gleichgewicht halten, wenn man sie bei unveränderter Richtung und Größe, in einem einzigen Punkte, z. B. in C (II.), angreifen läßt.

Fig. 254.



Wird das Seil $AK_1K_2 \ldots B$, Fig. 255, in den Knoten K_1, $K_2 \ldots$ durch Gewichte G_1, $G_2 \ldots$ angespannt, und werden die Endpunkte A und B durch die Verticalkräfte V und V_n und die Horizontalkräfte H und H_n festgehalten, so ist die Summe der Verticalkräfte:

$$V + V_n - (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots)$$

und die Summe der Horizontalkräfte: $H - H_n$. Der Gleichgewichtszustand fordert aber, daß beide Summen = Null sind; es ist daher

1) $V + V_n = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$ und

2) $H = H_n$; d. h.

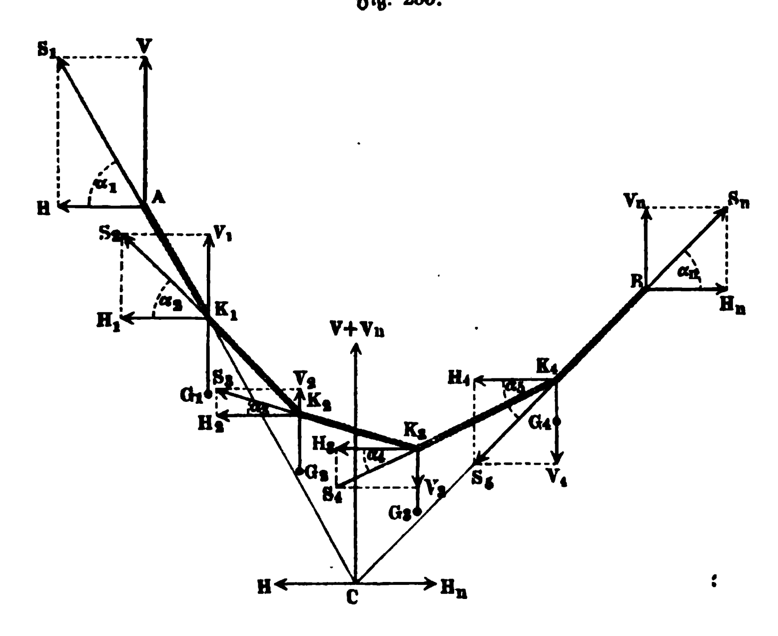
bei einem durch Gewichte angespannten Seilpolygone ist die Summe der Verticalkräfte oder Verticalspannungen in den End- oder Aufhängepunkten gleich der Summe der angehängten Gewichte, und es ist die Horizontalspannung des einen Endes gleich und entgegengesetzt gerichtet der Horizontalspannung im anderen Endpunkte.

Verlängert man die Richtungen der Spannungen S_1 und S_n in den Endpunkten A und B bis zu ihrem Durchschnitte C und verlegt man die Angriffspunkte jener Spannungen nach diesem Punkte, so erhält man eine

einzige Kraft $P = V + V_n$, weil sich die Horizontalkräfte H und H_n aufheben. Da diese Kraft der Summe $G_1 + G_2 + G_3 + \cdots$ von den angehängten Gewichten das Gleichgewicht hält, so muß der Angriffs- oder Schwerpunkt dieser Gewichte in der Richtung derselben, d. i. in der durch C gehenden Verticallinie, enthalten sein.

Aus der Spannung S_1 des ersten Seilstückes AK_1 und dessen Neigungs- oder Fallwinkel $S_1 AH = \alpha_1$ folgt die Verticalspannung $V = S_1 \, sin. \, \alpha_1$ §. 159.

Fig. 255.



und die Horizontalspannung $H = S_1 \, cos. \, \alpha_1$. Transportirt man nun den Angriffspunkt dieser Kräfte von A nach dem ersten Knoten K_1, so kommt zu diesen Spannungen das vertical abwärts ziehende Gewicht G_1, und es ist nun für das folgende Seilstück $K_1 K_2$ die Verticalspannung

$$V_1 = V - G_1 = S_1 \, sin. \, \alpha_1 - G_1,$$

wogegen die Horizontalspannung unverändert $H_1 = H$ bleibt. Beide Kräfte geben vereinigt die Axenspannung des zweiten Seilstückes:

$$S_2 = \sqrt{V_1^2 + H^2}$$

und die Neigung α_2 desselben durch die Formel:

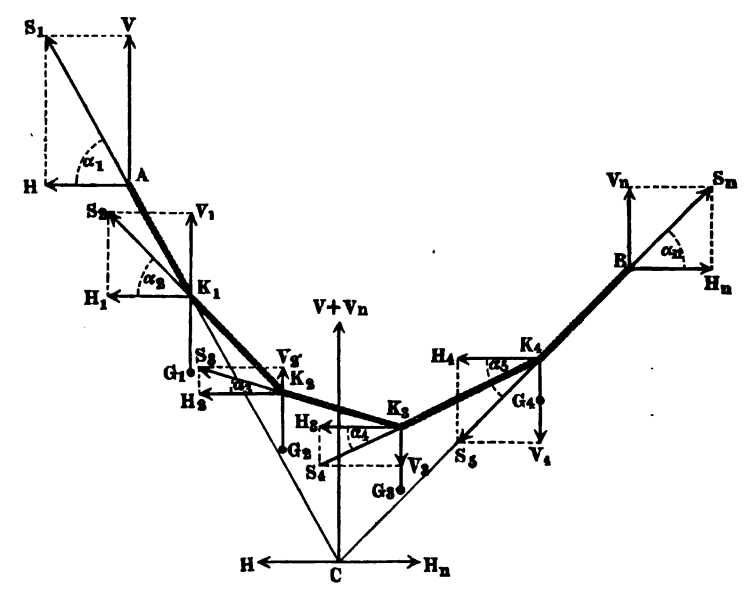
$$tang. \, \alpha_2 = \frac{V_1}{H} = \frac{S_1 \, sin. \, \alpha_1 - G_1}{S_1 \, cos. \, \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang.\, \alpha_2 = tang.\, \alpha_1 - \frac{G_1}{H}.$$

Trägt man den Angriffspunkt der Kräfte V_1 und H von K_1 nach K_2, so erhält man in dem hinzukommenden Gewichte G_2 noch eine neue Verticalkraft, und es entsteht so die Verticalkraft des dritten Seilstückes:

$$V_2 = V_1 - G_2 = V - (G_1 + G_2) = S_1\, sin.\, \alpha_1 - (G_1 + G_2),$$

Fig. 256.



während die Horizontalkraft $H_2 = H$ bleibt. Die Gesammtspannung dieses dritten Seilstückes ist mithin:

$$S_3 = \sqrt{V_2^2 + H^2},$$

und für den Neigungswinkel α_3 desselben hat man:

$$tang.\, \alpha_3 = \frac{V_2}{H} = \frac{S_1\, sin.\, \alpha_1 - (G_1 + G_2)}{S_1\, cos.\, \alpha_1}, \text{ d. i.}$$

$$tang.\, \alpha_3 = tang.\, \alpha_1 - \frac{G_1 + G_2}{H}.$$

Für den Neigungswinkel des vierten Seilstückes ist ferner:

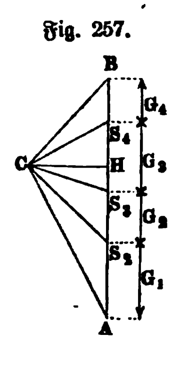
$$tang.\, \alpha_4 = tang.\, \alpha_1 - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} \text{ u. s. w.}$$

Fällt $\frac{G_1 + G_2 + G_3}{H} > tang.\, \alpha_1$ oder $G_1 + G_2 + G_3 > V$ aus,

so wird $tang. \alpha_4$ und folglich auch α_4 negativ, so daß die entsprechende Polygonseite $K_3 K_4$ nicht mehr abwärts gerichtet ist, sondern aufsteigt. Dasselbe Verhältniß tritt natürlich auch in jedem anderen Punkte ein, für welchen $G_1 + G_2 + G_3 + \cdots > V$ ist.

Uebrigens lassen sich die Spannungen S_1, S_2, S_3 u. s. w., sowie die Neigungswinkel α_1, α_2, α_3 u. s. w. der einzelnen Seiltrümer leicht geometrisch darstellen. Machen wir die Horizontale $\overline{CH}$, Fig. 257, = der Horizontalspannung H und die Verticale $\overline{HA}$ = der Verticalspannung V im Aufhängepunkte A, so giebt die Hypotenuse CA die Totalspannung S_1 des ersten Seilstückes und der Winkel HCA die Neigung α_1 desselben gegen den Horizont an; tragen wir nun noch die Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. als Theile AS_2, S_2S_3, S_3S_4 u. s. w. auf die Verticale $AB = V + V_n$ auf und ziehen die Transversalen CS_2, CS_3, CS_4 u. s. w., so erhalten wir in ihnen die Spannungen der folgenden Seilstücke und durch die Winkel HCS_2, HCS_3, HCS_4 u. s. w. auch die Neigungswinkel α_2, α_3 u. s. w. dieser Seilstücke gegen den Horizont.

Fig. 257.



Aus den Untersuchungen im vorigen Paragraphen stellt sich als Gesetz für das Gleichgewicht der durch Gewichte gespannten Seile heraus: §. 160.

1) die Horizontalspannung ist an allen Stellen des Seiles eine und dieselbe, nämlich:

$$H = S_1 \cos. \alpha_1 = S_n \cos. \alpha_n;$$

2) die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung am darüber befindlichen Ende minus der Summe der darüberhängenden Gewichte, also:

$$V_m = V_1 - (G_1 + G_2 + \cdots G_{m-1}).$$

Allgemeiner läßt sich dieser Satz auch so ausdrücken: Die Verticalspannung an irgend einer Stelle ist gleich der Verticalspannung an irgend einer tieferen oder höheren Stelle plus oder minus der Summe von den zwischen beiden Punkten hängenden Gewichten.

Kennt man außer den Gewichten den Winkel α_1 und die Horizontalspannung H, so erhält man die Verticalspannung am Ende A:

$$V = H \,.\, tang. \alpha_1,$$

und demnach die am Ende B:

$$V_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n) - V.$$

Sind hingegen die Neigungswinkel α_1 und α_n an beiden Aufhängepunkten A und B bekannt, so ergeben sich die Horizontal- und Verticalspannungen zugleich; es ist nämlich:

$$\frac{V_n}{V} = \frac{tang.\,\alpha_n}{tang.\,\alpha_1},$$

und daher:

$$V_n = \frac{V\,tang.\,\alpha_n}{tang.\,\alpha_1}.$$

Da man noch $V + V_n = G_1 + G_2 + \cdots$, d. i.:

$$\left(\frac{tang.\,\alpha_1 + tang.\,\alpha_n}{tang.\,\alpha_1}\right) V_1 = G_1 + G_2 \cdots$$

hat, so folgt:

$$V = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots)\,tang.\,\alpha_1}{tang.\,\alpha_1 + tang.\,\alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots)\,\frac{sin.\,\alpha_1\,cos.\,\alpha_n}{sin.\,(\alpha_1 + \alpha_n)},$$

$$V_n = \frac{(G_1 + G_2 + \cdots)\,tang.\,\alpha_n}{tang.\,\alpha_1 + tang.\,\alpha_n} = (G_1 + G_2 + \cdots)\,\frac{sin.\,\alpha_n\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,(\alpha_1 + \alpha_n)},$$

und hieraus:

$$H = V\,cotg.\,\alpha_1 = V_n\,cotg.\,\alpha_n = (G_1 + G_2 + \cdots)\,\frac{cos.\,\alpha_1\,cos.\,\alpha_n}{sin.\,(\alpha_1 + \alpha_n)}.$$

Haben die beiden Seilenden einerlei Neigung, ist also $\alpha_n = \alpha_1$, so hat man $V = V_n = \frac{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}{2}$; dann trägt also das eine Ende A eben so viel wie das andere Ende B.

Diese Formeln gelten natürlich auch für jedes beliebige Paar Punkte oder Knoten des Seilpolygons, wenn man nur statt $G_1 + G_2 + \cdots$ die Summe der zwischenhängenden Gewichte u. s. w. einsetzt. Für die Verticalspannungen der Seile, welche ein und dasselbe Gewicht G_m zwischen sich halten und die Neigungswinkel α_m und α_{m+1} haben, ist z. B.:

$$V_m = G_m\,\frac{sin.\,\alpha_m\,cos.\,\alpha_{m+1}}{sin.\,(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + cotg.\,\alpha_m\,tang.\,\alpha_{m+1}}$$

und

$$V_{m+1} = G_m\,\frac{sin.\,\alpha_{m+1}\,cos.\,\alpha_m}{sin.\,(\alpha_m + \alpha_{m+1})} = \frac{G_m}{1 + tang.\,\alpha_m\,cotg.\,\alpha_{m+1}}.$$

Uebrigens gelten diese Gesetze auch für durch Parallelkräfte angespannte Seilpolygone überhaupt, wenn man statt der Verticalen die Kraftrichtungen einführt.

Beispiel 1. Das Seilpolygon $AK_1K_2K_3B$, Fig. 258, ist durch drei Gewichte $G_1 = 20$, $G_2 = 30$ und $G_3 = 16$ Kilogramm, sowie durch die Horizontalkraft $H = 25$ Kilogramm gespannt, man sucht die Axenspannungen und Neigungswinkel der Seiten unter der Voraussetzung, daß die Seilenden in A und B einerlei Neigung haben. Die Verticalspannungen in beiden Enden sind hier gleich, nämlich:

$$V = V_4 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{2} = \frac{20 + 30 + 16}{2} = 33 \text{ Kilogramm},$$

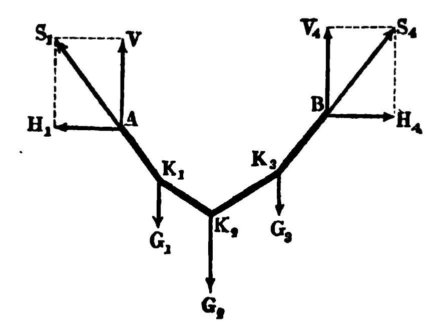
die Verticalspannung des zweiten Seilstückes ist dagegen:

$$V_1 = V - G_1 = 33 - 20 = 13 \text{ Kilogramm},$$

und die des dritten:

$$V_3 = V_4 - G_3 \text{ (oder } G_1 + G_2 - V) = 33 - 16 = 17 \text{ Kilogr.};$$

Fig. 258.



die Neigungswinkel α_1 und α_4 der Seilenden sind bestimmt durch:

$$tang.\,\alpha_1 = tang.\,\alpha_4 = \frac{V}{H} = \frac{33}{25} = 1{,}32,$$

die der zweiten und dritten Seilstücke aber durch:

$$tang.\,\alpha_2 = tang.\,\alpha_1 - \frac{G_1}{H} = 1{,}32 - \frac{20}{25} = 0{,}52 \text{ und}$$

$$tang.\,\alpha_3 = tang.\,\alpha_4 - \frac{G_3}{H} = 1{,}32 - \frac{16}{25} = 0{,}68;$$

es ist hiernach:

$$\alpha_1 = \alpha_4 = 52^0\,51',\ \alpha_2 = 27^0\,28' \text{ und } \alpha_3 = 34^0\,13';$$

endlich sind die Axenspannungen:

$$S_1 = S_4 = \sqrt{V^2 + H^2} = \sqrt{33^2 + 25^2} = \sqrt{1714} = 41{,}40 \text{ Kilogramm.}$$

$$S_2 = \sqrt{V_1^2 + H^2} = \sqrt{13^2 + 25^2} = \sqrt{794} = 18{,}18 \text{ Kilogramm, und}$$

$$S_3 = \sqrt{V_3^2 + H^2} = \sqrt{17^2 + 25^2} = 30{,}23 \text{ Kilogramm.}$$

Beispiel 2. Um eine gestohlene Kiste Q, Fig. 259 (a. f. S.), aufzubrechen, befestigt der Räuber Janos die Enden A und B eines Seiles AKK_1B an den Aesten zweier starken Bäume, verbindet durch ein anderes Seil K_1C den Deckel der Kiste mit demselben und zieht, indem er sich an dem ersten Seil aufhängt, dasselbe durch sein eigenes Gewicht G vertical abwärts. Ist α der Neigungswinkel des Seiltrums AK gegen den Horizont, sowie β die Abweichung $BK_1P = SK_1P$ der Richtung des Seiltrums BK_1 von der Verticalen, so hat man die Spannung des Seilstücks KK_1

$$\overline{KR} = R = G\ cotg.\,\alpha,$$

und die Kraft, mit welcher das Gewicht G indirect den Deckel der Kiste zu heben sucht:

$$P = \overline{K_1P} = \overline{K_1R_1}\ cotg.\,\beta = \overline{KR}\ cotg.\,\beta = G\ cotg.\,\alpha\ cotg.\,\beta.$$

Wäre $\alpha = \beta = 10$ Grad, so würde hiernach

$$P = (5{,}67)^2\ G = 32{,}2\ G,$$

also bei einem Gewichte des Räubers von $G = 80$ Kilogramm,

$$P = 2576 \text{ Kilogramm betragen.}$$

Fig. 259.



§. 161. Die Parabel als Kettenlinie. Setzen wir jetzt voraus, daß das Seil ACB, Fig. 260, durch lauter gleiche, in gleichen Horizontalabständen aufgehängte Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. gespannt sei. Bezeichnen wir den Horizontalabstand AM zwischen dem Aufhängepunkte A und dem tiefsten Punkte C durch b, sowie den Verticalabstand CM durch a; setzen wir ferner für einen anderen Punkt O des Seilpolygons die gleichliegenden Coordinaten $ON = y$ und $CN = x$. Ist nun die Verticalspannung in $A = V$, so folgt die in $O = \frac{y}{b} \cdot V$, und daher für den Neigungswinkel $NOT = ROQ = \varphi$ des Seilstückes OQ gegen den Horizont:

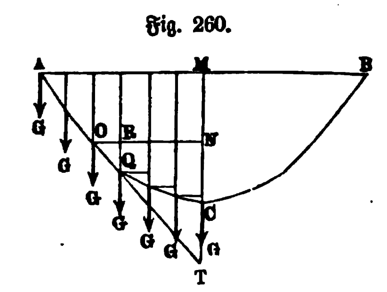
$$tang.\,\varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H},$$

wo H die constante Horizontalspannung ausdrückt.

Es ist hiernach

$$QR = \overline{OR}\,.\,tang.\,\varphi = \overline{OR} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{V}{H}$$

Fig. 260.



der Höhenabstand zweier benachbarten Eckpunkte des Seilpolygons. Setzen wir y der Reihe nach $\overline{OR}$, $2\,\overline{OR}$, $3\,\overline{OR}$ u. s. w., so giebt nun die letzte Gleichung die entsprechenden Höhenabstände des ersten, zweiten, dritten Eckpunktes u. s. w., von unten nach oben gezählt; und addiren wir endlich alle diese Werthe, deren Anzahl $= m$ sein möge, so erhalten wir die Höhe CN des Punktes O über dem Fußpunkte C. Es ist nämlich:

$$x = CN = \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR}}{b}(\overline{OR} + 2\,\overline{OR} + 3\,\overline{OR} + \cdots + m\,.\,\overline{OR})$$

$$= \frac{V}{H} \cdot \frac{\overline{OR^2}}{b}(1 + 2 + 3 + \cdots + m) = \frac{V}{H} \cdot \frac{m\,(m+1)}{1\,.\,2} \cdot \frac{\overline{OR^2}}{b}$$

der Theorie der arithmetischen Reihen zufolge.

Endlich $\overline{OR} = \frac{y}{m}$ gesetzt, erhält man:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{m\,(m+1)}{2\,m^2} \cdot \frac{y^2}{b},$$

oder, wenn man für den Neigungswinkel α des Seilendes A,

$$tang.\,\alpha = \frac{V}{H} \text{ einsetzt:}$$

$$x = \frac{m\,(m+1)\,y^2\,tang.\,\alpha}{2\,m^2\,b}.$$

Ist die Zahl der Gewichte sehr groß, so kann $m + 1 = m$ angenommen werden, weshalb man erhält:

$$x = \frac{V}{H} \cdot \frac{y^2}{2\,b} = \frac{y^2}{2\,b}\,tang.\,\alpha.$$

Für $x = a$ ist $y = b$, daher hat man auch:

$$a = \frac{V}{H} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b\,tang.\,\alpha}{2}$$

und hiernach einfacher:

$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2},$$

welche Gleichung nur der Parabel zukommt.

Wird also ein übrigens gewichtsloses Seil durch unendlich viele gleiche, in gleichen Horizontalabständen angreifende Gewichte gespannt, so geht das Seilpolygon in eine gemeine Parabel über.

Für den Neigungswinkel φ hat man hiernach:

$$tang.\,\varphi = \frac{y}{b} \cdot \frac{2a}{b} = 2\,y \cdot \frac{a}{b^2} = 2\,y \cdot \frac{x}{y^2} = \frac{2x}{y}, \text{ sowie}$$

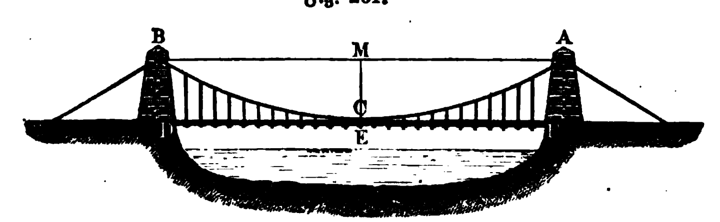
$$tang.\,\alpha = \frac{2a}{b}.$$

Die Subtangente für den Punkt O ist:

$$\overline{NT} = \overline{ON}\,tang.\,\varphi = y\,\frac{2x}{y} = 2x = 2\,\overline{CN}.$$

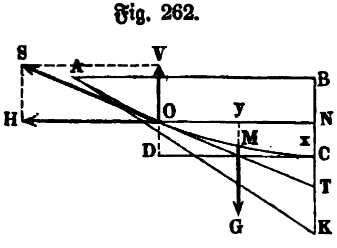
Wären die Ketten und Hängeisen einer Kettenbrücke $ABDF$, Fig. 261, gewichtslos, oder sehr leicht in Hinsicht auf das deshalb nur zu berücksichtigende Gewicht der belasteten Brücke DEF, so würde die Kette ACB eine Parabel bilden.

Fig. 261.



Anmerkung. Mit Hülfe der Momente gelangt man zur obigen Gleichung eines stark gespannten Kettenstücks CMO, Fig. 262, auf folgende Weise. Man hat in Beziehung auf den Scheitel C desselben das Moment der Verticalkraft V gleich dem der Horizontalkraft H plus dem des Gewichtes G von CMO, d. i.

Fig. 262.



$$V.\overline{CD} = H.\overline{CN} + G.\overline{CM},$$

oder

$$Vy = Hx + G.\overline{CM}.$$

Nun ist aber die Verticalkraft V gleich dem Gewichte G, und der Angriffspunkt des letzteren nahe der Mitte M von CO, also der Hebelarm von G, $\frac{1}{2}\,ON = \frac{1}{2}y$ zu setzen, daher hat man auch

$$Gy = Hx + \frac{1}{2}Gy, \text{ oder } Gy = 2Hx.$$

Wird das Gewicht G proportional der Ordinate y wachsend angenommen, also $G = \gamma y$ gesetzt, wobei γ die Belastung pro Längeneinheit von y bezeichnet, so ergiebt sich

$$\gamma y^2 = 2Hx, \text{ daher } x = \frac{\gamma y^2}{2H}.$$

Führt man endlich $CB = a$ für x und $BA = b$ für y ein, so erhält man $a = \frac{\gamma b^2}{2H}$, und daher durch Division die obige Gleichung $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}$ der Parabel.

Beispiel. Es sei die ganze Belastung der Kettenbrücke in Fig. 261, $G = 2V = 320000$ Pfund, die Spannweite AB, $= 2b = 150$ Fuß, die Bogenhöhe, CM, $= a = 15$ Fuß; man sucht die Spannungen und übrigen Verhältnisse der Kette. Die Neigung α der Kettenenden gegen den Horizont ist bestimmt durch die Formel:

$$tang.\,\alpha = \frac{2a}{b} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5} = 0{,}4, \text{ es ist also dieselbe } \alpha = 21^{0}\,48'.$$

Die Verticalspannung an jedem Aufhängepunkte ist:

$$V = \frac{1}{2} \text{ Gewicht} = 160000 \text{ Pfund};$$

die Horizontalspannung und also auch die im Scheitel C:

$$H = V\,cotg.\,\alpha = 160000 \,.\, \frac{1}{0{,}4} = 400000 \text{ Pfund},$$

endlich die Gesammtspannung an einem Ende:

$$S = \sqrt{V^2 + H^2} = V\sqrt{1 + cotg.\,\alpha^2} = 160000 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{0{,}4}\right)^2}$$

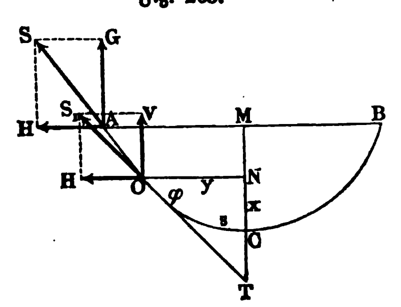
$$= 160000\sqrt{\frac{29}{4}} = 80000\sqrt{29} = 430813 \text{ Pfund}.$$

Die Kettenlinie. Wird ein an zwei Punkten aufgehängtes vollkommen biegsames und unausdehnbares Seil, oder eine aus kurzen Gliedern bestehende Kette, durch das eigene Gewicht gespannt, so bildet die Axe derselben eine krumme Linie, die den Namen Kettenlinie (franz. chainette; engl. catenary) erhalten hat. Die unvollkommen elastischen und ausdehnbaren Schnüre, Seile, Bänder, Ketten u. s. w., wie sie im praktischen Leben vorkommen, geben krumme Linien, welche sich der Kettenlinie nur annähern, meist aber als solche behandelt werden können. Nach dem Vorhergehenden ist die Horizontalspannung der Kettenlinie an allen Punkten gleich stark, dagegen die Verticalspannung in einem Punkte gleich der Verticalspannung im darüber befindlichen Aufhängepunkte minus Gewicht des darüber befindlichen Kettenstückes. Da die Verticalspannung im Scheitel, wo die Kettenlinie horizontal ist, sich vernullt, also die Verticalspannung im Aufhängepunkte gleich ist dem Gewichte der Kette vom Aufhängepunkte bis zum Scheitel, so ist die Verticalspannung an jeder Stelle auch gleich dem Gewichte des darunter befindlichen Seil- oder Kettenstückes. §. 162.

Sind gleich lange Stücke der Kette gleich schwer, so entsteht die sogenannte gemeine Kettenlinie, von welcher hier nur die Rede ist. Wiegt ein Seil-

oder Kettenstück von 1 Meter Länge, γ, und ist der den Coordinaten $CM = a$ und $MA = b$, Fig. 263, entsprechende Bogen $AOC = l$, so hat man das Gewicht des Kettenstückes AOC,

Fig. 263.



$$G = l\gamma;$$

ist dagegen die Länge des den Coordinaten $CN = x$ und $NO = y$ angehörigen Bogens $= s$, so hat man für das Gewicht dieses Bogens, $V = s\gamma$. Setzen wir endlich die Länge eines gleichartigen Kettenstückes, dessen Gewicht gleich ist der Horizontalspannung H, $= c$, so haben wir noch $H = c\gamma$, und daher für die Neigungswinkel α und φ in den Punkten A und O:

$$tang.\, \alpha = tang.\, SAH = \frac{G}{H} = \frac{l\gamma}{c\gamma} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$tang.\, \varphi = tang.\, NOT = \frac{V}{H} = \frac{s\gamma}{c\gamma} = \frac{s}{c}.$$

§. 163. **Construction der Kettenlinie.** Macht man die Horizontale CH, Fig. 264, gleich der Länge c des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes und CG gleich der Länge l des Kettenbogens von der einen Seite, so bekommt man, in Uebereinstimmung mit §. 159, in der Hypotenuse GH die Größe und die Richtung der Seilspannung im Aufhängepunkte A, denn es ist:

$$tang.\, CHG = \frac{CG}{CH} = \frac{l}{c} \text{ und}$$

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{l^2 + c^2}, \text{ oder}$$

$$S = \sqrt{G^2 + H^2} = \sqrt{l^2 + c^2} \cdot \gamma = \overline{GH} \,.\, \gamma.$$

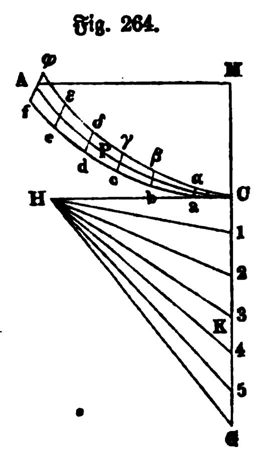
Theilt man nun CG in gleiche Theile und zieht von H nach den Theilpunkten 1, 2, 3 u. s. w. gerade Linien, so geben diese die Maße und Richtungen der Spannungen derjenigen Punkte in der Kettenlinie an, welche man erhält, indem man die Länge des Kettenbogens AC in ebenso viel gleiche Theile theilt. So giebt z. B. die Linie $\overline{HK}$ die Größe und Richtung der Spannung oder die Tangente im Theilpunkte (P) des Bogens APC an, weil in diesem Punkte die Verticalspannung $= \overline{CK} \,.\, \gamma$ ist, während die Horizontalspannung unverändert $= c \,.\, \gamma$ bleibt, also für diesen Punkt

$$tang.\, \varphi = \frac{\overline{CK} \,.\, \gamma}{c\gamma} = \frac{CK}{CH}$$

ist, wie die Figur auch wirklich giebt.

Diese Eigenthümlichkeit der Kettenlinie läßt sich benutzen, um diese Curve annähernd richtig mechanisch zu construiren. Nachdem man die gegebene Länge CG des zu construirenden Kettenlinienbogens in sehr viele gleiche Theile getheilt, die die Horizontalspannung messende Linie $CH = c$ aufgetragen und die Transversalen $H1$, $H2$, $H3$ u. s. w. gezogen hat, trage man auf CH einen Theil $\overline{C1}$ als Ca des Kettenbogens auf, ziehe nun durch den erhaltenen Theilpunkt (a) mit der Transversalen $\overline{H1}$ eine Parallele und schneide von ihr wieder einen Theil $ab = \overline{C1}$ ab, ebenso ziehe man durch den erhaltenen Eckpunkt (b) eine Parallele zur Transversalen $\overline{H2}$ und schneide von ihr $bc = \overline{C1}$ gleich einem Bogentheile ab; jetzt ziehe man durch den neuen Endpunkt c eine Parallele zu $\overline{H3}$, mache cd wieder gleich einem Bogenstück und fahre auf diese Weise fort, bis man das Polygon $Cabcdef$ erhält. Nun construire man ein anderes Polygon $C\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ dadurch, daß man $C\alpha$ parallel $H1$, $\alpha\beta$ parallel $\overline{H2}$, $\beta\gamma$ parallel $\overline{H3}$ u. s. w. legt und $C\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma$ u. s. w., $= \overline{C1} = \overline{12} = \overline{23}$ u. s. w. macht. Führt man endlich durch die Mittelpunkte von $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ ... $f\varphi$ einen Zug CPA, so erhält man in demselben annähernd die gesuchte Kettenlinie.

Fig. 264.



Durch Aufhängen einer feingegliederten Kette an einer senkrechten Wand läßt sich für praktische Bedürfnisse oft genau genug eine Kettenlinie ebenfalls finden, welche gewissen Bedingungen, z. B. einer gegebenen Bogenweite und Bogenhöhe, oder einer gegebenen Bogenweite und Bogenlänge u. s. w. entspricht.

Angenäherte Gleichung der Kettenlinie. In vielen Fällen, und namentlich auch bei Anwendungen in der Architektur und in dem Maschinenwesen, ist die Horizontalspannung der Kettenlinie sehr groß und deshalb ihre Bogenhöhe klein gegen die Spannweite derselben. Unter dieser Voraussetzung ermittelt sich eine Gleichung dieser Curve auf folgende Weise. §. 164.

Bezeichnet s die Länge, x die Abscisse CN und y die Ordinate NO eines sehr gedrückten Bogens CO, Fig. 265 (a. f. S.), so können wir der beigefügten Anmerkung zufolge, annähernd

$$s = \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y,$$

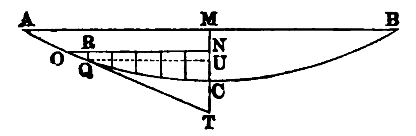
daher die Verticalspannung in einem Punkte O eines niedrigen Kettenlinienbogens:

$$V = \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{x}{y}\right)^2\right] y\gamma,$$

und für den Tangentenwinkel $TON = \varphi$ desselben:

$$tang.\varphi = \frac{s}{c} = \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{x}{y}\right)^2\right] \frac{y}{c} \text{ setzen.}$$

Fig. 265.



Theilen wir die Ordinate y in m gleiche Theile, so finden wir das einem solchen Theile OR entsprechende Stück $RQ = NU$ der Abscisse x, indem wir setzen:

$$\overline{RQ} = \overline{OR}\,.\,tang.\varphi = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{x}{y}\right)^2\right].$$

Da x klein sein soll gegen y, so ist annähernd $\overline{RQ} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}$. Setzt man nun $OR = \frac{y}{m}$ und successiv für y die Werthe $\frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w., so bekommt man nach und nach sämmtliche Theile von x, deren Summe nun $x = \frac{y^2}{cm^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + m) = \frac{y^2}{cm^2} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$ (§. 161) $= \frac{y^2}{2c}$ ist und wieder der Gleichung der Parabel entspricht.

Gehen wir aber noch einen Schritt genauer, setzen wir in

$$\overline{QR} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{x}{y}\right)^2\right],$$

statt x den letztgefundenen Werth $\frac{y^2}{2c}$ ein, so erhalten wir:

$$\overline{QR} = \overline{OR} \cdot \frac{y}{c}\left(1 + {}^1/_6 \cdot \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{\overline{OR}}{c}\left(y + {}^1/_6 \cdot \frac{y^3}{c^2}\right).$$

Nehmen wir nun wieder nach einander $y = \frac{y}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{3y}{m}$ u. s. w. an, und setzen wir statt $\overline{OR}$ ebenfalls $\frac{y}{m}$, so finden wir nach und nach sämmtliche Theile von x und hieraus die Summe selbst:

$$x = \frac{y}{cm}\left[\frac{y}{m}(1+2+3+\cdots+m) + \frac{1}{6c^2}\cdot\left(\frac{y}{m}\right)^3(1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right].$$

Für eine sehr große Anzahl von Gliedern ist aber die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis m, $= \frac{m^2}{2}$ und die Summe ihrer Cuben, $= \frac{m^4}{4}$ (s. „Ingenieur", Seite 88); man hat demnach:

$$x = \frac{y}{c}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{6c^2} \cdot \frac{y^3}{4}\right), \text{ d. i.}$$

$$1) \quad x = \frac{y^2}{2c} + \frac{y^4}{24c^3} = \frac{y^2}{2c}\left[1 + {}^1/_{12} \cdot \left(\frac{y}{c}\right)^2\right],$$

die Gleichung einer **stark gespannten Kettenlinie.**

Durch Umkehrung folgt:

$$y^2 = 2cx - \frac{y^4}{12c^2} = 2cx - \frac{4c^2x^2}{12c^2} = 2cx - \frac{x^2}{3},$$

daher:

$$2) \quad y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{3}}, \text{ oder annähernd,}$$

$$y = \sqrt{2cx}\left(1 - \frac{x}{12c}\right).$$

Das Maß der Horizontalspannung ergiebt sich ferner:

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{2x \,.\, 12c^2} = \frac{y^2}{2x} + \frac{y^4}{24x} \cdot \frac{4x^2}{y^4}, \text{ d. i.}$$

$$3) \quad c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6}.$$

Der Tangentenwinkel φ wird bestimmt durch die Formel

$$tang.\,\varphi = \frac{y}{c}\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = \frac{y\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}{\frac{y^2}{2x}\left[1 + {}^1/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{2x}{y}\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]\left[1 - {}^1/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right], \text{ d. i.}$$

$$4) \quad tang.\,\varphi = \frac{2x}{y}\left[1 + {}^1/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right].$$

Hierzu ist endlich noch die Rectificationsformel:

$$5) \quad s = y\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y\left[1 + {}^1/_6\left(\frac{y}{c}\right)^2\right] \text{ zu setzen.}$$

Beispiele. 1) Für eine Spannweite $2b = 16$ Fuß und Bogenhöhe $a = 2\frac{1}{2}$ Fuß ist die Länge der Kettenlinie:

$$2l = 2b\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 16 \,.\, \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2{,}5}{8}\right)^2\right]$$
$$= 16 + 16 \,.\, 0{,}065 = 17{,}04 \text{ Fuß,}$$

ferner die Länge des die Horizontalspannung messenden Kettenstückes:

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{64}{5} + \frac{5}{12} = 12{,}8 + 0{,}417 = 13{,}217 \text{ Fuß};$$

die Tangente des Aufhängewinkels:

$$tang.\,\alpha = \frac{2a}{b}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = \frac{5}{8}\cdot\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{16}\right)^2\right] = \frac{5 \,.\, 1{,}03255}{8} = 0{,}6453\ldots,$$

hiernach der Aufhängewinkel selbst, $\alpha = 32^0\,50'$.

2) Eine Kette von 10 Fuß Länge und $9^1/_2$ Fuß Spannweite hat die Bogenhöhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}\,(l-b)\,b} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{(10-9^1/_2)}{2}\cdot\frac{9^1/_2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{19}{16}} = \sqrt{\frac{57}{32}}$$
$$= \sqrt{1{,}7812} = 1{,}335 \text{ Fuß},$$

und das Maß der Horizontalspannung:

$$c = \frac{b^2}{2a} + \frac{a}{6} = \frac{4{,}75^2}{2\,.\,1{,}335} + \frac{1{,}335}{6} = 8{,}673 \text{ Fuß}.$$

3) Wenn eine 30 Fuß lange und 8 Pfund schwere Schnur mit einer Kraft von 20 Pfund so viel wie möglich horizontal ausgespannt wird, so ist die Verticalspannung:

$$V = {}^1/_2\,G = 4 \text{ Pfund},$$

die Horizontalkraft:

$$H = \sqrt{S^2 - V^2} = \sqrt{20^2 - 4^2} = \sqrt{384} = 19{,}596 \text{ Pfund},$$

die Tangente des Aufhängewinkels:

$$tang.\,\varphi = \frac{V}{H} = \frac{4}{19{,}596} = 0{,}20412,$$

der Winkel φ selbst $= 11^0\,32'$; ferner das Maß der Horizontalspannung:

$$c = \frac{H}{\gamma} = H : \frac{8}{30} = \frac{30}{8}\,H = 73{,}485 \text{ Fuß},$$

die Spannweite:

$$2b = 2l\left[1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{l}{c}\right)^2\right] = 30\,.\left[1 - \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{15}{73{,}48}\right)^2\right] = 30 - 0{,}208 = 29{,}792 \text{ Fuß}$$

und die Bogenhöhe:

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}\,b\,(l-b)} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{29{,}792\,.\,0{,}208}{2\,.\,2}} = \sqrt{29{,}792\,.\,0{,}078} = 1{,}524 \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Man findet aus dem Halbmesser $CA = CB = CD = r$ und der Ordinate $AM = y$ eines Kreisbogens AB, Fig. 266, die Ordinate $AN = BN = y_1$ des halben Bogens $AD = BD$, wenn man setzt:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + (CB - CM)^2$$
$$= \overline{AM}^2 + \left(\overline{CB} - \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2}\right)^2 = 2\,\overline{CA}^2 - 2\,\overline{CA}\sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2},$$

d. i.:

$$4\,y_1^2 = 2\,r^2 - 2\,r\,\sqrt{r^2 - y^2}.$$

Es ist hiernach:

$$y_1 = \sqrt{\frac{r^2 - r\,\sqrt{r^2 - y^2}}{2}},$$

oder annähernd, wenn y klein ist gegen r:

$$y_1 = \sqrt{1/2\left[r^2 - r\left(r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3}\right)\right]}$$
$$= \sqrt{\frac{y^2}{4}\left(1 + \frac{y^2}{4r^2}\right)} = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right).$$

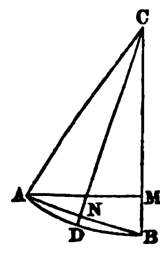
Durch wiederholte Anwendung dieser Formel findet man die Ordinate des Viertelbogens:

$$y_2 = \frac{y_1}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y_1}{4}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + 1/4 \cdot \frac{y^2}{8r^2}\right),$$

ferner die des Achtelbogens:

$$y_3 = \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{8r^2}\right) = \frac{y}{8}\left(1 + \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + 1/4 \cdot \frac{y^2}{8r^2}\right)\left(1 + (1/4)^2\frac{y^2}{8r^2}\right)$$
$$= \frac{y}{8}\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Fig. 266.



Da die Ordinaten sehr kleiner Bögen den Bögen gleichgesetzt werden können, so erhalten wir hiernach den Bogen AB annähernd:

$$s = 8y_3 = y\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2]\frac{y^2}{8r^2}\right),$$

oder genauer:

$$= y\left(1 + [1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \cdots]\frac{y^2}{8r^2}\right).$$

Aber $1 + 1/4 + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \cdots$ ist (nach „Ingenieur" Seite 82) $= \frac{1}{1 - 1/4} = 4/3$, daher folgt:

$$s = \left(1 + \frac{y^2}{6r^2}\right)y;$$

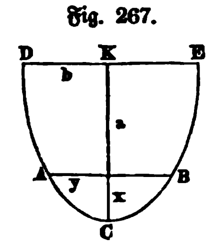
oder wenn man statt r die Abscisse $\overline{BM} = x$ einführt, und $2rx = y^2$ setzt:

$$s = \left[1 + 2/3\left(\frac{x}{y}\right)^2\right]y.$$

Diese Formel ist nicht bloß auf Kreisbögen, sondern auch auf alle gedrückte Curvenbögen anzuwenden.

Anmerkung 2. Vergleicht man die gefundene Gleichung

Fig. 267.



$$y = \sqrt{2cx - \frac{x^2}{8}}.$$

mit der Gleichung

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

einer Ellipse (s. „Ingenieur" Seite 169), so findet man:

$$\frac{b^2}{a} = c \text{ und } \frac{b^2}{a^2} = 1/3, \text{ folglich}$$

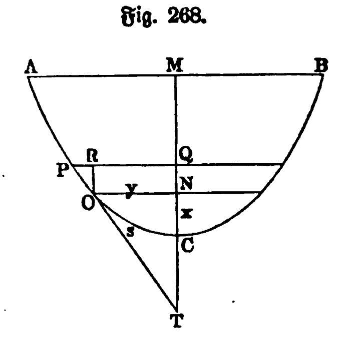
$$a = 3c \text{ und } b = a\sqrt{1/3} = c\sqrt{3}.$$

Es läßt sich also eine stark gespannte Kettenlinie als ein Bogen ACB, Fig. 267, einer Ellipse ansehen, deren große Halbaxe $KC = a = 3c$ und kleine Halbaxe $KD = KE = b = c\sqrt{3} = a\sqrt{1/3} = 0{,}577\,a$ ist.

§. (165.) **Gleichung der Kettenlinie.** Die vollständige Gleichung einer gemeinen Kettenlinie läßt sich mittels des höheren Calculs auf folgende Weise finden.

Nach §. 162 ist für den Aufhängewinkel $TON = \varphi$, Fig. 268, welchen die Berührungslinie OT eines Punktes O der Kettenlinie ACB mit der horizontalen Ordinate ON einschließt, wenn der Bogen CO durch s bezeichnet und die Horizontalspannung $H = c\gamma$ gesetzt wird:

Fig. 268.



$$tang.\, \varphi = \frac{s}{c}.$$

Nun ist aber φ auch gleich dem Winkel OPR, welchen ein Bogenelement $OP = \partial s$ mit einem Elemente $PR = \partial y$ der Ordinate $NO = y$ einschließt, und

$$tang.\, OPR = \frac{OR}{PR} = \frac{\partial x}{\partial y},$$

da OR als ein Element ∂x der Abscisse $CN = x$ anzusehen ist; demnach folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{s}{c}, \text{ oder } \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Auch ist $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$, also $\partial y^2 = \partial s^2 - \partial x^2$, und daher:

$$\frac{\partial s^2 - \partial x^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2}.$$

Durch weitere Umformung ergiebt sich:

$$\partial x^2 (s^2 + c^2) = s^2 \partial s^2, \text{ oder } \partial x = \frac{s \partial s}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Setzt man $s^2 + c^2 = u$, so erhält man:

$$2 s \partial s = \partial u, \text{ und } \partial x = \frac{1/_2\, \partial u}{u^{1/2}} = 1/_2\, u^{-1/2} \partial u;$$

und durch Integration folgt nun (nach §. 18 der analyt. Hülfslehren):

$$x = 1/_2 \int u^{-1/2} \partial u = 1/_2 \cdot \frac{u^{1/2}}{1/_2} + Const. = \sqrt{u} + Const.$$
$$= \sqrt{s^2 + c^2} + Const.,$$

endlich, da x und s zugleich Null sind, also $0 = \sqrt{c^2} + Const.$, d. i. $Const. = -c$ ist:

$$1)\quad x = \sqrt{s^2 + c^2} - c;$$

sowie umgekehrt,

$$s = \sqrt{(x + c)^2 - c^2} = \sqrt{2cx + x^2}, \text{ und}$$

$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x}.$$

Beispiel. Wenn eine 5 Meter lange und 15 Kilogramm schwere Kette ACB so aufgehangen wird, daß die Bogenhöhe $CM = 2$ Meter beträgt, so hat man

$$\gamma = {}^{15}/_5 = 3 \text{ Kilogramm},$$

$$c = \frac{s^2 - x^2}{2x} = \frac{(2{,}5)^2 - 2^2}{4} = {}^9/_8,$$

und daher die Horizontalspannung:

$$H = c\gamma = 3 \,.\, {}^9/_8 = 3^3/_8 \text{ Kilogramm}.$$

Sowie wir im vorigen Paragraphen durch Entfernung von ∂y auf eine Gleichung zwischen dem Bogen s und der Abscisse gestoßen sind, ebenso können wir nun durch Eliminirung von ∂x eine Gleichung zwischen dem Bogen s und der Ordinate y finden. Man setzt zu diesem Zwecke in der Gleichung: (§. 166.)

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{c^2}{s^2},\ \partial x^2 = \partial s^2 - \partial y^2,$$

und erhält so die Gleichung:

$$\frac{s^2}{c^2} = \frac{\partial s^2 - \partial y^2}{\partial y^2}, \text{ oder } \partial y^2 (s^2 + c^2) = c^2 \partial s^2, \text{ also}$$

$$\partial y = \frac{c \partial s}{\sqrt{s^2 + c^2}}.$$

Dividirt man im Zähler und Nenner durch c und setzt $\frac{s}{c} = v$, so erhält man:

$$\partial y = \frac{c \partial \left(\frac{s}{c}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{c}\right)^2}} = \frac{c \partial v}{\sqrt{1 + v^2}},$$

und es liefert nun die Formel XIII. in §. 26 der analytischen Hülfslehren das entsprechende Integral:

$$y = c \int \frac{\partial v}{\sqrt{1 + v^2}} = c \,.\, Log. nat. \left(v + \sqrt{1 + v^2}\right), \text{ d. i.}$$

2) $$y = c \,.\, Log. nat. \left(\frac{s + \sqrt{s^2 + c^2}}{c}\right).$$

Setzt man in dieser Formel $s = \sqrt{2cx + x^2}$, so erhält man die eigentliche Coordinatengleichung der gemeinen Kettenlinie:

3) $$y = c \,.\, Log. nat. \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right),$$

auch ist:

$$4)\quad y = c\ Log.\ nat. \left(\frac{s + x}{s - x}\right) = \frac{s^2 - x^2}{2x}\ Log.\ nat. \left(\frac{s + x}{s - x}\right).$$

Endlich folgt aber durch Umkehrung von 2. und 3.:

$$5)\quad s = \left(e^{\frac{y}{c}} - e^{-\frac{y}{c}}\right) \cdot \frac{c}{2} \text{ und}$$

$$6)\quad x = \left[{}^1/_2 \left(e^{\frac{y}{c}} + e^{-\frac{y}{c}}\right) - 1\right] c,$$

und es bezeichnet e die Grundzahl 2,71828 . . . des natürlichen Logarithmensystemes (s. §. 19 der analyt. Hülfslehren).

Beispiel. Zwei zusammengehörige Coordinaten einer Kettenlinie sind $x = 2$ Fuß und $y = 3$ Fuß, man sucht die Horizontalspannung c dieser Curve?

Annähernd ist nach Nro. 3 des Paragraphen 164:

$$c = \frac{y^2}{2x} + \frac{x}{6} = \frac{9}{4} + \frac{2}{6} = 2{,}58.$$

Nach Nro. 3 dieses Paragraphen (166) ist aber genau:

$$y = c\,Ln. \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right), \text{ d. i.:}$$

$$3 = c\,Ln. \left(\frac{c + 2 + \sqrt{4c + 4}}{c}\right).$$

Hierin $c = 2{,}58$ gesetzt, bekommt man den Fehler:

$$f = 3 - 2{,}58\ Ln. \left(\frac{4{,}58 + 2\sqrt{3{,}58}}{2{,}58}\right) = 3 - 2{,}58\ Ln. \left(\frac{8{,}3642}{2{,}58}\right)$$
$$= 3 - 3{,}035 = -0{,}035;$$

nimmt man aber $c = 2{,}53$ an, so erhält man den Fehler:

$$f_1 = 3 - 2{,}53\ Ln. \left(\frac{4{,}53 + 2\sqrt{3{,}53}}{2{,}53}\right) = 3 - 2{,}53\ Ln. \left(\frac{8{,}2876}{2{,}53}\right)$$
$$= 3 - 3{,}002 = -0{,}002.$$

Um nun den wahren Werth von c zu finden, setzen wir nach einer bekannten Regel (s. „Ingenieur", Seite 76):

$$\frac{c - 2{,}58}{c - 2{,}53} = \frac{f}{f_1} = \frac{0{,}035}{0{,}002} = 17{,}5,$$

auf diese Weise folgt: $16{,}5 \,.\, c = 17{,}5 \,.\, 2{,}53 - 2{,}58 = 41{,}69$, daher:

$$c = \frac{41{,}69}{16{,}5} = 2{,}527 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung 1. Verschiebt man den Coordinatenanfangspunkt in der Axe CX, Fig. 269, um $CD = c$ zurück, so geht die Abscisse $CN = x$ in:

$$DN = KO = x_1 = c + x$$

über und die Gleichung:

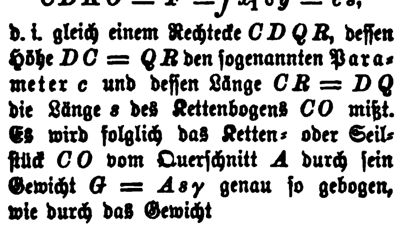
$$x = \sqrt{s^2 + c^2} - c \text{ in}$$
$$x_1 = \sqrt{s^2 + c^2},$$

sowie die Gleichung:

$$y = c \; Log. \; nat. \left(\frac{c + x + \sqrt{2cx + x^2}}{c}\right) \text{ in}$$

$$y = c \; Log. \; nat. \left(\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - c^2}}{x_1}\right) \text{ über.}$$

Fig. 269.

Auch ist das Flächenelement $OKLP$

$$x_1 \partial y = \sqrt{s^2 + c^2}\, \partial y = c \partial s,$$

und daher der Flächenraum

$$CDKO = F = \int x_1 \partial y = cs,$$

d. i. gleich einem Rechtecke $CDQR$, dessen Höhe $DC = QR$ den sogenannten Parameter c und dessen Länge $CR = DQ$ die Länge s des Kettenbogens CO mißt. Es wird folglich das Ketten- oder Seilstück CO vom Querschnitt A durch sein Gewicht $G = As\gamma$ genau so gebogen, wie durch das Gewicht

$$G = Fe\gamma = ces\gamma$$

einer Platte $CDKO$ von der Dicke

$$e = \frac{A}{c}.$$

Anmerkung 2. Sehr einfach lassen sich für die gemeine Kettenlinie s, x und y durch den Aufhängewinkel φ ausdrücken; es ist nämlich nach dem Vorstehenden:

$$s = c \; tang. \varphi = \frac{c \; sin. \varphi}{cos. \varphi}, \text{ ferner:}$$

$$x = c\left(\sqrt{1 + tang. \varphi^2} - 1\right) = \frac{c\,(1 - cos. \varphi)}{cos. \varphi} \text{ und}$$

$$y = c \; Log. nat. \left(tang. \varphi + \sqrt{1 + tang. \varphi^2}\right) = c \; Log. nat. \left(\frac{1 + sin. \varphi}{cos. \varphi}\right).$$

Mittels dieser Formeln kann man die Bogen und Coordinatenlängen für verschiedene Neigungs- oder Aufhängewinkel berechnen, und es läßt sich hierzu leicht eine zweckmäßige Tabelle, wie im „Ingenieur" S. 353, anfertigen. Hierbei hat man nur eine einzige Kettenlinie, am besten diejenige, bei welcher das Maß c der Horizontalspannung $= 1$ ist, zu Grunde zu legen; für eine andere Kettenlinie, welche der Horizontalspannung c entspricht, findet man dann s, x und y, indem man die durch die Tabelle angegebenen Werthe von s, x und y mit c multiplicirt.

Wäre $tang. \varphi$ nicht $= \frac{s}{c}$, sondern $= \frac{y}{c}$, so hätte man es mit der gemeinen Parabel zu thun, für welche

$$s = \frac{c}{2}\left[\frac{sin. \varphi}{cos. \varphi^2} + Ln. tang. \left(\frac{\frac{1}{2}\pi + \varphi}{2}\right)\right],$$

$$x = \frac{c}{2} \; tang. \varphi^2 = \frac{c}{2}\left(\frac{sin. \varphi}{cos. \varphi}\right)^2 \text{ und}$$

$$y = c \; tang. \varphi = \frac{c \; sin. \varphi}{cos. \varphi} \text{ ist.}$$

§. 167. **Gleichgewicht der Rolle.** Seile, Riemen u. s. w. sind auch die gewöhnlichsten Mittel, wodurch Kräfte auf Rollen und Radwellen übertragen werden. Von den Theorien dieser beiden Vorrichtungen möge deshalb hier noch das Allgemeinste, so viel es ohne Berücksichtigung der Reibung und Steifigkeit möglich ist, entwickelt werden.

Eine Rolle (franz. poulie; engl. pulley) ist eine um eine Axe drehbare kreisförmige Scheibe ABC, Fig. 270 und Fig. 271, um deren Umfang

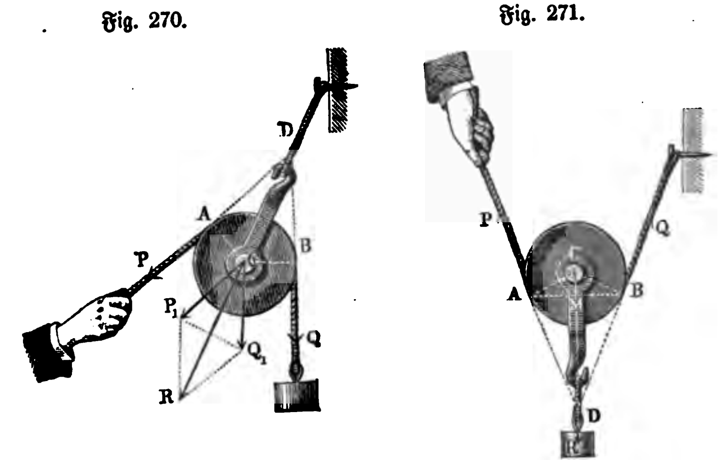


Fig. 270. Fig. 271.

ein Seil liegt, dessen Enden durch Kräfte P und Q angespannt werden. Bei einer festen Rolle (franz. p. fixe; engl. fixed p.) ist das Gehäuse oder Lager (franz. chape; engl. block), worin ihre Axen oder Zapfen ruhen, unbeweglich, bei einer losen Rolle (franz. p. mobile; engl. moveable p.) hingegen ist das Zapfengehäuse beweglich.

Im Gleichgewichtszustande einer jeden Rolle sind die Kräfte P und Q an den Seilenden gleich groß, denn jede Rolle ist ein gleicharmiger Winkelhebel, den man erhält, wenn man von der Axe C Perpendikel CA und CB auf die Kräfte- oder Seilrichtungen DP und DQ fällt. Auch ist klar, daß die Kräfte P und Q bei irgend einer Drehung um C einerlei Weg, nämlich $r\beta$, zurücklegen, wenn r den Halbmesser $CA = CB$ und β^0 den Umdrehungswinkel bezeichnet, und daß sich auch hieraus auf die Gleichheit zwischen P und Q schließen läßt. Aus den Kräften P und Q entspringt noch eine vom Zapfenlager aufzunehmende Mittelkraft $\overline{CR} = R$, die von dem Winkel $ADB = \alpha$, unter welchem die Seilrichtungen zusammenstoßen, abhängig ist und sich als Diagonale des aus P und α zu construirenden Rhombus CP_1, RQ_1,

$$R = 2\,P\,cos.\,\frac{\alpha}{2} \text{ ergiebt.}$$

Bei der festen Rolle, Fig. 270, wirkt die zu hebende Last oder der zu überwindende Widerstand Q an einem Seilende genau wie die Kraft P; es ist daher hier Kraft gleich Last, und es bewirkt die Anwendung dieser Rolle nichts weiter als eine Richtungsveränderung, weshalb man sie auch eine Leitrolle (franz. poulie de renvoi, engl. guide pulley) nennt. Bei der losen Rolle, Fig. 271, hingegen wirkt die Last R an dem hakenförmigen Ende des Zapfenlagers, während das eine Seilende an einem unbeweglichen Gegenstande befestigt ist; hier ist also die Kraft §. 168.

$$P = \frac{R}{2\,cos.\,\frac{\alpha}{2}}$$

zu setzen. Bezeichnen wir die Sehne AMB, welche dem mit Seil bedeckten Bogen entspricht, durch a und den Halbmesser $CA = CB$, wie vorhin, durch r, so ist:

$$a = 2\,\overline{AM} = 2\,.\overline{CA}\;cos.\,CAM = 2\,\overline{CA}\;cos.\,ADM = 2\,r\,cos.\,\frac{\alpha}{2},$$

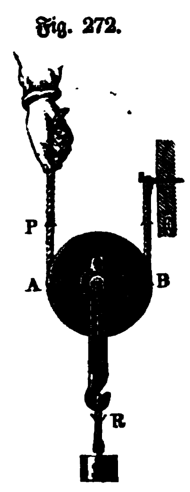
es läßt sich daher $\frac{r}{a} = \frac{1}{2\,cos.\,\frac{\alpha}{2}}$ und ebenso

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{a}$$

setzen. Diesem nach verhält sich also bei der losen Rolle die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Seilbogens.

Ist $a = 2r$, bedeckt also das Seil einen Halbkreis, Fig. 272, so fällt die Kraft am kleinsten, nämlich $P = \frac{1}{2}R$ aus; ist $a = r$, also 60° von der Rolle mit Seil bedeckt, so hat man $P = R$. Je kleiner nun a ausfällt, desto größer wird P, und für ein unendlich kleines a, d. h. für eine unendlich kleine Seilbedeckung ist die Kraft P unendlich groß. Bei den Wegen tritt ein umgekehrtes Verhältniß ein; ist s der Weg von P, welcher einem Wege h von R entspricht, so hat man $Ps = Rh$, daher:

Fig. 272.



$$\frac{s}{h} = \frac{a}{r}.$$

Die lose Rolle ist also ein Mittel zur Kraftveränderung, weshalb sie auch die Kraftrolle genannt wird; es läßt sich durch dieselbe z. B. eine gegebene Last durch eine kleinere Kraft heben; in dem Verhältnisse aber, in welchem man an Kraft gewinnt, verliert man an Weg.

Um das Verhältniß $\frac{P}{R}$ der Kraft zur Last auf ein Drittel herabzuziehen, führt man das Seil einer losen Rolle AB, Fig. 273, über eine Leitrolle F und befestigt das eine Ende desselben an dem Bügel oder Kloben DE, woran auch die Last R hängt. Es wird dann die Last R sammt dem Gewichte G der armirten Rolle durch drei Seile getragen, wovon jedes mit der Kraft

$$Q = \frac{R + G}{3}$$

gespannt ist. Führt man das Seil noch über eine zweite Leitrolle H, so kann die belastete lose Rolle auch durch eine abwärts ziehende Kraft

$$P = Q = \frac{R + G}{3}$$

gehoben werden.

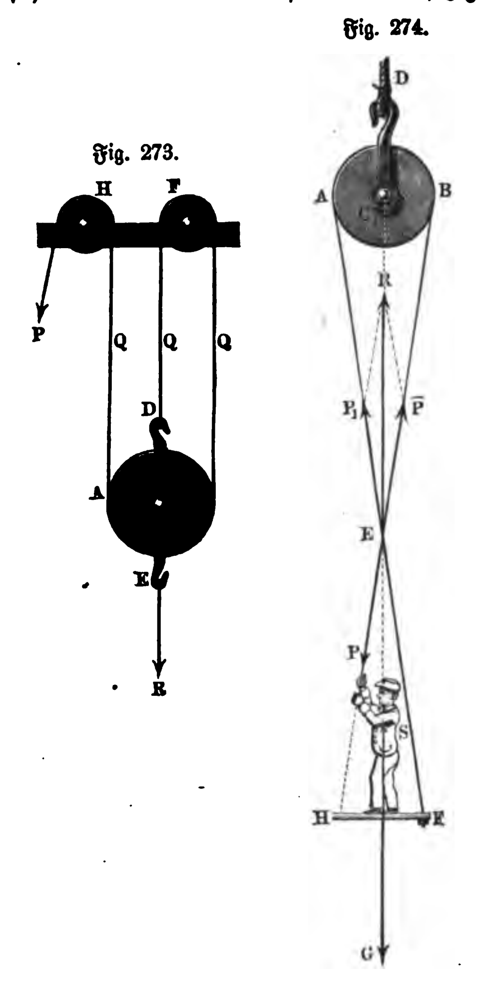


Fig. 273.

Fig. 274.

Beispiel. Die Kraft $\overline{EP} = \overline{P}$, mit welcher ein Mann an einem über eine Leitrolle AB, Fig. 274, weggeführten Seile abwärtszieht, wird durch die Rolle in eine aufwärtsgerichtete Kraft P_1 verwandelt, welche das Trittbrett FH emporzieht. Da nun dem Principe der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung zufolge, der Mann durch eine Gegenkraft $\overline{P}$ emporgezogen wird, so ist die aus P_1 und $\overline{P} = P_1$ hervorgehende Mittelkraft R, welche dem Gewichte G des Mannes das Gleichgewicht hält.

Bezeichnet α den Winkel $CEA = CEB$, um welchen die Richtungen der Seilenden von der verticalen Schwerlinie CS des Mannes abweichen, so läßt sich setzen:

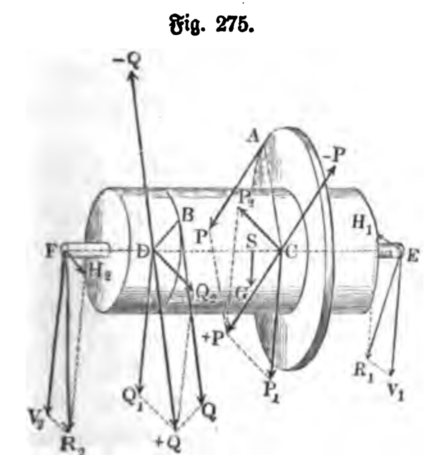
$$G = R = 2P \cos. \alpha,$$

daher umgekehrt die Muskelkraft, durch welche sich der Mensch mittels dieses Mechanismus emporhebt, $P = \frac{G}{2\, cos.\, \alpha}$, oder nahe $= \frac{1}{2} G$, d. i. gleich der Hälfte seines eigenen Gewichts, wenn α klein ist, also die Seilrichtungen von der Verticalen nur wenig abweichen.

Anmerkung. Von der Zusammensetzung der Rollen zu Rollen- und Flaschenzügen, sowie von dem Einflusse der Reibung und des Steifigkeitswiderstandes auf das Gleichgewicht der Rollen ist im dritten Bande die Rede.

Radwelle. Die Radwelle (franz. roue sur l'arbre; engl. wheel and axle) ist eine feste, um eine gemeinschaftliche Axe drehbare Verbindung, $ABFE$, Fig. 275, von zwei festen Rollen oder Rädern. Das kleinere von diesen Rädern heißt Welle (franz. arbre; engl. axle), das größere aber Rad (franz. roue; engl. wheel). Die runden Enden E und F, womit diese Maschine aufruht, heißen Zapfen (franz. tourillons; engl. trunnions). Die Umdrehungsaxe einer Radwelle ist entweder horizontal, oder vertical, oder schief. Hier soll zunächst nur von derjenigen Radwelle die Rede sein, welche sich um eine horizontale Axe dreht; auch wollen wir hier voraussetzen, daß die Kräfte P und Q oder die Kraft P und die Last Q an den Enden vollkommen biegsamer Seile wirken, welche um die Umfänge des Rades und der Welle gelegt sind. Die zu beantwortenden Fragen sind: in welchem Verhältnisse stehen Kraft P und Last Q zu einander, und welche Drücke haben die Zapfenlager bei E und F aufzunehmen? §. 169.

Fig. 275.

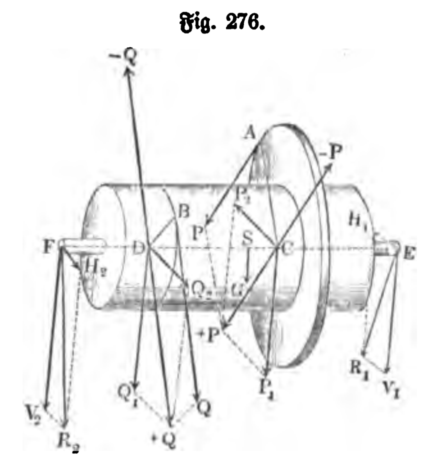


Denkt man sich in dem Punkte C, wo die Umdrehungsebene der Kraft P die Axe EF der Maschine schneidet, noch zwei Gegenkräfte $+ P$ und $- P$ wirksam, welche der in A angreifenden Umdrehungskraft gleich und ihr parallel gerichtet sind, so erhält man aus der Zusammensetzung dieser drei Kräfte eine Axenkraft $\overline{CP} = P$ und ein Kräftepaar $(P, - P)$, dessen Moment $= P \,.\, \overline{CA} = Pa$ ist, wenn a den Hebelarm der Kraft $\overline{AP} = P$, oder den Halbmesser $\overline{CA}$ des Rades bezeichnet; und denken wir

uns gleichfalls im Punkte D, wo die Umdrehungsebene der Last Q von der Axe EF geschnitten wird, die Gegenkräfte Q und $-Q$ angebracht, so erhalten wir auch noch eine Axenkraft $\overline{DQ} = Q$ und ein Kräftepaar $(Q, -Q)$, dessen Moment $= Q \,.\, \overline{DB} = Qb$ ist, wenn b den Hebelarm der in B angreifenden Last Q oder den Halbmesser $\overline{DB}$ der Welle bezeichnet.

Da die Axenkräfte $\overline{CP} = P$ und $\overline{DQ} = Q$ von der Axe aufgenommen werden, und folglich gar keinen Einfluß auf die Umdrehung der Maschine ausüben, so ist zur Herstellung des Gleichgewichts nöthig, daß die beiden in parallelen Ebenen wirkenden Kräftepaare $(P, -P)$ und $(Q, -Q)$ (vergl. §. 96) gleiche Momente haben, daß also

Fig. 276.



$$Pa = Qb,$$

oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{a}$$

ist.

Es ist also bei jeder beliebig langen Radwelle, wie bei jedem Hebel, im Gleichgewichtszustande, das Moment Pa der Kraft gleich dem Momente Qb der Last, oder das Verhältniß der Kraft zur Last gleich dem des Lastarmes zu dem Kraftarme.

Wirken mehr als zwei Kräfte an einer Radwelle, so ist natürlich auch die Summe der Momente der Kräfte, welche nach der einen Umdrehungsrichtung wirken, gleich der Summe der Momente der Kräfte in der anderen Umdrehungsrichtung zu setzen.

§. 170. Die Axenkräfte $\overline{CP} = P$ und $\overline{DQ} = Q$ lassen sich nur noch in die Verticalkräfte $\overline{CP_1} = P_1$ und $\overline{DQ_1} = Q_1$, und in die Horizontalkräfte $\overline{CP_2} = P_2$ und $\overline{DQ_2} = Q_2$ zerlegen; es geben nun die ersteren Kräfte in Vereinigung mit dem im Schwerpunkte S der Maschine angreifenden Gewichte G der Maschine den gesammten verticalen Zapfendruck, d. i.:

$$V_1 + V_2 = P_1 + Q_1 + G,$$

während aus den Horizontalkräften P_2 und Q_2 seitliche Zapfendrücke H_1 und H_2 hervorgehen. Bezeichnet α den Neigungswinkel PCP_2 der Richtung der

Kraft P gegen den Horizont, und β den Neigungswinkel $Q D Q_2$ der Last, so hat man:

$$P_1 = P \sin. \alpha \text{ und } P_2 = P \cos. \alpha, \text{ sowie}$$
$$Q_1 = Q \sin. \beta \text{ und } Q_2 = Q \cos. \beta.$$

Ist ferner l die ganze Axenlänge $\overline{EF}$, d der Abstand $\overline{CE}$, e der Abstand $\overline{DE}$ und s der Abstand $\overline{SE}$ der Axenpunkte C, D und S von dem einen Axenende E, so hat man der Theorie des Hebels (§. 139) zufolge:

1) Wenn man E als Stützpunkt des von den Kräften P_1, Q_1 und G ergriffenen Hebels EF ansieht:

$$V_2 \,.\, \overline{EF} = P_1 \,.\, \overline{EC} + Q_1 \,.\, \overline{ED} + G \,.\, \overline{ES}, \text{ d. i.:}$$
$$V_2 l = P_1 d + Q_1 e + G s,$$

wonach sich der Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{P_1 d + Q_1 e + G s}{l}$$

ergiebt, und

2) wenn man F als Stützpunkt des gedachten Hebels behandelt:

$$V_1 \,.\, \overline{FE} = P_1 \,.\, \overline{FC} + Q_1 \,.\, \overline{FD} + G \,.\, \overline{FS}, \text{ d. i.:}$$
$$V_1 l = P_1 (l - d) + Q_1 (l - e) + G (l - s),$$

so daß der Verticaldruck:

$$V_1 = \frac{P_1 (l - d) + Q_1 (l - e) + G (l - s)}{l}$$

folgt.

Die Horizontaldrücke H_1 und H_2 ergeben sich aus den Horizontalkräften P_2 und Q_2 wie folgt.

1) Wenn man E als Stützpunkt des von P_2 und Q_2 ergriffenen Hebels EF annimmt, und hiernach

$$H_2 \,.\, \overline{EF} = Q_2 \,.\, \overline{ED} - P_2 \,.\, \overline{EC}, \text{ d. i.:}$$
$$H_2 l = Q_2 e - P_2 d$$

setzt, folgt der Horizontaldruck:

$$H_2 = \frac{Q_2 e - P_2 d}{l}, \text{ und}$$

2) wenn man F als Stützpunkt behandelt:

$$H_1 \,.\, \overline{FE} = P_2 \,.\, \overline{FC} - Q_2 \,.\, \overline{FD}, \text{ d. i.:}$$
$$H_1 l = P_2 (l - d) - Q_2 (l - e),$$

ergiebt sich der Horizontaldruck:

$$H_1 = \frac{P_2 (l - d) - Q_2 (l - e)}{l}.$$

Durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes erhält man nun die gesammten Drücke R_1 und R_2 an den Zapfen E und F, und zwar:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} \text{ und } R_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2}.$$

Sind endlich noch δ_1 und δ_2 die Winkel $R_1 E H_1$ und $R_2 F H_2$, um welche diese Drücke von dem Horizonte abweichen, so hat man:

$$tang.\, \delta_1 = \frac{V_1}{H_1} \text{ und } tang.\, \delta_2 = \frac{V_2}{H_2}.$$

Beispiel. Die Last Q einer Radwelle AB, Fig. 276, zieht mit 365 Pfund senkrecht nieder; der Halbmesser des Rades ist $a = 1^3/_4$ Fuß; der Halbmesser der Welle, $b = {}^3/_4$ Fuß; das Gewicht der leeren Radwelle beträgt 200 Pfund; der Schwerpunkt derselben steht von dem Zapfenlager E um $s = 1^1/_2$ Fuß ab, das Radmittel ist um $d = {}^3/_4$ Fuß von diesem Zapfen E und die Verticalebene, in welcher die Last wirkt, ist um $e = 2$ Fuß von demselben entfernt, während die ganze Axenlänge $EF = l = 4$ Fuß beträgt; wenn nun die zur Herstellung des Gleichgewichts nöthige Kraft P am Rade, unter einem Winkel α von 50 Grad vom Horizonte abweichend, niederzieht, wie groß wird dieselbe ausfallen und welches werden die Zapfendrücke sein? Es ist $Q = 365$, $\beta = 90^0$, folglich $Q_1 = Q\, sin.\, \beta = Q$ und $Q_2 = Q\, cos.\, \beta = 0$, ferner P unbekannt und $\alpha = 50^0$, daher $P_1 = P\, sin.\, \alpha = 0{,}7660 \,.\, P$ und $P_2 = P\, cos.\, \alpha = 0{,}6428 \,.\, P$. Mittels der Hebelarme $a = 1^3/_4 = {}^7/_4$ und $b = {}^3/_4$, bestimmt sich die Kraft:

$$P = \frac{b}{a}\, Q = {}^3/_7 \,.\, 365 = 156{,}4 \text{ Pfd., } P_1 = 119{,}8 \text{ und } P_2 = 100{,}5 \text{ Pfd.}$$

Weil ferner $l = 4$, $d = {}^3/_4$, $e = 2$ und $s = {}^3/_2$ ist, so folgt $l - d = {}^{13}/_4$, $l - e = 2$ und $l - s = {}^5/_2$. Nun ergiebt sich

1) Für den Zapfen F:

der Verticaldruck

$$V_2 = \frac{119{,}8 \,.\, {}^3/_4 + 365 \,.\, 2 + 200 \,.\, {}^3/_2}{4} = 280{,}0 \text{ Pfund,}$$

und der Horizontaldruck:

$$H_2 = \frac{100{,}5 \,.\, {}^3/_4 - 0 \,.\, 2}{4} = 18{,}8 \text{ Pfund,}$$

folglich der Mitteldruck:

$$R_2 = \sqrt{V_2^2 + H_2^2} = \sqrt{280^2 + 18{,}8^2} = 280{,}6 \text{ Pfund,}$$

und für dessen Neigung δ_2 gegen den Horizont:

$$tang.\, \delta_2 = \frac{280{,}0}{18{,}8},\ Log.\, tang.\, \delta_2 = 1{,}17300, \text{ also } \delta_2 = 86^0\, 9{,}5'.$$

2) Für den Zapfen E:

$$V_1 = \frac{119{,}8 \,.\, {}^{13}/_4 + 365 \,.\, 2 + 200 \,.\, {}^5/_2}{4} = 404{,}8 \text{ Pfund,}$$

$$H_1 = \frac{100{,}5 \,.\, {}^{13}/_4 - 0}{4} = 81{,}7 \text{ Pfund,}$$

folglich der Mitteldruck:

$$R_1 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = \sqrt{404{,}8^2 + 81{,}7^2} = 413{,}0 \text{ Pfund,}$$

und für dessen Neigung δ_1 gegen den Horizont:

$$tang.\,\delta_1 = \frac{404,8}{81,7},\ Log.\,tang.\,\delta_1 = 0,69502,\ \delta_1 = 78^0\,35'.$$

Uebrigens ist sehr richtig:

$V_1 + V_2 = 280 + 404,8 = 684,8 = P_1 + Q_1 + G$, und ebenso

$H_1 + H_2 = 81,7 + 18,8 = 100,5 = P_2 + Q_2$.

Fünftes Capitel.

Die Widerstände der Reibung und Steifigkeit der Seile.

Widerstand der Reibung. Wir haben seither angenommen (§. 142), daß zwei Körper nur durch Kräfte auf einander wirken können, welche winkelrecht gegen ihre gemeinschaftliche Berührungsebene gerichtet sind. Wären diese Körper vollkommen starr und ihre Oberflächen an den Stellen der Berührung vollkommen mathematische, d. h. auch nicht von den kleinsten ungesetzmäßigen Erhabenheiten und Vertiefungen unterbrochen, so würde dieses Gesetz auch durch die Erfahrung vollkommen bestätigt werden; weil aber jeder materielle Körper einen gewissen Grad von Elasticität, oder nach Befinden Weichheit, besitzt, und weil die Oberfläche eines jeden Körpers, selbst wenn dieselbe polirt oder in hohem Grade geglättet ist, noch kleine Erhöhungen und Vertiefungen hat und in Folge der Porosität der Materie kein Continuum bildet, so findet bei der gegenseitigen Wirkung zweier sich berührenden Körper auch immer ein gegenseitiges Eindrücken und Eingreifen der Theile an der Berührungsstelle statt, wodurch sich ein Zusammenhang zwischen beiden Körpern bildet, der nur durch eine besondere Kraft, deren Richtung in die Berührungsebene selbst fällt, aufgehoben werden kann. §. 171.

Dieser, durch das Eindringen und Ineinandergreifen der sich berührenden Körper hervorgebrachte Zusammenhang und der daraus entspringende, in der Berührungsebene wirkende Widerstand ist es, welcher den Namen Reibung (franz. frottement; engl. friction) erhalten hat. Die Reibung tritt bei der Bewegung der Körper als eine passive Kraft oder als Widerstand (Reibungswiderstand) auf, weil sie nur Bewegungen verhindert oder hemmt, dieselben aber nie erzeugt oder befördert. Sie läßt sich bei Untersuchungen in der Mechanik als eine Kraft einführen, die jeder Bewegung, deren Richtung

in die Ebene der Berührung beider Körper fällt, entgegenwirkt. In welcher Richtung man auch einen auf einer horizontalen oder geneigten Ebene ruhenden Körper fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung entgegenwirken, sie wird z. B. dem Hinabsinken auf der schiefen Ebene ebenso viel hinderlich sein als dem Hinaufgleiten auf derselben. Bei einem im Gleichgewichtszustande befindlichen Kräftesysteme erzeugt der kleinste Zusatz an Kraft Bewegung, so lange die Reibung außer Spiel bleibt; influirt aber dieselbe, so ist zur Störung des Gleichgewichtes ein größerer, von der Reibung abhängiger Zusatz an Kraft nöthig.

§. 172. Während der Ueberwindung der Reibung werden die in Berührung gekommenen Theile zusammengedrückt, die vorstehenden Theile umgebogen, nach Befinden abgerissen, abgebrochen u. s. w. Es hängt deshalb die Reibung nicht nur von der Rauhigkeit oder Glätte der reibenden Flächen, sondern auch von der materiellen Beschaffenheit der Körper selbst ab. Härtere Metalle geben z. B. meist weniger Reibung als weichere. Uebrigens lassen sich über die Abhängigkeit der Reibung von den natürlichen Eigenschaften der Körper **a priori** keine allgemeinen Regeln aufstellen; es ist vielmehr nöthig, mit Körpern von verschiedenen Materien Reibungsversuche anzustellen, um hiernach die unter anderen Verhältnissen stattfindenden Reibungen zwischen Körpern von denselben Materien ermitteln zu können.

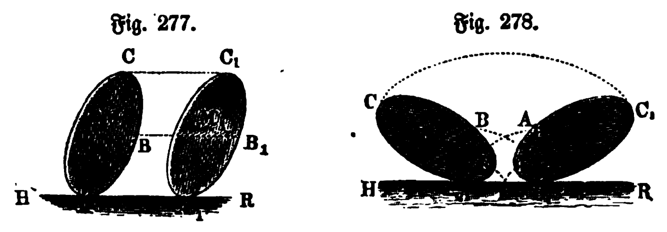
Einen besonderen Einfluß auf die Reibung und auf das daraus hervorgehende Abreiben und Abnutzen der sich berührenden Körper üben die Schmieren (franz. les enduits; engl. the ungents) aus, mit denen man die sich reibenden Flächen bestreicht. Durch die ganz- oder halbflüssigen Schmiermittel, wie Oel, Unschlitt, Fett, Seife u. s. w., werden die Poren der Körper ausgefüllt und andere Rauheiten vermindert, und wird überhaupt das tiefere Eindringen der Körper in einander verhindert, weshalb sie meist eine bedeutende Verminderung der Reibung herbeiführen.

Uebrigens ist die Reibung nicht mit der Adhäsion, d. h. mit demjenigen Zusammenhängen zweier Körper zu verwechseln, welches eintritt, wenn Körper in vielen Punkten in Berührung kommen, ohne daß ein gegenseitiger Druck stattfindet. Die Adhäsion wächst mit der Größe der Berührungsfläche und ist vom Drucke unabhängig, während bei der Reibung das Gegentheil statt hat. Bei kleinen Pressungen tritt sie in Beziehung auf die Reibung bedeutend hervor; sind aber die Pressungen groß, so ist sie nur ein kleiner Theil der Reibung und in der Regel ganz zu vernachlässigen. Schmieren, wie überhaupt alle flüssigen Körper, vermehren die Adhäsion, weil sie eine größere Anzahl von Berührungspunkten herstellen.

§. 173. **Reibungsarten.** Man unterscheidet zwei Arten der Reibung von einander, nämlich die gleitende und rollende oder wälzende. Die gleitende

Reibung (franz. f. de glissement; engl. f. of sliding) ist derjenige Reibungswiderstand, welcher sich herausstellt, wenn sich ein Körper gleitend, d. h. so bewegt, daß alle Punkte desselben parallele Linien beschreiben. Die rollende oder wälzende Reibung (franz. f. de roulement; engl. f. of rolling) hingegen ist derjenige Widerstand, welcher beim Wälzen, d. h. bei derjenigen Bewegung eines Körpers entsteht, wo sich jeder Punkt progressiv und drehend zugleich bewegt und der Berührungspunkt auf dem bewegten Körper einen eben so großen Weg zurücklegt als auf dem ruhenden Körper. Ein gegen die Ebene HR sich stützender Körper M, Fig 277, geht z. B.

Fig. 277. Fig. 278.



gleitend über die Ebene hin und hat somit gleitende Reibung zu überwinden, wenn alle Punkte desselben, wie A, B, C u. s. w., die parallelen Wege AA_1, BB_1, CC_1 u. s. w. zurücklegen und deshalb immer nur dieselben Punkte des bewegten Körpers mit anderen der Unterlage in Berührung kommen. Der Körper M, Fig. 278, rollt oder wälzt sich dagegen auf der Ebene HR und hat dabei wälzende Reibung zu überwinden, wenn sich die Punkte A, B u. s. w. seiner Oberfläche in Trochoiden, d. i. so bewegen, daß der Weg AEB_1 = dem Wege $ADB = A_1 D_1 B_1$, ebenso der Weg AE = dem Wege AD, der Weg $B_1 E = B_1 D_1$ u. s. w. ist.

Eine besondere Art der gleitenden Reibung ist die Axen- oder Zapfenreibung, welche entsteht, wenn sich ein cylindrischer Zapfen in seinem Lager herumdreht. Man unterscheidet aber zweierlei Zapfen, liegende und stehende. Der liegende Zapfen (franz. tourillon; engl. axle, auch gudgeon) reibt sich an seinem Umfange oder Mantel, indem nach und nach gewisse Punkte desselben immer mit denselben Punkten des Lagers oder der Pfanne in Berührung kommen. Der stehende Zapfen (franz. und engl. pivot) hingegen drückt mit seiner kreisförmigen Basis gegen das Lager, während die Punkte der letzteren in concentrischen Kreisen herumgehen.

Besondere Reibungen entstehen noch, wenn ein Körper über einer Schneide oscillirt, wie z. B. beim Wagebalken, oder wenn ein schwingender Körper in einer Spitze aufliegt, wie z. B. die Magnetnadel.

Ferner ist die Reibung einzutheilen in unmittelbare Reibung (franz. f. immédiat; engl. immediate f.) und in mittelbare Reibung (franz. f. médiat; engl. mediate f.). Bei jener sind die sich reibenden Körper in

unmittelbarer Berührung; bei dieser sind sie hingegen durch Schmieren, z. B. durch eine dünne Oelschicht u. s. w. von einander getrennt.

Endlich unterscheidet man noch die Reibung der Ruhe (franz. f. de répos; engl. f. of quiescence), welche zu überwinden ist, wenn ein ruhender Körper in Bewegung gesetzt wird, von Reibung der Bewegung (franz. f. de mouvement; engl. f. of motion), welche sich der Fortsetzung einer Bewegung entgegensetzt.

§. 174. **Reibungsgesetze.** Die allgemeinen Gesetze, welchen die Reibung unterworfen ist, sind folgende:

1) Die Reibung ist proportional dem Normaldrucke zwischen den sich reibenden Körpern. Wenn man einen Körper jetzt noch einmal so stark gegen seine Unterlage drückt als vorher, so fällt die Reibung auch noch einmal so groß aus; der dreifache Druck giebt auch eine dreifache Reibung u. s. w. Wenn dieses Gesetz bei kleinen Drücken Abweichungen von den Beobachtungen giebt, so hat man diese dem hier verhältnißmäßig größeren Einflusse der Adhäsion beizumessen.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Größe der Reibungs- oder Berührungsflächen. Je größer die Reibungsflächen sind, desto größer ist zwar die Zahl der sich reibenden Theile, allein desto kleiner ist auch der Druck und deshalb auch die Reibung eines jeden Theiles; die Summe der Reibungen aller Theile ist deshalb bei einer größeren Fläche dieselbe wie bei einer kleineren, insofern der Druck und die übrigen Verhältnisse dieselben sind. Sind die Seitenflächen eines parallelepipedischen Ziegelsteines von gleicher materieller Beschaffenheit, so ist die Kraft zum Fortschieben desselben auf einer horizontalen Ebene dieselbe, man mag ihn mit der kleinsten oder mit der mittleren oder mit der größten Seitenfläche aufruhen lassen. Nur bei sehr großen Seitenflächen und kleinen Drücken scheint diese Regel in Folge des Einflusses der Adhäsion eine Ausnahme zu erleiden.

3) Die Reibung der Ruhe ist zwar meist größer als die der Bewegung, letztere aber ist von der Geschwindigkeit nicht abhängig; sie ist bei großen Geschwindigkeiten dieselbe wie bei kleinen Geschwindigkeiten.

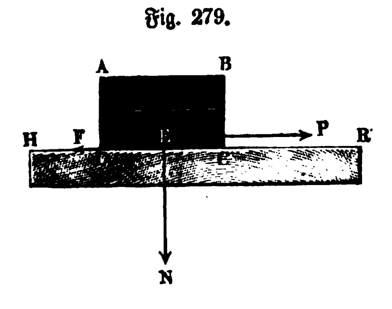
4) Die Reibung eingeschmierter Flächen (mittelbare Reibung) ist in der Regel kleiner als die uneingeschmierter Flächen (unmittelbare Reibung), und hängt weniger von den sich reibenden Körpern als von der Schmiere selbst ab.

5) Die drehende oder Zapfenreibung ist kleiner als die gemeine gleitende oder schiebende Reibung; die wälzende Reibung zwischen glatten Flächen ist in den meisten Fällen so klein, daß sie in Rücksicht auf die gleitende Reibung nicht in Betracht zu ziehen ist.

Anmerkung. Die vorstehenden Regeln gelten streng nur dann, wenn der Zapfendruck auf die Flächeneinheit ein mittlerer ist, und wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens gewisse Grenzen nicht überschreitet. Dieser mittlere Druck auf den Quadratzoll ist etwa 250 bis 500 Pfund, und die mittlere Umfangsgeschwindigkeit 2 bis 10 Zoll. Bei viel kleineren Drücken bildet die Adhäsion einen ansehnlichen Theil des Widerstandes, welcher dann auch von der Größe der Reibungsfläche mit abhängt, und bei sehr großen Drücken und Geschwindigkeiten findet eine so große Wärmeentwickelung statt, daß die Schmiere schnell verdampft, und der Zapfen sowie das Lager desselben der Zerstörung entgegeneilt. Lassen sich große Geschwindigkeiten nicht umgehen, wie z. B. bei Eisenbahnwagen, Turbinen u. s. w., so muß man der Erhitzung der Zapfen durch Vergrößerung der Reibungsfläche, d. i. durch größere Stärke und Länge der Zapfen, entgegenwirken.

Der Reibungscoefficient. Ein auf einer horizontalen Ebene HR, Fig. 279, ruhender Körper AC werde durch eine ganz oder nahe in die Berührungsfläche HR zwischen beiden Körpern fallende Kraft P gleichförmig oder so langsam fortgetrieben, daß hierbei nicht allein das Gewicht, sondern auch die Trägheit des Körpers außer Acht gelassen werden kann. Derselbe drücke gegen seine Unterlage ein Mal mit der Kraft N und erfordere zum Fortziehen, d. h. zur Ueberwindung seiner Reibung F die Kraft P, sowie ein zweites Mal mit der Kraft N_1, wobei zur Herstellung des Gleichgewichts mit der Reibung F_1 dann die Kraft P_1 nothwendig ist. §. 175.

Fig. 279.



Nach dem Vorigen ist nun:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{F}{F_1} = \frac{N}{N_1},$$

und daher

$$F = \frac{F_1}{N_1} \cdot N.$$

Hat man durch einen Versuch die einem gewissen Drucke N_1 entsprechende Reibung F_1 gefunden, so findet man hiernach, wenn die sich reibenden Körper und die übrigen Umstände dieselben sind, die einem anderen Drucke N entsprechende Reibung F, indem man diesen Druck durch das Verhältniß $\left(\frac{F_1}{N_1}\right)$ zwischen den der ersten Beobachtung entsprechenden Werthen F_1 und N_1 multiplicirt.

Dieses Verhältniß der Reibung zum Drucke oder die Reibung für den Druck = Eins, z. B. 1 Kilogramm oder Pfund, heißt der Reibungs-

coefficient (franz. coëfficient du frottement; engl. coefficient of friction) und soll in der Folge immer durch φ ausgedrückt werden, weshalb sich allgemein

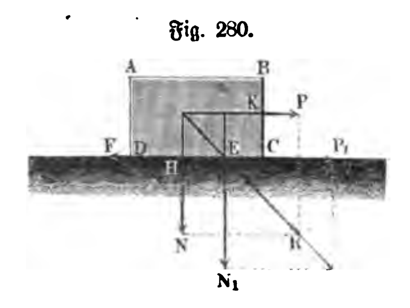
$$F = \varphi \cdot N$$

setzen läßt.

Der Reibungscoefficient ist bei verschiedenen Materien und verschiedenen Zuständen der Reibung verschieden und muß deshalb durch besonders hierzu angestellte Versuche ermittelt werden.

Wenn die der Reibung das Gleichgewicht zu haltende Kraft P nicht in der Berührungsebene selbst, sondern in einem gewissen Abstande von derselben wirkt, so vereinigt sich diese Kraft mit dem Normaldrucke N zu einer Mittelkraft R, welche nur dann den Körper AC auf der Unterlage gleitend fortbewegt, wenn sie durch einen Punkt E, Fig. 280, innerhalb der Basis oder gemeinschaftlichen Berührungsfläche CD beider Körper hindurchgeht. Bezeichnet a den Abstand CK der Kraft P, sowie e den Abstand CH der Kraft N von der äußersten Kante C des Körpers, so bedingt diese Forderung, daß das Moment Pa kleiner als das Moment Ne sei (vergl. §. 146). Wäre $Pa = Ne$, so würde die Mittelkraft R durch die gedachte Kante C gehen und der Körper die Grenze seiner Stabilität erreicht haben, fiele endlich $Pa > Ne$ aus, so würde die Mittelkraft R außerhalb C fallen, folglich der Körper ohne Stabilität sein. Im ersten Falle läßt sich annehmen, daß der Körper AC im Punkte E mit der Kraft $N_1 = N$ auf die Unterlage drücke und daß der Reibung durch die Kraft $P_1 = P$ das Gleichgewicht zu halten und folglich ebenfalls $P = F = \varphi N$ zu setzen sei.

Fig. 280.



Wird der Körper AC um den Weg s auf der Unterlage fortgezogen, so hat man die Arbeit Fs zu verrichten; es ist also die von der Reibung beanspruchte mechanische Arbeit φNs gleich dem Producte aus Reibungscoefficient, Normaldruck und Weg auf der Berührungsebene. Ist die Unterlage ebenfalls beweglich, so hat man unter $s = s_1 - s_2$ den relativen Weg des Körpers zu verstehen und es ist dann $Fs = \varphi Ns$ die Arbeit der Reibung für beide Körper zusammengenommen. Der schneller gehende Körper nimmt beim Durchlaufen des Weges s_1 die Arbeit φNs_1 in Anspruch und der langsamer gehende Körper gewinnt bei Zurücklegung des Weges s_2 durch die Reibung die Arbeit φNs_2; es ist also der durch die Reibung zwischen beiden Körpern entstehende Arbeitsverlust:

$$\varphi Ns_1 - \varphi Ns_2 = \varphi N (s_1 - s_2) = \varphi Ns.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem Drucke von 260 Kilogramm die Reibung 91 Kilogramm beträgt, so ist der entsprechende Reibungscoefficient $\varphi = {}^{91}/_{260} = {}^{7}/_{20} = 0{,}35$. 2) Um einen 500 Pfund schweren Schlitten auf einer horizontalen und sehr glatten Schneebahn fortzuziehen, ist bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}04$ die nöthige Kraft $F = 0{,}04 \, . \, 500 = 20$ Pfund. 3) Wenn der Reibungscoefficient einer auf dem Straßenpflaster fortgezogenen Schleife 0,45 und die Belastung dieser Schleife 300 Kilogramm beträgt, so ist, um diese Schleife 280 Meter fortzuziehen, die mechanische Arbeit $\varphi N s = 0{,}45 \, . \, 300 \, . \, 280 = 37800$ Meterkilogramm erforderlich.

Der Reibungswinkel und Reibungskegel. Liegt ein Körper AC, Fig. 281, auf einer schiefen Ebene FH, deren Neigungswinkel $FHR = \alpha$ ist, so läßt sich dessen Gewicht G in den Normaldruck $N = G \cos.\alpha$ und in die Parallelkraft $P = G \sin.\alpha$ zerlegen. Aus der ersteren Kraft entspringt nun die Reibung $F = \varphi\, G \cos.\alpha$, welche jeder Bewegung auf der Ebene entgegenwirkt, weshalb die Kraft zum Hinaufschieben auf der Ebene: §. 176.

$$P_1 = F + P = \varphi\, G \cos.\alpha + G \sin.\alpha = (\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha)\, G,$$

dagegen die Kraft zum Hinabschieben:

$$P_2 = F - P = (\varphi \cos.\alpha - \sin.\alpha)\, G$$

Fig. 281.

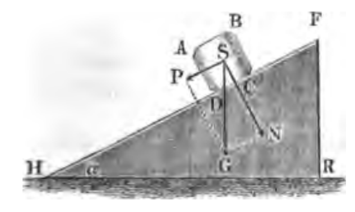
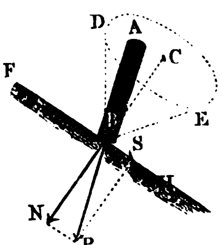


Fig. 282.



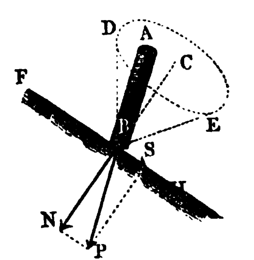
ausfällt. Die letztere Kraft fällt Null aus, d. h. der Körper erhält sich durch seine Reibung auf der schiefen Ebene, wenn $\sin.\alpha = \varphi \cos.\alpha$, d. i. wenn $\tang.\alpha = \varphi$ ist. So lange die schiefe Ebene einen Neigungswinkel α hat, dessen Tangente kleiner als φ ist, so lange bleibt der Körper auf der schiefen Ebene in Ruhe; ist aber die Tangente des Neigungswinkels wenig größer als φ, so gleitet der Körper auf der schiefen Ebene herab. Man nennt diesen Winkel, d. i. denjenigen, dessen Tangente dem Reibungscoefficienten gleich ist, Reibungs-, auch Ruhewinkel (franz. angle du frottement; engl. angle of friction, angle of repose). Es ergiebt sich hiernach durch Beobachtung des Reibungswinkels ϱ, der Reibungscoefficient (für die Reibung der Ruhe), wenn man setzt:

$$\varphi = \tang.\varrho.$$

In Folge der Reibung nimmt die Oberfläche FH, Fig. 282, eines Körpers nicht nur den Normaldruck N eines anderen Körpers AB, sondern auch

dessen schiefen Druck P auf, wenn nur die Abweichung $NBP = \alpha$ der Richtung dieses Druckes von der Normale BN nicht den Reibungswinkel überschreitet; denn da die Kraft P den Normaldruck:

Fig. 283.



$$\overline{BN} = P\, cos.\, \alpha$$

und den Seiten- oder Tangentialdruck:

$$\overline{BS} = S = P\, sin.\, \alpha$$

giebt und aus dem Normaldrucke $P\, cos.\, \alpha$ die jeder Bewegung in der Ebene FH entgegenwirkende Reibung $\varphi P\, cos.\, \alpha$ entsteht, so wird S eine Bewegung nicht hervorbringen können, also im Gleichgewicht bleiben, so lange

$$\varphi P\, cos.\, \alpha > P\, sin.\, \alpha \text{ oder } \varphi\, cos.\, \alpha > sin.\, \alpha, \text{ d. i.}$$

$$tang.\, \alpha < \varphi \text{ oder } \alpha < \varrho$$

ist. Dreht man den Ruhewinkel $CBD = \varrho$ um die Normale CB, so beschreibt er einen Kegel, den man Reibungskegel (franz. cone de fr.; engl. cone of repose) nennen kann. Der Reibungskegel umschließt alle diejenigen Kraftrichtungen, bei welchen eine vollständige Aufnahme des schiefen Druckes stattfindet.

Beispiel. Um einen gefüllten und 200 Pfund schweren Kübel auf einer unter 50 Grad ansteigenden Holzbahn hinaufzuziehen, ist bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}48$ die nöthige Kraft:

$$P_1 = (\varphi\, cos.\, \alpha + sin.\, \alpha)\; G = (0{,}48\; cos.\, 50^0 + sin.\, 50^0)\, .\, 200$$
$$= (0{,}308 + 0{,}766)\, .\, 200 = 215 \text{ Pfund;}$$

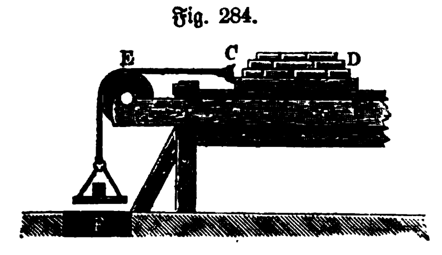
um ihn hinunterzulassen, oder sein Hinuntergehen zu verhindern, ist dagegen die erforderliche Kraft:

$$P_2 = (\varphi\, cos.\, \alpha - sin.\, \alpha)\; G = -\,(sin.\, 50^0 - 0{,}48\, .\, cos.\, 50^0)\, .\, 200$$
$$= -\,(0{,}766 - 0{,}308)\, .\, 200 = -\,91{,}5 \text{ Pfund.}$$

§. 177. **Reibungsversuche.** Versuche über die Reibung sind von Vielen angestellt worden; am ausgedehntesten und im größten Maßstabe ausgeführt sind aber die Versuche von Coulomb und Morin. Beide wendeten zur Erforschung der Reibungscoefficienten für die gleitende Bewegung einen auf einer horizontalen Bahn fortgleitenden Schlitten an, der durch ein über eine feste Rolle weggelegtes und durch Gewichte angespanntes Seil fortgezogen wurde, wie in Fig. 284, wo AB die Bahn, CD den Schlitten, E die Rolle und F das sinkende Gewicht vorstellt, zu ersehen ist. Um die Reibungscoefficienten für verschiedene Materien zu erhalten, wurden nicht nur die Schlittenläufe, sondern die die Unterlage bildenden Balken mit möglichst abgeglätteten Schienen aus den zu untersuchenden Substanzen, wie Holz, Eisen u. s. w., bekleidet. Die Coefficienten für die Reibung der Ruhe ergaben sich aus dem Gewichte,

welches nöthig war, um den Schlitten aus der Ruhe in Bewegung zu setzen; und die Coefficienten für die Reibung der Bewegung ließen sich mit Hülfe der Zeit t berechnen, welche der Schlitten brauchte, um einen gewissen Weg s zu durchlaufen. Ist G das Gewicht des Schlittens und P das Gewicht zum Fortziehen desselben, so hat man die Reibung $= \varphi\, G$, die bewegende Kraft $= P - \varphi\, G$

Fig. 284.



und die Masse $M = \frac{P + G}{g}$, es folgt daher nach §. 70 die Acceleration der entstehenden gleichförmig beschleunigten Bewegung:

$$p = \frac{P - \varphi\, G}{P + G}\, g,$$

und, durch Umkehrung, der Reibungscoefficient:

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P + G}{G} \cdot \frac{p}{g}.$$

Es ist aber noch $s = \frac{1}{2} p\, t^2$ (§. 11), daher $p = \frac{2\,s}{t^2}$ und

$$\varphi = \frac{P}{G} - \frac{P + G}{G} \cdot \frac{2\,s}{g\,t^2}.$$

Läßt man den Schlitten von einer schiefen Ebene herabgleiten, so ist die bewegende Kraft $= G\ (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)$, und die beschleunigte Masse $= \frac{G}{g}$, daher die Beschleunigung

$$p = \frac{2\,s}{t^2} = \frac{G\ (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)}{G}\, g = g\ (sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha)$$

oder: $\frac{2\,s}{g\,t^2} = sin.\,\alpha - \varphi\, cos.\,\alpha$, und daher der Coefficient der gleitenden Reibung

$$\varphi = tang.\,\alpha - \frac{2\,s}{g\,t^2\, cos.\,\alpha}.$$

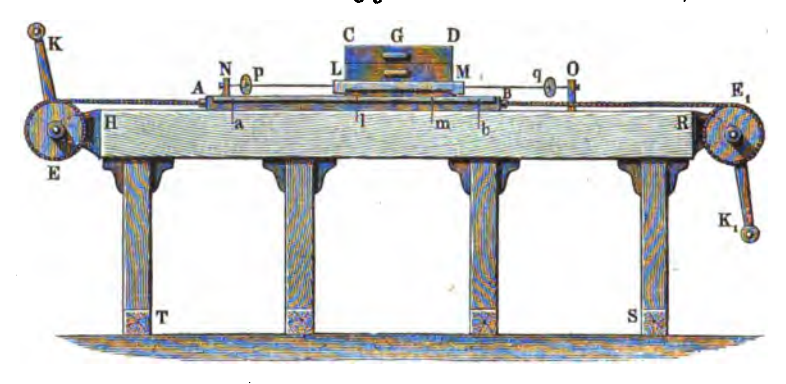
Bezeichnet h die Höhe, l die Länge und a die Basis der geneigten Ebene, so hat man auch

$$\varphi = \frac{h}{a} - \frac{2\,s\,l}{g\,a\,t^2}.$$

Die Kraft, mit welcher ein auf einer Unterlage AB ruhender Körper CD, Fig. 285 (a. f. S.), fortgezogen wird, geht in Folge der Reibung zwischen

beiden Körpern auch auf die Unterlage über; es ist daher zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthig, daß diese mit einer entgegengesetzten Kraft zurück

Fig. 285.



gehalten werde. Ebenso ist auch der Körper CD mit einer gewissen Kraft $-P$ zurückzuhalten, wenn sich die Unterlage AB fortbewegt. Hiernach kann man die Reibung zwischen zwei Körpern auch auf die Weise ermitteln, daß man die Unterlage AB unter dem aufliegenden Körper CD fortzieht und die Kraft mißt, mit welcher dieselbe hierbei den Körper CD mit fortzunehmen sucht. Ist G das Gewicht des Körpers CD und P die Kraft, mit welcher AB denselben mitzunehmen sucht, so hat man

$$P = \varphi G$$

und daher den gesuchten Reibungscoefficienten

$$\varphi = \frac{P}{G}.$$

Der zur Ausführung dieser Reibungsversuche dienende Apparat besteht 1) aus einem feststehenden starken Tisch $HRST$ und zwei an den Enden desselben befestigten Seiltrommeln E und E_1 mit Handkurbeln K und K_1, womit sich die Unterlage AB auf der eingetalgten Tischfläche HR hin- und zurückbewegen läßt, und 2) aus einem Schlitten LM, welcher durch aufgelegte Gewichte G beliebig belastet, sowie mittels Schnüre oder Seile LN und MO, welche durch die Arme N und O mit dem Tischgestelle verbunden sind, an der Fortbewegung mit AB verhindert wird. Zur Angabe der Kräfte P und P_1, womit diese Schnüre in der einen oder anderen Richtung durch die Reibung gespannt werden, dienen eingesetzte Waagen oder Dynamometer p und q, und um die Reibungscoefficienten für verschiedene Körper bestimmen zu können, sind nicht allein die Schlittensohlen lm, sondern auch die Decken ab der Unterlage AB zum Auswechseln eingerichtet.

Bei Anwendung dieses Apparates kann man sehr leicht den Reibungsweg beliebig ausdehnen und durch Anwendung des arithmetischen Mittels aus den Zugkräften nach der einen und der anderen Richtung die genaueren mittleren Werthe der Reibungscoefficienten bestimmen.

Zur Ausmittelung der Reibungscoefficienten für die Zapfenreibung wurde eine feste Rolle ACB, Fig. 286, mit einem umgelegten und durch Gewichte P und Q angespannten Seile angewendet. Aus der Summe $P + Q$ der Gewichte ergab sich der Druck R, und aus der Differenz $P - Q$ die Kraft am Umfang der Rolle, welche der Reibung $F = \varphi\,(P + Q)$ am Umfang des Zapfens das Gleichgewicht hält; ist nun $CA = a$ der Rollenhalbmesser und $CD = r$ der Zapfenhalbmesser, so hat man wegen der Gleichheit der statischen Momente:

$$(P - Q)\,a = Fr = \varphi\,(P + Q)\,r,$$

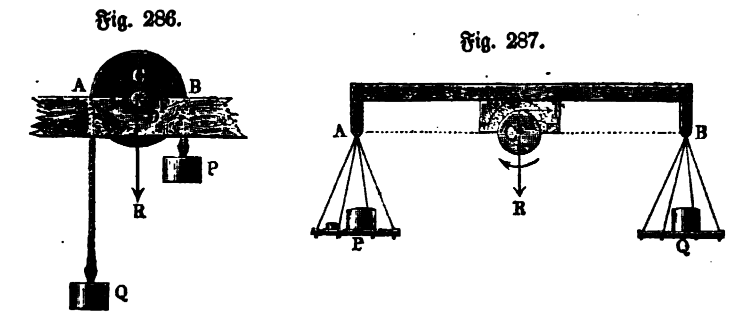
und daher für die Reibung der Ruhe:

$$\varphi = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r},$$

dagegen für die der Bewegung, wenn das Gewicht P in der Zeit t um s sinkt und Q eben so viel steigt:

$$\varphi = \left(\frac{P - Q}{P + Q} - \frac{2s}{gt^2}\right)\frac{a}{r}.$$

Fig. 286. Fig. 287.



Zu den neuesten Versuchen über die Zapfenreibung hat der Ingenieur Hirn den in Fig. 287 abgebildeten Apparat, welchen er eine Reibungswage (balance de frottement) nennt, angewendet. Es ist hier C der durch irgend eine Maschine, z. B. durch ein Wasserrad, in stetige Umdrehung zu setzende Zapfen, D das Zapfenlager und ADB ein gleicharmiger Hebel, welcher mittels der Gewichte P und Q dieses Lager auf den Zapfen aufdrückt. Der Zapfendruck $R = P + Q$ erzeugt die Reibung

$$F = \varphi R = \varphi\,(P + Q)$$

zwischen dem Zapfen und seinem Lager. Mit dieser Kraft sucht der in der

Richtung des Pfeiles umlaufende Zapfen das Lager sammt dem mit ihm fest verbundenen Hebel ADB umzudrehen, und es ist daher, um denselben in horizontaler Lage zu erhalten, auf der einen Seite A desselben das Gewicht P so viel größer zu nehmen, als das Gewicht Q auf der anderen Seite, bis $P - Q$ der Reibung F das Gleichgewicht hält. Nun wirkt aber die Reibung F an dem dem Zapfenhalbmesser gleichen Hebelarme $CD = r$, und die Gewichtsdifferenz $P - Q$ an dem Arme $CA = a$, welche dem Horizontalabstande der Axe C des Zapfens von der Verticalen durch den Aufhängepunkt A gleich ist; daher hat man:

$$Fr = \varphi R r = \varphi (P + Q) r = (P - Q) a,$$

und den gesuchten Reibungscoefficienten wieder

$$\varphi = \frac{P - Q}{P + Q} \cdot \frac{a}{r}.$$

Anmerkung. Vor Coulomb hatten sich schon Amontons, Camus, Bülffinger, Muschenbroek, Ferguson, Vince u. A. mit der Reibung beschäftigt und Versuche über die Reibung angestellt. Die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen haben jedoch für die Praxis wenig Werth, weil sie in zu kleinem Maßstabe angestellt worden sind. Denselben Mangel haben selbst noch die Versuche von Ximenes, welche mit denen von Coulomb fast gleichzeitig angestellt wurden. Die Ergebnisse des Ximenes findet man in dem Werke „Teoria e Pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti, Pisa 1782“. Die Versuche Coulomb's sind ausführlich beschrieben in dem Werke: „Théorie des machines simples etc. par Coulomb. Nouv. édit. 1821“. Einen Auszug hiervon findet man in der Preisschrift von Metternich „vom Widerstande der Reibung, Frankfurt und Mainz 1789“. Die neueren Versuche über die Reibung wurden von Rennie und Morin angestellt. Rennie wendete bei seinen Versuchen theils einen Schlitten auf horizontaler Bahn, theils auch eine schiefe Ebene an, von welcher er die Körper herabgleiten ließ und wobei er aus dem Reibungswinkel auf die Größe der Reibung schloß. Die Versuche Rennie's erstrecken sich auf mannigfaltige in der Technik vorkommende Stoffe, als Eis, Tuch, Leder, Holz, Steine und Metalle; sie liefern auch wichtige Ergebnisse über die Abnutzung der Körper, allein der Apparat und die Art der Ausführung dieser Versuche lassen eine hinreichende Sicherheit, wie sie zumal die Versuche Morin's erreicht zu haben scheinen, nicht erwarten. Eine deutsche Bearbeitung der Rennie'schen Versuche liefert der 17. Band (1832) der Wiener Jahrbücher des K. K. polytechnischen Institutes, auch der 34. Band (1829) von Dingler's polytechnischem Journal. Die ausgedehntesten und einen hohen Grad von Sicherheit versprechenden Versuche sind von Morin zur Ausführung gebracht worden, obgleich nicht abgeleugnet werden kann, daß sie einige Zweifel und Unsicherheiten, und noch dies und jenes zu wünschen übrig lassen. Es ist hier nicht der Ort, die Methoden und Apparate bei diesen Versuchen zu beschreiben, wir können hier nur auf Morin's Schriften: „Nouvelles Expériences sur le frottement“ u. s. w. verweisen. Eine vortreffliche Bearbeitung des Artikels „Reibung“ und eine ziemlich ausführliche Beschreibung aller Versuche über die Reibung, namentlich auch der Morin'schen, giebt Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 16. und 17. Jahrgang, Berlin 1837 und 1838. Neuere Versuche über die mittelbare Reibung, namentlich mit

Berücksichtigung der verschiedenen Schmiermittel, von M. G. Ad. Hirn, sind beschrieben im Bulletin de la société industrielle de Mulhouse, No. 128 und 129, 1855, unter dem Titel: „Etudes sûr les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats etc.“; im Auszuge: „polytechnisches Centralblatt, 1855. Lieferung 10“. Die neuesten Versuche über die Reibung von Bochet sind unter der Ueberschrift: „Nouv. Recherches expérimentales sur le frottement de glissement, par M. Bochet“ in den Annales des Mines, Cinq. Série, Tome XIX, Paris 1861, beschrieben. Waltjen's Reibungswage ist zuerst vom Herrn Prof. Rühlmann beschrieben worden im Jahrgang 1861 des Gewerbevereins für das Königreich Hannover.

Ueber die Ergebnisse der vom Herrn Dr. Lunge mit derselben angestellten Versuche ist nachzusehen in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Band V (1861) und Band VIII (1864).

Reibungstafeln. Folgende Tabellen enthalten eine gedrängte Zusammenstellung der im Praktischen vorzüglich brauchbaren Coefficienten der gleitenden Reibung. §. 178.

Siehe Seite 322 und 323.

Die neuesten Reibungsversuche. Durch Bochet's Versuche über die gleitende Reibung erhalten die im Vorstehenden enthaltenen Ergebnisse älterer Versuche von Coulomb und Morin noch einige wesentliche Ergänzungen. Diese wurden auf einer söhligen Eisenbahnstrecke mit Eisenbahnwagen von 6 bis 10 Tonnen Gewicht angestellt, welche entweder mittels ihrer festgekeilten Räder, oder mittels besonderer Schuhe (patins) auf der Schienenbahn fortglitten. Diese Schuhe waren vor, hinter und zwischen den Rädern an dem Wagengestelle befestigt und bei verschiedenen Versuchsreihen mit verschiedenen Sohlen von Holz, Leder, Eisen u. s. w. bekleidet, wobei der Druck pro Quadratcentimeter nach Belieben auf 2, 4, 6, 10 und 15 Kilogramm gebracht werden konnte. Die Bewegung dieses zu einem Schlitten umgeschaffenen Vehikels erfolgte durch einen vorgespannten Dampfwagen, und ein zwischen beiden eingeschaltetes Federdynamometer gab mittels eines Zeichnenapparates die der gleitenden Reibung des Schlittens gleichzusetzende Zugkraft an. Um den Widerstand der Luft so viel wie möglich zu beseitigen, gab man dem Wagen, welcher dem Schlitten vorauslief, einen Querschnitt, welcher den des letzteren noch übertraf. §. 179.

Durch diese Versuche wird die Richtigkeit der Formel $F = \varphi N$, wonach die Reibung F dem Druck proportional ist, von Neuem bestätigt; was aber den Reibungscoefficienten betrifft, so ist derselbe nicht allein von der Art und dem Zustande der Reibungsflächen, sondern auch von anderen Verhältnissen, namentlich auch von der Geschwindigkeit des Gleitens und nächstdem von

Tafel I.

Reibungscoefficienten der Ruhe.

Namen der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Natur der Schmieren. Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Mit Olivenöl.	Schweineschmalz.	Talg.	Trockene Seife.	Polirt und fettig.	Fettig und benetzt.
Holz auf Holz . .	kleinster Werth	0,30	0,65	—	—	0,14	0,22	0,30	
	mittlerer „	0,50	0,68	—	0,21	0,19	0,36	0,35	
	größter „	0,70	0,71	—	—	0,25	0,44	0,40	
Metall auf Metall	kleinster Werth	0,15	—	0,11					
	mittlerer „	0,18	—	0,12	0,10	0,11	—	0,15	
	größter „	0,24	—	0,16					
Holz auf Metall		0,60	0,65	0,10	0,12	0,12	—	0,10	
Hanf in Seilen, Zöpfen oder Gurten auf Holz . .	kleinster Werth	0,50							
	mittlerer „	0,63	0,87						
	größter „	0,80							
Dickes Sohlenleder zu Liderungen auf Holz od. Gußeisen	hochkantig . .	0,43	0,62	0,12					
	flach	0,62	0,80	0,13	—	—	—	—	0,27
Schwarze Lederriemen über Trommeln . .	von Holz .	0,47							
	von Metall .	0,54	—	—	—	—	—	0,28	0,38
Steine oder Ziegel auf Steinen oder Ziegeln, glatt bearbeitet	kleinster Werth	0,67							
	größter „	0,75							
Steine auf Schmiedeeisen	kleinster Werth	0,42							
	größter „	0,49							
Hirnholz auf Steinen		0,64							

Tafel II.

Reibungscoefficienten der Bewegung.

Namen der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Art der Schmieren. Trocken.	Mit Wasser.	Olivenöl.	Schweineschmalz.	Talg.	Schweinefett u. Graphit.	Reine Wagenschmiere.	Trockene Seife.	Fettig.
Holz auf Holz	kleinster Werth	0,20	—	—	0,06	0,06	—	—	0,14	0,08
	mittlerer „	0,36	0,25	—	0,07	0,07	—	—	0,15	0,12
	größter „	0,48	—	—	0,07	0,08	—	—	0,16	0,15
Metall auf Metall	kleinster Werth	0,15	—	0,06	0,07	0,07	0,06	0,12	—	0,11
	mittlerer „	0,18	0,31	0,07	0,09	0,09	0,08	0,15	0,20	0,13
	größter „	0,24	—	0,08	0,11	0,11	0,09	0,17	—	0,17
Holz auf Metall	kleinster Werth	0,20	—	0,05	0,07	0,06	—	—	—	0,10
	mittlerer „	0,42	0,24	0,06	0,07	0,08	0,08	0,10	0,20	0,14
	größter „	0,62	—	0,08	0,08	0,10	—	—	—	0,16
Hanfseile, Zöpfe u. s. w.	auf Holz ..	0,45	0,33							
	auf Eisen .	—	—	0,15	—	0,19				
Sohlenleder, flach auf Holz oder Metall ...	roh	0,54	0,36	0,16	—	0,20				
	geklopft ..	0,30	—							
	fettig ...	—	0,25							
Desgleichen hochkantig, für Kolbenliderung .	trocken ...	0,34	0,31	0,14	—	0,14				
	fettig ...	—	0,24							

Anmerkung. Die Reibungscoefficienten lockerer Massen u. s. w. werden im zweiten Theile, bei der Theorie des Erddruckes, mitgetheilt. Ebenso wird über die mit der Reibung verbundene Wärmeentwickelung erst im zweiten Theile gehandelt.

dem specifischen Drucke, d. i. dem Drucke pro Flächeneinheit, abhängig. Herr Bochet setzt:

$$\varphi = \frac{\varkappa - \gamma}{1 + \alpha v} + \gamma,$$

wobei v die Geschwindigkeit der Bewegung, $\varkappa$ den Werth von φ für eine unendlich langsame und dagegen γ den Werth von φ für eine sehr schnelle Bewegung bezeichnet. Hiernach nimmt also der Reibungscoefficient mit dem Wachsen der Geschwindigkeit allmälig von $\varkappa$ auf γ ab. Der Coefficient α ist im Mittel $= 0{,}3$ zu setzen, wenn man v in Meter ausdrückt, dagegen $= 0{,}094$, wenn man v in Fußen giebt. Man kann hiernach nur bei Geschwindigkeiten von 0 bis höchstens 1 Fuß der Reibungscoefficienten bei übrigens gleichen Verhältnissen als constant annehmen. Die Coefficienten $\varkappa$ und γ sind verschieden bei verschiedenen Stoffen, und abhängig von dem Grade der Glätte der Reibungsflächen, von der Schmiere, von dem specifischen Drucke u. s. w.

Den größten Werth hat der Reibungscoefficient $\varkappa$ beim Gleiten von Holz, zumal weichem, sowie von Leder und Guttapercha auf trockenen und ungeschmierten Eisenschienen. Allgemein ist $\varkappa = 0{,}40$ bis $0{,}70$; im Mittel für weiches Holz, $\varkappa = 0{,}60$ und für hartes, $\varkappa = 0{,}55$.

Für die Reibung von Eisen auf Eisen ist $\varkappa$ ebenfalls sehr verschieden ausgefallen, sind die Reibungsflächen nicht polirt, so hat man: $\varkappa = 0{,}25$ bis $0{,}60$, dagegen bei polirten Reibungsflächen: $\varkappa = 0{,}12$ bis $0{,}40$. Die Reibung von Eisen auf Eisen wird durch das Benetzen mit Wasser nicht vermindert, dagegen fällt die Reibung von Holz, Leder und Guttapercha auf nassen Eisenschienen beträchtlich kleiner aus als auf trockenen Eisenschienen. Bei eingeölten Flächen sinkt $\varkappa$ bis auf $0{,}05$ bis $0{,}20$.

Der Coefficient γ ist stets kleiner als $\varkappa$; bei großen Geschwindigkeiten, großer Glätte der Flächen, gehörig angewendeter Schmiere und mäßigem specifischen Drucke nähert sich für alle Stoffe γ einem und demselben Werthe.

Die Reibung der Ruhe ist nur in den Fällen größer und zwar doppelt so groß, als die der Bewegung, wenn Holz oder Leder auf benetzten oder eingeschmierten Eisenschienen gleitet.

Nach diesen Versuchen ist:

1) für trockenes weiches Holz, bei mindestens 10 Kilogramm Druck pro Quadratcentimeter, oder 137 Pfund pro Quadratzoll:

$$\varphi = \frac{0{,}30}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}30;$$

2) für trockenes hartes Holz, bei demselben Drucke:

$$\varphi = \frac{0{,}30;}{1 + 0{,}3\,v} + 0{,}25;$$

3) für halbpolirtes Eisen, trocken oder naß, bei mehr als 300 Kilogramm Druck pro Quadratcentimeter oder 4103 Pfund pro Quadratzoll:

$$\varphi = \frac{0,15}{1 + 0,3\,v} + 0,15;$$

4) für dasselbe, entweder trocken unter dem Drucke von wenigstens 100 Kilogramm pro Quadratcentimeter, oder polirt und geschmiert, bei einem specifischen Drucke von mindestens 20 Kilogramm, so wie für nicht harziges Holz beim Schmieren mit reinem Wasser, unter demselben Drucke:

$$\varphi = \frac{0,175}{1 + 0,3\,v} + 0,075;$$

5) für Holz mit fettigem Wasser oder Fett geschmiert, bei gehöriger Politur und unter dem Drucke von mindestens 20 Kilogramm pro Quadratcentimeter (274 Pfund pro Quadratzoll):

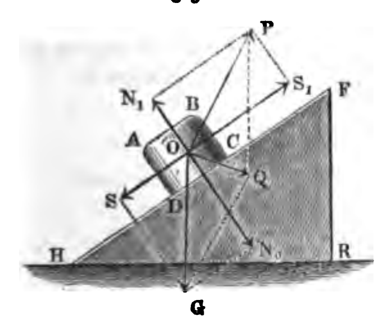
$$\varphi = \frac{0,10}{1 + 0,3\,v} + 0,06.$$

Ist v in Fußen gegeben, so muß man im Nenner statt $0,3\,v$, $0,094\,v$ setzen.

Anmerkung. Es ist sehr zu wünschen, daß diese in sehr großem Maßstabe ausgeführten Versuche, welche zum größten Theil von dem seither Bekannten ganz abweichende Resultate gegeben haben, noch von Anderen wiederholt werden.

Schiefe Ebene. Die Theorie der gleitenden Reibung findet ihre vorzüglichste Anwendung bei der Untersuchung des Gleichgewichtes von einem Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 288. Ist, in Uebereinstimmung mit §. 151, $FHR = \alpha$ der Neigungswinkel der schiefen Ebene, und $POS_1 = \beta$, der Winkel, welchen die Kraft P mit der schiefen Ebene einschließt, so hat man die aus dem Gewichte G des Körpers entspringende Normalkraft §. 180.


Fig. 288.



$$N_0 = G\,\cos.\alpha,$$

dagegen die Kraft zum Herabgleiten $= S = G\,\sin.\alpha$, ferner die Kraft N_1, mit welcher P den Körper von der Ebene abzuziehen sucht, $= P\sin.\beta$, und die Kraft S_1, mit welcher sie den Körper auf der Ebene hinaufzieht, $= P\,\cos.\beta$. Der übrig bleibende Normaldruck ist:

$$N = N_0 - N_1 = G \cos.\alpha - P \sin.\beta,$$

folglich die Reibung:

$$F = \varphi\,(G \cos.\alpha - P \sin.\beta).$$

Kommt es darauf an, die Kraft P zum Hinaufziehen des Körpers auf der schiefen Ebene zu finden, so ist die Reibung zu überwinden, es muß also sein:
$S_1 = S + F$, d. i. $P \cos.\beta = G \sin.\alpha + \varphi\,(G \cos.\alpha - P \sin.\beta)$.

Soll hingegen die Kraft bestimmt werden, welche den Körper am Herabgleiten verhindert, so kommt die Reibung der Kraft zu Hülfe, dann ist also:
$S_1 + F = S$, d. i. $P \cos.\beta + \varphi\,(G \cos.\alpha - P \sin.\beta) = G \sin.\alpha$.

Hiernach bestimmt sich die Kraft für den ersten Fall:

Fig. 289.

$$P = \frac{\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha}{\cos.\beta + \varphi \sin.\beta} \cdot G,$$

und für den zweiten:

$$P = \frac{\sin.\alpha - \varphi \cos.\alpha}{\cos.\beta - \varphi \sin.\beta} \cdot G.$$

Führt man den Reibungswinkel ϱ ein, indem man

$$\varphi = tang.\,\varrho = \frac{\sin.\varrho}{\cos.\varrho}$$

setzt, so erhält man:

$$P = \frac{\sin.\alpha\,.\,\cos.\varrho \pm \cos.\alpha\,.\,\sin.\varrho}{\cos.\beta\,.\,\cos.\varrho \pm \sin.\beta\,.\,\sin.\varrho} \cdot G,$$

oder, nach bekannten Sätzen der Trigonometrie:

$$P = \frac{\sin.(\alpha \pm \varrho)}{\cos.(\beta \mp \varrho)} \cdot G;$$

und es gelten die oberen Zeichen, wenn es darauf ankommt, Bewegung hervorzubringen, dagegen die unteren, wenn Bewegung zu verhindern ist.

So lange

$$P > \frac{\sin.(\alpha - \varrho)}{\cos.(\beta + \varrho)}\,G \text{ und}$$

$$< \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} \text{ ist,}$$

kann natürlich der Körper weder auf- noch abwärts gleiten.

Ist $\alpha < \varrho$, so erfordert das Herabschieben die Kraft:

$$P = \frac{G \sin.(\varrho - \alpha)}{\cos.(\varrho + \beta)}.$$

Bei dem in Fig. 290 dargestellten Fall ist β negativ, und daher die Kraft zum Herabschieben des Körpers O auf der schiefen Ebene FH

$$P = \frac{G \sin.(\varrho - \alpha)}{\cos.(\varrho - \beta)}.$$

Fig. 290.

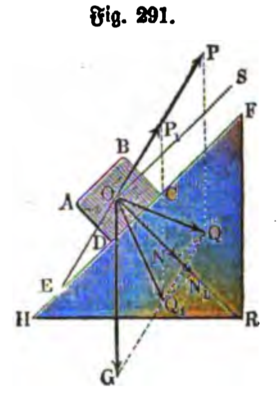


Fig. 291.

Die vorstehenden Formeln findet man auch durch eine einfache Anwendung des Kräfteparallelogrammes $OPQG$, Fig. 291. Da ein Körper noch diejenige Kraft eines anderen Körpers aufnimmt, welche um den Reibungswinkel ϱ von der Normale einer Oberfläche abweicht (§. 176), so findet in dem vorliegenden Falle Gleichgewicht statt, wenn die Mittelkraft $\overline{OQ} = Q$ aus den Kräften P und G mit der Normale ON den Winkel $NOQ = \varrho$ einschließt. Setzt man nun in der allgemeinen Formel:

$$\frac{P}{G} = \frac{\sin. GOQ}{\sin. POQ},$$

$$GOQ = GON + NOQ = \alpha + \varrho, \text{ und}$$

$$POQ = POS + SOQ = \beta + 90^0 - \varrho,$$

so erhält man:

$$\frac{P}{G} = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\sin.(\beta - \varrho + 90^0)} = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)}.$$

Wenn die Kraft P_1 das Herabgleiten von der schiefen Ebene verhindern soll, so fällt die Mittelkraft Q_1 auf die untere Seite der Normale ON, und es ist der Reibungswinkel ϱ negativ in Rechnung zu bringen, wonach dann folgt:

$$\frac{P_1}{G} = \frac{\sin.(\alpha - \varrho)}{\cos.(\beta + \varrho)},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem Obigen.

Ruht der Körper auf der Horizontalebene, so ist $\alpha = 0$, daher die Kraft zum Fortschieben:

$$P = \frac{\varphi\, G}{\cos.\beta + \varphi \sin.\beta} = \frac{G \sin.\varrho}{\cos.(\beta - \varrho)}.$$

Wirkt die Kraft parallel zur schiefen Ebene, d. h. in der Richtung ihrer Falllinie, so hat man $\beta = 0$, und daher:

$$P = (\sin.\alpha \pm \varphi \cos.\alpha)\, G = \frac{\sin.(\alpha \pm \varrho)}{\cos.\varrho} \cdot G \text{ (vergl. §. 176).}$$

Wirkt endlich die Kraft horizontal, so hat man:

$\beta = -\alpha$; $\cos.\beta = \cos.\alpha$ und $\sin.\beta = -\sin.\alpha$, daher:

$$P = \frac{\sin.\alpha \pm \varphi \cos.\alpha}{\cos.\alpha \mp \varphi \sin.\alpha} \cdot G = \frac{tang.\alpha \pm \varphi}{1 \mp \varphi\, tang.\alpha} \cdot G, \text{ d. i.}$$

$P = tang.(\alpha \pm \varrho)\, G$, wie auch die Auflösung des Parallelogrammes $OPQG$ unmittelbar angiebt.

Uebrigens fällt die Kraft zum Hinaufschieben am kleinsten aus, wenn der Nenner $\cos.(\beta - \varrho)$ am größten, nämlich $= 1$, also $\beta - \varrho = 0$, d. i. $\beta = \varrho$ ist. Wenn also die Kraftrichtung um den Reibungswinkel von der schiefen Ebene abweicht, so ist die Kraft selbst am kleinsten, und zwar:

$$P = \sin.(\alpha + \varrho) \,.\, G.$$

Beispiel. Welchen Axendruck hat die Spreize AE, Fig. 292, auszuhalten, wenn dieselbe einen Felsblock (eine Wand) $ABCD$ vom Gewichte $G = 5000$ Pfund von dem Herabgleiten von einer schiefen Ebene CD (dem Liegenden) abhalten soll, vorausgesetzt, daß die Neigung der Spreize gegen den Horizont 35^0, die der schiefen Ebene CD aber 50^0 und der Reibungscoefficient $\varphi = 0,75$ beträgt? Es ist hier:

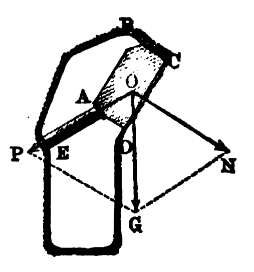
$$G = 5000,\ \alpha = 50^0,\ \beta = 35^0 - 50^0 = -15^0 \text{ und } \varphi = 0{,}75,$$

daher giebt die Formel:

$$P = \frac{\sin.\alpha - \varphi \cos.\alpha}{\cos.\beta - \varphi \sin.\beta} \cdot G = \frac{\sin.50^0 - 0{,}75 \cos.50^0}{\cos.15^0 + 0{,}75 \sin.15^0} \cdot 5000$$

$$= \frac{0{,}766 - 0{,}482}{0{,}966 + 0{,}194} \cdot 5000 = \frac{1420}{1{,}160} = 1224 \text{ Pfund.}$$

Fig. 292.



Wäre die Spreize horizontal, so hätte man $\beta = -50^0$, und $tang.\varrho = 0{,}75$, daher: $\varrho = 36^0 52'$, endlich:

$$P = G\, tang.(\alpha - \varrho)$$
$$= 5000\, tang.(50^0 - 36^0 52')$$
$$= 5000\, tang.13^0 8'$$
$$= 5000 \,.\, 0{,}2333 = 1166 \text{ Pfund.}$$

Um dieselbe Wand durch eine horizontale Kraft auf dem Liegenden hinaufzuschieben, wäre unter übrigens gleichen Umständen die Kraft:

$$P = G\, tang.(\alpha + \varrho)$$
$$= 5000\, tang.86^0 52'$$
$$= 5000 \,.\, 18{,}2676 = 91338 \text{ Pfund}$$

nöthig.

Druck gegen die schiefe Ebene. Der Normaldruck, welchen §. 181.
der Körper AC auf der schiefen Ebene FH, Fig. 293, ausübt, ist beim Hinaufschieben:

$$N = Q \cos \varrho = \frac{G \sin. OPQ}{\sin. POQ} \cos. \varrho = \frac{G \sin. (90^0 - \alpha - \beta)}{\sin. (\beta + 90^0 - \varrho)} \cos. \varrho$$

$$= \frac{G \cos. (\alpha + \beta) \cos. \varrho}{\cos. (\beta - \varrho)},$$

und dagegen in den Fällen, wenn der Körper am Herabgleiten verhindert wird:

$$N_1 = Q_1 \cos. Q_1 O N_1 = Q_1 \cos. \varrho = \frac{G \cos. (\alpha + \beta) \cos. \varrho}{\cos. (\beta + \varrho)}.$$

Ist die Richtung der Kraft parallel zur Falllinie der Ebene, so hat man $\beta = 0$, und $N = G \cos. \alpha$; ist dagegen die Richtung derselben horizontal, so hat man $\beta = - \alpha$ und daher

$$N = \frac{G \cos. \varrho}{\cos. (\alpha \pm \varrho)} \text{ zu setzen.}$$

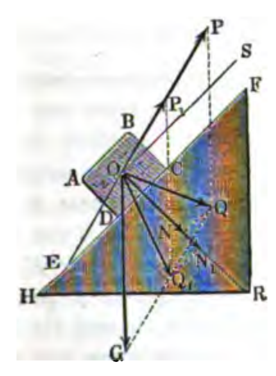


Fig. 293.

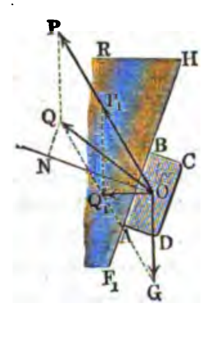


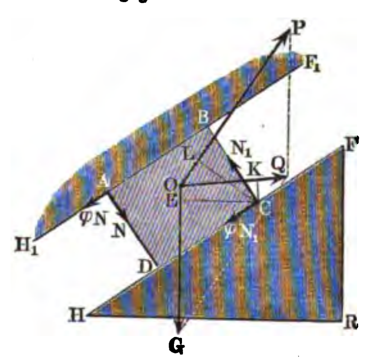
Fig. 294.

Der Normaldruck fällt = Null aus, wenn $\cos. (\alpha + \beta) = 0$, also $\alpha + \beta = 90$ Grad ist, und wird negativ, wenn $\alpha + \beta > 90^0$, oder $\beta > 90 - \alpha$ ist. Im letzteren Falle ist natürlich die schiefe Ebene nicht unter, sondern, wie Fig. 294 darstellt, über den Körper zu legen. Es finden natürlich auch hier wieder die beiden extremen Fälle des Gleichgewichtes statt, wobei die Richtung der auf die schiefe Ebene FH übergehenden Mittelkraft Q oder Q_1 entweder auf der oberen oder auf der unteren Seite von der Normalen um den Reibungswinkel $NOQ = NOQ_1 = \varrho$ abweicht.

Bei den vorstehenden Entwickelungen der Formeln für das Gleichgewicht eines Körpers auf der schiefen Ebene ist noch vorauszusetzen, daß die Mittelkraft Q vollkommen vom Körper AC auf die eine schiefe Ebene bildende

Stütze FHR übergehen könne; dies ist jedoch (nach §. 150) nur dann möglich, wenn die Richtung dieser Kraft die Auflagersfläche CD des Körpers AC selbst durchschneidet. Außerdem hat der Körper, wie z. B. AC, Fig. 295, in Folge der Kraft Q ein Bestreben zum Umdrehen oder Kippen um die äußerste Kante C, welches um so größer ausfällt, je größer der Abstand $CK = e$ dieser Kante von der Richtung OQ der Mittelkraft Q ist.

Fig. 295.



Bezeichnet a den Abstand CL der Kraftrichtung OP, und b den Abstand CE der verticalen Schwerlinie OG des Körpers von der äußersten Kante C desselben, so ist das Moment, mit welchem sich der Körper von links nach rechts um C zu drehen sucht:

$$Qe = Pa - Gb.$$

Wäre nun $Pa = Gb$, oder $\frac{P}{G} = \frac{b}{a}$, so ginge die Mittelkraft Q gerade durch C, wobei sie eben noch von der schiefen Ebene aufgenommen würde; wäre aber $Pa < Gb$, so würde sich der Körper um C von rechts nach links zu drehen suchen, woran ihn aber die Undurchdringlichkeit seiner Masse verhindert.

Ist dagegen $Pa > Gb$, so muß der Körper noch eine zweite Unterstützung erhalten, z. B. noch von einer zweiten geeigneten Ebene $F_1 H_1$ geleitet werden. Wenn diese zweite Ebene in A einen Druck N und die daraus erwachsende Reibung φN aufnimmt, also die geeignete Ebene $F_1 H_1$ mit den Gegenkräften $-N$ und $-\varphi N$ auf den Körper in A zurückwirkt, welche die Umdrehung des Körpers um C verhindern, so muß die Summe der Momente dieser Kräfte gleich sein dem Umdrehungsmomente von Q, also:

$$Nl + \varphi Nd = Qe = Pa - Gb, \text{ oder}$$

$$1)\ N(l + \varphi d) = Pa - Gb,$$

wobei l und d die Abstände CD und CB der Kante A von C in den Richtungen parallel und winkelrecht zur geneigten Ebene bezeichnen.

Ist überdies noch N_1 der Druck des Körpers auf die geneigte Ebene FH in C, so wie φN_1 die demselben entsprechende Reibung, so kann man setzen:

$$2)\ P \cos.\beta = G \sin.\alpha + \varphi (N + N_1) \text{ und}$$

$$3)\ P \sin.\beta = G \cos.\alpha + N - N_1.$$

Eliminirt man aus den letzten beiden Gleichungen N_1, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$P(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) = G(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) + 2\varphi N,$$

und wenn man hierein den Werth $N = \frac{Pa - Gb}{l + \varphi d}$ aus Gleichung (1) einsetzt, so folgt die Gleichung:

$$P(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) = G(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) + \frac{2\varphi(Pa - Gb)}{l + \varphi d},$$

oder:

$$P\left(\frac{l + \varphi d}{2}(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) - \varphi a\right)$$
$$= G\left(\frac{l + \varphi d}{2}(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) - \varphi b\right),$$

woraus sich endlich ergiebt:

$$P = \frac{(l + \varphi d)(\sin.\alpha + \varphi \cos.\alpha) - 2\varphi b}{(l + \varphi d)(\cos.\beta + \varphi \sin.\beta) - 2\varphi a} \cdot G$$
$$= \frac{(l + \varphi d)\sin.(\alpha + \varrho) - 2\varphi b \cos.\varrho}{(l + \varphi d)\cos.(\beta - \varrho) - 2\varphi a \cos.\varrho} \cdot G.$$

Soll $N =$ Null sein, so hat man $Pa = Gb$ und

$$\frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} = \frac{b}{a},$$

daher, wie auch oben gefunden worden ist:

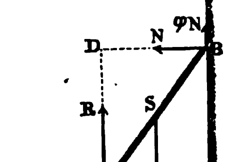
$$P = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\cos.(\beta - \varrho)} G.$$

Zurückführung der Theorie des Gleichgewichtes unterstützter Körper auf die des Gleichgewichtes freier Körper. §. 182. Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes eines Körpers mit Berücksichtigung der Reibung gelangt man auch sicher zum Ziele, wenn man sich den Körper ganz frei denkt, und annimmt, daß jeder andere Körper, mit welchem er in Berührung ist, zwei Kräfte auf ihn ausübt, und zwar eine Kraft N, normal von der Berührungsfläche desselben ausgehend, und eine andere Kraft φN, der vorausgesetzten Bewegung des Berührungspunktes in dieser Fläche entgegengesetzt und der Reibung zwischen beiden Körpern entsprechend. Dadurch erhält man ein festes System von Kräften, dessen Gleichgewichtszustand nach den Regeln in §. 93 u. s. w. zu beurtheilen ist, wie im folgenden speciellen Falle gezeigt werden soll.

Eine prismatische Stange AB, Fig 296 (a. f. S.), stützt sich unten auf einen horizontalen Boden CH und lehnt sich oben gegen eine verticale Wand CV; bei welcher Neigung $BAC = \alpha$ verliert dieselbe ihre Gleichgewichtslage? Hier können wir die Rückwirkung des Bodens auf den Körper durch eine Verticalkraft R und durch die horizontal wirkende Reibung φR, und dagegen die Rückwirkung der Wand durch eine Horizontalkraft N und durch eine von unten

nach oben wirkende Reibung φN ausdrücken. Ist folglich G das im Schwerpunkte S niederziehende Gewicht der Stange, so haben wir es mit einem Systeme von den Verticalkräften G, R, φN und einem solchen von den Horizontalkräften N und φR zu thun.

Fig. 296.



Der Gleichgewichtszustand unter diesen Kräften fordert nun, daß

1) $G = R + \varphi N$,
2) $\varphi R = N$ und
3) $G \,.\, \overline{AE} = N \,.\, \overline{AD} + \varphi N \,.\, \overline{AC}$ sei.

Nun ist aber der Hebelarm AE

$= AS\, cos.\alpha = \frac{1}{2}\, AB\, cos.\alpha$,

ferner der Hebelarm AD

$= AB\, sin.\alpha$,

und der Hebelarm AC, $= AB\, cos.\alpha$, daher ist die dritte Gleichung einfach;

$$\frac{1}{2}\, G\, cos.\alpha = N\,(sin.\alpha + \varphi\, cos.\alpha)$$

zu schreiben.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$G = R + \varphi^2 R = (1 + \varphi^2)\, R, \text{ daher}$$

$$R = \frac{G}{1 + \varphi^2} \text{ und } N = \frac{\varphi G}{1 + \varphi^2}$$

und setzt man diesen Werth von N in die Gleichung (3) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{2}\, G\, cos.\alpha = \frac{\varphi G}{1 + \varphi^2}\,(sin.\alpha + \varphi\, cos.\alpha), \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \varphi^2}{2\varphi} = tang.\alpha + \varphi,$$

also für den gesuchten Neigungswinkel:

$$tang.\alpha = \frac{1 + \varphi^2 - 2\varphi^2}{2\varphi} = \frac{1 - \varphi^2}{2\varphi} = \frac{1 - tang.\varrho^2}{2\, tang.\varrho}$$

$$= \frac{cos.\varrho^2 - sin.\varrho^2}{2\, sin.\varrho\, cos.\varrho} = \frac{cos.2\varrho}{sin.2\varrho} = cotg.2\varrho$$

$$= tang.\,(90^0 - 2\varrho); \text{ daher ist}$$

$$\angle\, BAC = \alpha = 90^0 - 2\varrho, \text{ und } \angle\, ABC = \beta = 2\varrho.$$

§. 183. **Theorie des Keiles.** Auch bei dem Keile (s. §. 153) hat die Reibung einen großen Einfluß auf die Gleichgewichtsverhältnisse. Setzen wir voraus, daß der Querschnitt desselben ein gleichschenkliges Dreieck ABS, Fig. 297, mit der Schärfe $ASB = \alpha$ bilde, daß die Kraft P in der Mitte M des Keilrückens AB und winkelrecht gegen denselben wirke, und daß ebenso der Körper CHK

mit einer gewissen Kraft N rechtwinklig gegen die Keilfläche BS drücke, während der Keil mit der Fläche AS auf einer horizontalen Ebene aufruht.

Fig. 297.

Uebrigens soll der Körper CHK von zwei Backen G und K umgeben sein, welche ihn nöthigen, sammt der Last Q beim Fortschieben des Keiles auf der Horizontalebene, in der gegen die Keilfläche BS rechtwinklig stehenden Richtung EC aufzusteigen.

Da die Richtung der Kraft P von den Keilflächen AS und BS gleichviel abweicht, so sind die Normaldrücke N, N gegen beide Flächen und folglich auch die aus denselben entspringenden Reibungen $\varphi N, \varphi N$ in denselben einander gleich, und es müssen daher auch die Kräfte $P, N, N, \varphi N$ und φN einander das Gleichgewicht halten. Zerlegt man die letzten vier Kräfte parallel und rechtwinklig zur Richtung der Kraft P in je zwei Seitenkräfte, so muß folglich auch die Summe derjenigen dieser Kräfte, welche mit P gleich gerichtet sind, mit P allein im Gleichgewichte sein. Nun weichen aber die Richtungen von N, N um $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, und die von $\varphi N, \varphi N$ um $\frac{\alpha}{2}$ von der Richtung MS der Kraft P ab, daher sind die Componenten von N, N in der Richtung MS, $N \sin. \frac{\alpha}{2}$ und $N \sin. \frac{\alpha}{2}$, sowie die von φN und φN, $\varphi N \cos. \frac{\alpha}{2}$ und $\varphi N \cos. \frac{\alpha}{2}$, und es ist zu setzen:

$$P = 2 N \sin. \frac{\alpha}{2} + 2 \varphi N \cos. \frac{\alpha}{2} = 2 N \left(\sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \cos. \frac{\alpha}{2}\right).$$

In Folge der Reibung φN zwischen der Keilfläche BS und der Grundfläche des Körpers CHK wird dieser Körper noch mit einer gleichen Gegenkraft $- \varphi N$ gegen den Leitbacken GH gedrückt, woraus eine Reibung $F_1 = \varphi_1 \,.\, \varphi N = \varphi \varphi_1 N$ entsteht, welche dem Aufschieben des Körpers CHK entgegenwirkt, und weshalb

$$N - F_1 = Q, \text{ oder } N(1 - \varphi \varphi_1) = Q, \text{ also}$$

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi \varphi_1} \text{ zu setzen ist.}$$

Führt man nun diesen Ausdruck für N in die obigen Formeln ein, so erhält man die zum Aufheben der Last Q nöthige Kraft:

$$P = \frac{2Q}{1 - \varphi \varphi_1}\left(sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2}\right), \text{ annähernd}$$

$$= 2Q(1 + \varphi \varphi_1)\left(sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2}\right)$$

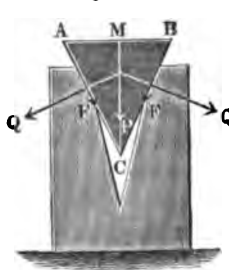
$$= 2Q\left(sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2} + \varphi \varphi_1 \, sin. \frac{\alpha}{2}\right),$$

oder wenn man den Coefficienten φ_1 der Reibung längs GH gleich dem Coefficienten φ der Reibung an den Seitenflächen AS und BS setzt:

$$P = \frac{2Q}{1 - \varphi^2}\left(sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2}\right), \text{ annähernd}$$

$$= 2Q\left((1 + \varphi^2) \, sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2}\right).$$

Fig. 298.



Bei einem Keile ABC, Fig. 298, wie er zum Zerspalten und Zerdrücken der Körper gebraucht wird, ist die dem Normaldruck Q gegen die Seitenflächen AC und BC entsprechende Kraft auf den Rücken AB:

$$P = 2Q\left(sin. \frac{\alpha}{2} + \varphi \, cos. \frac{\alpha}{2}\right).$$

Beispiel. Es sei die Last des in Fig. 297 abgebildeten Keiles: $Q = 650$ Pfund, die Schärfe des Keiles: $\alpha = 25^0$, und der Reibungscoefficient: $\varphi = \varphi_1 = 0{,}36$; man sucht die mechanische Arbeit, welche erforderlich ist, um die Last Q in ihrer Leitung um $\frac{1}{2}$ Fuß fortzubewegen.

Die Kraft ist:

$$P = \frac{2 \cdot 650}{1 - (0{,}36)^2}(sin. 12\tfrac{1}{2}^0 + 0{,}36 \, cos. 12\tfrac{1}{2}^0)$$

$$= \frac{1300}{1 - 0{,}1296}(0{,}2164 + 0{,}36 \cdot 0{,}9763)$$

$$= \frac{1300}{0{,}8704}(0{,}2164 + 0{,}3515) = \frac{738{,}27}{0{,}8704} = 848{,}2 \text{ Pfund}.$$

Dem Lastwege $EE_1 = s_1 = \frac{1}{2}$ Fuß entspricht der Kraftweg:

$$BL = s = BB_1 \, cos. \frac{\alpha}{2} = \frac{EE_1}{sin. \alpha} cos. \frac{\alpha}{2} = \frac{s_1}{2 \, sin. \frac{\alpha}{2}} = \frac{0{,}25}{sin. 12\tfrac{1}{2}^0}$$

$$= \frac{0{,}25}{0{,}2164} = 1{,}155 \text{ Fuß},$$

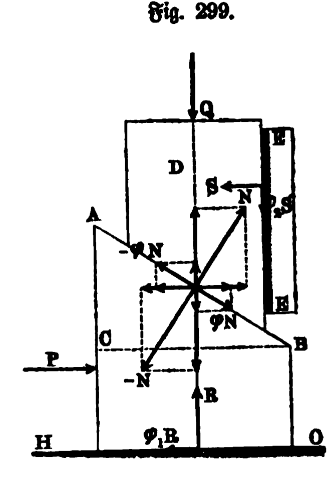
demnach ist die gesuchte mechanische Arbeit:

$$Ps = 848{,}2 \cdot 1{,}155 = 979{,}6 \text{ Fußpfund}.$$

Ohne Rücksicht auf Reibung wäre $Ps = Qs_1 = \frac{1}{2} \cdot 650 = 325$ Fußpfund, es wird also in Folge der Reibung der Arbeitsaufwand beim Heben von Q nahe verdreifacht.

Auf gleiche Weise läßt sich die Kraft P eines Keiles ABC, Fig. 299, bestimmen, durch welchen eine Last Q emporgehoben wird, während der Keil sich auf der horizontalen Ebene HO fortschiebt. Nehmen wir an, daß der Normaldruck zwischen dem Keile ABC und dem Blocke D, welcher durch die Last Q vertical abwärts gedrückt wird, $= N$ sei, daß ferner der Normaldruck des Keiles auf die Unterlage HO, $= R$ und der Normaldruck des Blockes auf die Seitenführung EE, $= S$ betrage. Dann muß P den Kräften R, $\varphi_1 R$, $- N$ und $- \varphi N$, und ebenso Q den Kräften S, $\varphi_2 S$, N und φN das Gleichgewicht halten. §. 184.

Fig. 299.



Ist nun noch α der Neigungswinkel ABC der Keilfläche AB gegen den Horizont, so läßt sich N in die Verticalkraft $N \cos. \alpha$ und Horizontalkraft $N \sin. \alpha$, und φN in die Verticalkraft $\varphi N \sin. \alpha$ und Horizontalkraft $\varphi N \cos. \alpha$ zerlegen, und daher setzen:

1) $P = \varphi_1 R + N \sin. \alpha + \varphi N \cos. \alpha$,

2) $R = N \cos. \alpha - \varphi N \sin. \alpha$,

3) $Q = N \cos. \alpha - \varphi N \sin. \alpha - \varphi_2 S$

sowie

4) $S = N \sin. \alpha + \varphi N \cos. \alpha$.

Aus den beiden ersten Gleichungen resultirt:

$$P = [(1 - \varphi \varphi_1) \sin. \alpha + (\varphi + \varphi_1) \cos. \alpha] N,$$

und aus den beiden letzteren:

$$Q = [(1 - \varphi \varphi_2) \cos. \alpha - (\varphi + \varphi_2) \sin. \alpha] N;$$

und es ergiebt sich durch Division dieser Formeln:

$$\frac{P}{Q} = \frac{(1 - \varphi \varphi_1) \sin. \alpha + (\varphi + \varphi_1) \cos. \alpha}{(1 - \varphi \varphi_2) \cos. \alpha - (\varphi + \varphi_2) \sin. \alpha}.$$

Wäre $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, so hätte man, da $\varphi = tang. \varrho$ und

$\frac{2 \varphi}{1 - \varphi^2} = tang. 2 \varrho$ ist,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin. \alpha + \cos. \alpha \, tang. 2 \varrho}{\cos. \alpha - \sin. \alpha \, tang. 2 \varrho} = \frac{tang. \alpha + tang. 2 \varrho}{1 - tang \, \alpha \, tang \, 2 \varrho}$$
$$= tang. (\alpha + 2 \varrho).$$

Sieht man von den Reibungen an den Unterstützungspunkten ab, so kann man φ_1 und φ_2 = Null setzen, und es folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha}{cos.\,\alpha - \varphi\, sin.\,\alpha} = \frac{tang.\,\alpha + \varphi}{1 - \varphi\, tang.\,\alpha} = tang.(\alpha + \varrho).$$ (Vergl. §. 180.)

Wenn die Last Q rechtwinklig gegen die Keilfläche wirkt, so sind die Gleichungen (3) und (4) durch folgende zu ersetzen:

$$Q = N - \varphi_2 S \text{ und}$$
$$S = \varphi N.$$

Es folgt dann $Q = (1 - \varphi\,\varphi_2)\,N$, daher umgekehrt:

$$N = \frac{Q}{1 - \varphi\,\varphi_2} \text{ und}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{(1 - \varphi\,\varphi_1)\, sin.\,\alpha + (\varphi + \varphi_1)\, cos.\,\alpha}{1 - \varphi\,\varphi_2}.$$

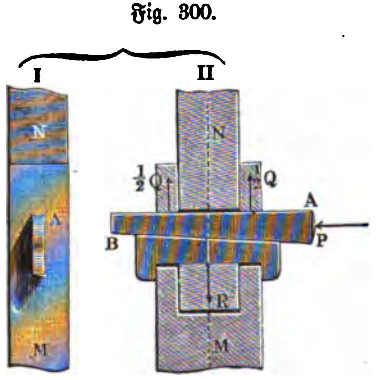
Wäre $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$, so würde dann

$$\frac{P}{Q} = sin.\,\alpha + cos.\,\alpha\,.\, tang.\, 2\,\varrho$$

ausfallen.

Die Formel $P = Q\, tang.\, (\alpha + 2\,\varrho)$ findet ihre Anwendung bei Beurtheilung der Befestigung zweier Körper M und N durch einen Keil AB, Fig. 300, I. und II. Aus der Kraft P gegen den Rücken des Keiles folgt die Spannung, mit welcher die beiden Körper gegen einander gezogen werden:

Fig. 300.



$$Q = P\, cotg.\, (\alpha + 2\,\varrho).$$

Dagegen ist die Kraft, welche auf den Fuß B des Keiles drücken muß, um den Keil zu lösen, d. i. in der Richtung BA zurückzutreiben, weil hier α negativ ist:

$$P_1 = Q\, tang.\, (2\,\varrho - \alpha),$$

oder wenn man den letzten Werth für Q einsetzt:

$$P_1 = P\,\frac{tang.\, (2\,\varrho - \alpha)}{tang.\, (2\,\varrho + \alpha)}.$$

Damit der Keil nicht von selbst zurückgehe, muß natürlich $\alpha < 2\,\varrho$ sein.

§. 185. **Zapfenreibungscoefficienten.** Bei Zapfen ist nur die Reibung der Bewegung von Wichtigkeit, weshalb auch nur über diese Beobachtungsresultate vorliegen.

Tafel III.

Coefficienten der Zapfenreibung, nach Morin.

Angabe der sich reibenden Körper.	Zustand der Reibungsflächen und Gattung der Schmieren.							
	Trocken oder wenig fettig.	Fettig und mit Wasser benetzt.	Geschmiert und mit Wasser benetzt.	Oel, Talg oder Schweinefett. Auf gewöhnliche Art.	Oel, Talg oder Schweinefett. Gut unterhalten.	Sehr weiche u. gereinigte Wagenschmiere.	Schweineschmalz mit Graphit.	Fettig.
Glockengut auf Glockengut .	—	—	—	0,097	—	—	—	—
Glockengut auf Gußeisen . .	—	—	—	—	0,049	—	—	—
Schmiedeeisen auf Glockengut	0,251	0,189	—	0,075	0,054	0,090	0,111	—
Schmiedeeisen auf Gußeisen	—	—	—	0,075	0,054	—	—	—
Gußeisen auf Gußeisen . . .	—	0,137	0,079	0,075	0,054	—	—	0,137
Gußeisen auf Glockengut . .	0,194	0,161	—	0,075	0,054	0,065	—	0,166
Schmiedeeisen auf Guajakholz	0,188	—	—	0,125	—	—	—	—
Gußeisen auf Guajakholz . .	0,185	—	—	0,100	0,092	—	0,109	0,140
Guajak auf Gußeisen . . .	—	—	—	0,116	—	—	—	0,153
Guajak auf Guajak	—	—	—	—	0,070	—	—	—

Aus dieser Tabelle ist folgendes für die Praxis sehr wichtige Verhältniß zu entnehmen: bei Zapfen aus Schmiede- oder Gußeisen, laufend in Lagern aus Gußeisen oder Glockengut (Messing), geschmiert mit Oel, Talg oder Schweineschmalz, ist der Reibungscoefficient:

bei ununterbrochener guter Unterhaltung, = 0,054,

bei gewöhnlicher Abwartung, = 0,070 bis 0,080.

Die von Coulomb gefundenen Werthe weichen hiervon zum Theil ab.

Anmerkung. Durch die Versuche über die mittelbare Zapfenreibung mit Hülfe der Reibungswage sind vom Herrn Hirn mehrere, zum Theil von dem bis dahin Bekannten abweichende Resultate erlangt worden. Der Zapfen, welchen er

hierzu anwendete, bestand in einer hohlen gußeisernen Trommel von 0,23 Meter Durchmesser und 0,22 Meter Länge, und wurde von außen durch Eintauchen in Oel geschmiert, sowie von innen mittels durchfließenden Wassers abgekühlt. Das bronzene Zapfenlager (8 Kupfer, 1 Zinn) wurde mittels eines $1^1/_8$ Meter langen Hebels von 50 Kilogramm Gewicht aufgedrückt, während der Zapfen 50 bis 100 Umdrehungen pro Minute machte. Es ist leicht zu ermessen, daß bei den mit diesem Apparate angestellten Versuchen die Flüssigkeit und Adhäsion der als Schmiere dienenden Oele eine große Rolle spielen mußten, da hier nicht allein die Umfangsgeschwindigkeit, sondern auch die Reibungsfläche in Hinsicht auf den Druck eine sehr große war.

Die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel betrug, da die letztere einen Umfang von 72 Centimeter hatte, und in der Secunde $^5/_6$ bis $^{10}/_6$ mal umlief, 60 bis 120 Centimeter = 23 bis 46 Zoll, während sie bei den gewöhnlichen Maschinen nur 2 bis 6 Zoll mißt. Ferner der horizontale Axenschnitt der Trommel betrug 22 . 23 = 506 Quadratcentimeter, folglich kam auf ein Quadratcentimeter dieses Schnittes nur ein Druck von $\frac{50}{506} = 0,1$ Kilogramm, d. i. auf einen Quadratzoll 6,84 . 0,2 = 1,37 Pfund, während dieser Druck bei gewöhnlichen Arbeitsmaschinen mehrere hundert Pfund beträgt. Die Verhältnisse der Versuche des Herrn Hirn waren daher zum großen Theil abweichend von den Reibungsverhältnissen, wie sie bei großen und starken Maschinen vorkommen und wie sie auch bei anderen Versuchen, z. B. bei denen von Morin, stattfanden, und es sind folglich die sich bei denselben herausgestellten Abweichungen vollständig erklärlich. Die Hauptergebnisse der Hirn'schen Versuche bestehen ungefähr in Folgendem.

Die mittelbare Reibung hängt nicht allein von dem Drucke und der Natur und Beschaffenheit der sich reibenden Körper und des Schmiermittels, sondern auch von der Geschwindigkeit und von der Temperatur der Reibungsflächen und der Umgebung, sowie auch von der Größe dieser Flächen ab. Es ist bei constanter Temperatur die Reibung der Geschwindigkeit direct proportional, und es wächst dagegen dieselbe nur wie die Quadratwurzel aus der Geschwindigkeit, wenn die Temperaturen unbeachtet gelassen werden. Aus anderen Versuchen folgert endlich auch noch Herr Hirn, daß die mittelbare Reibung der Quadratwurzel aus der Reibungsfläche, sowie auch der Quadratwurzel aus dem Drucke proportional ist.

Was insbesondere den Einfluß der Temperatur anlangt, so ließ sich aus den angeführten Versuchen die Formel:

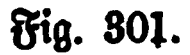
$$F = \frac{F_0}{1,0492^t}$$

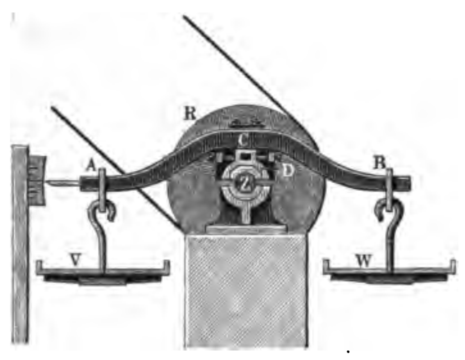
folgern, in welcher t die Temperatur der Reibungsfläche, F_0 die Reibung bei 0° und F die bei t Grad Temperatur bezeichnen.

Ein Hauptergebniß dieser Versuche ist noch die Ermittelung des Arbeitsvermögens der Wärme. Hiervon wird erst weiter unten, und zwar bei der Theorie der Wärme gehandelt.

§. 186. Neuere Versuche über Zapfenreibung sind mittels einer starken Reibungswage vom Herrn Maschinendirector Kirchweger an Eisenbahnwagenaxen von $2r = 2^3/_4$ bis $3^1/_2$ Zoll Dicke angestellt worden. (Siehe die Mittheilungen des Gewerbe-Vereins in Hannover, Jahrg. 1862.) Dieser Versuchsapparat bildet einen doppelarmigen Hebel ACB, Fig. 301, von 2 . 3 = 6

Fuß Länge, welcher mittels des Lagerdeckels *D* und durch auf die Wagschalen *V* und *W* aufgelegten Gewichte auf den umlaufenden Zapfen *Z* aufgedrückt wurde; die Umdrehung dieses Zapfens erfolgte mittels einer durch


Fig. 301.



Dampfkraft in Umdrehung gesetzten Riemenscheibe *R*. Die Belastung einer Wagschale betrug 2000 bis 8000 Pfund, wobei der Zapfen entweder 180 oder 360 Umdrehungen pr. Minute machte. Bei einigen Versuchen ließ man die Welle jedoch nur 10 Umdrehungen pr. Minute machen, um den Unterschied der Reibung bei verschiedenen Geschwindigkeiten kennen zu lernen. Uebrigens wurden wegen Ausgleichung von Gewichten und Fehlern sämmtliche Versuche bei umgekehrten Umdrehungsrichtungen wiederholt.

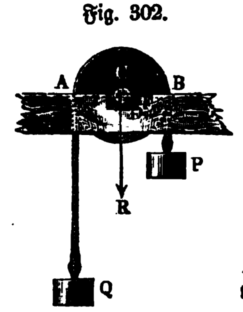
Während die Versuchsaxen aus Schmiedeeisen, sowie aus Gußstahl bestanden, war das gewöhnliche Lagermetall der Axbüchsen eine Composition von Kupfer, Zinn und Antimon, oder auch eine aus Kupfer, Zink, Zinn und Blei bestehende Bronze. Aus den Seite 233 und 234 des angezeigten Werkes zusammengestellten Tabellen ist zu ersehen, daß der Reibungscoefficient der Ruhe und bei Schmiere von Cohäsionsöl im Mittel $\varphi = 0{,}0912$ ist, wogegen der Coefficient der Bewegung bei Anwendung verschiedener Schmiermittel, als Rüböl, Cohäsionsöl, Baumöl, Talg u. s. w., mit Ausnahme der Bronzelager, im Mittel 0,0093, also circa 5mal so klein ausfällt als gewöhnlich angenommen wird. Dieser kleine Werth des Reibungscoefficienten φ hat vorzüglich in dem großen Zapfendruck von 500 bis 1000 Pfund pr. Quadratzoll seinen Grund; mit der Abnahme des Zapfendrucks, z. B. bis auf 26,6 Pfund, steigert sich z. B. φ auf 0,0245. Auch ist bei einer Zapfenstärke $2r$ von 3 Zoll und der Umdrehungszahl $u = 180$ pr. Minute die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens $v = \frac{\pi u r}{30} = 28{,}27$ Zoll, während dieselbe gewöhnlich nicht 3 Zoll übertrifft.

Die Reibungswage von Waltjen ist in der Hauptsache eine mit ihrem Auge auf einen umlaufenden Zapfen aufgelegte und mit einem besonderen Metalllager versehene Scheibe, welche durch angehangene Gewichte den erforderlichen Zapfendruck erhält, und zur Ausgleichung der ungleichen Kräfte mit einem besonderen Gegengewichte an der einen Seite der Scheibe versehen ist.

Bei den Versuchen von den Herren Waltjen und Rühlmann, sowie bei den in späterer Zeit vom Herrn Dr. Lunge angestellten Versuchen mit einer großen Anzahl von Schmiermitteln ist der Reibungscoefficient allerdings sehr verschieden, jedoch größtentheils innerhalb 0,02 und 0,03, also ebenfalls viel kleiner ausgefallen als bei den älteren Versuchen.

§. 187. **Mechanische Arbeit der Zapfenreibung.** Kennt man den Druck R zwischen einem Zapfen und seinem Lager, und ist noch der Halbmesser r des Zapfens, Fig. 302, gegeben, so läßt sich die Arbeit, welche die Zapfenreibung bei jeder Umdrehung des Zapfens in Anspruch nimmt, leicht ermitteln. Die Reibung F ist $= \varphi R$, und der ihr entsprechende Weg der Umfang $2\pi r$ des Zapfens; es folgt daher die bei einer Umdrehung durch die Reibung verloren gehende mechanische Leistung $A = \varphi R \,.\, 2\pi r = 2\pi\varphi R r$. Macht der Zapfen in einer Minute u Umdrehungen, so ist die in jeder Secunde verbrauchte Arbeit

Fig. 302.



$$L = 2\pi\varphi R r \cdot \frac{u}{60} = \frac{\pi u \varphi R r}{30} = 0{,}105 \,.\, u \varphi R r.$$

Die Arbeit der Reibung wächst also mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmesser und der Umdrehungszahl gleichmäßig. Es ist daher eine praktische Regel, bei rotirenden Maschinen den Zapfendruck nicht unnöthig durch große Gewichte zu erhöhen, die Zapfen nur so stark zu machen, als die Festigkeit auf die Dauer es verlangt, und endlich auch nicht sehr viel Umdrehungen in einer Minute zuzulassen, wenigstens dann nicht, wenn es nicht andere Verhältnisse erfordern.

Durch Anwendung von Frictionsrädern, welche man statt der Zapfenlager anwendet, wird die Arbeit der Reibung vermindert. In Fig. 303 ist AB eine Welle, die mit ihrem Zapfen CEE_1 auf den Umfängen EH, E_1H_1 dicht hinter einander liegender und um D und D_1 drehbarer Räder (Frictionsräder) ruht. Aus dem gegebenen Drucke R der Welle folgen die Pressungen:

$$N = N_1 = \frac{R}{2\,cos.\,\frac{\alpha}{2}},$$

wofern α den Winkel DCD_1 bezeichnet, welchen die Central- oder Drucklinien CD und CD_1 zwischen sich einschließen. Vermöge der wälzenden Reibung zwischen dem Zapfen C und den Radumfängen laufen die Räder mit diesem Zapfen um, und es entstehen in den Lagern von D und D_1 die Reibungen φN und φN_1, welche zusammen

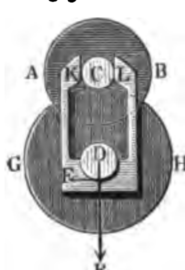
$$F = \varphi\,(N + N_1) = \frac{\varphi R}{cos.\,\frac{\alpha}{2}}$$

betragen. Werden nun die Radhalbmesser $DE = D_1 E_1$ durch a_1 und die Zapfenhalbmesser $DK = D_1 K_1$ durch r_1 bezeichnet, so erhalten wir die Kraft am Umfange der Räder oder auch am Umfange des auf diesen liegenden Zapfens C, welche zur Ueberwindung von F nöthig ist:

$$F_1 = \frac{r_1}{a_1} F = \frac{r_1}{a_1} \cdot \frac{\varphi R}{cos.\,\frac{\alpha}{2}},$$

Fig. 303.

Fig. 304.



während dieselbe $= \varphi R$ beträgt, wenn der Zapfen C unmittelbar in einer Pfanne ruht.

Wenn man die Gewichte der Frictionsräder unberücksichtigt läßt, so ist folglich die Arbeit der Reibung bei Anwendung von diesen Rädern,

$$\psi = \frac{r_1}{a_1\, cos.\,\frac{\alpha}{2}}$$

mal so groß, als ohne dieselben.

Stellt man dem Zapfendruck R ein einziges Frictionsrad GH, Fig. 304, entgegen und verhindert man die zufälligen, übrigens nicht zu beachtenden Seitenkräfte durch feste Backen K und L, so fällt $\alpha = 0$, $cos.\,\frac{\alpha}{2} = 1$ und obiges Verhältniß $\psi = \frac{r_1}{a_1}$ aus.

Beispiel. Ein Kunstrad wiegt 15000 Kilogramm, der Halbmesser a seines Umfanges ist 5 Meter und sein Zapfenhalbmesser $r = 13$ Centimeter, wie groß ist die Kraft am Umfange des Rades, um die Zapfenreibung zu überwinden, um dieses Rad also leer in einer gleichförmigen Bewegung zu erhalten, und wie groß ist der entsprechende Arbeitsaufwand, wenn es in einer Minute 5 Umdrehungen macht? Den Reibungscoefficienten φ können wir hier $= 0,075$ annehmen, weshalb die Reibung $\varphi R = 0,075 . 15000 = 1125$ Kilogramm beträgt. Da der Radhalbmesser $\frac{5}{0,13} = 38,46$ mal so groß ist, als der Zapfenhalbmesser oder Hebelarm der Reibung, so ist die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung:

$$= \frac{\varphi R}{38,46} = \frac{1125}{38,46} = 29,25 \text{ Kilogramm.}$$

Der Zapfenumfang ist $0,26 . \pi = 0,8168$ Meter; folglich der Weg der Reibung in einer Secunde:

$$= \frac{0,8168 . 5}{60} = 0,06807 \text{ Meter,}$$

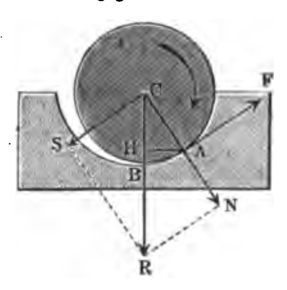
und die Arbeit der Reibung während einer Secunde:

$$L = 0,06807 . \varphi R = 0,06807 . 1125 = 76,57 \text{ Kilogrammmeter.}$$

Lägen die Zapfen dieses Rades auf Frictionsrädern, deren Halbmesser nur 5 mal so groß sind als die Halbmesser ihrer Zapfen, wäre also $\frac{r_1}{a_1} = \frac{1}{5}$, so würde die Kraft am Radumfange nur $\frac{1}{5} . 29,25 = 5,85$ Kilogramm und die von der Reibung consumirte Arbeit nur $\frac{76,57}{5} = 15,31$ Kilogrammmeter betragen. Allerdings würde aber dann auch das Rad weit unsicherer aufliegen.

§. 188. **Reibung in ausgelaufenen Zapfenlagern.** Die Reibung eines Zapfens ACB, Fig. 305, in einem ausgelaufenen Zapfenlager, welches nur in einem Punkte A aufliegt, ist kleiner als die bei einem neuen, noch in allen Punkten des Lagers aufruhenden Zapfen. Findet keine Umdrehung statt, so drückt der Zapfen in dem Punkte B, wo die Richtung des Mitteldruckes R hindurchgeht; tritt aber Umdrehung nach der Richtung AB ein, so wird der Zapfen vermöge seiner Reibung im Zapfenlager so weit in die Höhe steigen, bis sich die Kraft S zum Herabgleiten mit der Reibung F ins Gleichgewicht setzt. Der Mitteldruck R zerlegt sich in eine Normalkraft N und in eine Tangentialkraft S, N geht auf das Lager über und erzeugt die tangential wirkende Reibung $F = \varphi N$, S aber setzt sich mit F ins Gleichgewicht; es ist also auch $S = \varphi N$. Nun ist aber auch $S = R \sin. \alpha$ und $N = R \cos. \alpha$,

Fig. 305.



wenn α den Winkel $BCA = RCN$ bezeichnet, um welchen der Druckpunkt in Folge der Reibung zur Seite fortgerückt ist, daher folgt:

$$R \sin. \alpha = \varphi R \cos. \alpha, \text{ d. i. } tang. \alpha = \varphi = tang. \varrho,$$

daher ist α der sogenannte Reibungswinkel ϱ und $N = R \cos. \varrho$, sowie $F = \varphi N = R \sin. \varrho$, auch

$$F = \frac{R\, tang. \varrho}{\sqrt{1 + tang. \varrho^2}} = \frac{\varphi R}{\sqrt{1 + \varphi^2}}.$$

Fände das Fortrücken des Zapfens nicht statt, so wäre

$$F = \varphi R = R\, tang. \varrho = \frac{R \sin. \varrho}{\cos. \varrho};$$

es ist folglich die Reibung nach dem Fortrücken $\cos. \varrho$ mal so groß, als die vor dem Fortrücken. In der Regel ist $\varphi = tang. \varrho$ noch nicht $^1/_{10}$ und $\cos. \varrho > 0{,}995$, also die Differenz noch nicht $^5/_{1000} = {}^1/_{200}$; man hat daher in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung auf den Einfluß dieses Fortrückens nicht Rücksicht zu nehmen.

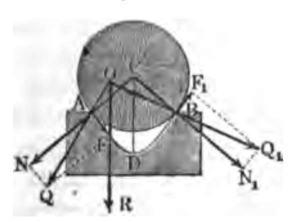
Fig. 306.



Läuft das Rad AB mit einer Nabe oder einem Auge, Fig. 306, um eine feste Axe AC, so ist die Reibung dieselbe, als wenn sich die Axen in Pfannen bewegen, nur ist bei einem ausgelaufenen Auge der Hebelarm der Reibung nicht der Halbmesser des festen Zapfens, sondern der des Auges.

Reibung in einem dreiseitigen Lager. Legt man den Zapfen in prismatische Lager, so erhält man größere Drücke und deshalb auch mehr Reibung als bei einem runden Lager. Ist das Lager ADB, Fig. 307, dreiseitig, so liegt der Zapfen in zwei Punkten A und B auf, und es ist an jedem derselben Reibung zu überwinden. Der Mitteldruck R zerlegt sich in zwei Seitenkräfte Q und Q_1, und jede derselben giebt einen Normaldruck N und N_1 und eine der Reibung $F = \varphi N$ und $F_1 = \varphi N_1$ gleiche Tangentialkraft. Dem vorigen Paragraphen zufolge lassen sich aber diese Reibungen auch $= Q \sin. \varrho$ und $Q_1 \sin. \varrho$ setzen; man hat daher für die Gesammtreibung: §. 189.


Fig. 307.

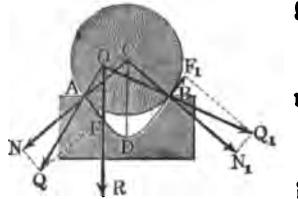


$$F + F_1 = (Q + Q_1) \sin. \varrho.$$

Die Kräfte Q und Q_1 ergeben sich durch Auflösung eines aus Q und Q_1 gebildeten Kräfteparallelogrammes mit Hülfe des Mitteldruckes R, des Reibungswinkels ϱ und des Winkels $ACB = 2\alpha$, welcher dem im Lager liegenden Bogen AB entspricht. Es ist:

$QOR = ACD - CAO = \alpha - \varrho$ und
$Q_1OR = BCD + CBO = \alpha + \varrho$; folglich:
$QOQ_1 = \alpha - \varrho + \alpha + \varrho = 2\alpha$.

Fig. 308.



Die Anwendung der Formeln in §. 80 giebt nun:

$$Q_1 = \frac{\sin.(\alpha - \varrho)}{\sin. 2\alpha} \cdot R$$

und

$$Q = \frac{\sin.(\alpha + \varrho)}{\sin. 2\alpha} \cdot R;$$

daher folgt die gesuchte Reibung:

$$F + F_1 = (Q + Q_1)\sin.\varrho = (\sin.[\alpha - \varrho] + \sin.[\alpha + \varrho])\frac{R\sin.\varrho}{\sin. 2\alpha}.$$

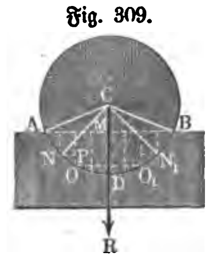
Aber $\sin.(\alpha - \varrho) + \sin.(\alpha + \varrho)$ ist, der analytischen Trigonometrie zufolge, $= 2\sin.\alpha\cos.\varrho$ und $\sin. 2\alpha = 2\sin.\alpha\cos.\alpha$, es ergiebt sich daher:

$$F + F_1 = \frac{2\sin.\alpha\, R\sin.\varrho\cos.\varrho}{2\sin.\alpha\cos.\alpha} = \frac{R\sin. 2\varrho}{2\cos.\alpha},$$

wofür sich wegen der Kleinheit von ϱ auch $= \frac{R\sin.\varrho}{\cos.\alpha}$ setzen läßt. Die Reibung bei Anwendung des dreiseitigen Zapfenlagers ist hiernach $\frac{1}{\cos.\alpha}$ mal so groß, als die beim cylindrischen Lager. Ist z. B. $ADB = 60^0$, also $ACB = 180^0 - 60^0 = 120^0$ und $ACD = \alpha = 60^0$, so hat man $\frac{1}{\cos. 60^0}$ mal $= 2$ mal so viel Reibung, als bei einem runden Lager.

§. 190. **Reibung in einem neuen Lager.** Mit Hülfe der letzten Formel läßt sich nun auch die Reibung in einem neuen runden Zapfenlager finden, worin der Zapfen an allen Stellen noch aufliegt. Es sei ADB in Fig. 309 ein solches Lager. Theilen wir den Bogen ADB, in welchem sich Zapfen und Lager berühren, in viele Theile, wie AN, NO u. s. w., welche gleichen Projectionen in der Sehne AB entsprechen, und nehmen wir an, daß jeder dieser Theile gleich viel vom ganzen Drucke R, nämlich $= \frac{R}{n}$, wobei n die Anzahl der Theile bezeichnet, vom Zapfen auf das Lager übertrage. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Reibung für zwei gegenüberliegende Theile NO und N_1O_1:

Fig. 309.



$$= \frac{R}{n} \cdot \frac{sin.\, 2\,\varrho}{cos.\, NCD}.$$

Aber $cos.\, NCD$ ist auch $= cos.\, ONP = \frac{NP}{NO}$, wofern NP die Projection des Theiles NO auf AB repräsentirt, und

$$NP = \frac{\text{Sehne } AB}{n};$$

es folgt daher jene den Theilen NO und $N_1\, O_1$ entsprechende Reibung:

$$= \frac{R\, sin.\, 2\,\varrho}{n} \cdot \frac{n\, .\, \overline{NO}}{\text{Sehne}} = \frac{R\, sin.\, 2\,\varrho}{\text{Sehne}} \, .\, \overline{NO}.$$

Um nun die Reibung für den ganzen Bogen ADB zu finden, hat man statt NO den Bogen $AD = \frac{1}{2}\, ADB$ einzuführen, weil die Summe aller Reibungen gleich ist $\frac{R\, sin.\, 2\,\varrho}{\text{Sehne}}$ mal Summe aller Bogentheile; es folgt also die Reibung in einem neuen Zapfenlager:

$$F = R\, sin.\, 2\,\varrho \cdot \frac{\text{Bogen } AD}{\text{Sehne } AB},$$

oder, wenn wir den Centriwinkel ACB, welcher dem im Lager liegenden Bogen entspricht, $= 2\,\alpha^0$, also Sehne $AB = 2\, AC\, .\, sin.\, \alpha$ setzen:

$$F = \frac{R\, sin.\, 2\,\varrho}{2} \cdot \frac{\alpha}{sin.\, \alpha}, \text{ oder } sin.\, 2\,\varrho = 2\, sin.\, \varrho$$

angenommen, annähernd:

$$F = R\, sin.\, \varrho \cdot \frac{\alpha}{sin.\, \alpha}.$$

Hiernach ist die anfängliche Reibung um so größer, je tiefer der Zapfen in seinem Lager liegt. Umfaßt z. B. das Zapfenlager den halben Zapfenumfang, ist also $\alpha = \frac{1}{2}\,\pi$ und sonach $sin.\, \alpha = 1$, so hat man $F = \frac{\pi}{2} \cdot R\, sin.\, \varrho$, also $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$ mal so groß, als beim ausgelaufenen Zapfenlager. Bei einem Zapfen, welcher nicht tief im Lager ruht, ist α klein, daher $sin.\, \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6} = \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6}\right)$ zu setzen, weshalb folgt $F = \left(1 + \frac{\alpha^2}{6}\right) R\, sin.\, \varrho$, oder $= R\, sin.\, \varrho$, wenn α sehr klein ist.

Poncelet's Theorem. Der Zapfendruck R ergiebt sich in der Regel (§. 191.) als Mittelkraft von zwei rechtwinkelig gegen einander gerichteten Kräften P und Q, ist also $= \sqrt{P^2 + Q^2}$. Insofern man ihn nur zur Bestimmung der Reibung

$$F = \varphi R = \varphi \sqrt{P^2 + Q^2}$$

bedarf, kann man sich mit einem Näherungswerth desselben begnügen, theils weil schon der Coefficient φ niemals so sicher bestimmt werden kann und von so sehr vielen Zufälligkeiten mit abhängt, theils auch, weil das ganze Product oder die Reibung φR meist nur ein kleiner Theil ist von den übrigen Kräften an der in Zapfenlagern ruhenden Maschine, wie Hebel, Rolle, Radwelle u. s. w. Der Lehrsatz, welcher einen Näherungsausdruck von $\sqrt{P^2 + Q^2}$ zu finden lehrt, ist unter dem Namen „das Poncelet'sche Theorem" bekannt, und läßt sich auf folgende Weise entwickeln:

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = P\sqrt{1 + \left(\frac{Q}{P}\right)^2} = P\sqrt{1 + x^2},$$

wobei $x = \frac{Q}{P}$, und vorausgesetzt wird, daß Q die kleinere Kraft, also x ein ächter Bruch ist. Setzen wir nun:

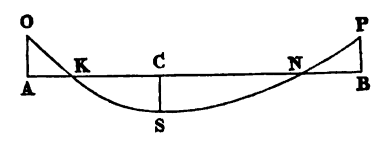
$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x,$$

und bestimmen wir die Coefficienten μ und ν gewissen Forderungen entsprechend. Der relative Fehler ist:

$$y = \frac{\sqrt{1 + x^2} - \mu - \nu x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1 - \frac{\mu + \nu x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Dieser Gleichung entspricht eine Curve OSP, Fig. 310, welche für die Abscisse $x = 0$, die Ordinate $AO = y = 1 - \mu$, und für die Abscisse $AB = 1$, die Ordinate $BP = y = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ hat, welche ferner in zwei Punkten K und N durch die Abscissenaxe geht, und bei S ihren größten Abstand CS von dieser Axe erreicht.

Fig. 310.



Setzen wir $y = 0$, also:

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu + \nu x,$$

und lösen wir diese Gleichung in Beziehung auf x auf, so erhalten wir in

$$x = \frac{\mu\nu \mp \sqrt{\mu^2 + \nu^2 - 1}}{1 - \nu^2}$$

die Abscissen AK und AN der Durchschnittspunkte K und N, und also auch diejenigen Werthe, bei welchen der Fehler Null ausfällt.

Um aber die Abscisse AC des größten negativen Fehlers CS zu finden, setzen wir das Differenzialverhältniß:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\mu + \nu x)\,(1 + x^2)^{-1/2}\,x - \nu\,(1 + x^2)^{1/2}}{1 + x^2} = \text{Null}$$

(s. §. 13 der analytischen Hülfslehren).

Dieser Forderung wird entsprochen, indem man

$$(\mu + \nu x)(1 + x^2)^{-1/2} x = \nu (1 + x^2)^{1/2}, \text{ oder}$$

$$(\mu + \nu x) x = \nu (1 + x^2), \text{ d. i. } x = \frac{\nu}{\mu} \text{ setzt.}$$

Hiernach giebt also die Abscisse $AC = \frac{\nu}{\mu}$ die größte negative Ordinate:

$$CS = 1 - \frac{\mu + \nu \cdot \frac{\nu}{\mu}}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\mu^2}}} = -\left(\frac{\mu^2 + \nu^2}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} - 1\right) = -\left(\sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1\right).$$

Um nun weder einen großen positiven noch einen großen negativen Fehler zu begehen, setzen wir die drei Ordinaten $AO = 1 - \mu$, $BP = 1 - \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}$ und $CS = \sqrt{\mu^2 + \nu^2} - 1$ einander gleich, und bestimmen hiernach die Coefficienten μ und ν. Es ist:

$$\mu = \frac{\mu + \nu}{\sqrt{2}}, \text{ d. i. } \nu = (\sqrt{2} - 1)\mu = 0{,}414\,\mu \text{ und}$$

$$2 - \mu = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \text{ d. i. } 2 = \mu\left(1 + \sqrt{1 + 0{,}414^2}\right), \text{ folglich}$$

$$\mu = \frac{2}{1 + \sqrt{1{,}1714}} = 0{,}96 \text{ und } \nu = 0{,}414 \,.\, 0{,}96 = 0{,}40.$$

Wir können also annähernd $\sqrt{1 + x^2} = 0{,}96 + 0{,}40 \,.\, x$, und ebenso die Mittelkraft

$$R = 0{,}96\, P + 0{,}40\, Q$$

setzen, und wissen, daß wir hierbei höchstens den Fehler $\pm y = 1 - \mu = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 = 4$ Proc. des wahren Werthes begehen.

Diese Bestimmung setzt voraus, daß wir wissen, welche von den Kräften die größere ist; ist uns dies nicht bekannt, so können wir

$$\sqrt{1 + x^2} = \mu (1 + x)$$

annehmen und bekommen so

$$y = 1 - \frac{\mu (1 + x)}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Hier giebt nicht nur die Grenze $x = 0$ den Fehler $= 1 - \mu$, sondern auch die Grenze $x = \infty$ denselben $= 1 - \frac{\mu x}{x} = 1 - \mu$; setzen wir aber $x = \frac{\nu}{\mu} = 1$, so bekommen wir den größten negativen Fehler:

$$= -\left(\frac{2\mu}{\sqrt{2}} - 1\right) = -(\mu\sqrt{2} - 1),$$

und es ergiebt sich durch Gleichsetzen dieser Fehler:

$$1 - \mu = \mu\sqrt{2} - 1, \text{ also } \mu = \frac{2}{1+\sqrt{2}} = \frac{2}{2{,}414} = \frac{1}{1{,}207} = 0{,}828,$$

wofür 0,83 gesetzt wird. In dem Falle also, wo man nicht weiß, welche von den Kräften die größere ist, läßt sich setzen:

$$R = 0{,}83\,(P + Q),$$

und man erhält dabei den größten Fehler:

$$\pm y = 1 - 0{,}83 = 0{,}17 \text{ Procent} = \tfrac{1}{6} \text{ des wahren Werthes.}$$

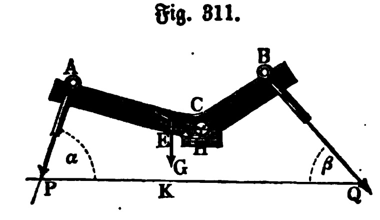
Weiß man, daß x nicht über 0,2 ist, so läßt man richtiger x ganz außer Acht, und schreibt $\sqrt{P^2 + Q^2} = P$, fällt aber x über 0,2 aus, so ist ebenfalls richtiger

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = 0{,}888\,P + 0{,}490\,.\,Q;$$

in beiden Fällen ist nämlich der größte Fehler ungefähr zwei Procent*).

§. 192. **Der Hebel.** Die im Obigen entwickelte Theorie der Reibung findet beim materiellen Hebel, bei der Radwelle und anderen Maschinen ihre Anwendung. Handeln wir zunächst vom Hebel, und nehmen wir im Winkelhebel ACB, Fig 311, gleich den allgemeinsten Fall vor. Bezeichnen wir wie früher (§. 139) den Hebelarm CA der Kraft P durch a, den Hebelarm CB der Last Q durch b, und den Zapfenhalbmesser CH durch r, setzen wir das Gewicht des Hebels $= G$, den Hebelarm CE desselben $= s$ und die Winkel APK und BQK, um welche die Kraftrichtungen vom Horizonte abweichen, $= \alpha$ und β. Die Kraft P giebt den Verticaldruck $P\,sin.\,\alpha$, und die Last Q denselben $= Q\,sin.\,\beta$; es ist daher der gesammte Verticaldruck:

Fig. 311.



$$V = G + P\,sin.\,\alpha + Q\,sin.\,\beta.$$

Die Kraft P giebt auch noch den Horizontaldruck $P\,cos.\,\alpha$ und die Last einen Gegendruck $Q\,cos.\,\beta$; es bleibt daher als Horizontaldruck

$$H = P\,cos.\,\alpha - Q\,cos.\,\beta$$

übrig, und es läßt sich nun der Totaldruck im Zapfen:

$$R = \mu V + \nu H = \mu\,(G + P\,sin.\,\alpha + Q\,sin.\,\beta) + \nu\,(P\,cos.\,\alpha - Q\,cos.\,\beta)$$

setzen, wobei aber der zweite Theil $\nu\,(P\,cos.\,\alpha - Q\,cos.\,\beta)$ nie negativ zu

*) Polytechnische Mittheilungen, Band I.

nehmen, und deshalb in dem Falle, wenn $Q\,cos.\,\beta > P\,cos.\,\alpha$ ist, das Zeichen zu ändern oder vielmehr $P\,cos.\,\alpha$ von $Q\,cos.\,\beta$ zu subtrahiren ist. Um nun denjenigen Werth der Kraft zu finden, welcher dem labilen Gleichgewichte entspricht, so daß beim kleinsten Zusatz Bewegung eintritt, setzen wir statisches Kraftmoment gleich statisches Lastmoment, plus oder minus Moment des Gewichtes der Maschine (§. 139), sowie plus Moment der Reibung, also:

$$Pa = Qb \pm Gs + \varphi Rr$$

$$= Qb \pm Gs + \varphi(\mu V + \nu H)r, \text{ woraus folgt}$$

$$P = \frac{Qb \pm Gs + \varphi\,[\mu(G + Q\,sin.\,\beta) \mp \nu Q\,cos.\,\beta]\,r}{a - \mu\varphi r\,sin.\,\alpha \mp \nu\varphi r\,cos.\,\alpha}.$$

Wirken P und Q vertical, so ist einfach

$$R = P + Q + G, \text{ daher}$$

$$Pa = Qb \pm Gs + \varphi\,(P + Q + G)r.$$

Ist der Hebel einarmig, so wirken P und Q einander entgegen, dann ist also $R = P - Q + G$ und deshalb auch die Reibung kleiner. Uebrigens muß R stets positiv in Rechnung kommen, weil die Reibung φR nur Bewegung verhindert, aber nicht erzeugt. Man sieht auch hiernach, daß ein einarmiger Hebel mechanisch vollkommener ist, als ein doppelarmiger Hebel.

Beispiel. Sind die Hebelarme bei dem in Fig. 311 abgebildeten Winkelhebel: $a = 6$ Fuß, $b = 4$ Fuß, $s = \frac{1}{2}$ Fuß und $r = 1\frac{1}{2}$ Zoll, die Neigungswinkel $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$, ist ferner die Last $Q = 5600$ Pfund und das Gewicht G des Hebels, $= 900$ Pfund, so bestimmt sich die Kraft P zur Herstellung des labilen Gleichgewichts wie folgt. Ohne Rücksicht auf Reibung ist $Pa + Gs = Qb$, daher:

$$P = \frac{Qb - Gs}{a} = \frac{5600\,.\,4 - 900\,.\,\frac{1}{2}}{6} = 3658 \text{ Pfund.}$$

Setzen wir $\mu = 0{,}96$ und $\nu = 0{,}40$, so bekommen wir:

$$\mu\,(G + Q\,sin.\,\beta) = 0{,}96\,(900 + 5600\,sin.\,50^0) = 4982 \text{ Pfund,}$$

$$\nu\,Q\,cos.\,\beta = 0{,}40\,.\,5600\,cos.\,50^0 = 1440 \text{ Pfund;}$$

$$\mu\,sin.\,\alpha = 0{,}96\,.\,sin.\,70^0 = 0{,}902,$$

$$\nu\,cos.\,\alpha = 0{,}40\,.\,cos.\,70^0 = 0{,}137.$$

Es ist leicht einzusehen, daß hier $P\,cos.\,\alpha$ kleiner als $Q\,cos.\,\beta$ ist, denn da annähernd $P = 3658$ ausfällt, so hat man $P\,cos.\,\alpha = 1251$ Pfund, wogegen $Q\,cos.\,\beta = 3600$ Pfund beträgt; deshalb nehmen wir hier für $\nu Q\,cos.\,\beta$ und $\nu\varphi r\,cos.\,\alpha$ das untere Zeichen und setzen:

$$P = \frac{5600\,.\,4 - 900\,.\,\frac{1}{2} + \varphi r\,(4982 + 1440)}{6 - \varphi r\,(0{,}902 - 0{,}173)}.$$

Nehmen wir nun noch den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ an, so erhalten wir

$$\varphi r = 0{,}075\,.\,\frac{3}{24} = 0{,}009375 \text{ sowie } 6422\,\varphi r = 60,$$

und die gesuchte Kraft:

$$P = \frac{22400 - 450 + 60}{6 - 0{,}00683} = \frac{22010}{5{,}9932} = 3673 \text{ Pfund.}$$

Uebrigens ist hier der Verticaldruck, wenn man die ohne Rücksicht auf Reibung bestimmte Kraft $P = 3658$ Pfund einführt:

$$V = 3658\, sin. 70^0 + 5600\, sin. 50^0 + 900 = 3437 + 4290 + 900$$
$$= 8627 \text{ Pfund},$$

dagegen der Horizontaldruck:

$$H = 5600\, cos. 50^0 - 3658\, cos. 70^0 = 3600 - 1251 = 2349 \text{ Pfund}.$$

Hier hat man $H > 0{,}2\, V$, daher ist richtiger:

$$R = 0{,}888\,.\,H + 0{,}490\, V = 0{,}888\,.\,8627 + 0{,}490\,.\,2349 = 8811$$

zu setzen, und es folgt so das Moment der Reibung:

$$= \varphi r R = 0{,}009375\,.\,8811 = 82{,}6 \text{ Fußpfund},$$

und endlich die Kraft:

$$P = \frac{22400 - 450 + 82{,}6}{6} = 3672 \text{ Pfund},$$

welcher Werth vom obigen allerdings nur wenig abweicht.

§. 193. **Reibung an stehenden Zapfen.** Findet bei einer Radwelle ein Druck in der Richtung der Axe statt, wie es z. B. bei stehenden Wellen in Folge des Gewichtes derselben jedesmal der Fall ist, so giebt es noch eine Reibung auf der Basis des einen Zapfens. Weil hier in allen Punkten Druck zwischen dem Zapfen und der Pfanne vorhanden ist, so steht diese Reibung der einfachen gleitenden näher, als der seither betrachteten Zapfenreibung und man hat deshalb für diese die in Tab. II. (S. 323) aufgeführten Reibungscoefficienten einzuführen. Um die Arbeit dieser Reibung zu finden, muß man den mittleren Weg kennen, den die Basis AB, Fig. 312, eines solchen stehenden Zapfens bei einer Umdrehung zurücklegt. Nehmen wir an, daß der Druck R auf der ganzen Fläche gleichförmig vertheilt sei, setzen wir also voraus, daß gleich großen Theilen der Basis gleiche Reibungen zukommen. Theilen wir nun die Basis durch Halbmesser CD, CE u. s. w. in lauter gleiche Sectoren oder Dreiecke, wie DCE, so entsprechen diesen nicht nur gleiche Reibungen, sondern auch gleiche Momente, es ist daher nur das Reibungsmoment von einem dieser Dreiecke zu finden. Die Reibungen eines solchen Dreiecks lassen sich aber als Parallelkräfte ansehen, da sie alle tangential, d. i. winkelrecht zum Radius CD wirken; und da nun der Schwerpunkt eines Körpers oder einer Fläche nichts weiter als der Angriffspunkt der Mittelkraft von in diesem Körper oder in dieser Fläche gleichmäßig vertheilten Parallelkräften ist, so läßt sich demnach auch hier der Schwerpunkt S des Sectors oder Dreiecks DCE als Angriffspunkt von der aus sämmtlichen Reibungen desselben entspringenden Mittelkraft ansehen. Ist nun der Druck auf diesen

Fig. 312.

Sector, $= \frac{R}{n}$ und der Halbmesser $CD = CE$ der Basis $= r$, so folgt (nach §. 115) das statische Moment der Reibung dieses Sectors:

$$= \overline{CS} \cdot \frac{\varphi R}{n} = {}^2/_3 r \cdot \frac{\varphi R}{n},$$

und endlich das statische Moment der vollständigen Zapfenreibung:

$$M = n \cdot {}^2/_3 r \frac{\varphi R}{n} = {}^2/_3 \varphi R r.$$

Zuweilen ist die sich reibende Fläche ein Ring $ABED$, Fig. 313. Sind die Halbmesser desselben $CA = r_1$ und $CD = r_2$, so hat man es mit der Bestimmung des Schwerpunktes S von einem Ringstücke zu thun, und erhält deshalb nach §. 116 den Hebelarm:

Fig. 313.

$$CS = {}^2/_3 \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2},$$

daher das Moment der Reibung:

$$M = {}^2/_3 \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right).$$

Führt man den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2} = r$ und die Breite des Ringes $r_1 - r_2 = b$ ein, so erhält man dieses Moment der Reibung auch

$$M = \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12 r}\right).$$

Die Arbeit der Reibung für eine Umdrehung des Zapfens ist im ersten Falle $A = 2\pi \cdot {}^2/_3 \varphi R r = {}^4/_3 \pi \varphi R r$, und im zweiten:

$$A = {}^4/_3 \pi \varphi R \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}\right) = 2 \pi \varphi R \left(r + \frac{b^2}{12 r}\right).$$

Hiernach ist auch die Reibung an den aus einem oder mehreren Ringen bestehenden Hals- oder Kammzapfen zu berechnen, wenn die stehende Welle an demselben aufgehangen ist.

Man sieht auch hier leicht ein, daß wegen Verminderung dieses Arbeitsverlustes die stehenden Zapfen oder Stifte möglichst schwach zu machen sind, und daß mehr Arbeitsverlust entsteht, wenn unter übrigens gleichen Verhältnissen, die Reibung in einem Ringe als in einem vollen Kreise statthat.

Beispiel. Bei einer 1800 Kilogramm schweren Turbine, welche in der Minute 100 Umdrehungen macht, ist die Stärke des Stiftes an der Basis $2^1/_2$ Centimeter, wie viel Arbeit consumirt die Reibung dieses Stiftes in einer Secunde? Den Reibungscoefficienten = 0,100 angenommen, erhält man die Reibung:

$$\varphi R = 0{,}100 \cdot 1800 = 180 \text{ Kilogramm};$$

der Weg pro Umdrehung ist:

$$= \frac{4}{3}\pi r = \frac{4}{3} \,.\, 3{,}14 \,.\, 1{,}25 = 5{,}23 \text{ Centimeter},$$

daher die Arbeit pro Umdrehung:

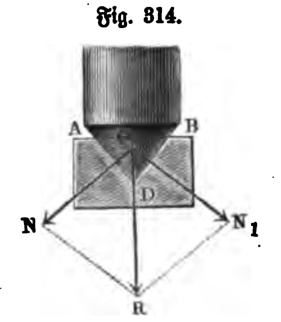
$$= 180 \,.\, 0{,}0523 = 9{,}414 \text{ Kilogrammmeter}.$$

Nun macht aber diese Maschine in der Secunde $^{100}/_{60} = ^{5}/_{3}$ Umdrehungen; folgt daher der gesuchte Arbeitsverlust:

$$= \frac{9{,}414}{0{,}6} = 156{,}9 \text{ Meterkilogramm}.$$

§. 194. **Reibung an Spitzzapfen.** Ist der Zapfen ABD, Fig. 314, conisch zugespitzt, so fällt die Reibung größer aus als bei einem unten ebenen Zapfen, weil sich der Axendruck R in die die Reibung erzeugenden Normalkräfte, wie N, N_1 u. s. w. zerlegt, die zusammen größer als R allein sind. Wird der halbe Convergenzwinkel $ADC = BDC$ durch α bezeichnet, so hat man:

Fig. 314.



$$2N = \frac{R}{sin.\,\alpha},$$

und deshalb die Reibung dieses Spitzzapfens:

$$F = \varphi\,\frac{R}{sin.\,\alpha} \text{ zu setzen.}$$

Ist nun r_1 der Halbmesser $CA = CB$ des Zapfens an der Stelle des Eintritts in die Pfanne, so hat man nach dem Obigen das statische Reibungsmoment:

$$M = \frac{\varphi R}{sin.\,\alpha} \,.\, {}^{2}/_{3}\, r_1 = {}^{2}/_{3}\,\varphi\,\frac{R r_1}{sin.\,\alpha};$$

oder, da $\frac{r_1}{sin.\,\alpha} = \frac{CA}{sin.\,\alpha} =$ der Kegelseite $DA = a$ ist, dasselbe auch:

$$M = {}^{2}/_{3}\,\varphi R a.$$

Läßt man diesen Zapfen nur wenig in die Pfanne eintauchen, so wird die Arbeit seiner Reibung kleiner als bei einem Zapfen mit ebener Basis und deshalb die Anwendung des Spitzzapfens dennoch von Nutzen sein. Ist z. B.:

$$a = \frac{r_1}{sin.\,\alpha} = \frac{r}{2}, \text{ also } r_1 = {}^{1}/_{2}\, r\, sin.\,\alpha,$$

so giebt der Spitzzapfen mit dem Halbmesser r_1 nur halb so viel Arbeitsverlust durch die Reibung als der eben abgestumpfte Zapfen mit dem Halbmesser r.

Bildet der Stift einen abgekürzten Kegel, Fig. 315, so findet Reibung an dem Mantel und an der Abstumpfungsfläche statt und es stellt sich das statische Reibungsmoment

$$M = \left(r_1^3 + \frac{r^3 - r_1^3}{sin.\,\alpha}\right) \cdot {}^2/_3\, \frac{\varphi R}{r^2}$$

heraus, wenn r den Halbmesser CA an der Stelle des Eintrittes in die Pfanne, r_1 den Halbmesser DE an der Basis und α^0 den halben Convergenzwinkel bezeichnet. In Folge des großen Seitendruckes N wird die Pfanne bald so stark abgerieben, daß endlich nur Druck auf der Basis EF übrig bleibt und das Moment der Reibung $M = {}^2/_3\, \varphi R r_1$ ausfällt.

Sehr oft sind endlich noch die stehenden Zapfen oder Stifte, Fig. 316 und Fig. 317, abgerundet. Wenn auch durch diese Abrundung die Rei-

Fig. 315.

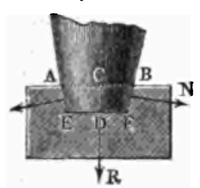


Fig. 316.



Fig. 317.



bung selbst keineswegs vermindert wird, so läßt sich doch dadurch eine Verminderung des Reibungsmomentes erzielen, daß man die Tiefe des Eintauchens in die Pfanne herabzieht. Setzt man eine kugelförmige Abrundung voraus, so erhält man mit Hülfe des höheren Calcüls für eine halbkugelförmige Pfanne das Moment der Reibung:

$$M = \frac{\varphi \pi}{2} \cdot R r;$$

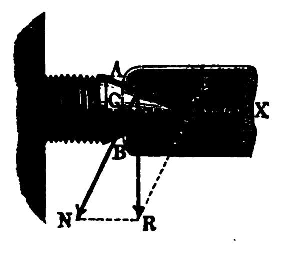
sowie für die ein niedriges Segment bildende Pfanne annähernd:

$$M = {}^2/_3 \left[1 + 0{,}3 \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] \varphi R r_1,$$

wenn r den Kugelhalbmesser $MA = MB$, und r_1 den Pfannenhalbmesser $CA = CB$ bezeichnet.

Anmerkung. Bei den Körnerspitzen ADB, Fig. 318, an den Drehbankspindeln zerlegt sich der Druck R rechtwinkelig gegen die Axenrichtung DX in einen Normaldruck N und einen Seitendruck S parallel zur Axe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie oben bei dem Spitzzapfen stehender Wellen, so hat man:

Fig. 318.



$$N = \frac{R}{cos.\,\alpha} \text{ und } S = R\; tang.\,\alpha.$$

Das Moment der Reibung, welche aus N entspringt, ist:

$$M = \varphi N \,.\, {}^2/_3 r_1 = {}^2/_3\, \varphi\, \frac{R r_1}{cos.\,\alpha},$$

oder da

$$r_1 = CA = DA \, sin. \, ADC = a \, sin. \, \alpha$$

ist, wenn a die Länge CD des eingelegten Zapfenstückes bezeichnet,

$$M = \frac{2}{3} \varphi R \, a \, tang. \, \alpha.$$

Die Seitenkraft S wird ganz oder zum Theil durch eine Gegenkraft S_1 an der anderen Spitze aufgehoben.

Beispiel. Wenn das Gewicht der armirten Welle eines Pferdegöpels, $R = 6000$ Pfd., der Halbmesser seines conisch gespitzten Stiftes, $= r = 1$ Zoll und der Convergenzwinkel 2α des letzteren, $= 90^0$ ist, so beträgt das statische Moment der Reibung an diesem Stifte:

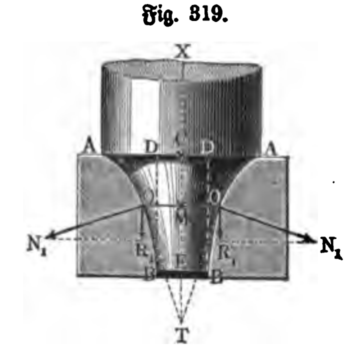
$$M = \frac{2}{3} \cdot \varphi \cdot \frac{Rr}{sin. \, \alpha} = \frac{2}{3} \cdot 0{,}1 \cdot \frac{6000}{sin. \, 45^0} \cdot \frac{1}{12} = \frac{100}{3\sqrt{1/2}} = 47{,}1 \text{ Fußpfund.}$$

Macht diese Welle während des Ausförderns einer Tonne aus der Grube $= u = 24$ Umdrehungen, so ist die Arbeit, welche die Reibung am Stifte in dieser Zeit aufzehrt:

$$A = 2\pi u \, . \, \frac{2}{3} \varphi \frac{Rr}{sin. \, \alpha} = 2\pi \, . \, 24 \, . \, 47{,}1 = 7103 \text{ Fußpfund.}$$

§. 195. Der sogenannte Antifrictionszapfen. Unter der Voraussetzung, daß der axiale Druck eines stehenden Zapfens $ABBA$, Fig. 319, der Querschnittsfläche proportional ist, können wir den Verticaldruck pro Flächeneinheit Querschnitt, $R_1 = \frac{R}{G}$ setzen, wofern R den ganzen Vertical- oder Axendruck, und G den Inhalt der verticalen Projection $ADDA$ der ganzen Reibungsfläche $ABBA$ bezeichnet. Ist nun α der Neigungswinkel CTO des Flächenelementes O gegen die Axe CT des Zapfens, so folgt der Normaldruck, welchen der Zapfen pro Flächeneinheit, z. B. pro Quadratcentimeter Querschnitt gegen das Lager ausübt, $N_1 = \frac{R_1}{sin. \, \alpha}$, daher die entsprechende Reibung

Fig. 319.



$$F_1 = \varphi N_1 = \varphi \frac{R_1}{sin. \, \alpha} = \frac{\varphi R}{G \, sin. \, \alpha},$$

und wenn noch y den Abstand oder Reibungshalbmesser MO bezeichnet, das Moment dieser Reibung:

$$F_1 y = \varphi \frac{R}{G} \cdot \frac{y}{sin. \, \alpha},$$

oder, da $\frac{y}{sin. \, \alpha}$ = der Tangente OT ist, auch

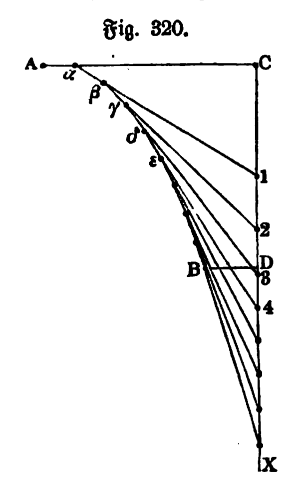
$$F_1 y = \varphi \frac{R}{G} \cdot \overline{OT}.$$

Soll, um ein gleichmäßiges Abführen des Zapfens und seiner Pfanne zu erlangen, das Moment $F_1 y$ an allen Stellen des Zapfens dasselbe sein, so muß folglich die Tangente OT längs der ganzen Erzeugungscurve AOB des Zapfens eine und dieselbe Größe a haben, und es ist daher dann das Moment der Reibung des ganzen Zapfens:

$$M = F_1 y \,.\, G = \varphi R a.$$

Die Curve AOB mit constanter Tangente OT, vom Berührungspunkte O bis zur Axe CX gemessen, ist eine Tractorie oder Zuglinie, und entsteht, wenn ein auf einer horizontalen Ebene liegender schwerer Punkt A, Fig. 320, durch einen Faden AC in Bewegung gesetzt wird, dessen Ende C auf einer geraden Linie CX fortrückt. Dieser Faden bildet hier die constante Tangentenlinie $AC = \alpha 1 = \beta 2 = \gamma 3$ u. s. w. $= a$. Um diese Curve zu construiren, errichte man $CA = a$ rechtwinkelig auf die Axe CX, nehme in CA, α nahe bei A an, trage $\alpha 1 = a$ auf, nehme β in $\alpha 1$, nahe bei α an, trage $\beta 2 = a$ auf, nehme wieder in dieser Linie γ nahe bei β an, trage $\gamma 3 = a$ auf u. s. w.; endlich führe man einen die Seiten $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta \ldots$ u. s. w. berührenden Zug. Derselbe giebt die Zuglinie um so vollkommener an, je kleiner die Stücke $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta \ldots$ u. s. w. sind. Herr Schiele nennt diese Linie die Antifrictionscurve (s. The Practical-Mechanics Journal, Juniheft 1849, übersetzt im polyt. Centralblatt, Jahrgang 1849).

Fig. 320.



Läßt man, wie Fig. 319 darstellt, die Antifrictionscurve am Umfange der Welle rechtwinkelig auslaufen, so ist der größte Reibungshalbmesser $CA = r$ zugleich die constante Tangente a, und daher das Reibungsmoment $M = \varphi R r$, ganz unabhängig von der Länge des Zapfens. Bei der ebenen Reibungsfläche AA von demselben Halbmesser ist das Reibungsmoment $M_1 = {}^2/_3\, \varphi R r$, also um ein Drittel kleiner, und vermindert sich im Laufe der Zeit noch mehr, da hier der äußere Umfang mehr abgeführt wird als der innere, und die Berührungsfläche noch kleiner ausfällt.

Man construirt auch Hähne und Hahngehäuse nach der Antifrictionscurve, da hier dieselben Verhältnisse vorkommen, wie bei den Stehzapfen.

Anmerkung. Wenn sich der Zapfendruck R so vertheilt, daß die Größe der Abnutzung, in der Richtung dieses Druckes gemessen, an allen Stellen des Zapfenumfanges gleich groß ausfällt, so ist

$$\frac{N_1 y_1}{sin.\ \alpha_1} = \frac{N_2 y_2}{sin.\ \alpha_2} = \frac{N_3 y_3}{sin.\ \alpha_3} \cdots,$$

also für den conischen Spitzzapfen, wo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \cdots = \alpha;\ N_1 y_1 = N_2 y_2 = N_3 y_3 \cdots$$

Bezeichnen ferner $O_1, O_2, O_3 \cdots$ die Oberflächentheile, in welchen die Normaldrücke $N_1, N_2, N_3 \cdots$ wirken, so hat man:

$$R = N_1 O_1\ sin.\ \alpha_1 + N_2 O_2\ sin.\ \alpha_2 + N_3 O_3\ sin.\ \alpha_3 + \cdots$$

also für den conischen Spitzzapfen:

$$R = (N_1 O_1 + N_2 O_2 + N_3 O_3 + \cdots)\ sin.\ \alpha$$ zu setzen.

Die Flächentheile $O_1, O_2, O_3 \cdots$ lassen sich als Ringe von einer und derselben Höhe $\frac{h}{n}$, der Breite $\frac{h}{n\ sin.\ \alpha}$, und den Halbmessern y_1, y_2, y_3 u. s. w. ansehen; es ist daher:

$$O_1 = 2\pi y_1 \frac{h}{n\ sin.\ \alpha},\ O_2 = 2\pi y_2 \frac{h}{n\ sin.\ \alpha},\ O_3 = 2\pi y_3 \frac{h}{n\ sin.\ \alpha}$$ u. s. w. und

$$O_2 = \frac{y_2}{y_1} O_1,\ O_3 = \frac{y_3}{y_1} O_1$$ u. s. w., sowie

$$N_1 O_1 = N_2 O_2 = N_3 O_3 \cdots,$$ und $$R = n \cdot N_1 O_1\ sin.\ \alpha.$$

Es sind also unter der gemachten Voraussetzung die Normaldrücke in gleich hohen Ringen des Zapfenumfangs gleich groß.

Umgekehrt folgt $N_1 O_1 = \frac{R}{n\ sin.\ \alpha}$, und daher das Moment der Zapfenreibung:

$$M = \varphi (N_1 O_1 y_1 + N_2 O_2 y_2 + N_3 O_3 y_3 + \cdots) = \varphi N_1 O_1 (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$
$$= \frac{\varphi R}{n\ sin.\ \alpha} (y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

Hat man es mit einem abgestumpften Kegelzapfen zu thun, dessen beiden Halbmesser r_1 und r_2 sind, so ist $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = \frac{n(r_1 + r_2)}{2}$ zu setzen, so daß sich $M = \frac{\varphi R (r_1 + r_2)}{2\ sin.\ \alpha}$ ergiebt.

Für den vollständigen Spitzzapfen, wo $r_2 = o$ ist, folgt daher $M = \frac{\varphi R r_1}{2\ sin.\ \alpha}$, während wir oben (§. 194), $M = \frac{2}{3} \varphi \frac{R r_1}{sin.\ \alpha}$ gefunden haben.

S. den Aufsatz von Herrn Reye zur Theorie der Zapfenreibung in Band 6 des Civil-Ingenieur, sowie den betreffenden Aufsatz vom Herrn Director Grashof in Band 5 der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.

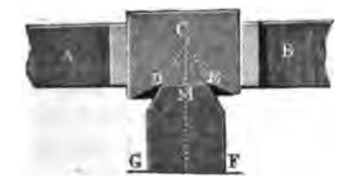
§. 196. **Reibung an Spitzen und Schneiden.** Um die Axenreibung drehender Körper möglichst zu vermeiden, unterstützt man diese durch zugespitzte Stifte, scharfe Schneiden u. s. w. Hätte man es hierbei mit vollkommen starren und unelastischen Körpern zu thun, so würde bei dieser Methode des Aufhängens oder Unterstützens gar kein Arbeitsverlust in Folge der Rei-

bung entstehen können, weil hier von der Reibung kein meßbarer Weg zurückgelegt wird; allein da jeder Körper eine gewisse Elasticität besitzt, so wird beim Aufliegen eines solchen auf einer Spitze oder Schneide ein kleines Eindrücken derselben eintreten und sich dadurch eine reibende Fläche herausstellen, auf welcher von der Reibung Wege beschrieben werden, die allerdings zu einem, wenn auch nur sehr kleinen Arbeitsverluste Veranlassung geben. Bei lange anhaltenden Drehungen und Schwingungen der auf diese Weise unterstützten Körper stellen sich solche Reibungsflächen ohnedies noch ein in Folge des Abreibens der Spitze oder scharfen Kante, und es ist dann die Reibung nach dem Früheren zu beurtheilen. Man wendet aus diesem Grunde diese Unterstützungsmethoden auch nur bei Instrumenten, wie bei der Boussole, Wage u. s. w. an, wo es auf die Herabziehung der Reibung wesentlich ankommt und nur von Zeit zu Zeit Bewegungen zugelassen werden.

Versuche über Reibung eines auf einer harten Stahlspitze ruhenden und um diese drehbaren Körpers hat Coulomb angestellt. Nach diesen Versuchen wächst diese Reibung etwas stärker als der Druck und verändert sich mit der Stärke der Zuspitzung des unterstützenden Stiftes. Sie ist bei einer Granatfläche am kleinsten, größer bei einer Achatfläche, größer bei einer Fläche von Bergkrystall, noch größer bei einer Glasfläche, am größten aber bei Stahlflächen. Bei sehr kleinem Drucke, wie bei der Magnetnadel, kann der Stift bis auf 10° bis 12° Convergenz zugespitzt werden. Ist der Druck aber groß, so muß man weit größere Convergenzwinkel (30° bis 45°) anwenden. Die Reibung ist kleiner, wenn der Körper mit einer ebenen Fläche auf einer Spitze ruht, als wenn er mit einer conischen oder sphärischen Höhlung aufsitzt. Bei einer scharfen Schneide, wie sie bei Wagebalken vorkommt, finden jedenfalls ähnliche Beziehungen statt. Schwer zu belastende Wagebalken bekommen schneidige Axen von 90° Convergenz, leichte Wagen können eine Schärfung von 30° vertragen.

Nimmt man an, daß die Nadel AB, Fig. 321, am Stifte FCG die Spitze DCE von der Höhe $CM = h$ und dem Halbmesser $DM = r$ eingedrückt habe, und setzt man voraus, daß das Volumen $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ dem Drucke R proportional sei, so läßt sich das Maß der Reibung auf folgende Weise finden. Setzen wir $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \mu R$, wo μ eine Erfahrungszahl ist, und führen wir den Convergenzwinkel $DCE = 2\alpha$ ein, setzen also $h = r\, cotg.\, \alpha$, so erhalten wir den Halbmesser der Basis:

Fig. 321.



$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,\mu\, R\, tang.\,\alpha}{\pi}} \text{ und}$$

$$\varphi R r = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\,\mu\, R^4\, tang.\,\alpha}{\pi}} = \varphi \sqrt[3]{\frac{3\,\mu}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{R^4\, tang.\,\alpha}.$$

Hiernach ist also anzunehmen, daß die Reibung auf einem Stifte mit der Cubikwurzel aus der vierten Potenz des Druckes und der Cubikwurzel aus der Tangente des halben Convergenzwinkels gleichmäßig wächst.

Fig. 322.

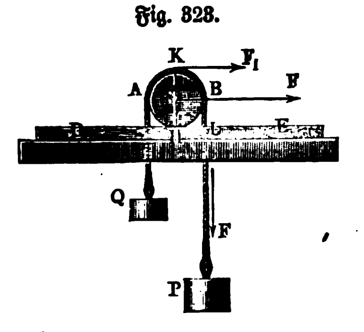


Ebenso läßt sich das Maß der Reibung eines Balkens AB, Fig. 322, finden, welcher über einer scharfen Kante C oscillirt. Ist α der halbe Convergenzwinkel DCM, l die Länge der Schneide und R der Druck, so ergiebt sich das Maß des Reibungsmomentes:

$$\varphi R r = \mu \sqrt{\frac{(R\, tang.\,\alpha)^3}{l}}.$$

§. 197. **Wälzende Reibung.** Die Theorie der wälzenden Reibung ist noch keineswegs fest begründet, man weiß, daß diese Reibung zunimmt mit dem Drucke und daß sie bei einem kleineren Durchmesser der Walze größer ist als bei einem größeren Durchmesser; in welcher algebraischen Abhängigkeit diese Reibung aber zum Drucke und Durchmesser des sich wälzenden Körpers steht, kann noch nicht als ausgemacht angesehen werden. Coulomb machte nur einige Versuche mit 2 bis 12 Zoll dicken Walzen aus Guajac (Pocken-) oder Franzosenholz und aus Ulmenholz, die er auf Unterlagen von Eichenholz wälzen ließ, indem er die Enden eines dünnen, um die Walze AB gelegten Fadens durch ungleiche Gewichte P und Q, Fig. 323, anspannte. Nach den Ergebnissen dieser Versuche scheint die wälzende Reibung dem Drucke direct und dem Durchmesser der Walze umgekehrt proportional zu wachsen, so daß die Kraft zur Ueberwindung der wälzenden Reibung durch $F = f \cdot \frac{R}{r}$ auszudrücken ist, wenn R den Druck, r den Halbmesser der Walze und f den durch Ver-

Fig. 323.



suche zu ermittelnden Reibungscoefficienten bezeichnet. Giebt man r in preuß. Zollen, so ist nach diesen Versuchen

für die Walzen aus Pockenholz $f = 0{,}0184$,
für die aus Ulmenholz $f = 0{,}0311$.

Für gußeiserne Räder von 20 Zoll Durchmesser, welche auf gußeisernen Schienen laufen, fand der Verfasser:

$f = 0{,}0178$, und Herr Sectionsrath Rittinger
$f = 0{,}0187$.

Nach Pambour ist für Eisenbahnräder von ungefähr 38 Zoll Höhe:

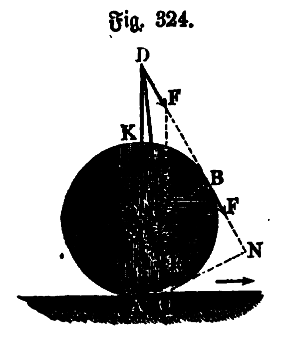
$f = 0{,}019$ bis $0{,}021$.

Die Formel $F = f\frac{R}{r}$ setzt voraus, daß die Kraft F zur Ueberwindung der Reibung an einem dem Walzenhalbmesser gleichen Hebelarm $HC = HL = r$ wirke, und daher mit der Walze einerlei Weg zurücklege; wirkt dieselbe aber an einem Hebelarm $HK = 2r$, so ist auch der Weg derselben doppelt so groß als der der Walze auf der Bahn, und daher die Reibung:

$$F_1 = \frac{1}{2} F = f\frac{R}{2r}.$$

Die Gleichgewichtsverhältnisse der wälzenden Reibung sind auf folgende Weise zu beurtheilen. In Folge des Druckes Q der Walze ACB auf die Basis AO, Fig. 324, drückt sich die letztere etwas zusammen, und es ruht deshalb die Walze nicht im tiefsten Punkte A, sondern in einem etwas vorwärts gelegenen Punkte O auf. Verlegt man nun die Angriffspunkte A und B der Kräfte Q und F, wovon F die zur Ueberwindung der Reibung nöthige Umdrehungskraft bezeichnet, nach dem Durchschnitte D, und construirt man aus Q und F das Kräfteparallelogramm, so erhält man durch dessen Diagonale $\overline{DR}$ die Kraft R, mit welcher die Walze in O auf ihre Unterstützung drückt, und es ist daher zur Erhaltung des Gleichgewichts nöthig, daß die Kraftmomente eines Winkelhebels AON einander gleich sind.

Fig. 324.



Setzt man nun den Abstand ON des Stützpunktes O von der Richtung der Kraft, $= a$, und die Entfernung OM desselben Punktes von der verticalen Schwerlinie des Körpers $= f$, so hat man folglich:

$$Fa = Qf,$$

und daher die gesuchte Reibung:

$$F = \frac{f}{a}\,Q.$$

Der Hebelarm f ist eine Erfahrungsgröße und so klein, daß statt a auch der Abstand des Fußpunktes A von der Richtung der Kraft F, sowie statt Q der Gesammtdruck R eingesetzt werden kann.

Hiernach ist $F = \frac{f}{a}\,R$, und folglich in dem Falle, wenn die Kraft horizontal wirkt und durch den Mittelpunkt C geht, also $a = r$ ist:

$$F = \frac{f}{r}\,R,$$

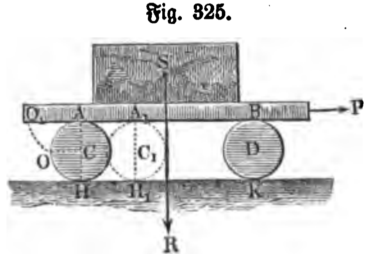
und dagegen dann, wenn diese Kraft im Scheitel K der Walze tangential wirkt, $a = 2\,r$, und daher:

$$F = \frac{f}{2r}\,R.$$

Der sogenannte Reibungscoefficient f der wälzenden Reibung ist folglich keine unbenannte Zahl, sondern eine Linie, und muß daher mit a in gleichem Maße ausgedrückt werden.

Wird ein über Walzen C und D, Fig. 325, liegender Körper ASB fortgezogen, so fällt die erforderliche Kraft P sehr klein aus, weil nur zwei wälzende Reibungen, nämlich die zwischen AB und den Walzen und die zwischen den Walzen und der Bahn HK, zu überwinden sind. Uebrigens ist der progressive Weg der Walzen nur halb so groß als der Weg der Last R, und es sind deshalb beim ferneren Fortgehen immer wieder neue Walzen vorn unterzuschieben, weil die Berührungspunkte A und B zwischen den Walzen und dem Körper AB vermöge des Wälzens ebenso viel rückwärts gehen, als die Axe der Walze vorwärts. Hat sich die Walze AH um den Bogen AO gedreht, so ist sie auch um einen diesem Bogen gleichen Weg AA_1 vorwärts gegangen und O mit O_1 in Berührung gekommen, der neue Berührungspunkt O_1 also um $AO_1 = AO$ hinter dem vorigen (A) zurückgegangen. Bezeichnet man die Coefficienten der Reibung auf HK und AB durch f und f_1, so hat man die Kraft zum Fortziehen der Last R:

Fig. 325.



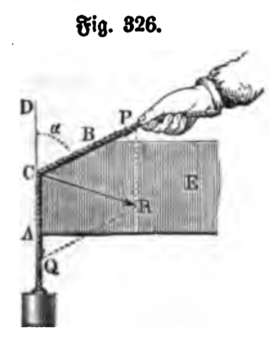
$$P = (f + f_1)\,\frac{R}{2r}.$$

Anmerkung. Die von Morin in großer Ausdehnung angestellten Versuche über den Widerstand der Wagen auf Straßen stimmen mit dem Gesetze, wonach

dieser Widerstand mit dem Drucke gleichmäßig und mit der Dicke der Walze umgekehrt wächst, überein. Ein anderer französischer Ingenieur, Dupuit, hingegen leitet aus seinen Versuchen ab, daß die wälzende Reibung zwar dem Drucke direct, aber übrigens nur der Quadratwurzel aus dem Walzenhalbmesser umgekehrt proportional wachse. Die neueren Versuche von Poirée und Sauvage mittelst Eisenbahnwagen führen ebenfalls darauf, daß die rollende Reibung umgekehrt wie die Quadratwurzel des Radhalbmessers wächst. S. Comptes rendus de la société des ingénieurs civils à Paris, 5. et 6. année. Besondere theoretische Ansichten über wälzende Reibung findet man in v. Gerstner's Mechanik, Bd. I. §. 537, und in Brix' Abhandlung über die Reibung, Art. 6, entwickelt. Ausführlicher wird hierüber im dritten Theile bei der Förderung auf Straßen und Schienenwegen gehandelt.

Seilreibung. Wir haben nun die Reibung eines biegsamen Körpers kennen zu lernen. Wird ein übrigens vollkommen biegsames, durch eine Kraft Q angespanntes Seil um die Kante C eines festen Körpers ABE, Fig. 326, gelegt und dadurch um einen Winkel $DCB = \alpha^0$ von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, so entsteht in dieser Kante ein Druck R, aus dem wieder eine Reibung F hervorgeht, welche verursacht, daß die Kraft P zur Herstellung eines labilen Gleichgewichtes größer oder kleiner als Q ist. Der Druck ist (§. 79): §. 198.

Fig. 326.



$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos.\alpha},$$

folglich die Reibung:

$$F = \varphi\sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos.\alpha}.$$

Setzen wir nun noch $P = Q + F$ und P^2 annähernd $= Q^2 + 2QF$, so erhalten wir:

$$F = \varphi\sqrt{Q^2 + 2QF + Q^2 - 2Q^2\cos.\alpha - 2FQ\cos.\alpha}$$
$$= \varphi\sqrt{2(1 - \cos.\alpha)(Q^2 + QF)} = 2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}\sqrt{Q^2 + QF},$$

wofür wieder $= 2\varphi\sin.\frac{\alpha}{2}(Q + \frac{1}{2}F)$ anzunehmen ist, wenn man von der Quadratwurzel nur die ersten zwei Glieder berücksichtigt. Jetzt ergiebt sich:

$$F = \varphi F\sin.\frac{\alpha}{2} + 2\varphi Q\sin.\frac{\alpha}{2},$$

folglich die gesuchte Reibung:

$$F = \frac{2\,\varphi\,Q\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}},$$

wofür meist genügend genau

$$F = 2\,\varphi\,Q\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\right),$$

und sogar sehr oft

$$F = 2\,\varphi\,Q\,sin.\,\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, wenn der Ablenkungswinkel α klein ist. Um also das Seil über die Kante C wegzuziehen, ist eine Kraft

$$P = Q + F = \left(1 + \frac{2\,\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}\right) Q = \left(\frac{1 + \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}\right) Q$$

nöthig, und um umgekehrt, durch das Seil das Niedergehen der Last Q zu verhindern, ist eine Kraft

$$Q = \left(\frac{1 - \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}{1 + \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}}\right) P$$

erforderlich; annähernd läßt sich

$$P = \left[1 + 2\,\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)\right] Q,$$

oder noch einfacher;

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\right) Q, \text{ sowie}$$

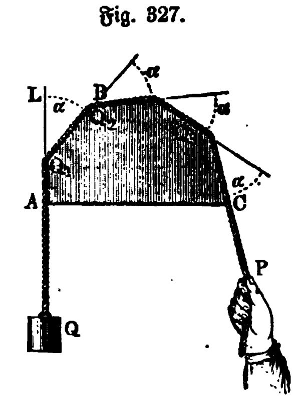
$$Q = \frac{P}{1 + 2\,\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\left(1 + \varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\right)}, \text{ oder:}$$

$$Q = \frac{P}{1 + 2\,\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}} = \left(1 - 2\,\varphi\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\right) P \text{ setzen.}$$

Geht das Seil über mehrere Kanten, so lassen sich durch wiederholte Anwendung dieser Formeln die Kräfte P und P_1 am anderen Seilende ebenfalls berechnen. Nehmen wir den einfachen Fall an, daß das Seil ABC, Fig. 327, um einen Körper mit n Kanten gelegt sei und an jeder

Kante um denselben kleinen Winkel α abgelenkt werde. Die Spannung im ersten Seilstücke ist:

Fig. 327.



$$Q_1 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q,$$

wenn die des Endes $= Q$ beträgt; die des zweiten:

$$Q_2 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_1$$

$$= \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2 Q,$$

die des dritten:

$$Q_3 = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right) Q_2$$

$$= \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^3 Q,$$

daher allgemein, die Kraft am letzten Ende:

$$P = \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n Q,$$

insofern es auf eine Bewegung in der Richtung der Kraft P ankommt. Vertauscht man P durch Q, so erhält man dagegen die nöthige Kraft:

$$P = \frac{Q}{\left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n},$$

wofern nur eine Bewegung in der Richtung von Q zu verhindern ist.

Die Reibung ist im ersten Falle:

$$F = P - Q = \left[\left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] Q,$$

und im zweiten:

$$F = Q - P_1 = \left[\left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^n - 1\right] P_1$$

$$= \left[1 - \left(1 + 2\,\varphi\,sin.\frac{\alpha}{2}\right)^{-n}\right] Q.$$

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem um einen Cylinder gewickelten, gegliederten Körper, z. B. bei einer Kette ABE, Fig. 328 (a. f. S.), wo dann n die Zahl der aufliegenden Glieder angiebt. Ist die Länge AB eines Kettengliedes $= l$ und die Entfernung CA der Axe A eines Gliedes von dem Mittelpunkte C des bedeckten Kreisbogens, $= r$, so hat man für den Ablenkungswinkel $DBL = ACB = \alpha$, $sin.\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2r}$.

Beispiel. Wie groß ist die Reibung am Umfange eines 4 Fuß hohen Rades, wenn dasselbe von zwanzig 5 Zoll langen und 1 Zoll dicken Gliedern einer Kette bedeckt wird, deren eines Ende festgehalten und deren anderes Ende mit 50 Pfund Kraft angespannt wird? Hier ist:

$$P_1 = 50 \text{ Pfund}, \; n = 20, \; sin. \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{48+1} = \frac{5}{49};$$

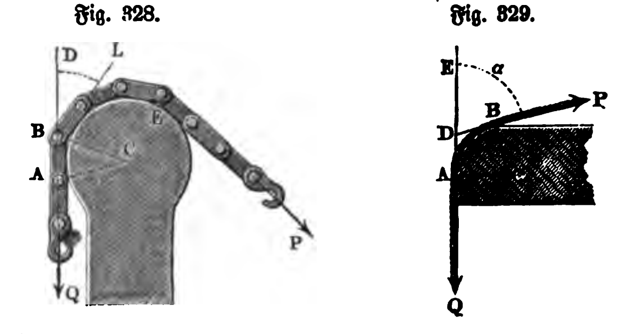
setzen wir nun noch für φ den mittleren Werth 0,35 ein, so erhalten wir die Reibung, mit der die Kette dem Rade in seiner Umdrehung entgegenwirkt:

$$F = \left[\left(1 + 2 \cdot 0{,}35 \cdot \frac{5}{49}\right)^{20} - 1\right] \cdot 50 = \left[\left(1 + \frac{35}{490}\right)^{20} - 1\right] \cdot 50$$

$$= \left[\left(\frac{15}{14}\right)^{20} - 1\right] . 50 = 2{,}974 \,.\, 50 = 149 \text{ Pfund}.$$

§. 199. Liegt ein gespanntes Seil AB, Fig. 329, um einen festliegenden, cylindrisch abgerundeten Körper ACB, so läßt sich die Reibung durch

Fig. 328. Fig. 329.



die im vorigen Paragraphen gefundene Regel ebenfalls finden. Es ist hier der Ablenkungswinkel $EDB = \alpha^0 =$ dem Centriwinkel ACB des Seilbogens AB; theilt man denselben in n gleiche Theile und sieht man den Bogen AB als aus n geraden Linien bestehend an, so erhält man auch n Ecken, jede mit der Ablenkung $\frac{\alpha^0}{n}$, und deshalb die Gleichung zwischen Kraft und Last wie im vorigen Paragraphen:

$$P = \left(1 + 2\varphi \, sin. \frac{\alpha}{2n}\right)^n Q.$$

Wegen der Kleinheit des Bogens $\frac{\alpha}{2n}$ läßt sich aber $sin. \frac{\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2n}$ setzen, weshalb sich

$$P = \left(1 + \frac{\varphi\alpha}{n}\right)^n Q \text{ herausstellt.}$$

Bedient man sich nun noch der binomischen Reihe (§. 15, analytische Hülfslehren), so erhält man:

$$P = \left(1 + n\frac{\varphi\alpha}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{(\varphi\alpha)^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{(\varphi\alpha)^3}{n^3} + \cdots\right)Q,$$

oder, da n sehr groß ist, also $n - 1 = n - 2 = n - 3 \ldots = n$ gesetzt werden kann:

$$P = \left(1 + \varphi\alpha + \frac{1}{1.2}(\varphi\alpha)^2 + \frac{1}{1.2.3}\cdot(\varphi\alpha)^3 + \cdots\right)Q.$$

Nun ist aber $1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots = e^x$, wo e die Grundzahl 2,71828 ... des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet (s. analyt. Hülfslehren, Art. 19), es läßt sich daher auch setzen:

$$P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q, \text{ sowie } Q = Pe^{-\varphi\alpha}, \text{ und umgekehrt:}$$

$$\alpha = \frac{1}{\varphi}\,Log.\,nat.\frac{P}{Q} = \frac{2,3026}{\varphi}\,(Log.\,P - Log.\,Q).$$

Giebt man den Seilbogen nicht in Theilen von π, sondern in Graden, so hat man $\alpha = \frac{\alpha^0}{180^0}\cdot\pi$ zu substituiren, drückt man ihn endlich durch die Zahl u der Umschläge aus, so hat man $\alpha = 2\pi u$ zu setzen.

Die Formel $P = e^{\varphi\alpha}\,.\,Q$ giebt an, daß die Seilreibung $F = P - Q$ auf einem festliegenden Cylinder gar nicht vom Durchmesser desselben, sondern nur von der Anzahl der Seilumschläge abhängt, zeigt aber auch, daß sie leicht außerordentlich vergrößert und fast bis ins Unendliche gesteigert werden kann. Setzen wir $\varphi = 1/_3$, so bekommen wir:

für $1/_4$	Umwickelung,	$P = 1,69\ Q$
„ $1/_2$	„	$P = 2,85\ Q$
„ 1	„	$P = 8,12\ Q$
„ 2	„	$P = 65,94\ Q$
„ 4	„	$P = 4348,56\ Q$ u. s. w.

(Anmerkung.) Aus der Gleichung $P = \left(1 + 2\varphi\ sin.\frac{\alpha}{2}\right)Q$ in §. 198 folgt:

$$P - Q = 2\varphi\ sin.\frac{\alpha}{2}\,Q,$$

oder, wenn man statt α das Bogenelement $\partial\alpha$, und statt $P - Q$ den entsprechenden Zuwachs ∂P der veränderlichen Seilspannung P einführt und $Q = P$ setzt:

$$\partial P = 2\varphi\frac{\partial\alpha}{2}\,P, \text{ oder } \frac{\partial P}{P} = \varphi\partial\alpha,$$

und man erhält durch Integration sogleich:

$$Ln.\,P = \varphi\alpha + Con.$$

Anfangs ist $\alpha = 0$ und $P = Q$, daher:

$$Ln.\,Q = 0 + Con. \text{ und } Ln.\,P - Ln.\,Q = Ln.\left(\frac{P}{Q}\right) = \varphi\alpha,$$

woraus sich durch Umkehrung die obige Gleichung:

$$\frac{P}{Q} = e^{\varphi\alpha}, \text{ oder } P = e^{\varphi\alpha}\,Q \text{ ebenfalls ergiebt.}$$

Beispiel. Um eine große untheilbare Last P von 1200 Kilogramm von einer gewissen Höhe, z. B. in einem Schachte, herabzulassen, wickelt man das Seil, woran diese Last hängt, um einen festgeklammerten runden Stamm AB, Fig. 330, $1^3/_8$ mal herum und hält das übrig bleibende Seilende in der Hand. Mit welcher Kraft ist nun dieses Seilende anzuspannen, damit die Last langsam und gleichförmig niedersinke? Setzen wir auch hier $\varphi = 0{,}3$, so erhalten wir diese Kraft:

Fig. 330.

$$Q = P e^{-\varphi \alpha} = 1200 \, . \, e^{-0{,}3 \, . \, \frac{11}{8} 2\pi}$$

$$= 1200 \, . \, e^{-\frac{33}{40}\pi},$$

also:

$$Log. nat. Q = Log\, nat. 1200 - \frac{33}{40}\pi$$

$$= 7{,}0901 - 2{,}5918$$

$$= 4{,}4983, \text{ oder}$$

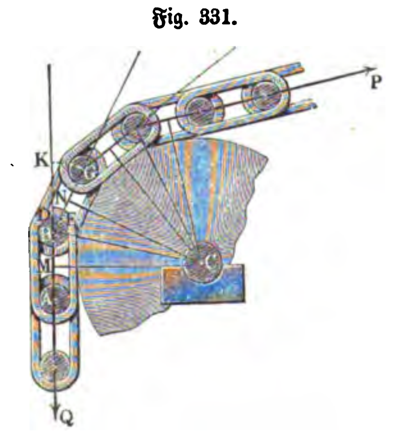
$$Log. Q = 1{,}9536,$$

daher $Q = 89{,}9$ Kilogramm.

§. 200. Steifigkeit der Ketten. Legen sich Seile oder gegliederte Körper u. s. w. um eine Rolle oder um den Umfang eines um eine Axe drehbaren Cylinders, so hört die im vorigen Paragraphen betrachtete Seil- oder Kettenreibung auf, weil nun der Radumfang mit dem Seile einerlei Geschwindigkeit annimmt, dafür ist nun aber eine Kraft zum Umbiegen beim Auflegen auf die Rolle, und nach Befinden auch eine solche zum Aufbiegen beim Abwickeln von der Rolle, aufzuwenden nöthig.

Ist es eine Kette, die sich um eine Trommel wickelt, so besteht der Widerstand des Auf- und Abwickelns in einer Reibung der Kettenbolzen, indem letztere in ihren Lagern um gewisse Winkel gedreht werden. Ist AB, Fig. 331, das eine und BG das nächstfolgende Kettenglied, ist ferner C die Drehungsaxe der Rolle, worauf sich die durch die Last Q ausgespannte Kette aufwickelt, sind endlich CM und CN Perpendikel, gegen die Längenaxen der Glieder AB und BG gefällt, so ist $MCN = \alpha^0$ der Winkel, um welchen sich die Rolle dreht, während

Fig. 331.



sich ein neues Glied auflegt, und auch zugleich der Winkel $KBG = 180^0 - ABG$, um welchen sich bei diesem Auflegen das Glied BG mit seinem Bolzen BD in dem Gliede AB umdreht. Bei dem Halbmesser $BD = BE = r_1$ des Bolzens durchläuft der Druck- oder Reibungspunkt D, während sich ein Kettenglied auflegt, einen Bogen $DE = r_1 \alpha$; und es ist folglich die hierbei verrichtete Arbeit der Reibung $\varphi_1 Q$ im Punkte $D, = \varphi_1 Q \cdot r_1 \alpha$. Für die Kraft P_1 zur Ueberwindung dieser Reibung, in der Richtung der Längenaxe BG wirkend angenommen, erhält man den gleichzeitigen Weg $s = \overline{CN}$ mal Bogen des Winkels $MCN = \overline{CN}.\alpha$ und daher die Arbeit $= P_1 \cdot \overline{CN}.\alpha$; es ergiebt sich daher durch Gleichsetzen beider Arbeiten $P_1 . \overline{CN} . \alpha = \varphi_1 . Q r_1 \alpha$ und die gesuchte Kraft, wenn man noch den um die halbe Kettenstärke vergrößerten Halbmesser CN der Trommel durch a bezeichnet:

$$P_1 = \varphi_1 Q \cdot \frac{r_1}{a}.$$

Ohne Rücksicht auf alle Reibungen wäre die Kraft zum Umdrehen der Rolle:

$$P = Q,$$

mit Rücksicht der Reibung beim Aufwickeln der Kette ist sie aber:

$$P = Q + P_1 = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Wickelt sich die Kette von der Trommel ab, so findet ein gleicher Widerstand statt; wenn also, wie bei den sogenannten Leitrollen, ein Auflegen auf der einen Seite und ein Abwickeln auf der anderen statthat, so ist die Kraft:

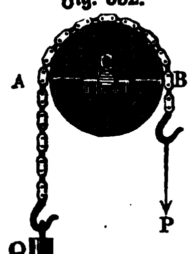
$$P = \left(1 + \varphi_1 \frac{r_1}{a}\right)^2 Q, \text{ oder annähernd } = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q.$$

Ist endlich noch der Zapfendruck $= R$, und der Zapfenhalbmesser $= r$, so folgt die Zugkraft bei Berücksichtigung aller Hindernisse:

$$P = \left(1 + 2\varphi_1 \frac{r_1}{a}\right) Q + \varphi \frac{r}{a} R.$$

Beispiel. Wie groß ist die Kraft P am Ende einer um eine Rolle ACB, Fig. 332, geschlagenen Kette, wenn die vertical niederziehende Last $Q = 110$ Pfund, das Gewicht der Rolle sammt Kette, 50 Pfund beträgt, der bis zur Mitte der Kette gemessene Halbmesser a der Rolle, $= 7$ Zoll, der Halbmesser des Zapfens C, $= 5/8$ Zoll und der Halbmesser der Kettenbolzen, $= 3/8$ Zoll mißt? Setzen wir die Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}075$ und $\varphi_1 = 0{,}15$, so erhalten wir nach der letzten Formel die Kraft:

Fig. 332.



$$P = \left(1 + 2.0{,}15 \cdot \frac{3}{8.7}\right) \cdot 110 + 0{,}075 \cdot \frac{5}{8.7}(110 + 50 + P),$$

oder, wenn wir rechts $P = 110$ annähernd annehmen:

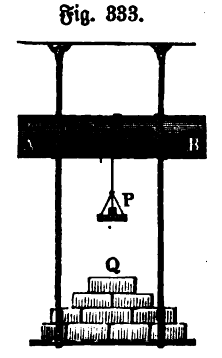
$$P = 1{,}016 \cdot 110 + 0{,}0067 \cdot 270 = 111{,}76 + 1{,}81 = 113{,}6 \text{ Pfund}.$$

§. 201. **Steifigkeit der Seile.** Beim Umbiegen eines Seiles um eine Rolle, oder beim Aufwickeln desselben auf eine Welle, tritt die Steifigkeit (franz. roideur; engl. rigidity) desselben als ein der Bewegung desselben entgegengesetztes Hinderniß hervor. Dieser Widerstand hängt nicht allein von dem Stoffe ab, aus dem das Seil gefertigt ist, sondern auch von der Zusammensetzungsweise und von der Stärke des Seiles, und läßt sich deshalb nur auf experimentellem Wege ermitteln.

Versuche zu diesem Zwecke sind vorzüglich von Coulomb, und in der neueren Zeit von dem Verfasser selbst angestellt worden. Während sich Coulomb nur mit schwachen Hanfseilen von $\frac{1}{4}$ bis höchstens $1\frac{1}{2}$ Zoll Stärke beschäftigte und dieselben auch nur auf Rollen von 1 bis höchstens 6 Zoll Durchmesser aufwickeln ließ, hat der Verfasser Hanfseile von 2 Zoll Stärke und Drahtseile von $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll Stärke über Rollen von 2 bis $6\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser laufen lassen.

Coulomb hat seine Versuche auf zweierlei Weise ausgeführt. Ein Mal, nach Amontons, mit einem in Fig. 333 abgebildeten Apparate, wo AB eine von zwei Seilen umschlungene Walze ist, die Spannung durch ein Gewicht Q hervorgebracht und das Herabrollen der Walze durch ein zweites Gewicht P, welches mittels eines dünnen Fadens an dieser Walze zieht, bewirkt wird. Ein zweites Mal hat er die Seile um auf einer horizontalen Bahn sich wälzende Cylinder gelegt, und aus der Differenz der an beiden Seilen hängenden und ein langsames Fortrollen bewirkenden Gewichte, nach Abzug der rollenden Reibung, auf den Steifigkeitswiderstand geschlossen.

Fig. 333.



Aus den Versuchen Coulomb's geht hervor, daß der Steifigkeitswiderstand mit der Stärke der Spannung des sich aufwickelnden Seiles ziemlich gleichmäßig wächst, daß er aber auch noch aus einem constanten Gliede K besteht, wie sich allerdings nicht anders erwarten läßt, weil schon eine gewisse Kraft nöthig ist, um ein unangespanntes Seil umzubiegen. Auch stellt sich heraus, daß dieser Widerstand im umgekehrten Verhältnisse der Rollendurchmesser zunimmt, daß er also bei dem doppelten Durchmesser der Rolle nur halb so groß ist, beim dreifachen ein Drittel u. s. w. Endlich läßt sich die Beziehung zwischen der Seildicke und der Seilsteifigkeit nach diesen Versuchen nur annähernd angeben, wie es auch kaum anders zu erwarten ist, da die Steifigkeit auch noch von der materiellen Beschaffenheit und von der Stärke der Drehung der Fäden und Litzen mit abhängt. Bei neuen Seilen fand sich die Steifigkeit ungefähr proportional der Potenz $d^{1,7}$, bei alten aber mehr $d^{1,4}$, wenn d den Durchmesser des Seiles bezeich-

net. Es ist also nur sehr ungefähr, wenn Einige diesen Widerstand der einfachen, Andere dem Quadrate der Seilstärke proportional wachsend annehmen.

Prony's Formel für den Steifigkeitswiderstand der Hanfseile. §. 202. Dem Vorstehenden zufolge läßt sich der Steifigkeitswiderstand der Hanfseile durch die Formel:

$$S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q),$$

wo d die Seilstärke, a der Rollenhalbmesser, bis Axe des Seiles gemessen, Q die Spannung des sich aufwickelnden Seiles, n, K und ν aber Erfahrungszahlen bezeichnen. Prony hat aus den Versuchen Coulomb's gefunden, daß für neue Seile

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(2{,}45 + 0{,}053\ Q),$$

und für alte:

$$S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(2{,}45 + 0{,}053\ Q)$$

gesetzt werden kann, wenn a und d in Linien, Q, S in Pfunden ausgedrückt sind. Diese Ausdrücke beziehen sich aber auf Pariser Maß, in preußischen Zollen und Neupfunden ausgedrückt, ändern sie sich in folgende um:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(13{,}31 + 0{,}295\ Q) \text{ und } S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(6{,}39 + 0{,}141\ Q),$$

und wenn d und a in Metern, S und Q in Kilogrammen genommen werden, so ist:

$$S = \frac{d^{1,7}}{a}(85{,}2 + 3{,}78\ Q) \text{ und } S_1 = \frac{d^{1,4}}{a}(13{,}74 + 0{,}605\ Q).$$

Da selbst diese complicirteren Formeln nicht immer die erwünschte Uebereinstimmung mit den Versuchsresultaten geben, so kann man, so lange nicht neue Versuche zu Grunde gelegt werden können, mit Eytelwein:

$$S = \nu \cdot \frac{d^2}{a} Q = \frac{d^2 Q}{3500\, a}$$

setzen, wobei vorausgesetzt ist, daß a in preußischen Fußen und d in preußischen Linien, dagegen Q und S in willkürlichem, jedoch gleichem Gewichtsmaße auszudrücken sind. Wenn d und a in Metern genommen werden, so ist:

$$S = 18{,}6\ \frac{d^2 Q}{a}.$$

Diese Formel giebt natürlich nur bei größeren Spannungen, wie sie allerdings meist in der praktischen Anwendung vorkommen, genügende Annäherungsresultate.

Die Steifigkeit getheerter Seile ist ungefähr um ein Sechstel größer als die ungetheerter Seile gefunden worden, und nasse Seile hat man ungefähr ein Zwölftel steifer gefunden als trockene.

Beispiel. Bei einer Seilspannung von 200 Kilogramm, und einem Rollenhalbmesser von 0,08 Meter ist für ein 0,02 Meter dickes neues Seil der Steifigkeitswiderstand nach Prony:

$$S = \frac{0{,}02^{1,7}}{0{,}08}(85{,}2 + 3{,}78 \;.\; 200) = 0{,}00129 \;.\; 10515 = 13{,}75 \text{ Kilogramm;}$$

nach Eytelwein:

$$S = \frac{0{,}02^2 \;.\; 200}{0{,}08} \cdot 18{,}6 = 18{,}6 \text{ Kilogramm.}$$

Wäre die Spannung Q nur 60 Kilogramm, so hätte man nach Prony:

$$S = 0{,}00129 \;.\; 3900 = 5{,}03 \text{ Kilogramm,}$$

nach Eytelwein:

$$S = \frac{0{,}02^2 \;.\; 60}{0{,}08} \cdot 18{,}6 = 5{,}58 \text{ Kilogramm,}$$

also hier eine bessere Uebereinstimmung. Man sieht aus diesen Beispielen, wie wenig Sicherheit diese Formeln gewähren.

Anmerkung. Tabelle zur Erleichterung der Berechnung des Steifigkeitswiderstandes der Seile theilt der „Ingenieur" Seite 365 mit. Nach Morin (siehe dessen Leçons de Mécanique pratique) ist, wenn n die Anzahl der Seilfäden bezeichnet, und der Rollenhalbmesser a in Centimetern ausgedrückt wird, für ungetheerte Seile:

$$d = \sqrt{0{,}1338\, n} \text{ Centimeter und}$$

$$S = \frac{n}{2a}(0{,}0297 + 0{,}0245\, n + 0{,}0363\, Q) \text{ Kilogr.}$$

$$= \frac{d^2}{a}(0{,}1110 + 0{,}6843\, d^2 + 0{,}1357\, Q) \text{ Kilogr.,}$$

und für getheerte:

$$d = \sqrt{0{,}186\, n} \text{ Centimeter, und}$$

$$S = \frac{n}{2a}(0{,}14575 + 0{,}0346\, n + 0{,}0418\, Q) \text{ Kilogr.}$$

$$= \frac{d^2}{a}(0{,}3918 + 0{,}5001\, d^2 + 0{,}1124\, Q) \text{ Kilogr.}$$

Drückt man aber d und a in Zollen und S und Q in Neupfunden aus, so stellt sich für ungetheerte Seile:

$$S = \frac{d^2}{a}(0.580 + 24{,}47\, d^2 + 0{,}3548\, Q)$$

und für getheerte Seile:

$$S = \frac{d^2}{a}(2{,}049 + 17{,}89\, d^2 + 0{,}2939\, Q)$$

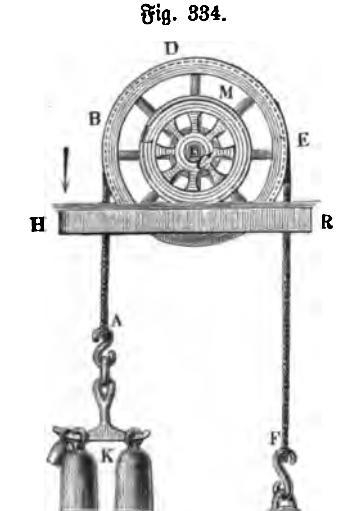
heraus. Z. B. ist bei einem ungetheerten Seile, für $d = 2$ Centimeter, $a = 8$ Centimeter und $Q = 200$ Kilogramm:

$$S = \frac{2^2}{8}(0{,}111 + 0{,}6843 \;.\; 2^2 + 0{,}1357 \;.\; 200) \text{ Kilogramm} = 15 \text{ Kilogramm.}$$

Die Prony'sche Formel gab im letzten Beispiele $S = 13{,}75$ Kilogramm.

Versuche über die Steifigkeit starker Seile. Der Verfasser hat sich bei seinen Versuchen über die Steifigkeit der Seile eines in Fig. 334 abgebildeten Apparates bedient. Die Scheibe oder Rolle *BDE*, auf welche sich das zu untersuchende Seil *ABDEF* auflegte, war mit einem Paar eiserner Räder, wie *CLM*, auf einer Welle *C* befestigt, und dieses Räderpaar stand auf einer horizontalen Schienenbahn *HR*. Nachdem man das eine Seilende *F* durch ein angehängtes Gewicht *G* gespannt hatte, hing man an das Kreuz *K*, welches am anderen Seilende *A* befestigt war, so viel Gewichte, bis das Räderpaar sammt der Scheibe und ihren Gewichten langsam fortzurollen anfing. Um sich von den Unvollkommenheiten des Apparates möglichst unabhängig zu machen, wurde nachher auf der Seite bei *F* so viel Gewicht zugelegt, bis auch das Fortrollen des armirten Räderpaares nach der entgegengesetzten Richtung eintrat. Das arithmetische Mittel von den Zulagen gab nun, nachdem man hiervon noch die wälzende Reibung abgezogen hatte, die Kraft zur Ueberwindung der Seilsteifigkeit. §. 203.

Fig. 334.



Den Coefficienten der in Abzug zu bringenden rollenden Reibung ermittelte man auf dieselbe Weise, indem man statt des Seiles einen schwachen Bindfaden, dessen Steifigkeitswiderstand vernachlässigt werden konnte, auflegte. Der mittlere Werth dieses Coefficienten ist oben, §. 197, mitgetheilt worden.

Der Steifigkeitswiderstand besteht nach des Verfassers Ansicht weniger aus der Steifigkeit, als aus der Reibung der einzelnen Fäden oder Drähte, die natürlich beim Auflegen auf die Rolle ihre gegenseitige Lage ändern müssen. Der erste Theil dieses Widerstandes fällt beim Umlegen eines Drahtseiles um eine Leitrolle ganz aus, weil dieses Seil vermöge seiner Elasticität beim Abwickeln zum Wiedergeradestrecken genau so viel Arbeit ausgiebt, als es beim Aufwickeln zum Krümmen in Anspruch genommen hat. Hier besteht also der Steifigkeitswiderstand lediglich in der Reibung der einzelnen Drähte unter einander, und daß dem so sei, zeigen auch die Versuche des Verfassers, durch welche sich ergeben hat, daß dieser Widerstand bei eingölten oder frisch getheerten Drahtseilen um 40 Procent kleiner ist als bei trockenen. Bei Hanfseilen ist das Verhältniß ein anderes, denn da diese, zumal nach längerem Gebrauche, fast gar keine Elasticität besitzen, so erfordern

die einzelnen Fäden und Litzen derselben nicht allein Kraft zum Krümmen, sondern auch Kraft zum Wiedergeradestrecken.

§. 204. **Neue Formel für den Steifigkeitswiderstand.** Da die Steifigkeit eines Seiles nicht allein von der Seilstärke, sondern auch von der Stärke der Drehung und von der Zusammensetzungsweise desselben abhängt, so hält es der Verfasser für angemessen, dieselbe durch die einfachere Formel:

$$S = \frac{K + \nu Q}{a}$$

auszudrücken und die Constanten K und ν für jede Seilart besonders zu bestimmen. Auch hat sich aus den Versuchen des Verfassers ergeben, daß sich, zumal für die Drahtseile, angemessener statt $\frac{K}{a}$, bloß K, und demnach

$$S = K + \frac{\nu Q}{a} \text{ setzen läßt.}$$

1. Für ein getheertes Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke, gelegt um Scheiben von 4 bis 6 Fuß Höhe, ergab sich der Steifigkeitswiderstand:

$$S = 1,5 + 0,00565 \frac{Q}{a} \text{ Kilogramm,}$$

wobei der Rollenhalbmesser a in Metern auszudrücken ist, oder

$$S = 3,0 + 0,216 \frac{Q}{a} \text{ Pfund,}$$

wo a in Zollen gegeben sein muß.

2. Für ein neues ungetheertes Hanfseil von $^3/_4$ Zoll Stärke und eine Rolle von 21 Zoll Durchmesser ergab sich:

$$S = 0,086 + 0,00164 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 0,17 + 0,0625 \frac{Q}{a} \text{ Pfund.}$$

3. Für ein Drahtseil von 8 Linien Dicke, welches aus 16 Drähten von je $1^1/_2$ Linien Dicke bestand, und wovon jeder laufende Fuß 0,64 Pfund wog, wurde bei Rollen von 4 bis 6 Fuß Höhe,

$$S = 0,49 + 0,00238 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 0,98 + 0,0910 \frac{Q}{a} \text{ Pfund}$$

gefunden.

4. Für ein frisch getheertes Drahtseil mit Hanfseelen in den Litzen und im Seile, von 7 Linien Dicke, bestehend aus 4 . 4 = 16 Drähten von je $1^1/_5$ Linien Dicke, und pr. Fuß 0,63 Pfund wiegend, stellte sich bei einer Rolle von 21 Zoll Durchmesser,

$$S = 0,57 + 0,000694 \frac{Q}{a} \text{ Kilogrm.} = 1,14 + 0,0264 \frac{Q}{a} \text{ Pfund}$$

heraus.

Anmerkung. Eine ausführliche Beschreibung der Versuche des Verfassers findet man in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann, Brückmann und Röting, Band I. Freiberg 1848.

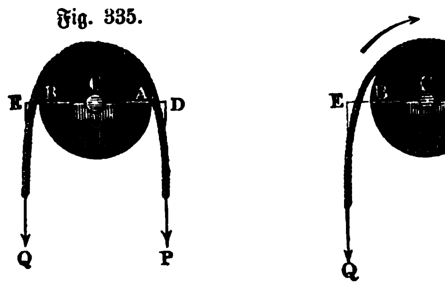
Die Hanfseile unter 1. wurden in Freiberg zum Fördern durch Wassergöpel angewendet, sind aber in den neueren Zeiten durch die Drahtseile unter 3. und 4. ersetzt worden. Beiderlei Seile haben bei sechsfacher Sicherheit eine Tragkraft von circa 30 Centnern. Es ist aus dem Vorstehenden zu ersehen, daß bei gleicher Tragkraft der Steifigkeitswiderstand bei Drahtseilen viel kleiner ist als bei Hanfseilen. Nimmt man z. B. die Seilspannung $Q = 2000$ Pfund und den Rollenhalbmesser $a = 40$ Zoll an, so erhält man den Steifigkeitswiderstand für ein Hanfseil:

$$S = 3{,}0 + 0{,}216 \;.\; {}^{2000}/_{40} = 13{,}8 \text{ Pfund},$$

und dagegen für ein Drahtseil:

$$S = 0{,}98 + 0{,}0910 \;.\; {}^{2000}/_{40} = 5{,}5 \text{ Pfund}.$$

Theorie der Leitrolle. Wenden wir nun die im Vorstehenden mitgetheilten Formeln für den Steifigkeitswiderstand der Seile auf die Theorie der festen Rollen an. Es sei ACB, Fig. 335 oder Fig. 336, die Rolle, a §. 205.



der Halbmesser $CA = CB$, r der Zapfenhalbmesser und G das Gewicht derselben, ferner d die Seilstärke, Q die an einem Seilende angehängte Last, S der Steifigkeitswiderstand, F die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung, und folglich $Q + F + S$ die ganze Kraft P.

Die Steifigkeit des Seiles äußert sich dadurch, daß das Seil beim Aufwickeln nicht plötzlich die Krümmung des Rollenumfanges annimmt und sich ebenso beim Abwickeln nicht plötzlich gerade streckt, sondern in einem Bogen mit wachsender Krümmung sich auf die Rolle auflegt, und sich in einem Bogen mit abnehmender Krümmung von derselben wieder abwickelt. Zwischen den elastischen Drahtseilen und den unelastischen Hanfseilen findet der Unterschied statt, daß sich jene beim Abwickeln etwas eher, und diese etwas später von dem Rollenumfange ablösen, folglich der Hebelarm CD der Kraft im ersten Falle (Fig. 335) etwas größer, und im zweiten Falle (Fig. 336) etwas kleiner als der Halbmesser $CA = a$ der Rolle ist, wogegen der Lastarm CE in beiden Fällen den Rollenhalbmesser a übertrifft. Wenn man von der Zapfenreibung F absieht, also $P = Q + S$ setzt, so hat man

$$(Q + S) \cdot \overline{CD} = Q \cdot \overline{CE},$$

daher den Steifigkeitswiderstand:

$$S = \left(\frac{CE - CD}{CD}\right) Q = \left(\frac{CE}{CD} - 1\right) Q,$$

und das Hebelarmverhältniß:

$$\frac{CE}{CD} = 1 + \frac{S}{Q};$$

was sich nun durch Einsetzen eines der oben angegebenen Werthe für S leicht berechnen läßt.

Wir können übrigens auch ohne weitere Berücksichtigung dieses Hebelarmverhältnisses die Kraft $P = Q + S + F$ bestimmen, wenn wir in diesem Ausdrucke für schwache Hanfseile nach Prony

$$S = \frac{d^n}{a}(K + \nu Q),$$

dagegen für Draht- und starke Hanfseile nach dem Verfasser

$$S = K + \frac{\nu Q}{a},$$

und die auf den Rollenumfang reducirte Zapfenreibung

$F = \varphi \frac{r}{a}(Q + G + P)$ oder annähernd $F = \varphi \frac{r}{a}(2Q + G)$ setzen.

Es folgt so im ersten Falle:

$$P = Q + \frac{d^n}{a}(K + \nu Q) + \varphi \frac{r}{a}(2Q + G),$$

und im zweiten:

$$P = Q + K + \frac{\nu Q}{a} + \varphi \frac{r}{a}(2Q + G).$$

Bei einer Radwelle ist natürlich noch eine Reduction der Kraft vom Wellenumfange auf den Radumfang nöthig (s. §. 169).

Beispiel. Wenn sich ein Drahtseil von ungefähr 8 Linien Dicke um eine Leitrolle von 5 Fuß Höhe, 3 Zoll Zapfenstärke und 1500 Pfund Gewicht legt, und die Spannung des Seiles 1200 Pfund beträgt, so hat man bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = 0,075$, die nöthige Kraft:

$$P = 1200 + 0,98 + 0,091 \cdot {}^{1200}/_{30} + 0,075 \cdot {}^{3}/_{60}\,(2400 + 1500)$$
$$= 1200 + 0,98 + 3,64 + 14,62 = 1219 \text{ Pfund};$$

es geht also durch das Umlegen um diese Leitrolle $^{19}/_{12} = 1,6$ Procent an Kraft verloren.

Wenn statt des Drahtseiles ein Hanfseil von 1,6 Zoll Stärke in Anwendung gekommen wäre, so hätte man:

$$P = 1200 + 3,0 + 0,216 \cdot {}^{1200}/_{30} + 14,62 = 1226,3 \text{ Pfund}$$

und daher den Kraftverlust:

$$P - Q = 26,3 \text{ Pfund, d. i. pr. Pfund Spannung } \frac{26,3}{1200} = 0,022 \text{ Pfund}$$
$$= 2,2 \text{ Procent.}$$

Vierter Abschnitt.

Die Anwendung der Statik auf die Elasticität und Festigkeit der Körper.

Erstes Capitel.

Die Zug- und Druck-Elasticität und Festigkeit.

Elasticität. In dem vorigen Abschnitte wurden die festen Körper als vollkommen starre angesehen, d. h. als Systeme materieller Punkte, die in vollständig unveränderlichen Abständen fest mit einander verbunden sind. Diese Voraussetzung trifft in der Wirklichkeit aber nicht zu, insofern alle bekannten Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte gewisse Formänderungen erleiden, welche aus bestimmten Verschiebungen der einzelnen Moleküle gegen einander hervorgehen. Jeder solchen Verschiebung zweier materiellen Punkte gegen einander wirkt eine zwischen diesen Punkten auftretende innere Kraft entgegen, die sogenannte Cohäsion (franz. cohésion; engl. cohesion), welche, als passive Kraft, nur dann zur Wirkung kommt, wenn durch äußere Kräfte eine Verschiebung der Massentheilchen angestrebt wird, und welche sofort verschwindet, sobald jene äußeren Kräfte aufhören zu wirken. Die Intensität der Cohäsionskraft zwischen zwei beliebigen materiellen Punkten ist wesentlich abhängig von der Größe der Veränderung, welche der Abstand dieser Punkte erleidet, sie nimmt nach bestimmten Gesetzen mit dieser Veränderung zu. Wenn daher irgend welche äußere Kräfte auf einen beliebigen festen Körper wirken, so wird der letztere so lange eine Formänderung erleiden, bis die durch die Formänderung selbst hervorgerufenen Cohäsionskräfte zwischen den einzelnen Massentheilchen hinreichende Größe erlangt haben, um den äußeren Kräften das Gleichgewicht zu halten. Es geht daraus hervor, daß diese inneren Kräfte eine Formänderung des Körpers §. 206.

nicht von vornherein verhindern können, sondern dieselbe nur auf einen bestimmten Betrag einzuschränken vermögen, und daß jede Kraft, wenn auch noch so klein, welche auf einen Körper wirkt, nothwendig auch in dem letzteren bestimmte Formänderungen hervorrufen muß.

Sobald die Wirkung der äußeren Kräfte auf einen Körper aufhört, werden die in demselben hervorgerufenen inneren Kräfte ihrem Streben, der Verschiebung der einzelnen Massentheilchen zu widerstehen, folgen können, indem sie nun nicht mehr durch die äußeren Kräfte im Gleichgewichte gehalten werden, und die materiellen Punkte werden im Allgemeinen ihre ursprüngliche gegenseitige Lage annehmen, welche sie hatten, ehe sie durch die Einwirkung der äußeren Kräfte in einen gespannten Zustand versetzt worden waren. Nachdem die eingetretene Formänderung wieder verschwunden ist, sind auch die Spannungen zwischen den Molekülen nicht mehr vorhanden. Man nennt diese Fähigkeit der Körper, die durch Einwirkung von Kräften erlittene Formänderung nach Wegnahme dieser Kräfte vollständig wieder aufzuheben, ihre Elasticität (franz. élasticité; engl. elasticity) im weiteren Sinne des Wortes. Wenn ein Körper nach Wegnahme der Kräfte, welche auf ihn wirkten, die erlittene Formänderung vollkommen wieder verliert, und in seinen ursprünglichen Zustand vollständig zurückgeht, so sagt man, der Körper verhalte sich bei dieser Formänderung vollkommen elastisch. Im entgegengesetzten Falle, wenn nämlich auch nach der Wegnahme der äußeren Kräfte eine gewisse Formänderung dauernd in dem Körper zurückbleibt, nennt man ihn unvollkommen elastisch bei dieser Formänderung.

Bis zu einem gewissen Grade der Formänderung sind alle Körper mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit als vollkommen elastisch zu betrachten. Man nennt diesen Grenzwerth, über welchen hinaus die Formänderung nicht gesteigert werden darf, wenn dieselbe vollständig wieder verschwinden soll, die Elasticitätsgrenze, oder auch wohl die Grenze der vollkommenen Elasticität. Die Elasticitätsgrenze ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden. Körper, welche eine große Formänderung zulassen, ehe diese Grenze erreicht ist, nennt man sehr elastische, Körper aber, bei welchen kaum bemerkbare Formänderungen der Elasticitätsgrenze vorausgehen, heißen wenig elastische, auch wohl unelastische, wiewohl es in Wirklichkeit ganz unelastische Körper gar nicht giebt. Unter Elasticität im engeren Sinne des Wortes verstehen wir den Widerstand, mit welchem ein Körper der Formveränderung entgegenwirkt.

Nach den angestellten Versuchen findet ein vollkommen elastischer Zustand in aller Strenge bei keinem Körper statt, indem jede Formänderung aus einem permanenten und einem vorübergehendem oder elastischen Theile besteht, nur daß innerhalb der Elasticitätsgrenze der erstere Theil als verschwindend klein gegen den letzteren vernachlässigt werden kann.

Festigkeit. Wenn ein Körper durch äußere Kräfte über die Elasticitätsgrenze hinaus in Anspruch genommen wird, so tritt endlich eine Trennung der Theile und nach Befinden eine Zertheilung des ganzen Körpers ein. Verschiedene Körper bieten dabei verschiedene Erscheinungen dar. Ist ein Körper spröde (franz. cassant; engl. brittle), so zerspringt er in Stücke, wenn man seine Form über die Elasticitätsgrenze hinaus verändert; ist er aber geschmeidig (franz. und engl. ductile), wie z. B. viele Metalle, so läßt er noch bedeutende Veränderungen der Form außerhalb der Elasticitätsgrenze zu, ohne eine Trennung seiner Theile zu erleiden. Manche Körper sind hart (franz. dur; engl. hard), andere weich (franz. mou; engl. soft); während jene der Trennung einzelner Theile einen großen Widerstand entgegensetzen, ist bei diesen eine Trennung der einzelnen Theile sehr leicht ausführbar. §. 207.

Unter Festigkeit (franz. résistance; engl. strength) verstehen wir den Widerstand, welchen ein Körper der Zertheilung desselben entgegensetzt.

Um die Art und Größe der inneren Kräfte, welche durch die Formänderung eines Körpers in diesem an einer bestimmten Stelle hervorgerufen werden, zu ermitteln, denke man sich einen beliebigen etwa stabförmigen Körper AB, Fig. 337, durch beliebige Kräfte P, Q, die unter sich im Gleichgewichte stehen, in Anspruch genommen. Sind a und b zwei sehr naheliegende materielle Punkte zu beiden Seiten einer bei C gedachten Durchschnittsebene des Körpers, so wird durch die Kräfte P, Q eine Verrückung dieser beiden Punkte gegen einander bewirkt, und in Folge dessen zwischen ihnen die Elasticität rege gemacht. Besteht diese Veränderung ihrer gegenseitigen Lage z. B. in einer Entfernung der beiden Punkte von einander, so muß man sich vorstellen, daß der Punkt a mit einer Kraft s auf den Punkt b wirkt, welcher letztere Punkt wiederum wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung mit einer ebenso großen entgegengesetzt gerichteten Kraft $-s$ auf den Punkt a zurückwirkt. Die zwischen zwei beliebigen Punkten wirkenden Kräfte können keine andere Richtung haben, als die gerade Verbindungslinie zwischen beiden Punkten. Die beiden Kräfte s und $-s$ halten sich im Gleichgewicht, und dasselbe gilt für je zwei beliebige materielle Punkte. Denkt man sich den Körper an der Stelle C durch einen Schnitt in zwei Theile zerlegt, und faßt den einen, z. B. CB, Fig. 338, ins Auge, so ist ersichtlich, daß durch die Entfernung des anderen Stückes CA in dem Gleichgewichtszustande des Stückes CB nichts geändert wird, sobald man nachher CA durch

Fig. 337.

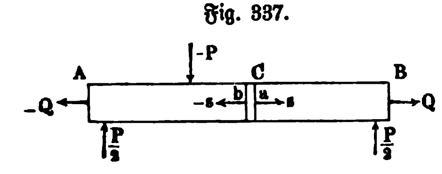
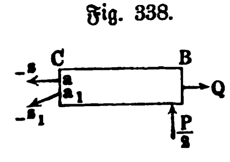


Fig. 338.



die Kräfte ersetzt, welche von ihm vor der Trennung auf das Stück CB ausgeübt wurden. Zu dem Zwecke kann man sich denken, daß an jedem Massentheilchen a, a, der Schnittfläche C des Stückes CB diejenige Kraft $-s$, $-s_1$ als äußere Kraft wirksam sei, welche in dem unzerschnittenen Körper auf dieses Massentheilchen von einem anderen in dem abgeschnittenen Stücke CA gelegenen Massentheilchen b, b_1 ausgeübt wurde. Alsdann muß das Stück BC nach wie vor im Gleichgewicht sein, da durch Anbringung der gedachten äußeren Kräfte der Einfluß des abgeschnittenen Stückes AC auf das andere BC vollständig ersetzt wird.

Es ist damit die Aufgabe, die Richtung und Größe der zwischen a und b auftretenden Elasticitätskräfte zu ermitteln, auf die Untersuchung derjenigen Bedingungen zurückgeführt, unter welchen diese Molekularwirkungen den äußeren Kräften das Gleichgewicht zu halten vermögen. Wenn es nun auch weder möglich, noch erforderlich ist, die Molekularkraft für jedes einzelne der unendlich vielen in der Schnittfläche C enthaltenen Massentheilchen zu bestimmen, so läßt sich doch mit Hülfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräfte im Raume die resultirende Wirkung aller der unendlich vielen Elasticitätskräfte, welche auf die Massentheilchen der Schnittfläche wirken, ermitteln. Nach §. 99 lassen sich die nach beliebigen Richtungen wirkenden äußeren Kräfte P, Q u. s. w. unter allen Umständen zu einer resultirenden Kraft und zu einem Kräftepaar vereinigen. Dasselbe kann von den an der Schnittfläche C angreifenden Molekularkräften, welche im Allgemeinen jede beliebige Richtung haben können, gesagt werden. Für den Zustand des Gleichgewichts hat man also einfach die Mittelkraft und das Moment des Kräftepaars der äußeren Kräfte einzeln gleich und entgegengesetzt der Mittelkraft resp. dem Moment des Kräftepaars der besagten Molekularwirkungen zu setzen. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind bei jedem durch äußere Kräfte beliebig beanspruchten Körper immer erfüllt, so lange wenigstens, als nicht eine Zerstörung des Körpers herbeigeführt wird, indem die Elasticitätskräfte immer in derjenigen Richtung und Größe auftreten, in welchen sie zur Herstellung des Gleichgewichts gefordert werden.

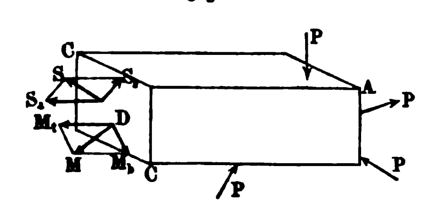
In der Architektur und im Maschinenwesen handelt es sich nun hauptsächlich darum, bei gewissen bekannten Belastungen einzelner Constructionstheile deren Dimensionen, oder bei bekannten Dimensionen die Belastungen so zu bestimmen, daß die elastischen Anstrengungen des Materials gewisse erfahrungsmäßig zulässige Werthe nicht überschreiten, womit die Aufgabe zusammenfällt, bei gegebenen Belastungen und gegebenen Dimensionen die Anstrengungen des Materials zu bestimmen. Es ist dabei eine wichtige Regel, die zum Bau zu verwendenden Körper nicht so stark zu belasten, daß die hervorgebrachten Formveränderungen die Elasticitätsgrenze erreichen oder gar überschreiten. In vielen Fällen der Praxis ist es auch von besonderer

Wichtigkeit, die bei einem Constructionstheile von bekannten Abmessungen durch gegebene äußere Kräfte hervorgebrachten Formveränderungen zu bestimmen. Mit diesen Aufgaben wollen wir uns im Folgenden beschäftigen.

Art der Festigkeit. Je nach der verschiedenen Art, in welcher ein Körper von äußeren Kräften beansprucht wird, werden auch die Cohäsionskräfte in verschiedener Weise zur Wirkung gebracht, und man unterscheidet danach verschiedene Arten der Elasticität und Festigkeit. §. 208.

Sei CC, Fig. 339, irgend ein Querschnitt eines durch ganz beliebige Kräfte P beanspruchten Körperstückes AC, so werden nach dem Obigen die von dem abgeschnittenen anderen Körperstücke auf die Schnittebene CC ausgeübten Elasticitätskräfte im Allgemeinen sich zusammensetzen zu einer resultirenden Kraft oder Spannung S und einem Kräftepaar, dessen Axe die Richtung DM habe, und dessen Moment durch die Größe DM ausgedrückt sein mag. Man zerlege nun die Kraft S in zwei Componenten S_a und S_s, von denen S_a rechtwinkelig zur Schnittebene CC ist, und S_s in die Schnittebene hineinfällt, und ebenso das Kräftepaar (vergl. §. 97) in zwei Seitenpaare, deren Axen DM_t und DM_b resp. rechtwinkelig zur Schnittebene und in diese Schnittebene hineinfallend gedacht werden. Wenn nun die Kräfte P so wirken, daß von den vier Elementen S_a, S_s, M_t, M_b nur eins erforderlich ist, um Gleichgewicht hervorzubringen, so sagt man, der Körper sei auf einfache Festigkeit in Anspruch genommen, wogegen man unter zusammengesetzter Elasticität oder Festigkeit diejenige versteht, bei welcher mehr als eins der gedachten vier Elemente zur Herstellung des Gleichgewichts nothwendig ist. Danach zerfällt die einfache Elasticität und Festigkeit naturgemäß in vier verschiedene Arten.

Fig. 339.



1. Zur Herstellung des Gleichgewichts mit den äußeren Kräften ist nur eine auf der Schnittebene senkrechte Kraft S_a erforderlich. Der Körper ist dann auf Zug oder auf Druckfestigkeit in Anspruch genommen, je nachdem die Kraft S_a von der Schnittfläche nur nach außen, d. h. nach dem weggeschnitten gedachten Körperstücke hin, oder nach innen in das betrachtete Körperstück CA hinein gerichtet ist.

Dieser Fall tritt ein, wenn zwei äußere Kräfte P, $-P$ durch Zug (franz. traction; engl. extension) in der Axenrichtung eines Körpers AB, Fig. 340 a. f. S., wirken. Derselbe widersteht dann durch seine Zug- oder absolute Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance

de traction; engl. elasticity and strength of extension) dem Ausdehnen und Zerreißen. Wirken dagegen zwei Kräfte P, $-P$ drückend in der Axenrichtung eines Körpers AB, Fig. 341, so daß dieser zusammengedrückt und endlich zermalmt oder zerdrückt wird, so hat man die Druck- oder rückwirkende Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de compression; engl. elasticity and strength of compression) zu überwinden.

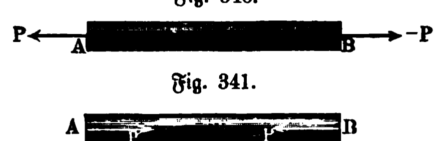
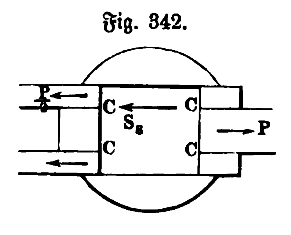


Fig. 340.

Fig. 341.

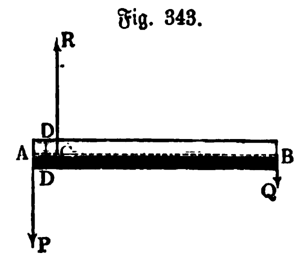
2. Zur Herstellung des Gleichgewichts genügt die in die Schnittebene hineinfallende Kraft S_s. Dieser Fall tritt z. B. bei einem Nietbolzen, Fig. 342, ein. Die Kraft P sucht den mittleren Theil zwischen den beiden Flächen CC herauszuschieben. Denkt man durch eine dieser Ebenen einen Schnitt gelegt, so muß an der Schnittfläche eine in diese hineinfallende Cohäsionskraft $S_s = \frac{P}{2}$ angebracht werden, wenn nach wie vor Gleichgewicht stattfinden soll. Man hat es hier mit der Elasticität und Festigkeit gegen Abscheeren, oder mit der Schubelasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance par glissement cisaillement ou tranchant; engl. elasticity and strength of shearing) zu thun.

Fig. 342.



3. Um den äußeren Kräften das Gleichgewicht zu halten, ist ein Kräftepaar*) erforderlich, dessen Axe M_b in die Schnittebene hineinfällt, dessen Drehebene also senkrecht zur Schnittebene steht. Dieser Fall tritt ein, wenn drei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte P, Q, R in verschiedenen Punkten A, B, C in der Axe eines Körpers AB, Fig. 343, senkrecht gegen diese Axe wirken. Der Körper wird dann gebogen und nach Befinden zerbrochen, und es ist die Biegungs- oder relative Elasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de flexion; engl. elasticity and strength of flexure) des Körpers, welche bei diesem Umbiegen und Abbrechen überwunden wird.

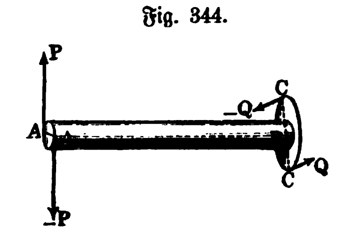
Fig. 343.



*) Streng genommen findet zwar hier in jedem Querschnitte noch eine Schubwirkung S_s statt, doch sind deren Einflüsse gegen die biegende Wirkung des Kräftepaars M_b meist so unbedeutend, daß sie nur in speciellen Fällen berücksichtigt werden müssen.

4. Zur Herstellung des Gleichgewichts ist das Auftreten eines Kräftepaars erforderlich und genügend, dessen Axe M_t senkrecht zur Schnittebene gerichtet ist, dessen Drehungsebene also mit der Schnittebene übereinstimmt. Dies findet statt, wenn zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ so auf einen Körper AB, Fig. 344, wirken, daß deren Ebenen rechtwinkelig auf der Axe dieses Körpers stehen. Derselbe erleidet dadurch eine Drehung, welche zuletzt in ein Abwürgen übergehen kann, und es ist hierbei die sogenannte Drehungselasticität und Festigkeit (franz. élasticité et résistance de torsion; engl. elasticity and strength of torsion) zu überwinden.

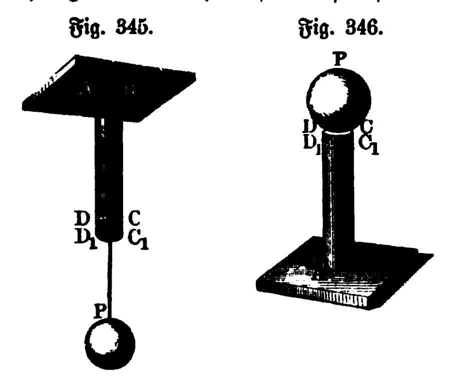
Fig. 344.



In allen übrigen Fällen, in welchen zur Herstellung des Gleichgewichtes von den vier Elementen S_a, S_s, M_b, M_t mehr als eins erforderlich ist, wird der Körper auf zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit in Anspruch genommen. Das für die Praxis Wichtigste darüber ist in dem dafür bestimmten Capitel enthalten.

Ausdehnung und Zusammendrückung. Den einfachsten Fall der Elasticität und Festigkeit bietet die Ausdehnung und Zusammendrückung prismatischer Körper dar, wenn dieselben von Kräften ergriffen werden, deren Richtungen in die Axe dieser Körper fallen. Es ist natürlich hierbei nicht nöthig, daß beide Kräfte eines solchen Körpers bewegend sind, die Wirkung bleibt dieselbe, wenn der Körper an einem Ende festgehalten oder unterstützt und am anderen Ende von einer Zug- oder Druckkraft ergriffen wird. Man ruft also auch diesen Fall hervor, wenn man entweder ein verticalhängendes Prisma $ABCD$, Fig. 345, durch ein angehängtes Gewicht P oder ein von unten unterstütztes Prisma $ABCD$, Fig. 346, durch ein aufliegendes Gewicht P belastet. Im ersteren Falle wird der Körper um eine gewisse Größe $CC_1 = DD_1 = \lambda$ ausgedehnt, und im zweiten Falle um eine solche Größe zusammengedrückt; ist also §. 209.

Fig. 345. Fig. 346.



anfangs die Länge des Körpers $AD = l$, so wird dieselbe im ersteren Falle auf

$$AD_1 = l + \lambda$$

gesteigert und im zweiten Falle auf

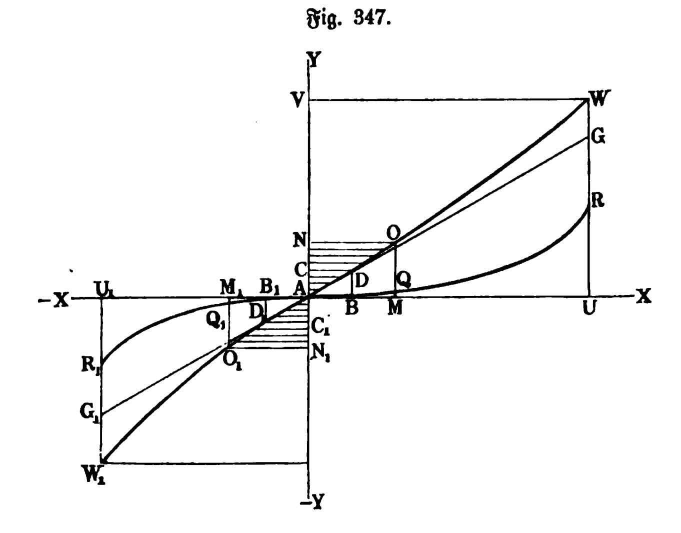
$$AD_1 = l - \lambda$$

herabgezogen.

Die Ausdehnung oder Zusammendrückung λ wächst mit der Größe P der Zug- oder Druckkraft, ist also eine Function derselben. Diese Function oder der algebraische Zusammenhang zwischen P und λ läßt sich nicht a priori bestimmen; es hängt derselbe von der physischen Beschaffenheit der Körper ab, und ist bei verschiedenen Materien verschieden. Wenn man P und λ als die Coordinaten einer Curve ansieht, und diese Curve aus einer durch Versuche ermittelten Reihe von zusammengehörigen Werthen der Größen P und λ construirt, so erhält man dadurch nicht nur ein anschauliches Bild von dem Gesetze, nach welchem Körper durch äußere Kräfte ausgedehnt und zusammengedrückt werden, sondern auch ein Mittel zur Erkennung der Eigenthümlichkeiten dieses Gesetzes.

Trägt man vom Anfangspunkte A aus auf der positiven Seite der Axe $X\overline{X}$, Fig. 347, die Spannungen oder Ausdehnungskräfte eines Körpers

Fig. 347.



als Abscissen AB, AM u. s. w. und in den Endpunkten derselben die entsprechenden Ausdehnungen als zur Axe $Y\overline{Y}$ parallel laufende Ordinaten BD, MO u. s. w. auf, so erhält man eine Curve $ADOW$, welche das Gesetz der Ausdehnung dieses Körpers repräsentirt; schneidet man umgekehrt,

von A aus, auf der negativen Seite der Axe $X\overline{X}$ die Pressungen oder Zusammendrückungskräfte als Abscissen $A B_1$, $A M_1$ u. s. w. ab, und trägt an denselben die entsprechenden Zusammendrückungen als Ordinaten $B_1 D_1$, $M_1 O_1$ u. s. w. auf, so ergiebt sich eine Curve $A D_1 O_1 W_1$, durch welche das Gesetz der Zusammendrückung des Körpers graphisch dargestellt wird. Vielfachen Versuchen zufolge gehen beide Curven stetig in einander über, haben folglich in A eine gemeinschaftliche Tangente $G A G_1$, und sind also eigentlich nur Zweige einer und derselben krummen Linie $W O D A D_1 O_1 W_1$. Wenn auch diese Curve in ihrer ganzen Erstreckung bedeutend von einer geraden Linie abweicht, so wird sie doch in der Nähe des Anfangspunktes A mit der Tangente $G A G_1$ nahe zusammenfallen, und da nun für diese die Ordinaten den Abscissen proportional sind, so ist folglich auch anzunehmen, daß die durch kleine Zug- oder Druckkräfte $A B$, $A B_1$ u. s. w. bewirkten Ausdehnungen und Zusammendrückungen $B D$, $B_1 D_1$ u. s. w. diesen Kräften proportional sind (Hooke's Gesetz).

Die durch eine Zugkraft $A M$ bewirkte totale Ausdehnung $M O$ besteht aus zwei Theilen, nämlich aus der permanenten Ausdehnung $M Q$, welche im Körper zurückbleibt, wenn die Zugkraft zu wirken aufgehört hat, und aus der elastischen Ausdehnung $Q O$, welche mit der Zugkraft zugleich wieder verschwindet. Ganz dasselbe Verhältniß findet auch bei dem Zusammendrücken statt; auch die totale Zusammendrückung $M_1 O_1$ ist die Summe aus der permanenten Zusammendrückung $M_1 Q_1$ und der elastischen $Q_1 O_1$. Bei kleineren Kräften sind die permanenten Veränderungen in Hinsicht auf die totale so klein, daß sie als gar nicht vorhanden angenommen und folglich die totalen Ausdehnungen und Zusammendrückungen nur als elastische angesehen werden können. Nur dann, wenn die Kraft einen gewissen Werth $A B$ ($A B_1$), entsprechend der sogenannten Elasticitätsgrenze, überschreitet, wenn sie z. B. in AM (AM_1) übergeht, macht die permanente Längenveränderung $M Q$ ($M_1 Q_1$) einen beachtungswerthen Theil der ganzen Ausdehnung $M O$ oder Zusammendrückung $M_1 O_1$ aus. Hat die Zug- oder Druckkraft einen gewissen Werth $A U$ oder $A U_1$ erreicht, so sind die Ausdehnungen UR, UW oder Zusammendrückungen $U_1 R_1$, $U_1 W_1$ bei ihren Grenzen angelangt, wobei die innere oder Cohäsionskraft des Körpers der äußeren Zug- oder Druckkraft nicht mehr das Gleichgewicht zu halten vermag, und daher der Körper in dem einen Falle zerrissen und im anderen Falle zerdrückt wird.

Wenn man nach Wegnahme der Kraft eines höchstens bis zur Elasticitätsgrenze gespannten Körpers diesen Körper durch eine kleinere Kraft von Neuem spannt, so erleidet er dadurch keine weitere Streckung oder permanente Längenveränderung; es findet also dann nur noch eine elastische Ausdehnung oder Zusammendrückung statt.

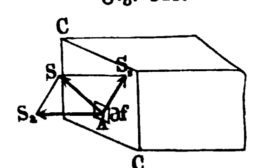
Wenn in einem Körper unter Einfluß einer bestimmten Zug- oder Druckkraft ein materieller Punkt A von einem anderen um die Länge l ursprünglich von ihm entfernten Punkte B um ein gewisses Stück λ entfernt, resp. ihm um das Stück λ genähert wird, so ist $\frac{\lambda}{l}$ der auf die Längeneinheit entfallende Theil dieser Ausdehnung bezüglich Zusammenpressung, unter der Voraussetzung, daß sich die Ausdehnung oder Zusammendrückung gleichmäßig über alle Theile der Länge AB vertheilt. Man nennt diese Größe $\frac{\lambda}{l}$ die specifische Ausdehnung oder Zusammendrückung des Körpers in dem Punkte A und nach der Richtung AB. Diese specifische Ausdehnung werde in der Folge mit σ bezeichnet und aus

$$\frac{\lambda}{l} = \sigma \text{ folgt } \lambda = l\sigma,$$

d. h. man findet die absolute Ausdehnung einer Strecke von der Länge l als Product aus der Länge l in die specifische Ausdehnung, wobei bemerkt werden kann, daß man eine etwaige Zusammendrückung als negative Ausdehnung zu betrachten und durch das Vorzeichen von σ zu berücksichtigen hat. Es möge speciell unter σ_1 eine Ausdehnung, unter σ_2 eine Zusammendrückung verstanden werden.

§. 210. **Grundgesetz der Elasticität. Elasticitätsmodul.** Wenn in dem Querschnitte CC, Fig. 348, das unendlich kleine Flächenelement ∂f, welches als ein materieller Punkt A aufgefaßt werden möge, einer durch äußere Kräfte hervorgerufenen Spannung S unterworfen ist, welche nach dem Vorstehenden in die Normalspannung S_a und in die Schubspannung S_s zerlegt werde, so versteht man unter dem Quotienten $\frac{S_a}{\partial f}$ die

Fig. 348.

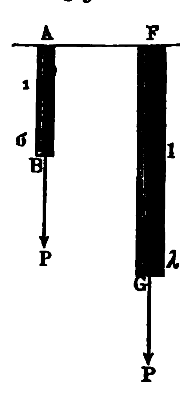


specifische Spannung resp. Pressung im Punkte A der Ebene C, je nachdem die Richtung dieser Normalspannung von dem Körper fort oder nach demselben hin geht. Es möge die Pressung als negative Spannung angesehen werden, und soll diese Spannung im Folgenden durch k und zwar eine Zugspannung speciell durch k_1 und eine Druckspannung durch k_2 bezeichnet werden. Man hat unter dem Ausdrucke $k = \frac{S_a}{\partial f}$ offenbar die auf die Flächeneinheit (1 □ Millimeter) entfallende Spannung zu verstehen, vorausgesetzt, daß die Spannung über alle Punkte der Flächeneinheit gleichmäßig vertheilt sei. In gleicher Art soll unter der specifischen Schubspannung in dem Punkte A der Ebene CC der Quotient $\frac{S_s}{\partial f}$ verstanden werden, d. h.

die auf die Flächeneinheit kommende Schubspannung, vorausgesetzt, daß diese ebenfalls gleichmäßig über alle Elemente der Fläche vertheilt sei. Es soll die specifische Schubspannung in der Folge mit t bezeichnet werden.

Wenn ein stabförmiger Körper von dem Querschnitte F, Fig. 349, durch eine Kraft P gezogen wird, so läßt sich annehmen, daß sich die ganze Spannkraft P auf die Querschnittsfläche F gleichmäßig vertheilt, und die specifische Spannung beträgt daher $\frac{P}{F}$. Nach dem Obigen (§. 209) läßt sich nun annehmen, daß bei kleinen, die Elasticitätsgrenze nicht überschreitenden Zugkräften die specifischen Ausdehnungen den entsprechenden specifischen Zugkräften proportional sind*). Wenn daher ein prismatischer Körper vom Querschnitte = Eins durch die Zugkraft P eine specifische Ausdehnung σ erhält, so wird ein Körper vom Querschnitte F, welcher durch dieselbe Kraft P gezogen wird, also nur der specifischen Spannung $\frac{P}{F}$ unterworfen ist, eine specifische Ausdehnung $= \frac{\sigma}{F}$ erleiden, und es ist die gesammte Ausdehnung dieses Körpers bei der Länge l desselben daher: $\lambda = l\,\frac{\sigma}{F}$.

Fig. 349.



Repräsentirt nun AB, Fig. 350 a. f. S., die Spannung P eines Prismas von der Länge = Eins und dem Querschnitte = Eins innerhalb der Elasticitätsgrenze und BD die entsprechende Ausdehnung σ, und bezeichnet man den Tangentenwinkel $GAU = DAB$ der Ausdehnungscurve für den Anfangspunkt A durch α, so hat man auch:

$$tang.\,\alpha = \frac{BD}{AB} = \frac{\sigma}{P}, \text{ und daher:}$$

$$\sigma = P\,tang.\,\alpha, \text{ woraus nun}$$

$$1)\quad \lambda = \frac{Pl\,tang.\,\alpha}{F} \text{ folgt.}$$

*) Das heißt, daß für denselben Körper der Quotient

$$\frac{\sigma}{P} = \frac{\text{Specifische Ausdehnung}}{\text{Belastung}} = \text{einer Constanten.}$$

Vergleicht man Körper von verschiedenen Querschnitten, aber aus demselben Material, mit einander, so ist für alle der Quotient:

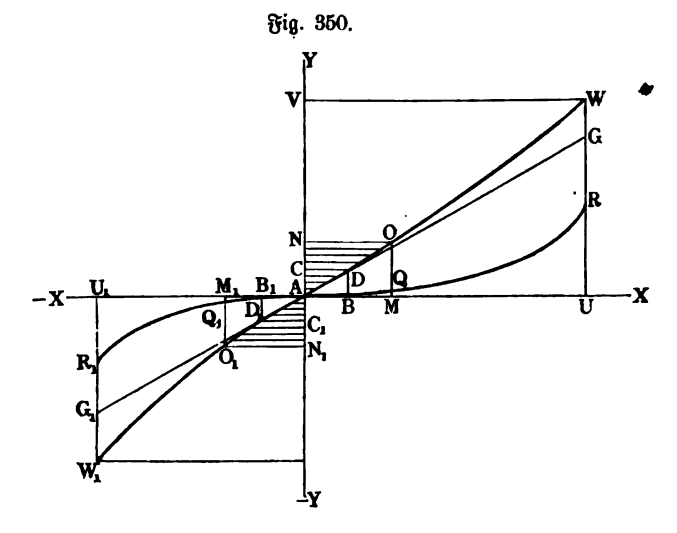
$$\frac{\sigma}{\frac{P}{F}} = \frac{\text{Specifische Ausdehnung}}{\text{Specifische Spannung}} = \text{einer Constanten.}$$

Die Größe *tang.* α ist von den physischen Eigenschaften des Körpers abhängig, und jedenfalls nur durch Versuche zu ermitteln. Nimmt man

$$l = 1,\ F = 1 \text{ und } P = 1,$$

so erhält man *tang.* $\alpha = \lambda$; es ist also hiernach die Erfahrungsgröße *tang.* α die Ausdehnung, welche ein Prisma von der Länge Eins

Fig. 350.



und vom Querschnitte Eins durch die Spannkraft Eins erleidet (siehe Combes: Traité de l'exploitation des mines, tome I.). Nimmt man in der Formel (1) $F =$ Eins und $\lambda = l$ an, so erhält man den Ausdruck:

$$1 = P\, tang.\, \alpha, \text{ oder } \frac{1}{tang.\, \alpha} = cotang.\, \alpha = P.$$

Es ist also hiernach $\frac{1}{tang.\, \alpha}$ diejenige Spannkraft P, welche ein Prisma vom Querschnitte Eins (1 Quadratmillimeter) um seine eigene Länge ausdehnen würde, insofern dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre.

Diese hypothetische Erfahrungsgröße $\frac{1}{tang.\, \alpha} = cotang.\, \alpha$ wird der Elasticitätsmodul (franz. coefficient d'élasticité; engl. modul of elasticity) des Körpers oder der Materie desselben genannt und in der Folge durch den Buchstaben E bezeichnet. Es ist also hiernach:

$$2)\quad \lambda = \frac{Pl}{FE}$$

oder die specifische Ausdehnung:

$$3) \quad \sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE},$$

also umgekehrt, die der Ausdehnung λ entsprechende Kraft:

$$4) \quad P = \frac{\lambda}{l} \, FE = \sigma F E.$$

Dieselben Formeln gelten natürlich auch für die Zusammendrückung λ durch eine Druckkraft P, und es ist in diesem Falle sogar auch der Elasticitätsmodul $E = cotang.\, \alpha$ derselbe wie bei der Ausdehnung, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, obgleich er hier diejenige Druckkraft bezeichnet, welche ein Prisma vom Querschnitte Eins um seine ganze Länge, also bis auf eine unendlich dünne Platte zusammendrückt, unter der Voraussetzung, daß dies möglich wäre, ohne die Grenze der Elasticität zu überschreiten.

Anmerkung 1. Man kann auch den Elasticitätsmodul E gleichsetzen dem Gewichte eines Prismas, welches mit dem Körper, auf den E wirkt, aus einerlei Materie besteht, und denselben Querschnitt Eins hat. Ist a die Länge dieses Körpers und γ die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikmillimeter der Materie desselben, so hat man:

$$E = a\gamma, \text{ und daher umgekehrt } a = \frac{E}{\gamma}.$$

Diese Länge gebraucht Tredgold (nach Young) als Maß der Elasticität (s. T. Tredgold, über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle). Ist z. B. für Stahl $E = 22500$ Kilogramm und $\gamma = 0{,}0000075$ Kilogramm, so hat man:

$$a = \frac{22500}{0{,}0000075} = 3000'000000 \text{ Millimeter} = 3'000000 \text{ Meter},$$

d. i. eine Stahlstange von 3 Millionen Meter Länge würde einen Stahlstab von demselben Querschnitt um seine eigene Länge ausdehnen, wenn das oben angegebene Ausdehnungsgesetz ohne Einschränkung richtig wäre. Wenn man zuweilen den Elasticitätsmodul als den reciproken Werth der specifischen Ausdehnung eines Stabes vom Querschnitte Eins bei der Belastung Eins definirt, so folgt die Uebereinstimmung mit der hier gegebenen Definition ohne Weiteres aus dem Obigen. Dasselbe gilt von einer anderen vielfach gefundenen Definition, wonach man unter dem Elasticitätsmodul den Quotienten $\frac{k}{\sigma} = \frac{\text{Specifische Spannung}}{\text{Specifische Ausdehnung}}$ versteht.

Anmerkung 2. Bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers findet zugleich eine Querschnittsverminderung statt, die nach Wertheim (s. Compt. rend. T. 26) $\frac{2}{3}$ der Längenausdehnung oder Zusammendrückung beträgt. Ist l die anfängliche Länge, F der anfängliche Querschnitt und V das anfängliche Volumen Fl des Körpers, l_1 und F_1 aber Länge und Querschnitt bei Einwirkung der Zugkraft P, so hat man das entsprechende Volumen:

$$V_1 = F_1 l_1 = Fl + F\,(l_1 - l) - (F - F_1)\, l, \text{ also:}$$
$$V_1 - V = F\,(l_1 - l) - (F - F_1)\, l,$$

und die relative Volumenveränderung:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{l_1 - l}{l} - \frac{F - F_1}{F}.$$

Nun ist aber $\frac{F - F_1}{F} = \frac{2}{3}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$, daher folgt:

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{3}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right),$$

d. i. die Volumenvergrößerung ein Drittel der Längenausdehnung.

Nach Poisson's Theorie ist sogar $\frac{V_1 - V}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{l_1 - l}{l}\right)$.

Beispiele. 1) Wenn der Elasticitätsmodul des Messingdrahtes 9870 Kilogramm beträgt, welche Kraft ist nöthig, um einen Draht von 10 Meter Länge und 5 Millimeter Dicke um 2 Millimeter länger zu ziehen? Es ist:

$l = 10$ Meter; $\lambda = 2$ Millimeter $= 0{,}002$ Meter, folglich $\frac{\lambda}{l} = 0{,}0002$;

ferner $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854 \,.\, 5^2 = 19{,}635$ Quadratmillimeter,

demnach die gesuchte Kraft:

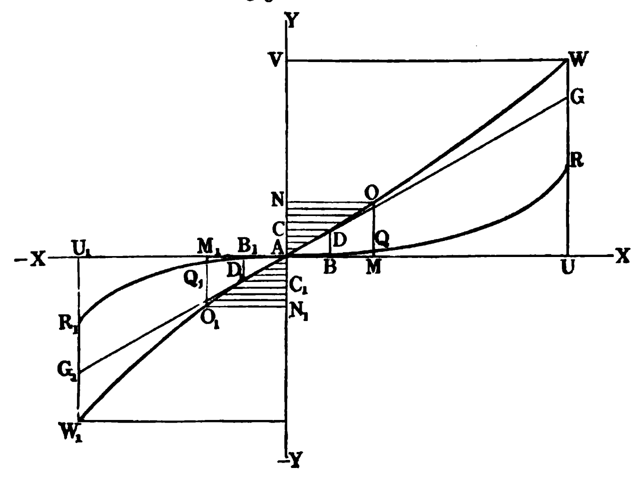
$$P = 0{,}0002 \,.\, 19{,}635 \,.\, 9870 = 38{,}76 \text{ Kilogramm.}$$

2) Ist der Elasticitätsmodul von Eisendraht 21900 Kilogramm, und spannt man eine eiserne Meßkette von 20 Meter Länge und 6 Millimeter Dicke mit 75 Kilogramm Kraft an, so nimmt dieselbe um die Länge

$$\lambda = \frac{75}{0{,}7854 \,.\, 6^2} \cdot \frac{20}{21900} = 0{,}00243 \text{ Meter} = 2{,}43 \text{ Millimeter zu.}$$

§. 211. **Tragvermögen der Körper. — Tragmodul und Festigkeitsmodul.** Die Zugkraft AB, Fig. 351, welche einen prismatischen Körper

Fig. 351.



vom Querschnitte Eins bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt, heißt der Tragmodul des Körpers in Hinsicht auf Ausdehnung, und soll in der

Folge durch T_{I} bezeichnet werden, wogegen die Druckkraft AB_1, welche denselben bis zur Grenze der Elasticität zusammendrückt, der **Tragmodul des Körpers in Hinsicht auf Zusammendrückung** zu nennen und im Folgenden durch T_{II} zu bezeichnen ist. Aus den Tragmodul T_{I} und T_{II} lassen sich mit Hülfe des Elasticitätsmoduls E auch leicht die Ausdehnung σ_{I} und Zusammendrückung σ_{II} bei der Elasticitätsgrenze berechnen; denn es ist

$$\frac{\sigma_{\text{I}}}{1} = \frac{T_{\text{I}}}{E} \text{ und } \frac{\sigma_{\text{II}}}{1} = \frac{T_{\text{II}}}{E}.$$

Ist F der Querschnitt eines prismatischen Körpers, welchem diese Tragmodel T_{I} und T_{II} zukommen, so hat man das **Tragvermögen** desselben:

$$1) \begin{cases} \text{für Zug} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P_{\text{I}} = F\,T_{\text{I}} \\ \text{und das für Druck} \quad . \quad P_{\text{II}} = F\,T_{\text{II}}. \end{cases}$$

Bei Bauausführungen sollen die Körper nie über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet werden, also die Belastungen selbst die gefundenen Tragvermögen nicht überschreiten. Deshalb sind denn auch den hierzu verwendeten prismatischen Körpern Querschnitte zu geben, welche durch die Formeln

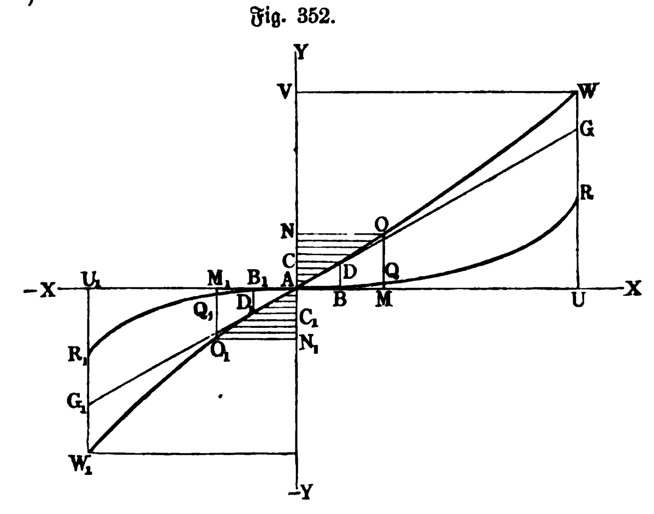
$$2) \begin{cases} F_{\text{I}} = \dfrac{P_{\text{I}}}{T_{\text{I}}} \text{ und} \\ F_{\text{II}} = \dfrac{P_{\text{II}}}{T_{\text{II}}} \text{ bestimmt werden.} \end{cases}$$

Wegen der zufälligen Ueberlastungen und Erschütterungen, welchen die Bau- und Maschinenwerke noch ausgesetzt sein können, sowie wegen der Abnutzung und der Veränderungen, welchen die zu denselben verwendeten Körper im Laufe der Zeit durch die Einwirkungen der Luft, des Wassers u. s. w. ausgesetzt sind, giebt man diesen Constructionen insofern noch eine größere Sicherheit, daß man in den vorstehenden Formeln statt der Tragmodul nur die Hälfte oder ein Drittel derselben einführt, also die Querschnitte zwei- bis dreimal so groß nimmt als diese Formeln unmittelbar angeben. Um eine $m$fache Sicherheit zu erhalten, sind folglich in den Formeln $F_{\text{I}} = \frac{P_{\text{I}}}{T_{\text{I}}}$ oder $F_{\text{II}} = \frac{P_{\text{II}}}{T_{\text{II}}}$, statt T_{I} oder T_{II}, die **Sicherheitstragmodul** $\frac{T_{\text{I}}}{m}$ oder $\frac{T_{\text{II}}}{m}$ einzusetzen.

Die Zugkraft $\overline{AU}$ (Fig. 352 a. f. S.), bei welcher der prismatische Körper vom Querschnitt Eins zerreißt, heißt der **Festigkeitsmodul** des Körpers in Hinsicht auf das **Zerreißen** und wird gewöhnlich mit dem Buchstaben K_{I} bezeichnet, und ebenso nennt man die Druckkraft $\overline{AU_1}$, bei welcher das Zerdrücken oder Zermalmen des Körpers eintritt, den **Festigkeitsmodul** des Körpers in Hinsicht auf das **Zerdrücken** und bezeichnet ihn durch den

Buchstaben K_{II}. Hat der prismatische Körper den Querschnitt F, so ist natürlich:

Fig. 352.



$$3) \begin{cases} P_{I} = F K_{I} \text{ die Kraft zum Zerreißen, und} \\ P_{II} = F K_{II} \text{ die Kraft zum Zerdrücken dieses Körpers.} \end{cases}$$

Noch oft bestimmt man auch die Querschnitte der Körper mit Hülfe der Bruch- oder Festigkeitsmodul, indem man in die Formeln

$$4) \begin{cases} F = \frac{P_{I}}{K_{I}} \text{ und} \\ F = \frac{P_{II}}{K_{II}} \end{cases}$$

statt K_{I} und K_{II} sogenannte Sicherheitsbruchmodul, d. i. kleine Theile $\frac{K_{I}}{n}$ oder $\frac{K_{II}}{n}$, z. B. Viertel, Sechstel, Zehntel u. s. w. dieser Erfahrungszahlen einsetzt. Wäre der Tragmodul bei allen Stoffen ein und derselbe Theil des Festigkeitsmodul, wären also die Verhältnisse $\frac{AB}{AU} = \frac{T_{I}}{K_{I}}$ und $\frac{AB_1}{AU_1} = \frac{T_{II}}{K_{II}}$ bestimmte Zahlen, so würde die Bestimmung des Querschnittes mittels der Sicherheitsbruchmodel auf dasselbe führen, wie die mittels der Tragmodel; da aber diese Verhältnisse bei verschiedenartigen Körpern verschieden sind, so ist nur diese Bestimmung mittels der Tragmodel T_{I} und T_{II} oder vielmehr mittels der Sicherheitstragmodel $\frac{T_{I}}{m}$ und $\frac{T_{II}}{m}$ die allge-

mein richtige und angemessenere und nur dann mittels der Sicherheits-bruchmodel $\frac{K_{\text{I}}}{n}$ und $\frac{K_{\text{II}}}{n}$ zu rechnen, wenn die Tragmodel nicht bekannt sind.

Was die Annahme der Sicherheitscoefficienten m anbetrifft, durch welche die zulässige specifische Spannung $k_{\text{I}} = \frac{T_{\text{I}}}{m}$ und die zulässige specifische Pressung $k_{\text{II}} = \frac{T_{\text{II}}}{m}$ bestimmt wird, so läßt sich über die Größe dieser Coefficienten eine bestimmte Regel nicht angeben. Der Constructeur wird je nach der Verwendungsart des betreffenden Körpers m bald größer, bald kleiner annehmen müssen. Für provisorische Ausführungen wird man m kleiner annehmen dürfen, als für solche von langer Dauer; leicht zu ersetzende Theile construirt man oft absichtlich mit einer geringeren Sicherheit, als solche, deren Ersatz größeren Geld- und Zeitaufwand erfordert, um im Falle eines durch Zufälligkeiten herbeigeführten Bruches den Nachtheil möglichst gering zu machen. Constructionen, deren Bruch großes Unglück nach sich ziehen würde, erfordern die Annahme eines angemessen großen Sicherheitscoefficienten. Wo die Erschütterungen besonders stark ins Gewicht fallen (Hammerwerke, Walzwerke) oder wo dieselben besonders störend für den beabsichtigten Zweck ausfallen würden (Drehbänke), kommt es mehr darauf an, daß die betreffenden Constructionsglieder hinreichende mechanische Arbeit in sich aufnehmen können, als daß die höchste vorkommende Spannung unter einem gewissen Werthe bleibe. Von besonderer Wichtigkeit für die Wahl von m ist ferner das Verhältniß $\frac{K_{\text{I}}}{T_{\text{I}}}$ bezüglich $\frac{K_{\text{II}}}{T_{\text{II}}}$. Bei Gußeisen ist beispielsweise für Zug $\frac{K_{\text{I}}}{T_{\text{I}}} = \frac{13}{6,67} =$ circa 2; und für Druck $\frac{K_{\text{II}}}{T_{\text{II}}} = \frac{73}{13,2} = 5,5$.

Während also diejenige Kraft, welche einen gußeisernen Stab zu zerreißen im Stande ist, nur doppelt so groß ist, wie diejenige, welche denselben Stab bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt, tritt eine Zerstörung des Stabes durch Druck erst bei einer 5,5mal so großen Kraft ein, wie diejenige ist, welche den Stab bis zur Elasticitätsgrenze zusammenzudrücken vermag. Man wird daher, wenn Gußeisen lediglich einer Druckspannung unterworfen ist, den Sicherheitscoefficienten m kleiner annehmen dürfen, als wenn Gußeisen lediglich dem Zerreißen ausgesetzt ist. Im Allgemeinen wird m um so kleiner gewählt werden können, je größer das Verhältniß $\frac{K}{T}$ ist.

Ist der Querschnitt des Körpers ein Kreis vom Durchmesser d, so hat man $F = \frac{\pi d^2}{4}$, daher

$$P = \frac{\pi d^2}{4} T = 0{,}7854\, d^2 T \text{ und}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 1{,}128 \sqrt{\frac{P}{T}} \text{ zu setzen,}$$

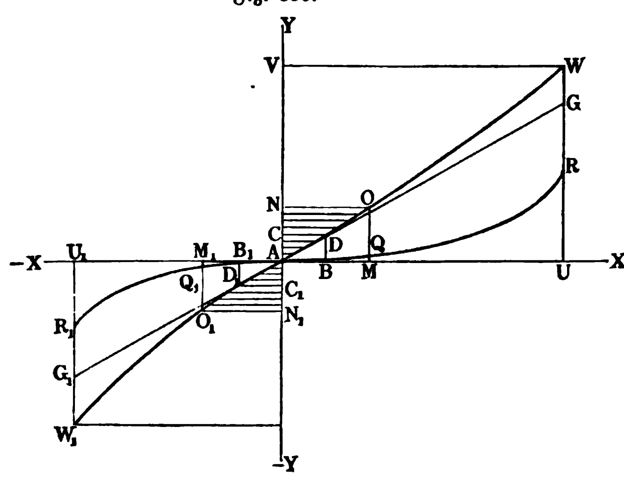
und es läßt sich hiernach aus der Belastung P eines Körpers und dem Tragmodul T seiner Materie die Stärke finden, bei welcher der Körper nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus angespannt wird.

Beispiele. 1) Welche Last kann eine Hängesäule aus Fichtenholz aufnehmen, wenn sie 0,125 Meter breit und 0,1 Meter dick ist? Den Tragmodul zu 2 Kilogramm angenommen, erhält man $P = FT = 125 \,.\, 100 \,.\, 2 = 25000$ Kilogramm als Tragkraft dieser Säule. Wird aber der Festigkeitsmodul 6,5 zu Grunde gelegt und eine vierfache Sicherheit angenommen, so erhält man $P = FK \,.\, {}^1/_4 = 125 \,.\, 100 \,.\, 6{,}5 \,.\, {}^1/_4 = 20312$ Kilogramm. Wegen der Vergänglichkeit des Holzes nimmt man, um für lange Zeit Sicherheit zu haben, für K nur den zehnten Theil an und erhält so $P = 125 \,.\, 100 \,.\, 6{,}5 \,.\, 0{,}1 = 8125$ Kilogramm.

2) Eine schmiedeeiserne und rund abzudrehende Zugstange soll eine Last von 5000 Kilogramm aushalten; welchen Durchmesser muß dieselbe erhalten? Setzt man $k_1 = {}^1/_2\, T_1 = 7$ Kilogramm, so folgt $d = 1{,}128 \sqrt{\frac{5000}{7}} = 30{,}1$ Millimeter. Nimmt man den Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens zu 40 Kilogramm und vierfache Sicherheit an, so folgt $d = 1{,}128 \sqrt{\frac{5000}{{}^1/_4 \,.\, 40}} = 25{,}3$ Millimeter als die gesuchte Stangendicke.

§. 212. **Arbeitsmodul.** Wenn man einen prismatischen Körper durch eine nach und nach von 0 bis $P = AM = NO$ (Fig. 353) wachsende Kraft

Fig. 353.



anspannt, und dadurch von Null bis $\lambda = MO = AN$ verlängert, so wird dabei eine gewisse mechanische Arbeit verrichtet. Diese ist, wie (aus §. 74) bekannt, das Product aus dem Wege oder der ganzen Ausdehnung AN und aus dem Mittel der von 0 bis $P = NO$ stetig wachsenden Spannkräfte. Sie läßt sich daher durch die Fläche ANO ausdrücken, welche der Ausdehnung $AN = \lambda$ als Abscisse, und der Spannkraft $NO = AM = P$ als Ordinate zukommt. Ueberschreitet diese Ausdehnung nicht die Elasticitätsgrenze, so ist die Fläche ANO als ein rechtwinkeliges Dreieck anzusehen, dessen Katheten λ und P sind, und es ist daher die entsprechende mechanische Arbeit:

$$L_{\text{I}} = \frac{1}{2}\lambda_{\text{I}} P.$$

Setzt man hierin:

$$\lambda_{\text{I}} = \sigma_{\text{I}} l \text{ und } P = F T_{\text{I}},$$

so erhält man die Arbeit für eine specifische Ausdehnung σ_{I} bis zur Elasticitätsgrenze:

$$L = \frac{1}{2}\sigma_{\text{I}} l \, . \, F T_{\text{I}} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{I}} T_{\text{I}} \, . \, Fl = A_{\text{I}} V,$$

wenn V das Volumen Fl des Körpers und A_{I} eine Erfahrungszahl, den sogenannten Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze für die Ausdehnung bezeichnet, welcher auch durch den Ausdruck

$$A_{\text{I}} = \frac{1}{2} AC \, . \, CD = \frac{1}{2}\sigma_{\text{I}} T_{\text{I}} = \frac{1}{2}\frac{T_{\text{I}}^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{I}}^2 E$$

bestimmt werden kann.

Ebenso ist natürlich auch für die Compression bis zur Elasticitätsgrenze die erforderliche mechanische Arbeit

$$L_{\text{II}} = A_{\text{II}} V$$

zu setzen, wobei A_{II} den Arbeitsmodul

$$\frac{1}{2} A C_1 \, . \, C_1 D_1 = \frac{1}{2}\sigma_{\text{II}} T_{\text{II}} = \frac{1}{2}\frac{T_{\text{II}}^2}{E} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{II}}^2 E$$

der Elasticitätsgrenze für die Zusammendrückung bezeichnet.

Für die mechanische Arbeit zum Zerreißen und zum Zerdrücken des prismatischen Körpers lassen sich gleichgeformte Ausdrücke anwenden; es ist dieselbe für den ersten Fall:

$$L_{\text{I}} = VB_{\text{I}},$$

und für den zweiten:

$$L_{\text{II}} = VB_{\text{II}},$$

wenn B_{I} = Fläche AUW, den Arbeitsmodul des Zerreißens, und B_{II} = Fläche AU_1W_1, den Arbeitsmodul des Zerdrückens bedeuten.

Man ersieht aus dem Vorstehenden, daß sowohl die mechanische Arbeit, welche einen prismatischen Körper bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt und

comprimirt, als auch diejenige, welche das Zerreißen und Zerdrücken desselben herbeiführt, gar nicht von den einzelnen Dimensionen, sondern nur vom Volumen V des Körpers abhängt, daß also z. B. zwei Prismen aus demselben Material denselben Arbeitsaufwand zum Zerreißen erfordern, wenn das eine doppelt so lang als das andere ist und dagegen sein Querschnitt nur die Hälfte vom Querschnitt des anderen ausmacht.

Beispiel. Wenn der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens $E = 20000$ Kilogramm und die Ausdehnung desselben bei der Elasticitätsgrenze $\sigma_1 = \frac{1}{1500}$ ist, so beträgt der Tragmodul desselben, da $\sigma_1 = \frac{T_1}{E}$ ist:

$$T_1 = \sigma_1 E = \frac{1}{1500} \cdot 20000 = 13{,}33 \text{ Kilogramm},$$

und folglich der Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze für Ausdehnung:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\, \sigma_1 T_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1500} \cdot 13{,}33 = 0{,}0044 \text{ Millimeterkilogramm}.$$

Um also einen prismatischen Körper aus Schmiedeeisen, dessen Volumen $= V$ Cubikmillimeter ist, bis zur Elasticitätsgrenze auszudehnen, ist die mechanische Arbeit

$$L_1 = A_1 V = 0{,}0044\ V \text{ Millimeterkilogramm}$$

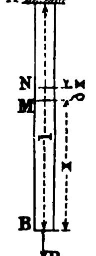
nöthig.

Wäre z. B. der Inhalt dieses Körpers $= 3$ Cubikdecimeter $= 3000000$ Cubikmillimeter, so würde diese Arbeit

$L_1 = 3000000 \;.\; 0{,}0044 = 13200$ Millimeterkilogramm $= 13{,}2$ Meterkilogramm betragen.

§. 213. **Ausdehnung durch das eigene Gewicht.** Hat ein prismatischer Körper AB, Fig. 354, eine bedeutende Länge l, so erleidet er durch sein Gewicht eine namhafte Ausdehnung, welche wie folgt zu bestimmen ist. Bezeichnet F den Querschnitt dieses Körpers, γ seine Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikmillimeters seiner Materie, und x die veränderliche Länge eines Stückes desselben, so besteht die Spannung eines Elementes MN dieses Körpers aus dem Gewichte des darunter befindlichen Körperstückes $BM = \gamma F x$, und es ist folglich [nach §. 210, (2)] die entsprechende Ausdehnung der Länge $MN = \partial x$ dieses Elementes:

Fig. 354.



$$\partial \lambda = \frac{\gamma F x}{F E}\, \partial x = \frac{\gamma}{E}\, x\, d\, x.$$

Durch Integration ergiebt sich nun die Ausdehnung des ganzen Stückes BM:

$$\lambda = \frac{\gamma}{E} \int x \partial x = \frac{\gamma x^2}{2E},$$

und folglich die des ganzen Körpers AB:

$$\lambda = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{\gamma F l^2}{2FE} = \frac{\frac{1}{2} G}{FE} l,$$

wobei $G = \gamma F l$ das Gewicht des ganzen Körpers bezeichnet.

Wäre dieses Gewicht nicht auf den Körper gleichmäßig vertheilt, sondern am Ende B desselben wirksam, so würde die Ausdehnung

$$\lambda' = \frac{G l}{FE} = 2 \lambda$$

betragen.

Es ist also die Ausdehnung des Körpers in Folge seines Gewichtes, $\lambda = \frac{1}{2} \lambda'$, nur halb so groß als die, welche ein gleich großes Gewicht am Ende des Körpers hervorbringt.

Dasselbe Gesetz gilt natürlich auch für die Compression λ eines Körpers durch sein eigenes Gewicht.

Wirkt in dem einen oder dem anderen Falle an einem Ende des Körpers noch eine besondere Zug- oder Druckkraft P, so hat man die entsprechende Ausdehnung oder Compression:

$$\lambda = \frac{P l}{FE} \pm \frac{1}{2} \frac{G l}{FE} = \frac{(P \pm \frac{1}{2} G) l}{FE},$$

wobei das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn die Kraft P mit dem Gewichte G in gleicher Richtung, und das untere, wenn sie dem Gewichte entgegengesetzt wirkt. Im letzteren Falle fällt natürlich die Ausdehnung kleiner aus, als wenn P die alleinige Zug- oder Druckkraft wäre. Es ist hier sogar die Gesammtausdehnung oder Zusammendrückung = Null, wenn

$$\frac{1}{2} G = P, \text{ oder } G = \gamma F l = 2 P, \text{ also } l = \frac{2 P}{\gamma F}$$

beträgt.

Bezeichnet man die auf die Querschnittseinheit entfallende, also specifische Belastung $\frac{P}{F}$ mit p; so ist die specifische Spannung in dem Querschnitte im Abstande x von dem Angriffspunkte der Kraft gegeben durch $p \pm \gamma x = k$ und die specifische Ausdehnung in diesem Punkte $k \frac{1}{E} = \frac{p \pm \gamma x}{E} = \sigma$.

Wirkt die Kraft P in derselben Richtung wie das Gewicht G, so gilt das obere Zeichen und der Ausdruck für k wird ein Maximum

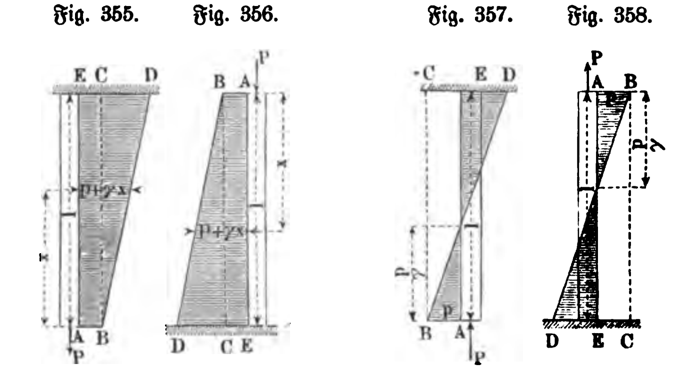
$$max.\ k = p + \gamma l = \frac{P + G}{F} \text{ für } x = l;$$

und ein Minimum

$$min.\ k = p = \frac{P}{F} \text{ für } x = 0.$$

Trägt man, Fig. 355, 356, $AB = p$ und $CD = \gamma l$ senkrecht zur XAxe auf, so giebt das Trapez $ABDE$ eine graphische Darstellung der specifischen

Fig. 355. Fig. 356. Fig. 357. Fig. 358.



Spannungen sowie der damit proportionalen specifischen Ausdehnungen für alle Punkte des Stabes.

Wirkt P entgegen dem Gewichte G vertical aufwärts, so ist $k = p - \gamma x$ ein Maximum, Fig. 357, 358,

$$max.\ k = p, \text{ für } x = 0,$$

und ein Minimum

$$min.\ k = p - \gamma l, \text{ für } x = l.$$

Ferner wird hier $k = 0$ für $\gamma x = p$, d. i. für $x = \frac{p}{\gamma}$.

Für die Bestimmung der Querschnittsdimensionen wird derjenige der beiden Werthe p und $p - \gamma l$ maßgebend sein, welcher absolut genommen der größere ist. Auch hier giebt die Figur $ABDE$ eine graphische Darstellung der specifischen Spannungen bezüglich Ausdehnungen. Wenn $\frac{p}{\gamma} = \frac{l}{2}$, also $G = F \,.\, l\gamma = 2pF = 2P$ ist, so fällt der Nullpunkt der Spannung in die Mitte des Stabes; die eine Hälfte wird ebenso stark gedrückt, wie die andere gezogen wird, und die totale Ausdehnung ist Null, wie bereits oben angegeben wurde.

Sobald die Kraft P nicht am Ende des Stabes, sondern im Abstande l_1 vom Ende angreift, so ist, wenn P abwärts wirkt, Fig. 359 und 360,

$$k = 0, \text{ für } x = 0,$$
$$k = p + \gamma l_1, \text{ für } x = l_1 \text{ und}$$
$$k = p + \gamma l, \text{ für } x = l.$$

Wirkt P vertical aufwärts, Fig. 361 und 362, so hat man

$$k = 0, \text{ für } x = 0 \text{ und für } x = \frac{p}{\gamma};$$
$$k = p - \gamma l_1, \text{ für } x = l_1 \text{ und}$$
$$k = p - \gamma l, \text{ für } x = l.$$

Fig. 359. Fig. 360.

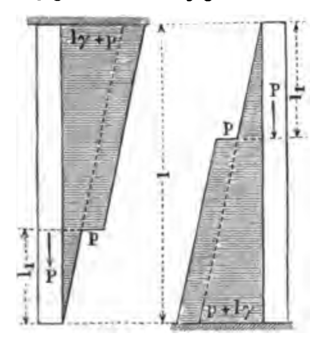
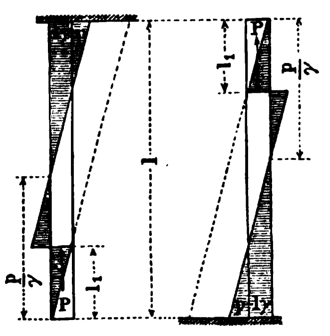


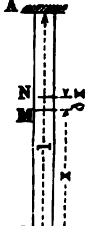
Fig. 361. Fig. 362.



Ein positiver Werth von k deutet auf Zug, ein negativer auf Druck, und sind in den graphischen Darstellungen die Zugspannungen und Druckspannungen nach den entgegengesetzten Seiten der X Axe angetragen.

Anmerkung. Das mechanische Arbeitsvermögen, welches ein prismatischer Körper in sich aufnimmt, wenn er durch sein eigenes Gewicht ausgedehnt oder zusammengedrückt wird, ist auf folgende Weise zu ermitteln. Das Element MN, Fig. 363, dessen Länge ∂x ist, wird durch das Gewicht $\gamma F x$ des Körperstückes BM nach und nach von 0 auf $\partial \lambda = \frac{\gamma x \partial x}{E}$ ausgedehnt, und es ist daher die hierzu nöthige Arbeit:

Fig. 363.



$$= \frac{1}{2} \gamma F x \,.\, \partial \lambda = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 F x^2}{E} \partial x.$$

Wenn man daher diesen Ausdruck integrirt, so erhält man das Arbeitsquantum für alle Stangenelemente von B bis M:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F}{E} \int x^2 \partial x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F x^3}{3 E},$$

und also das für die ganze Stange:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F l^3}{3 E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 F^2 l^2 l}{3 F E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G^2 l}{3 F E} = \frac{1}{3} G \lambda,$$

wobei (nach §. 213) $\lambda = \frac{1}{2} \frac{G l}{F E}$, die ganze Ausdehnung der Stange bezeichnet.

Beispiel. Wenn ein Bleidraht, dessen Festigkeitsmodul $K = 2{,}2$ Kilogramm und Dichtigkeit $\gamma = 0{,}0000114$ Kilogramm ist, vertical aufgehangen ist, so zerreißt derselbe bei der Länge

$$l = \frac{K}{\gamma} = \frac{2{,}2}{0{,}0000114} = 193000 \text{ Millimeter} = 193 \text{ Meter}$$

durch sein eigenes Gewicht. Beträgt der Tragmodul desselben $T = 1$ Kilogramm, so erreicht seine Ausdehnung die Elasticitätsgrenze bei einer Länge

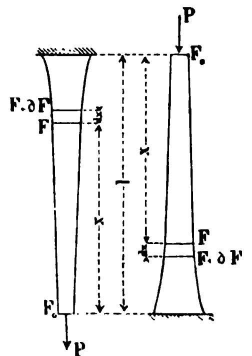
$$l_1 = \frac{T}{\gamma} = \frac{1}{0,0000114} = 87,72 \text{ Meter,}$$

und ist der Elasticitätsmodul dieses Drahtes $E = 700$ Kilogramm, so hat man die entsprechende Ausdehnung desselben bei der Elasticitätsgrenze:

$$\lambda = \frac{T}{E}\, l_1 = \frac{1}{700} \cdot 87,72 = 0,1275 \text{ Meter.}$$

§. 214. **Körper von gleichem Widerstande.** Wird der Zug oder Druck P eines verticalen prismatischen Körpers noch durch das Gewicht G desselben ansehnlich vergrößert, so hat man den Querschnitt $F = \frac{P + G}{T}$ zu machen, um die specifische Spannung k höchstens gleich dem Tragmodul T zu erhalten. Wie aus Fig. 355 hervorgeht, findet diese Spannung nur in einem, dem am meisten beanspruchten Punkte statt, nämlich in der größten Entfernung vom Angriffspunkte der Kraft P. In allen übrigen Querschnitten ist die specifische Spannung kleiner, und man könnte daher die Abmessungen der übrigen Querschnitte entsprechend geringer annehmen, ohne die Festigkeit des Stabes zu gefährden. Dadurch würde nicht nur an Constructionsmaterial gespart, sondern es wird auch noch die schädliche Belastung selbst wegen des nun verminderten Eigengewichtes herabgezogen, so daß der Stab in Folge dessen auch selbst an der am meisten beanspruchten Stelle einen geringeren Querschnitt bedarf, als dies bei einem prismatischen Körper der Fall ist. Der ideale Zustand würde offenbar derjenige sein, bei welchem die specifische Spannung nicht nur in dem meist beanspruchten, daher gefährlichsten Querschnitte, sondern zugleich in allen übrigen Querschnitten den höchstens zulässigen Werth T oder einen aliquoten Theil desselben erreichen würde. In diesem Falle würde die Widerstandsfähigkeit des Materials am vollständigsten ausgenutzt werden, und der Körper mit dem möglich geringsten Materialaufwande auszuführen sein. Die Sicherheit wäre dann in allen Querschnitten gleich groß. Derartige Körper nennt man Körper von gleichem Widerstande.

Fig. 364. Fig. 365.



Bezeichnet k diejenige Spannung pro Quadratmillimeter, welche man in dem Materiale zulassen will (T oder ein aliquoter Theil desselben), so ergiebt sich der anfängliche Querschnitt F_0 am Angriffspunkte der Belastung P (Fig. 364 u. 365) zu

$$F_0 = \frac{P}{k}.$$

In dem Querschnitte F, im Abstande x von F_0, wirkt die Last $P + G'$, wenn G' das Gewicht

des zwischen F und F_0 enthaltenen Körpertheils bedeutet, und es muß, der aufgestellten Bedingung überall gleicher specifischer Spannung zufolge die Gleichung gelten:

$$1)\quad F = \frac{P + G'}{k}.$$

In dem um die unendlich kleine Größe ∂x von F entfernten Querschnitte, welcher um ∂F zugenommen hat, also $F + \partial F$ beträgt, wirkt außer der für F geltenden Belastung $P + G'$ noch das Gewicht des zwischen F und $F + \partial F$ eingeschlossenen Körperelementes von der Länge ∂x. Dieses Gewicht ist, unter γ die Dichte des Materials verstanden, durch $\gamma F \,.\, \partial x$ ausgedrückt. Auch für den Querschnitt $F + \partial F$ gilt die Gleichung:

$$2)\quad F + \partial F = \frac{P + G' + \gamma F \,.\, \partial x}{k}.$$

Durch Subtraction der Gleichung 1 von der Gleichung 2 folgt nunmehr

$$\partial F = \frac{\gamma F \,.\, \partial x}{k} \text{ oder } \frac{\partial F}{F} = \frac{\gamma}{k}\, \partial x.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen F_0 und F erhält man:

$$\frac{\gamma}{k}\, x = \int_{F_0}^{F} \frac{\partial F}{F} = log.\ nat.\ F - log.\ nat.\ F_0 = log.\ nat.\ \frac{F}{F_0}$$

und für F_0 seinen Werth $\frac{P}{k}$ eingesetzt, folgt:

$$\frac{\gamma}{k} \cdot x = log.\, nat. \left(F \cdot \frac{k}{P}\right), \text{ d. i. auch:}$$

$$e^{\frac{\gamma}{k} x} = F\, \frac{k}{P} \text{ oder } F = \frac{P}{k}\, e^{\frac{\gamma}{k} x}\,.$$

Setzt man hierin für x den Werth l, so ergiebt sich der größte Querschnitt am Ende des Stabes zu:

$$F = \frac{P}{k} \cdot e^{\frac{\gamma}{k} l} = F_0 \cdot e^{\frac{\gamma}{k} l}.$$

Bei einem prismatischen Stabe würde unter derselben Voraussetzung, daß die größte specifische Spannung $= k$ sein soll, der Querschnitt am festgehaltenen Ende sich berechnen zu:

$$F_1 = \frac{P}{k - l\gamma} = \frac{P}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{l\gamma}{k}}.$$

Wenn man die angegebenen Rechnungen ausführt, so folgt nach der Exponentialreihe:

$$F = \frac{P}{k}\left[1 + \frac{\gamma}{k}l + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \cdots\right]$$

und durch wirkliche Division:

$$F_1 = \frac{P}{k}\cdot\left[1 + \frac{\gamma}{k}l + \left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \cdots\right]$$

und es beträgt daher die Differenz $F_1 - F$, um welche der größte Querschnitt des Stabes von gleichem Widerstande schwächer sein kann, als der Querschnitt des prismatischen Stabes:

$$F_1 - F = \frac{P}{k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \frac{23}{24}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^4 + \cdots\right].$$

Um den Materialaufwand des Stabes von gleichem Widerstande zu finden, bezeichne V das Volumen desselben, so bedeutet ∂V das Volumen des zwischen den Querschnitten F und $F + \partial F$ (Fig. 364, 365) enthaltenen Körperelementes, und es ist:

$$\partial V = F\,.\,\partial x = \frac{P}{k}\cdot e^{\frac{\gamma}{k}x}\,\partial x,$$

und durch Integration zwischen den Grenzen $x = 0$ und x folgt:

$$V = \int_0^x \frac{P}{k}\cdot e^{\frac{\gamma}{k}x}\,\partial x = \frac{P}{k}\cdot\frac{1}{\frac{\gamma}{k}}\cdot\left(e^{\frac{\gamma}{k}x} - e^0\right) = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma}{k}x} - 1\right).$$

Setzt man $x = l$, so folgt das Volumen des ganzen Stabes:

$$V = \frac{P}{\gamma}\left(e^{\frac{\gamma}{k}l} - 1\right),$$

und das ganze Gewicht

$$G = P\left(e^{\frac{\gamma}{k}l} - 1\right).$$

Man kann diese Formeln auch schreiben:

$$V = \frac{k}{\gamma}\cdot\frac{P}{k}\left(e^{\frac{\gamma}{k}l} - 1\right) = \frac{k}{\gamma}\cdot(F - F_0),$$

und

$$G = k\,(F - F_0).$$

Bei einem prismatischen Stabe für dieselbe Belastung P also vom Querschnitte

$$F_1 = \frac{P}{k - l\gamma}$$

berechnet sich das Volumen zu

$$V_1 = F_1\,l = \frac{P\,.\,l}{k - l\gamma}$$

und das Gewicht

$$G_1 = \frac{P \,.\, l\gamma}{k - l\gamma}.$$

Um V und V_1 mit einander zu vergleichen, seien wieder die angezeigten Rechnungen ausgeführt, so folgt:

$$V = \frac{P}{\gamma}\left[1 + \frac{\gamma}{k}l + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \cdots - 1\right]$$
$$= \frac{P}{\gamma}\left[\frac{\gamma}{k}l + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \cdots\right]$$

und

$$V_1 = \frac{Pl}{k - l\gamma} = \frac{Pl}{k}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{k}l} = \frac{Pl}{k}\left[1 + \frac{\gamma}{k}l + \left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \cdots\right]$$
$$= \frac{P}{\gamma}\left[\frac{\gamma}{k}l + \left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \cdots\right].$$

Die Differenz $V_1 - V$, d. h. diejenige Materialmenge, welche unter gleichen Umständen der prismatische Stab mehr erfordert, als derjenige von gleichem Widerstande, ergiebt sich daher zu:

$$V_1 - V = \frac{P}{\gamma}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^3 + \frac{23}{24}\left(\frac{\gamma}{k}l\right)^4 + \cdots\right].$$

Da die relative Ausdehnung oder Zusammendrückung eines Körpers von gleichem Widerstande überall dieselbe, nämlich $\sigma = \frac{k}{E}$ ist, so steigert sich folglich die Gesammtausdehnung desselben auf $\lambda = \sigma l = \frac{k}{E}l$, während sie bei dem prismatischen Körper nur die Größe:

$$\lambda = \frac{P + \frac{1}{2}G}{FE}\cdot l = \frac{P + \frac{1}{2}G}{P + G}\cdot\frac{k}{E}l$$

hat.

Die wirkliche Ausführung der im Vorhergehenden berechneten Form von gleichem Widerstande würde auf große praktische Schwierigkeiten stoßen. Man begnügt sich daher in der Praxis in solchen Fällen, wo überhaupt das Eigengewicht des Körpers von Belang ist, d. h. bei großer Länge l (Gestänge für Schächte) mit einer absatzweisen Veränderung des Querschnitts, bei welcher Anordnung der Gewinn an Material nicht ganz so groß ausfallen kann, wie es bei einem Körper von genau gleichem Widerstande der Fall ist. Ist dieser Körper AB, Fig. 366 a. f. S., aus prismatischen Theilen zusammen-

zusetzen, welche die Längen l_1, l_2, l_3 u. s. w. haben, so steigert sich die Last P durch die Gewichte $F_1 l_1 \gamma$, $F_2 l_2 \gamma$, $F_3 l_3 \gamma$ u. s. w. der Stücke nach und nach auf P_1, P_2, P_3 u. s. w. Hiernach ist der erforderliche Querschnitt des ersten Stückes:

Fig. 366.

$$F_1 = \frac{P}{k - l_1 \gamma},$$

ferner der des zweiten:

$$F_2 = \frac{P_1}{k - l_2 \gamma} = \frac{F_1 k}{k - l_2 \gamma},$$

der des dritten:

$$F_3 = \frac{P_2}{k - l_3 \gamma} = \frac{F_2 k}{k - l_3 \gamma} \text{ u. s. w.}$$

Sind alle Stücke gleich lang, ist also $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots = l$, so hat man einfacher:

$$F_1 = \frac{P}{k - l\gamma} = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - l\gamma}\right),$$

$$F_2 = \frac{F_1 k}{k - l\gamma} = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - l\gamma}\right)^2,$$

$$F_3 = \frac{F_2 k}{k - l\gamma} = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - l\gamma}\right)^3 \text{ u. s. w.},$$

also allgemein, den Querschnitt des $n$ten Stückes:

$$F_n = \frac{P}{k}\left(\frac{k}{k - l\gamma}\right)^n.$$

Das Volumen des Körpers ist

$$V = (F_1 + F_2 + F_3 + \cdots F_n)\, l,$$

und, wenn man der Kürze wegen $\frac{k}{k - l\gamma} = c$ setzt, so folgt

$$V = \frac{P}{k}(c + c^2 + c^3 + \cdots c^n)\, l = \frac{Pc}{k}(1 + c + c^2 + c^{n-1})\, l.$$

Nun ist aber die Parenthese gleich dem Werthe $\frac{c^n - 1}{c - 1}$, wie man sich leicht durch Ausführung der Division überzeugt, und es ist auch

$$c - 1 = \frac{k}{k - l\gamma} - 1 = \frac{l\gamma}{k - l\gamma},$$

folglich ergiebt sich:

$$V = \frac{P}{k}\, c\, \frac{c^n - 1}{c - 1}\, l = \frac{P}{k}\, \frac{k}{k - l\gamma} \cdot \frac{c^n - 1}{\frac{l\gamma}{k - l\gamma}}\, l = \frac{P}{\gamma}(c^n - 1)$$

$$= \frac{P}{\gamma}\left[\left(\frac{k}{k - l\gamma}\right)^n - 1\right].$$

Für $P\left(\frac{k}{k - l\gamma}\right)^n$ läßt sich nun $k \, . \, F_n$ setzen, und wenn man unter F_0 den Querschnitt versteht, welchen die Last P allein ohne Rücksicht auf das Eigengewicht erfordert, so daß $P = kF_0$ ist, so läßt sich obige Formel schreiben:

$$V = \frac{k}{\gamma}(F_n - F_0)$$

oder da F_1 wenig von F_0 abweichen wird, auch:

$$V = \frac{k}{\gamma}(F_n - F_1).$$

Endlich ist das Gewicht des Gestänges:

$$G = k(F_n - F_1).$$

Beispiel. Welchen Querschnitt muß ein 300 Meter langes schmiedeeisernes Schachtgestänge erhalten, wenn dasselbe außer seinem eigenen Gewichte noch eine Last $P = 40000$ Kilogramm zu tragen hat? Nimmt man die höchstens zulässige specifische Spannung $k = 6$ Kilogramm an (anstatt des Tragmoduls 13,13), so ist, da 1 Cubikmillimeter Schmiedeeisen $\gamma = 0{,}0000076$ Kilogramm wiegt, der gesuchte Querschnitt:

$$F = \frac{P}{k - l\gamma} = \frac{40000}{6 - 300000 \, . \, 0{,}0000076} = \frac{40000}{3{,}72} = 10752{,}7 \text{ Quadratmm.},$$

und das Gewicht des Gestänges:

$$G = F \, . \, l\gamma = 10752{,}7 \, . \, 300000 \, . \, 0{,}0000076 = 24516{,}2 \text{ Kilogramm.}$$

Könnte man diesem Gestänge die Form eines Körpers von gleichem Widerstande geben, so würde man zum kleinsten Querschnitte:

$$F_0 = \frac{P}{k} = \frac{40000}{6} = 6666{,}7 \text{ Quadratmillimeter,}$$

zum größten:

$$F_n = F_0 \, . \, e^{\frac{\gamma}{k}l} = 6666{,}7 \, . \, e^{0{,}38} = 6666{,}7 \, . \, 1{,}46225 = 9747{,}4 \text{ Quadratmillimeter}$$

und das Gewicht des Gestänges:

$$G_n = V_n \, . \, \gamma = k(F_n - F_0) = 6\,(9747{,}4 - 6666{,}7) = 18484 \text{ Kilogramm}$$

erhalten.

Ist der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens $E = 20000$ Kilogramm., so hat man folglich die Verlängerung des Gestänges im letzteren Falle:

$$\lambda = \frac{k}{E}\,l = \frac{6 \, . \, 300000}{20000} = 90 \text{ Millimeter}$$

und dagegen im ersteren:

$$\frac{P + \frac{1}{2}G}{P + G}\,\lambda = \frac{40000 + 12258}{40000 + 24516} \cdot 90 = 72{,}9 \text{ Millimeter.}$$

Ausdehnungs- und Compressionsversuche. Um das Elasticitätsgesetz eines Stoffes vollständig kennen zu lernen, ist nöthig, daß man möglichst lange prismatische Körper aus demselben durch allmälig zu vergrößernde Gewichte nicht allein nach und nach und bis zum Zerreißen aus- §. 215.

dehne, sondern auch nach und nach bis zum Zerdrücken zusammenpresse, und daß man hierbei die durch jedes Gewicht bewirkte Ausdehnung oder Zusammendrückung beobachte. Giebt man dem zu untersuchenden Körper eine verticale Lage, so können diese Gewichte unmittelbar an diesen Körper angehangen oder auf denselben aufgelegt werden, und sie geben dann unmittelbar die Größe der Zug- oder Druckkraft des Körpers an. Um aber nicht mit zu großen Gewichten experimentiren zu müssen, zieht man es vor, die Gewichte mittels ungleicharmiger Hebel auf den Körper wirken zu lassen, wobei dieselben immer an den längeren Arm (a) angehangen werden, während das eine Ende des Körpers vom kürzeren Arme (b) ergriffen wird. Durch Multiplication des Gewichtes G mit dem Armverhältnisse $\frac{a}{b}$ ergiebt sich dann leicht die entsprechende Zug- oder Druckkraft $P = \frac{a}{b}\, G$. Auch wendet man mit Vortheil, namentlich zur Erzeugung bedeutender Zug- oder Druckkräfte, anstatt der Gewichte sogenannte hydraulische Pressen an. Um die Größe der Ausdehnung oder Zusammendrückung beobachten zu können, versieht man entweder den zu untersuchenden Stab in der Nähe von jedem seiner beiden Enden mit einem feinen Striche, oder man befestigt an diesen Stellen auf demselben ein Paar, vielleicht gar als Verniere vorgerichteter Zeiger, und um nicht nur die elastische, sondern auch die permanente Ausdehnung zu ermitteln, mißt man die Entfernung dieser Striche oder Zeiger von einander nicht allein vor dem Auflegen und während des Aufliegens eines Gewichtes, sondern auch nach erfolgter Abnahme desselben. Man läßt auch gern inzwischen mehrere Minuten, oder nach Befinden einige Stunden Zeit verfließen, weil, zumal bei stärkeren Spannungen, die Ausdehnung und Zusammendrückung nicht momentan, sondern erst nach Verlauf einer längeren Zeit einen gewissen Werth annehmen. Die Ausmessung dieser Entfernung erfolgt entweder durch einen Stangenzirkel oder mittels einer unmittelbar am Stabe hinlaufenden Eintheilung; auch wendet man hierzu ein sogenanntes Kathetometer an, welches in der Hauptsache in einem an einem verticalen Stabe auf- und niederschiebbaren Luftblasenniveau (s. „Ingenieur" S. 234) besteht.

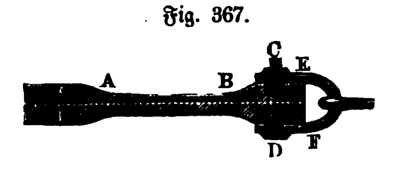
Um die Compression an längeren Stäben beobachten zu können, muß man diese Stäbe während des Versuches in eine röhrenförmige Leitung stellen; auch sind dieselben von Zeit zu Zeit einzuschmieren, damit sie sich ohne Hinderniß in dieser Leitung verschieben können.

Kommt es nur darauf an, den Festigkeitsmodul eines Körpers zu ermitteln, so kann man sich zu den Versuchen kürzerer Körper bedienen.

Zu den Zerreißungsversuchen wendet man Körper mit starken Köpfen, A und B, Fig. 367, an, welche genau in der Axe durchbohrt sind. Jede Durchbohrung erhält in der Mitte eine ringförmige Schneide, damit

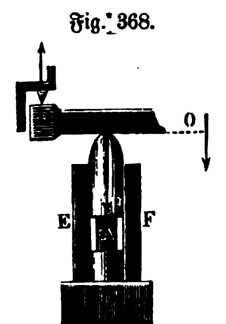
der Körper mittels eines durchgesteckten Bolzens CD und durch einen die Enden dieses Bolzens ergreifenden Haken EF genau in der Axe gezogen werde. Bei den Zerdrückungsversuchen giebt man dem Körper A, Fig. 368, zwei parallele Grundflächen, und bringt denselben zwischen zwei Cylinder B und C mit ebenfalls eben abgeschliffenen Grundflächen.

Fig. 367.



Während nun der abgerundete Kopf H des einen Cylinders von der pressenden Kraft ergriffen wird, stützt sich der andere Cylinder gegen eine starke Fußplatte D, und gleiten beide in dem Inneren eines Cylinders EF. Der Druck P auf den Kopf H des Stempels B besteht entweder in der Kolbenkraft einer hydraulischen Presse oder in der Kraft eines in der Figur nur zum Theil angegebenen einarmigen Hebels LO.

Fig. 368.

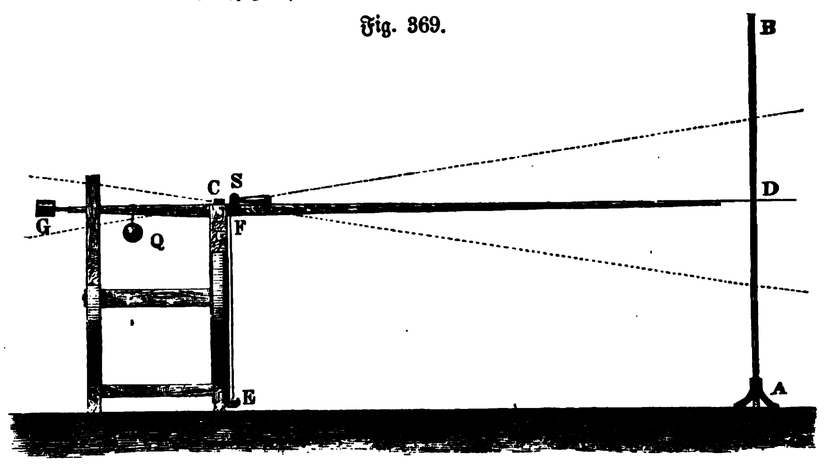


Während das Zerreißen eines Körpers in dem kleinsten Querschnitte desselben erfolgt und sich daher der Körper nur in zwei Stücke zertheilt, geht das Zerdrücken in der Regel in schiefen Flächen vor sich, wobei der Körper in mehrere Stücke zerfällt. Prismatische Körper zertheilen sich hierbei vorzüglich in zwei Pyramiden, welche die beiden Grundflächen des Körpers zur Basis und den Mittelpunkt desselben zur Spitze haben, und nächstdem in andere pyramidenähnliche Körper, deren Grundflächen die Seitenflächen des Ganzen ausmachen und deren Spitzen ebenfalls die Mitte des Körpers einnehmen. Körper, welche nach verschiedenen Richtungen ein verschiedenes Gefüge haben, verhalten sich natürlich anders; so wird z. B. ein Holzstück durch eine Kraft, welche in der Richtung der Fasern desselben wirkt, dadurch zerdrückt, daß im kleinsten Querschnitte desselben eine wulstförmige Ausbiegung entsteht.

Ausdehnungsversuche. Die ersten gründlichen Untersuchungen über die Ausdehnung und Elasticität des Eisens in Drähten haben wir Gerstner zu verdanken. Derselbe verwendete zu den hierbei zu Grunde gelegten Versuchen Eisendraht von 0,2 bis 0,8 Linien Dicke und bediente sich des in Fig. 369 a. f. S. abgebildeten Hebelapparates mit einem 15 Fuß langen Zeiger CD, einem Gegengewichte G und einem Laufgewichte Q. Der ungefähr 4 Fuß lange Draht EF wurde am Ende E festgeklemmt und mit dem oberen Ende um einen Wirbel F gewunden, welcher sich mittels einer Schraube S ohne Ende umdrehen ließ, wodurch natürlich dem Drahte jede beliebige Spannung gegeben werden konnte. Die dadurch bewirkte Aus- §. 216.

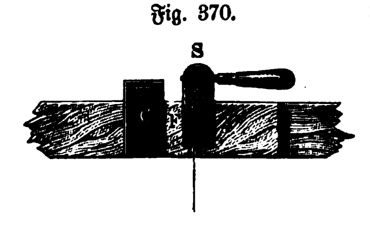
dehnung des Drahtes gab die Zeigerspitze D an einem eingetheilten Stabe AB vervierundfünfzigfacht an. Die schneidige Axe C des Hebels sowie

Fig. 369.



der Wirbel F, um welche das obere Ende des Drahtes gewunden war, und die Schraube ohne Ende S zum Umdrehen des Wirbels sind in Fig 370 in größerem Maßstabe besonders abgebildet. Durch diese Versuche weist Gerstner nach, daß jede Ausdehnung die Summe von zwei Ausdehnungen ist, wovon die eine (die elastische Ausdehnung) nach Abnahme des Gewichts verschwindet, und die andere (die permanente Ausdehnung) zurückbleibt, und daß in Folge dessen die Ausdehnung λ sogar innerhalb der Elasticitätsgrenze nicht genau der spannenden Kraft P proportional, sondern daß es angemessen ist, die Formel

Fig. 370.



$$P = \frac{\lambda}{l} FE \text{ [§. 210 (4)]}$$

durch die Reihe

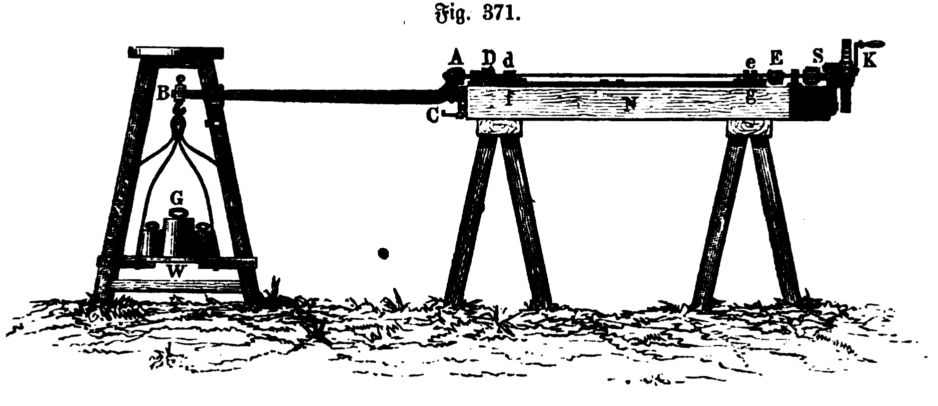
$$P = \frac{\lambda}{l}\left[1 + \alpha \frac{\lambda}{l} + \beta \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2\right] FE,$$

worin α und β Erfahrungszahlen bezeichnen, zu ersetzen.

Später wurden von Lagerhjelm sowie auch von Brix ausgedehnte Versuche über die Elasticität und Festigkeit des Schmiedeeisens und Eisendrahtes zur Ausführung gebracht. Beide Experimentatoren wendeten zu ihren Versuchen einen Winkelhebel ACB, Fig. 371, an, dessen längerer Arm CB von dem auf eine Wagschale W aufgelegten Gewichte G ab-

wärts gezogen wurde, wodurch der am kürzeren Arme CA angeschlossene Eisenstab oder Draht DE beliebig gespannt werden konnte. Bei dem

Fig. 371.



Apparate von Brix betrug das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = {}^1/_{20}$, und es war hier das eine Drahtende D mittels Kluppe, Haken und Bolzen an den Arm CA und das andere Ende E auf gleiche Weise an eine Schraube S befestigt, welche durch eine Kurbel K und mittels eines Räderwerkes in Umdrehung gesetzt werden konnte. Zur Angabe der Längenausdehnung dienten zwei Nonien d und e, welche an den Enden auf den Draht aufgeschraubt wurden und über zwei in Viertellinien eingetheilten Scalen fg hinliefen. Nachdem man den Draht in den Kluppen eingeklemmt hatte, wurde die Wagschale nach und nach mit größeren Gewichten beladen, und bei jedem einzelnen Versuche durch Drehung der Kurbel K des Räderwerkes der Draht so gespannt, daß sich der Hebel von seiner Unterstützung erhob, und sich so die Spannung des Drahtes mit dem Gewichte G ins Gleichgewicht setzte. Die Versuche wurden mit Drähten von $1^1/_3$ bis $1^1/_2$ Linien Stärke ausgeführt, und gaben für dieselben, wenn sie ungeglüht waren, im Mittel den Festigkeitsmodul $K = 94000$ Pfund pro Quadratzoll (68,7 Kilogramm pro Quadratmillimeter), und dagegen nach dem Glühen, $K = 62000$ Pfund (45,3 Kilogramm). Der Elasticitätsmodul wurde dagegen für geglühten und ungeglühten Draht im Mittel $E = 28'000000$ Pfund (20500 Kilogramm pro 1 Quadratmillimeter) gefunden; ferner ergab sich, daß die Grenze der Elasticität erreicht wurde, wenn die Spannung bei ungeglühtem Draht 0,5 K und bei geglühtem 0,6 K betrug. Bei stärkeren Spannungen traten bleibende Ausdehnungen (Streckungen) ein, und es betrug die ganze Ausdehnung im Augenblicke des Zerreißens bei ungeglühtem Drahte

$\frac{\lambda}{l} = 0{,}0034$, und beim geglühten $\frac{\lambda}{l} = 0{,}0885$, also 26mal so viel.

Bei dem Apparate von Lagerhjelm erfolgte die Anspannung des Drahtes durch eine hydraulische Presse, deren Kolbenstange das Ende des Eisenstabes ergriff.

Zu diesen Versuchen verwendete Lagerhjelm verschiedene Eisenstäbe von 36 Zoll Länge mit kreisrunden und quadratischen Querschnitten von ½ Zoll u. s. w. Seitenlänge. Denselben zufolge ist im Mittel der Elasticitätsmodul des schwedischen Schmiedeeisens:

$E = 44'000000$ Pfund (32000 Kilogramm pro 1 Quadratmillimeter),

der Festigkeitsmodul

$$K = \frac{1}{500}\,E = 88000 \text{ Pfund (64 Kilogramm)},$$

und der Tragmodul

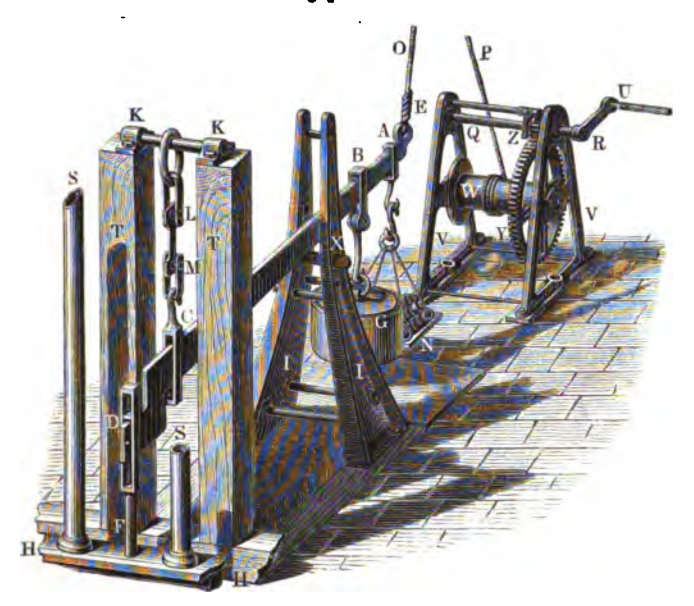
$$T = \sigma\,.\,E = \frac{1}{1600}\cdot 44'000000 = 27500 \text{ Pfund (20 Kilogramm)}.$$

Wertheim ließ bei seinen Versuchen über die Elasticität und Cohäsion der Metalle die zu untersuchenden Drähte frei herabhängen, und befestigte an denselben einen Gewichtskasten, welcher mittels Fußschrauben auf dem Fußboden ruhen konnte. Um den Draht durch die in den Kasten gelegten Gewichte anzuspannen, wurden die Fußschrauben so weit herumgedreht, bis der Kasten zum Schweben kam. Zur Ausmittelung der Ausdehnungen des Drahtes diente ein Kathetometer. Diese Versuche wurden unter sehr verschiedenen Temperaturen an vielerlei Metalldrähten, als von Eisen, Stahl, Messing, Zinn, Blei, Zink, Silber u. s. w., angestellt. Die Hauptergebnisse dieser Versuche sind in der folgenden Tafel (§. 218) enthalten.

Der Apparat, womit Fairbairn seine Festigkeitsversuche angestellt hat, besteht in der Hauptsache in einem starken schmiedeeisernen Hebel oder Wagbalken ACD, Fig. 372, dessen Stützpunkt D von einem starken Bolzen F festgehalten wird, welcher von unten mittels einer Schraubenmutter höher oder tiefer gestellt werden kann. Zwei eiserne Säulen geben dem Fußstück HH, durch welches F hindurch ging, den nöthigen Widerstand. Das zu untersuchende Eisenstück LM war mittels einer Kette an dem auf den Säulen TT ruhenden Träger KK aufgehangen und durch Bolzen und Ringe mit der Scheere C des Wagbalkens ACD verbunden. An dem langen Arme des letzteren hing nicht bloß ein größeres constantes Gewicht G, sondern auch eine Wagschale N zur Aufnahme kleinerer Gewichte; zur Unterstützung des Hebels von unten diente der Bolzen X und zum Aufheben desselben ein Seil OP, welches oben über eine Leitrolle lief und sich unten auf die Welle W einer Winde UYZ wickeln ließ. Nach dem Auflegen der Gewichte ließ man durch langsames Umdrehen der Kurbel U das Hebelende

E allmälig herab, bis endlich das zu prüfende Eisenstück durch *G* und die Gewichte *N* allein gespannt wurde.

Fig. 372.



Anmerkung. Gerstner's Versuche über die Elasticität der Eisendrähte u. s. w. sind abgehandelt in Gerstner's Mechanik, Bd. I.; über die Versuche von Lagerhjelm ist nachzulesen die Pfaff'sche Uebersetzung der Abhandlung: Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit, Gleichartigkeit, Elasticität, Schmiedbarkeit und Stärke des Stabeisens u. s. w. von Lagerhjelm (Nürnberg 1829), und über die Versuche von Brix macht die nöthigen Mittheilungen: die Abhandlung über die Cohäsions- und Elasticitätsverhältnisse einiger bei Hängebrücken in Anwendung kommenden Eisendrähte (Berlin 1837).

Die Versuche von Wertheim über die Elasticität und Cohäsion der Metalle u. s. w., sowie auch über Glas und Holz werden in Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie, Ergänzungsband II., 1845, abgehandelt. Die Elasticitätsmodel der genannten Körper sind hier nicht allein durch Ausdehnungs-, sondern auch durch Biegungs- und Schwingungsversuche bestimmt. Ueber Fairbairn's Festigkeitsversuche ist in dessen Useful Informations for Engineers nachzulesen.

Eisen und Holz. Die ausführlichsten Versuche über die Elasticität und §. 217.
Festigkeit des Guß- und Schmiedeeisens sind in der neuesten Zeit von Hodgkinson angestellt worden; durch sie hat man erst die Gesetze der Ausdehnung und Zusammendrückung dieser in der praktischen Anwendung so sehr wichtigen Stoffe vollständig kennen gelernt. Obgleich hiernach das auf verschiedene

Weise erzeugte Eisen ziemlich verschiedene Elasticitäts- und Festigkeitsgrade gezeigt hat, so ist es doch möglich, das Verhalten dieses Körpers in Hinsicht auf Ausdehnung und Compression durch Curven auszudrücken.

Diesen Versuchen zufolge ist für Gußeisen (franz. fonte; engl. cast-iron) im Mittel, und zwar sowohl für Ausdehnung als auch für Compression, der Elasticitätsmodul:

$E = 10000$ Kilogramm, bezogen auf den Querschnitt von 1 Quadratmillimeter, und folglich:

$E = 1368 \,.\, 10000 = 13'680000$ Pfund, bezogen auf 1 Quadratzoll Querschnitt.

Ferner ist die Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze:

$$\sigma_{\text{I}} = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1500}.$$

Dieser Ausdehnung entspricht der Tragmodul:

$$T_{\text{I}} = \frac{10000}{1500} = 6{,}67 \text{ Kilogramm oder:}$$

$$T_{\text{I}} = \frac{13'680000}{1500} = 9120 \text{ Pfund.}$$

Die Compression bei der Elasticitätsgrenze ist dagegen:

$$\sigma_{\text{II}} = \frac{1}{750},$$

daher der Tragmodul des Zerdrückens:

$$T_{\text{II}} = \frac{10000}{750} = 13{,}33 \text{ Kilogramm} = \frac{13'680000}{750} = 18240 \text{ Pfund.}$$

Der Festigkeitsmodul für das Zerreißen ist durch diese Versuche gefunden worden:

$$K_{\text{I}} = 13 \text{ Kilogramm} = 17780 \text{ Pfund,}$$

und dagegen der für das Zerdrücken:

$$K_{\text{II}} = 72 \text{ Kilogramm} = 98500 \text{ Pfund.}$$

Es ist also beim Gußeisen die Festigkeit des Zerdrückens über $5^1/_2$ Mal so groß als die des Zerreißens.

Für das Schmiedeeisen (franz. fer; engl. wrought-iron) ist ferner sowohl bei Ausdehnung als bei Zusammendrückung im Mittel:

$$E = 20000 \text{ Kilogramm} = 27{,}400000 \text{ Pfund,}$$

und die Elasticitätsgrenze ungefähr bei $\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{1500}$, daher der Tragmodul:

$$T = \frac{20000}{1500} = 13{,}33 \text{ Kilogramm} = 18240 \text{ Pfund.}$$

Endlich hat sich der Festigkeitsmodul für das Zerreißen des Schmiedeeisens

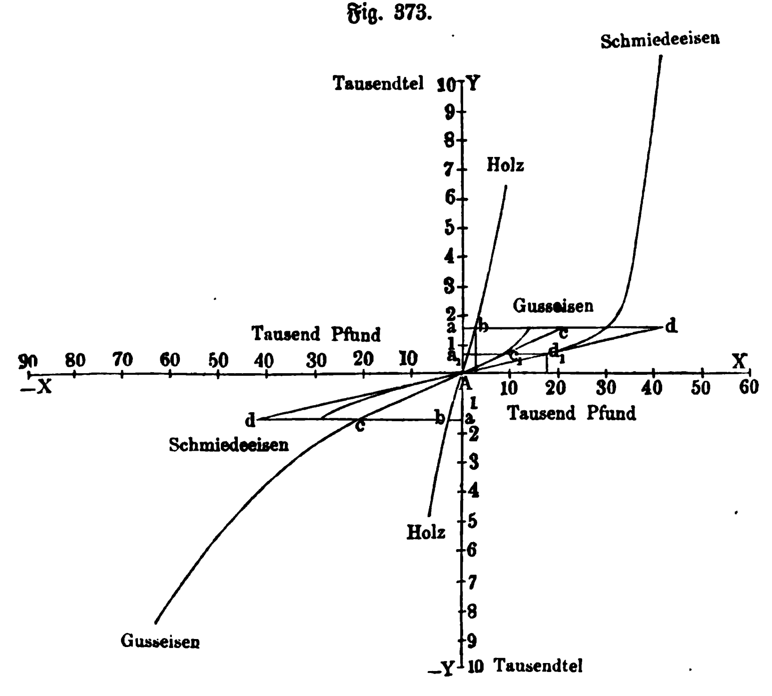
K_{I} = 40 Kilogramm = 54700 Pfund,

und für das Zerdrücken:

K_{II} = 30 Kilogramm = 41000 Pfund ergeben.

Es ist also der Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens ungefähr doppelt so groß als für das Gußeisen, und während für das Zerreißen der Festigkeitsmodul des Gußeisens ungefähr nur ein Drittel von dem des Schmiedeeisens ist, beträgt dagegen für das Zerdrücken der Festigkeitsmodul des Gußeisens ungefähr zwei und ein halb Mal so viel als der des Schmiedeeisens. Diese Elasticitäts- und Festigkeitsverhältnisse des Guß und Schmiedeeisens sind durch die graphische Darstellung in Fig. 373 vollständig vor

Fig. 373.

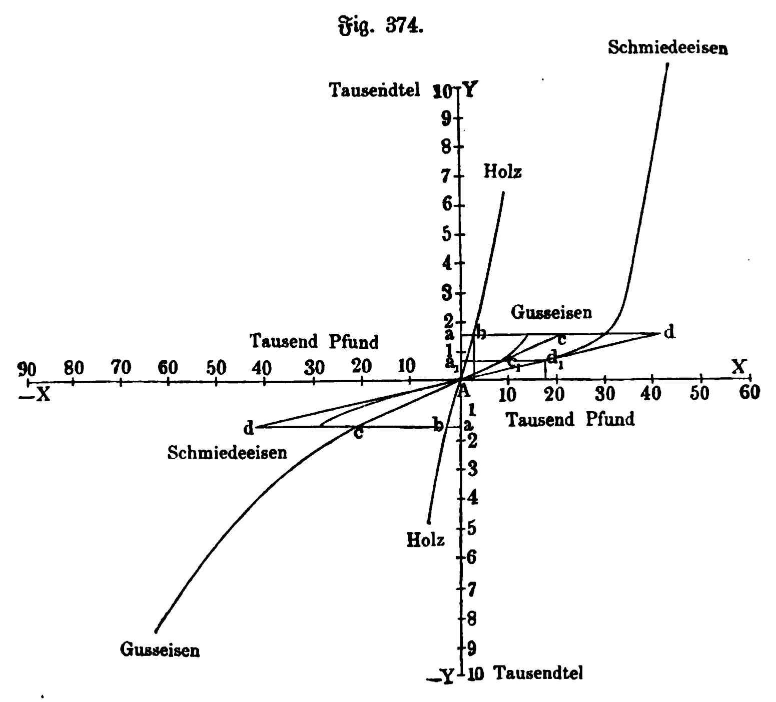


Augen geführt. Vom Anfangspunkte A aus sind auf der rechten Seite der Abscissenaxe $X\overline{X}$ die Ausdehnungs- und auf der linken die Compressionskräfte in Tausendpfunden, und zwar pr. Quadratzoll Querschnitt, angegeben, während die obere Hälfte der Ordinatenaxe $Y\overline{Y}$ die entsprechenden Ausdehnungen und die untere die Zusammendrückungen enthält. Es fällt besonders in die Augen, daß die Curve des Gußeisens auf der Seite der Compression

und die des Schmiedeeisens auf der der Ausdehnung eine bedeutende Erstreckung hat; auch bemerkt man, daß diese Curven in der Nähe des Anfangspunktes *A* nahe gerade Linien bilden.

Da nächst dem Eisen vorzüglich noch das Holz (franz. bois; engl. wood) häufig in Anwendung kommt, so sind in der Figur noch die Elasticitätsverhältnisse des Tannen-, Buchen- und Eichenholzes u. s. w. durch eine

Fig. 374.



Curve graphisch dargestellt. Es ist für diese Holzarten im Mittel der Elasticitätsmodul:

$$E = 1100 \text{ Kilogramm} = 1'500000 \text{ Pfund};$$

ferner die Elasticitätsgrenze bei $\sigma = \frac{1}{600}$ der Länge, daher der entsprechende Tragmodul:

$$T = \frac{1100}{600} = 1{,}8 \text{ Kilogramm} = 2500 \text{ Pfund}.$$

Endlich ist der Festigkeitsmodul für die Ausdehnung:

$$K_{I} = 6{,}5 \text{ Kilogramm} = 8900 \text{ Pfund},$$

und dagegen für die Compression:

$$K_{II} = 4{,}5 \text{ Kilogramm} = 6200 \text{ Pfund}.$$

Das Verhältniß der Elasticitätsmodel 1100 : 10000 : 20000, annähernd = 1 : 9 : 18, zwischen dem Holze, Guß- und Schmiedeeisen ist in der Figur durch die Subtangenten ab, ac und ad ausgedrückt.

Die Arbeitsmodul $A = {}^1/_2\, \sigma T$ für die Elasticitätsgrenze drücken die Dreiecke Aab, Aa_1c_1 und Aa_1d_1 aus, welche die Inhalte der kleinen Ausdehnungsverhältnisse $\sigma = Aa = \frac{1}{600}$ und $\sigma = Aa_1 = \frac{1}{1500}$ (annähernd) zur Grundlinie haben. Es ist dem Obigen zufolge, für Holz

$$A = {}^1/_2\, \sigma T = {}^1/_2 \cdot \frac{1}{600} \cdot 1{,}8 = 0{,}0015 \text{ Millimeterkilogramm}$$
$$= {}^1/_2 \cdot \frac{1}{600} \cdot 2500 = 2{,}08 \text{ Zollpfund,}$$

für Gußeisen:

$$A = {}^1/_2 \cdot \frac{1}{1500} \cdot 6{,}67 = 0{,}00222 \text{ Millimeterkilogrm.} = 3{,}04 \text{ Zollpfund,}$$

und für Schmiedeeisen:

$$A = {}^1/_2 \cdot \frac{13{,}33}{1500} = 0{,}00444 \text{ Millimeterkilogramm} = 6{,}08 \text{ Zollpfund.}$$

Um die Arbeitsmodel für das Zerreißen und für das Zerdrücken bestimmen zu können, ist eigentlich eine vollständige Reihe von Ausdehnungs- und Compressionsversuchen nöthig, da diese Model durch die Quadraturen (siehe §. 29 der analyt. Hülfslehren) der vollständigen Curvenzweige sowohl auf der einen als auch auf der anderen Seite der Ordinatenaxe ausgedrückt werden; namentlich ist dies erforderlich bei der Ausdehnung des Schmiedeeisens und bei der Compression des Gußeisens, da den Veränderungen dieser Körper Curven zukommen, die von geraden Linien bedeutend abweichen.

Beim Holze ist die Ausdehnung und Compression im Augenblicke des Zerreißens und Zerdrückens zu wenig bekannt, als daß sich für dasselbe mit einiger Sicherheit die Arbeitsmodel desselben für das Zerreißen und Zerdrücken angeben ließen. Behandelt man die entsprechenden Curven als gerade Linien, so erhält man den Arbeitsmodul des Zerreißens:

$$B_{\text{I}} = {}^1/_2 \cdot \frac{K_{\text{I}}^2}{E} = {}^1/_2 \cdot \frac{6{,}5^2}{1100} = 0{,}019 \text{ Millimeterkilogramm} = 26{,}4 \text{ Zollpfd.}$$

und dagegen den des Zerdrückens:

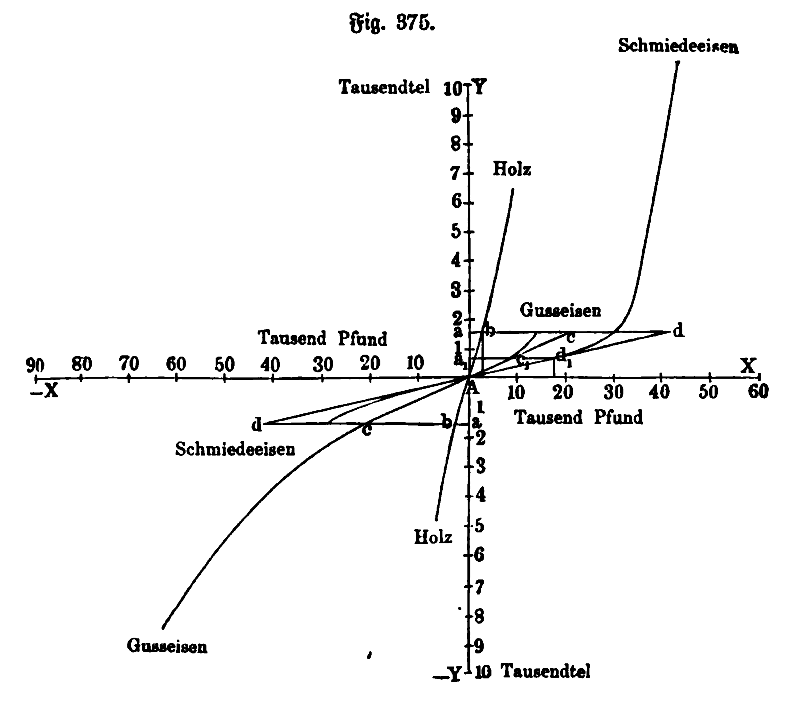
$$B_{\text{II}} = {}^1/_2 \cdot \frac{K_{\text{II}}^2}{E} = {}^1/_2 \cdot \frac{4{,}50^2}{1100} = 0{,}0092 \text{ Millimeterkilogrm.} = 12{,}8 \text{ Zollpfd.}$$

Für das Zerreißen des Gußeisens kann man die Ausdehnung $\sigma_{\text{I}} = 0{,}0016$ und die mittlere Kraft 6,5 Kilogramm annehmen, so daß für dasselbe der Arbeitsmodul des Zerreißens:

$B_1 = 0{,}0016 \,.\, 6{,}5 = 0{,}0104$ Millimeterkilogramm $= 14{,}2$ Zollpfund zu setzen ist.

Für das Zerdrücken des Gußeisens möchte dagegen die größte Zusammendrückung $\sigma_{II} = 0{,}008$, und die mittlere Compressionskraft $= 36$ Kilo-

Fig. 375.



gramm zu setzen sein, so daß der entsprechende **Arbeitsmodul des Zerdrückens**

$B_{II} = 0{,}008 \cdot 36 = 0{,}29$ Millimeterkilogramm $= 394$ Zollpfund folgt.

Für das **Zerreißen des Schmiedeeisens** läßt sich im Mittel $\sigma_1 = 0{,}008$ und die mittlere Kraft 20 Kilogramm, folglich der entsprechende Arbeitsmodul

$B_1 = 0{,}008 \,.\, 20 = 0{,}16$ Millimeterkilogramm $= 219$ Zollpfund setzen.

Für das **Zerdrücken** desselben ist dagegen σ_{II} nur $= 0{,}0018$ und das Kraftmittel $= 15$ Kilogramm anzunehmen, daher der zugehörige Arbeitsmodul:

$B_{II} = 0{,}0018 \,.\, 15 = 0{,}027$ Millimeterkilogramm $= 36{,}9$ Zollpfund.

Erfahrungszahlen. In folgenden Tabellen I. und II. sind die mittleren Werthe der Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodel für die im Bauwesen am häufigsten angewendeten Stoffe aufgeführt. Die erste Tabelle bezieht sich auf Zug- und die zweite auf Druckkräfte. §. 218.

Die in der zweiten Verticalcolumne dieser Tabelle enthaltenen Werthe der relativen Ausdehnung $\sigma = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze drücken auch das Verhältniß $\frac{T}{E}$ zwischen den in der vierten und dritten Columne aufgeführten Werthen von T und E aus. In der praktischen Anwendung belastet man die Körper entweder nur mit $\frac{1}{m}\, T$, z. B. $\frac{1}{3}\, T$ bis $\frac{1}{2}\, T$, oder man bestimmt die Querschnitte F derselben, indem man in der Formel

$$F = \frac{P}{K}$$

statt K, für Metalle den Sicherheitsmodul $\frac{1}{n}\, K = \frac{1}{6}\, K$, für Holz und Stein denselben $= \frac{1}{10}\, K$, und für Mauerwerk nur $= \frac{1}{20}\, K$, dagegen für Seile $\frac{1}{3}\, K$ bis $\frac{1}{5}\, K$ einsetzt.

Die unteren Zahlen in einer Parenthese $\left\{\right\}$ geben die Model in Kilogrammen an, und setzen einen Querschnitt von 1 Quadratmillimeter voraus; die oberen Zahlen drücken die Model in Zoll- oder Neupfund aus, und beziehen dieselben auf den Querschnitt von 1 Quadratzoll.

Tabelle I.

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Zug.

Namen der Körper.	Ausdehnung $\sigma_1 = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul $T_1 = \sigma_1 E$.	Festigkeitsmodul K_1.	Verhältniß $\frac{K_1}{T_1}$.	Arbeitsmodul an der Elasticitätsgrenze $A_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 T_1$.
Gußeisen	0,00067 $= \frac{1}{1500}$	13'680000 10000	9120 6,67	17800 13	1,95	3,04 0,0022
Schmiedeeisen, in Stäben . . .	0,00067 $= \frac{1}{1500}$	27'000000 19700	18000 13,13	56000 40,9	3,05	6,08 0,0044
in Drähten . . .	0,001 $= \frac{1}{1000}$	30'000000 21900	30000 21,9	85000 62,1	2,83	15,0 0,011
in Blechen . . .	0,0008 $= \frac{1}{1250}$	25'000000 18300	20000 14,6	45000 33	2,26	8,0 0,0058
Deutscher Stahl, gehärtet u. angelassen	0,0012 $= \frac{1}{835}$	28'000000 20500	33600 24,6	112000 82	3,3	20,16 0,0148
Feiner Gußstahl . .	0,0022 $= \frac{1}{450}$	40'000000 29200	88900 64,9	140000 102	1,57	99,0 0,072
Kupfer, gehämmert .	0,00025 $= \frac{1}{4000}$	15'000000 11000	3750 2,75	32500 23,8	8,66	0,47 0,00034
Kupferblech	0,000274 $= \frac{1}{3650}$	15'000000 11000	4110 3,0	29000 21,4	7,1	0,56 0,00041
Kupferdraht	0,001 $= \frac{1}{1000}$	16'500000 12100	16500 12,1	58000 42,4	3,5	8,25 0,006
Zink, gegossen . . .	0,00024 $= \frac{1}{4150}$	13'000000 9500	3130 2,3	7200 5,26	2,3	0,377 0,00028
Messing	0,000758 $= \frac{1}{1320}$	8'800000 6400	6670 4,85	17000 12,4	2,56	2,53 0,0018
Messingdraht . . .	0,00135 $= \frac{1}{742}$	13'500000 9870	18220 13,3	50000 36,5	2,74	12,3 0,009
Bronce (Kanonenmetall	0,00063 $= \frac{1}{1590}$	9'500000 6900	5970 4,34	35000 25,6	5,9	1,88 0,00136
Blei	0,0021 $= \frac{1}{477}$	685000 500	1440 1,0	1780 1,3	1,3	1,51 0,0011
Bleidraht	0,00067 $= \frac{1}{1500}$	960000 700	640 0,47	3000 2,2	4,68	0,213 0,00016
Zinn	0,0011 $= \frac{1}{900}$	5'500000 4000	6100 4,4	—	—	3,4 0,0025

Fortsetzung von Tabelle I.

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Zug.

Namen der Körper.	Ausdehnung $\sigma_1 = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul $T_1 = \sigma_1 E$.	Festigkeitsmodul K_1.	Verhältniß $\frac{K_1}{T_1}$.	Arbeitsmodul an der Elasticitätsgrenze $A_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 T_1$.
Silber	$0{,}001515 = \frac{1}{660}$	10'000000 7300	15150 11,0	40000 29,0	2,63	11,5 0,0084
Gold	$0{,}00167 = \frac{1}{600}$	10'900000 8000	18000 13,13	37000 27,0	2,05	15,0 0,011
Platin	$0{,}00167 = \frac{1}{600}$	21'900000 16000	36500 26,6	46500 34,0	1,28	30,4 0,022
Aluminium	—	10'000000 7300	—	27800 20,3	—	—
Buchen-, Eichen-, Fichten-, Kiefern-, Tannenholz, in der Richtung der Fasern . .	$0{,}00167 = \frac{1}{600}$	1'500000 1100	2500 1,8	8900 6,5	3,6	2,10 0,0015
Dieselben Holzarten in radialer Richtung zu den Jahresringen	—	180000 130	—	550 0,4	—	—
Dieselben Holzarten parallel zu den Jahresringen	—	110000 80	—	620 0,45	—	—
Schwache Hanfseile .	—	—	—	8400 6,1	—	—
Starke Hanfseile . .	—	—	—	6500 4,8	—	—
Drahtseile	—	—	—	45000 33,0	—	—
Kettentaue	—	—	—	50000 36,5	—	—
Lederriemen (v. Kuhleder)	—	10000 7,3	—	4000 2,9	—	—
Einfach genietetes Eisenblech	—	—	—	36000 26,3	—	—

Tabelle II.

Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Druck.

Namen der Körper.	Zusammendrückung $\sigma_{II} = \frac{\lambda}{l}$ bei der Elasticitätsgrenze.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul $T_{II} = \sigma_{II} E$.	Festigkeitsmodul K_{II}.	Verhältniß $\frac{K_{II}}{T_{II}}$.	Arbeitsmodul an der Elasticitätsgrenze $A_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{II} T'_{II}$.
Gußeisen	$0{,}00133 = \frac{1}{750}$	13'500000 9900	18000 13,13	100000 73	5,5	12,0 0,0088
Schmiedeeisen . . .	$0{,}00067 = \frac{1}{1500}$	27'000000 19700	18000 13,13	30000 22	1,66	6,0 0,0044
Kupfer	$0{,}00025 = \frac{1}{4000}$	15'000000 11000	3750 2,75	56000 41	14,9	0,47 0,00034
Messing	—	—	—	150000 110	—	—
Blei	—	—	—	7000 5,1	—	—
Holz, in der Richtung der Fasern .	—	—	—	6500 4,8	—	—
Basalt	—	—	—	27000 20	—	—
Gneiß und Granit .	—	—	—	8000 5,9	—	—
Kalkstein	—	—	—	5000 3,6	—	—
Sandstein	—	—	—	4000 2,9	—	—
Ziegelstein	—	—	—	800 0,6	—	—
Mörtel	—	—	—	500 0,37	—	—

Anmerkung. Die in diesen Tabellen angegebenen Model beziehen sich auf nicht ausgeglühte Metalle. Bei ausgeglühten Metallen (franz. mét. cuits; engl. annealed met.) ist zwar in der Regel der Elasticitätsmodul derselbe, wie bei den nicht ausgeglühten Metallen, dagegen ist der Festigkeitscoefficient des Zerreißens ausgeglühter Metalle meist um 30 bis 40 Procent kleiner als vor dem Ausglühen. Der gehärtete und angelassene Stahl (franz. acier trempé et

recuit; engl. tempered and annealed steel) hat zwar ebenfalls denselben Elasticitätsmodul wie der ungehärtete Stahl, dagegen ist sein Tragmodul oft um 20 bis 30 Procent größer als beim ungehärteten Stahl. Da wo es nicht besonders erwähnt wird, sind die angegebenen Model für Metalle an Drähten bestimmt. Bei einigen Stoffen, wie bei dem Holze, dem Eisen und den Steinen, sind die Elasticitäts- und Festigkeitsmodel so verschieden, daß sie auch in besonderen Fällen 25 Procent größer oder kleiner sein können, als hier angegeben wird. Namentlich gilt dies von den Werthen der Tabelle II., da die Model der Druckfestigkeit sehr verschieden angegeben werden, je nach dem Grade der Zerstörung des Körpers, welcher bei der Untersuchung als maßgebend angesehen wurde. Durch mechanische Bearbeitung wie Hämmern, Walzen, Drahtziehen, nehmen die streckbaren Metalle an der Oberfläche eine Verdichtung an, welche die Festigkeit erhöht. Da diese Verdichtung durch das Ausglühen wieder beseitigt wird, so erklärt sich hieraus die geringere Festigkeit nach demselben. Besonders verschieden sind die Ausdehnungen, welche an Drähten im Augenblicke des Zerreißens beobachtet worden sind; waren dieselben hart gezogen, so betrug die specifische Ausdehnung 0,0034; waren sie zuvor ausgeglüht, so stieg die Ausdehnung zu 0,0885 der ursprünglichen Länge.

Die nur an der Oberfläche stattfindende Verdichtung ist verhältnißmäßig am größten, je größer die Oberfläche im Verhältniß zum Volumen ist, also besonders hervortretend bei Draht, und zwar um so mehr, je dünner derselbe ist. Man kann die Festigkeit pro Quadratmillimeter Querschnitt für Draht durch die empirische Formel $K_1 = \frac{2}{\pi}\left(\alpha + \frac{\beta}{d}\right)$ ermitteln, wenn d den Durchmesser in Millimetern, und K_1 den Festigkeitsmodul in Kilogrammen ausdrückt. Die Werthe von α und β sind nach Versuchen von Karmarsch in folgender Tabelle enthalten.

	nicht geglüht		ausgeglüht	
	α	β	α	β
Stahldraht	100	42	90	6
Eisendraht, bester	100	25	52	6
„ gewöhnlicher	72	36	45	10
Messingdraht	86	16	45	11
Kupferdraht	55	15	37	0
Platindraht	35	19	29	15
Zinkdraht	20	3,5	—	—
Draht von Hartblei	3,5	0	—	—
„ von weichem Blei	2,7	0	—	—

Eine Temperaturerhöhung übt bis zu einem gewissen Grade auf das Schmiedeeisen einen vortheilhaften Einfluß aus. Wenigstens geht aus den darüber von Fairbairn angestellten Versuchen das für Dampfkessel wichtige Resultat hervor,

daß die Zugfestigkeit des Schmiedeeisens ihr Maximum etwa bei einer Temperatur von 200° C. erreicht, und daß dieser größte Werth denjenigen der Zugfestigkeit bei gewöhnlicher mittlerer Temperatur bis zu 20 Procent übertreffen kann. Bei noch weiterer Erwärmung nimmt die Festigkeit schnell ab. Bei Rothglühhitze beträgt sie kaum mehr die Hälfte von derjenigen bei gewöhnlicher Temperatur.

Bei Eisenblech ist die Zugfestigkeit in der Walzrichtung etwa um 10 Procent größer, als in der dazu senkrechten Richtung, viel beträchtlicher sind die Unterschiede der Festigkeiten nach verschiedenen Richtungen bei den Hölzern, wie dies aus Tabelle I. sich ersieht.

Eigenthümliche Verschiedenheiten bietet auch das Verhalten der Körper vor und bei dem Zerreißen dar. Während Gußmetalle während der allmälig gesteigerten Belastung außer der entsprechenden gleichmäßigen Ausdehnung eine besondere, den bevorstehenden Riß andeutende Veränderung nicht zeigen, erleiden schmiedbare Metalle neben der gleichmäßigen Ausdehnung eine merkliche Zusammenziehung des Querschnitts an einer Stelle, an welcher dann auch der Riß erfolgt. Bei langfaserigen Hölzern pflegt dem Reißen das Klingen einzelner abreißender Fasern vorherzugehen.

Bemerkenswerth ist die Festigkeitsverminderung, welche das Schmiedeeisen erleidet, wenn dasselbe oft und lange wiederholten kleinen Stößen oder Erschütterungen ausgesetzt ist. Es dürfte diese Erscheinung, welche zuweilen den Bruch von Gegenständen (Wagenaxen) ohne scheinbaren Grund veranlaßt, mit einer Texturveränderung wahrscheinlich zusammenhängen. Interessante Versuche sind hierüber von Herrn Obermaschinenmeister F. Wöhler in Frankfurt a. O. angestellt worden.

Beispiel. Wie stark sind die Grundmauern eines außen 20 Meter langen und 12 Meter breiten und 20 Millionen Kilogramm schweren Gebäudes aufzuführen, wenn man hierzu gut bearbeitete Gneißstücke verwendet. Setzen wir die gesuchte Mauerdicke x Meter, so können wir die mittlere Länge der Umfassungsmauern zu $20 - x$ resp. $12 - x$ Meter annehmen. Folglich beträgt die Grundfläche des ganzen Mauerwerks

$2\,(20 - x)\,x + 2\,(12 - x)\,x = 2\,(32 - 2\,x)\,x = 4\,(16 - x)\,x$ Quadratmeter.

Der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken des Gneißes ist nach Tabelle II. 5,9 Kilogramm pro 1 Quadratmillimeter.

Nimmt man daher für die Mauer 20fache Sicherheit, d. h. setzt man den zulässigen Druck pro 1 Quadratmillimeter gleich 0,295 oder rund 0,3 Kilogramm, so folgt x aus der Gleichung

$$0{,}3 \,.\, 1000^2 \,.\, 4\,(16 - x)\,x = 20'000000; \text{ oder}$$
$$x^2 - 16\,x + 16{,}67 = 0; \text{ woraus } x = 1{,}120 \text{ Meter}$$

folgt.

Zweites Capitel.

Die Biegungs-Elasticität und Festigkeit.

Biegung. Nach §. 208 wird ein stabförmiger Körper (Balken) einer Biegung unterworfen, wenn derselbe durch äußere Kräfte angegriffen wird, welche senkrecht zu seiner Längenaxe gerichtet sind. Es ist dann in irgend einer Schnittebene CC, Fig. 376, zur Herstellung des Gleichgewichts mit den äußeren Kräften nur ein Kräftepaar nöthig, dessen Axe M_b in die Schnittebene CC hineinfällt, d. h. dessen Drehungsebene die Querschnittsebene CC senkrecht durchschneidet. Der einfachste Fall der Biegung tritt ein, wenn ein Körper ABC, Fig. 377, von einer Kraft $AP = P$ ergriffen wird, deren Richtung normal zur Axe AB desselben steht, während er in zwei Punkten B und C festgehalten wird. Sind l und l_1 die Entfernungen CA und CB §. 219.

Fig. 376.

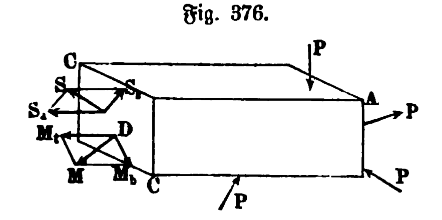
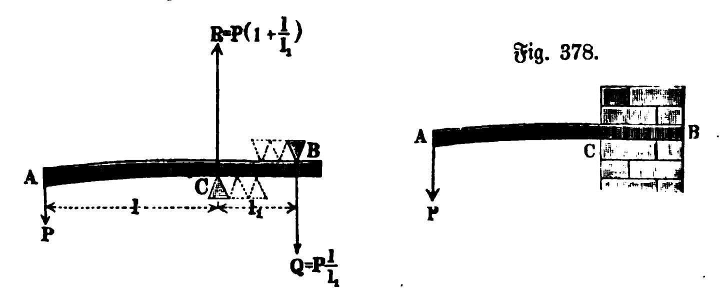


Fig. 377.

Fig. 378.



der Angriffspunkte A und B von dem mittleren Stütz- oder Angriffspunkte C, so hat man die Kraft in B:

$$Q = \frac{Pl}{l_1},$$

und folglich die Mittelkraft:

$$R = P + Q = \left(1 + \frac{l}{l_1}\right) P.$$

Will man die Biegung der einen Hälfte des Körpers verhindern, so muß man zwischen den Stützpunkten noch unendlich viele andere einschalten, oder den Körper längs BC festklemmen oder einmauern, wie Fig. 378 vor Augen führt, und es bleibt dann nur noch die Biegung des freien Stückes AC des Körpers zu untersuchen übrig.

In den folgenden Untersuchungen soll, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt ist, vorausgesetzt werden, daß die den Körper angreifenden äußeren Kräfte sämmtlich in einer Ebene liegen. Diese Voraussetzung entspricht dem in der Praxis am häufigsten vorkommenden Falle, daß die angreifenden Kräfte Schwerkräfte sind. Es möge ferner vorausgesetzt werden, daß die Ebene der angreifenden Kräfte den Balken schneide, und für denselben eine Symmetrieebene sei. Wir denken uns nämlich zunächst den Körper prismatisch, und nehmen an, daß derselbe aus über und neben einanderliegenden Längenfasern zusammengesetzt sei, die während der Biegung weder ihren Parallelismus verlieren, noch sich an einander verschieben.

Bei dieser Biegung werden diejenigen Fasern, welche sich auf der convexen Seite des Körpers befinden, ausgedehnt, und diejenigen, welche der concaven Seite desselben näher liegen, zusammengedrückt, während eine gewisse mittlere Faserschicht weder eine Ausdehnung noch eine Zusammendrückung erleidet. Man nennt diese Faserschicht die neutrale Faserschicht (franz. couche des fibres invariables; engl. neutral surface of a deflected beam), und die gerade Linie, in welcher diese Schicht von der Ebene eines Querschnitts geschnitten wird, heißt die neutrale Axe dieses Querschnitts. Die Ausdehnungen und Zusammendrückungen der verschiedenen Fasern über und unter der neutralen Faserschicht sind den Abständen von dieser Schicht proportional; es nimmt folglich von dieser neutralen Schicht aus nach der einen Seite hin die Ausdehnung der Fasern und nach der anderen Seite hin deren Zusammendrückung allmälig zu, so daß die von dieser Schicht am weitesten abstehenden Fasern einerseits die größte Ausdehnung und andererseits die größte Zusammendrückung erleiden. Ein vor der Biegung von den Querschnitten KL und NO begrenztes Stück des Körpers AKB, Fig. 379, nimmt durch die Biegung die Form $KL\,O_1\,N_1$ an, wobei der Querschnitt NO in $N_1\,O_1$ übergeht, nämlich seine parallele Lage zu KL verläßt und sich wie KL rechtwinkelig auf die neutrale Faser RS stellt. Die Faserlänge KN geht folglich hierbei in KN_1, die Faserlänge LO in LO_1 über; es wird also die erstere um NN_1 verlängert und die letztere um OO_1 verkürzt, während die neutrale Faser RS ihre Länge unverändert behält. Zwischenliegende Fasern wie TU, VW u. s. w. gehen in TU_1 und VW_1 über, wobei sie sich um die Größen UU_1, WW_1 u. s. w. ausdehnen und comprimiren, welche durch die Proportionen

$$\frac{UU_1}{NN_1} = \frac{SU}{SN},$$
$$\frac{WW_1}{OO_1} = \frac{SW}{SO} \text{ u. s. w.}$$

bestimmt sind.

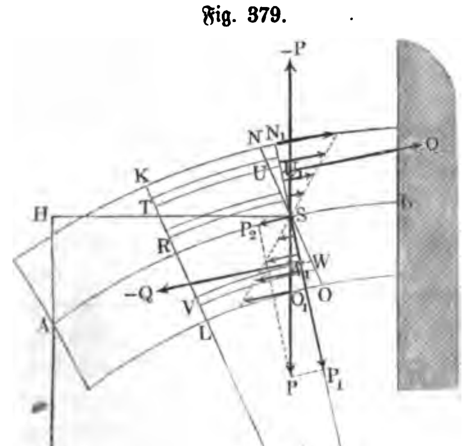
Nehmen wir die Länge der Fasern

$$RS = KN = LO = \text{Eins } (1)$$

an, und bezeichnen wir die Ausdehnung oder Compression derjenigen Fasern, welche um Eins (1) von der neutralen Axe abstehen, durch σ, so haben wir folglich für eine Faser, welche um SU oder $SW = z$ von dieser Axe entfernt ist, die Ausdehnung oder Compression

$$UU_1 \text{ oder } WW_1 = \sigma z.$$

Fig. 379.



Ist der Körper nur wenig gebogen, so daß hierbei die Elasticitätsgrenze nirgends überschritten wird, so kann man die spannenden Kräfte der verschiedenen Fasern ihren Ausdehnungen u. s. w proportional setzen, und folglich auch annehmen, daß diese Kräfte proportional ihren Abständen von der neutralen Axe wachsen, wie auch in der Figur durch Pfeile angedeutet wird.

Wenn der Querschnitt einer Faser $=$ Eins ist, so haben wir folglich allgemein die Spannungskraft derselben (s. §. 210):

$$= \sigma z E;$$

hat ferner eine Faser den Querschnitt $= F$, so beträgt ihre Zug- oder Druckkraft:

$$S = \sigma z F E = \sigma E \,.\, F z,$$

und es ist ihr Moment in Hinsicht auf den Axenpunkt S:

$$M = z \,.\, \sigma z F E = \sigma E \,.\, F z^2.$$

§. 220. **Biegungsmoment.** Die sämmtlichen Zug- und Druckkräfte in einem Querschnitte $N_1 O_1$ halten der Biegungskraft P am Ende A des Körpers AB das Gleichgewicht; es lassen sich daher auf diese Kräfte die bekannten Gesetze des Gleichgewichtes anwenden. Denkt man sich in S noch zwei Kräfte $+ P$ und $- P$ wirksam, welche nicht nur der gegebenen Biegungskraft P gleich, sondern auch mit derselben parallel sind, so erhält man

1) ein Kräftepaar $(P, - P)$, welches die Biegung oder Drehung um S hervorbringt und

2) eine einfache Schubkraft $\overline{SP} = P$, welche das Körperstück AS in der Richtung von SP oder AP von dem übrigen Körper abzuschieben sucht. Die letztere Kraft läßt sich noch in zwei Seitenkräfte P_1 und P_2 zerlegen, deren Richtungen in die Ebene des Querschnittes $N_1 O_1$ und in die neutrale Faser SR fallen. Ist α der Winkel, um welchen der Querschnitt $N_1 O_1$ von der Richtung AP der Biegungskraft abweicht, so hat man:

$$P_1 = P \cos. \alpha \text{ und}$$
$$P_2 = P \sin. \alpha.$$

In den gewöhnlichen Fällen der Anwendung ist die Biegung der Körper und also auch α so klein, daß man $\sin. \alpha = 0$ und $\cos. \alpha = 1$, folglich die Seitenkraft P_2, welche das Stück AS in $N_1 O_1$ abzureißen sucht, ganz vernachlässigen, und dagegen die Kraft P_1, welche das Stück AS in $N_1 O_1$ abzuscheeren sucht, der Biegungskraft P gleichsetzen kann. In den meisten Fällen ist die Wirkung der Schubkraft P im Vergleich mit der biegenden Wirkung des Kräftepaars so klein, daß man den Einfluß derselben ganz vernachlässigen kann. Insbesondere gilt dies von allen längeren Körpern, bei denen das Moment des biegenden Kräftepaars beträchtlich ist. Nur bei sehr kurzen Körpern und überhaupt in der Nähe der Angriffspunkte der äußeren Kräfte, sowie bei gewissen Querschnittsverhältnissen ist eine speciellere Untersuchung erforderlich, um den Einfluß der Schubkraft zu erkennen. Das Nähere ist hierüber in dem nächsten Capitel enthalten. Vorläufig soll hier von der Schubkraft P abstrahirt werden.

Da einem Kräftepaare $(P, - P)$ nur durch ein anderes Kräftepaar das Gleichgewicht gehalten werden kann, so folgt, daß die Ausdehnungskräfte auf der einen Seite von S mit den Zusammendrückungskräften auf der anderen Seite ein anderes Kräftepaar $(Q, - Q)$ bilden, und daß die Momente beider Paare einander gleich sein müssen. Sind F_1, F_2, F_3 u. s. w. Elemente oder unendlich kleine Theile von der ganzen Fläche F des Querschnittes $NO = N_1 O_1$, und bezeichnet man die Abstände dieser Theile von der neutralen Axe oder S durch z_1, z_2, z_3 u. s. w., so hat man die Spannkräfte derselben:

$$\sigma E \,.\, F_1 z_1, \; \sigma E \,.\, F_2 z_2, \; \sigma E \,.\, F_3 z_3 \text{ u. s. w.}$$

und ihre Momente:

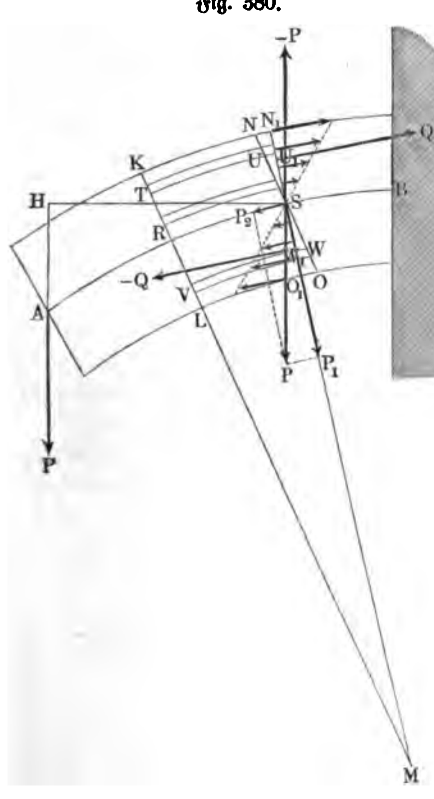
$$\sigma E \,.\, F_1 z_1^2,\ \sigma E \,.\, F_2 z_2^2,\ \sigma E \,.\, F_3 z_3^2 \text{ u. s. w.}$$

Da diese Kräfte ein Kräftepaar (Q, — Q) bilden, so muß ihre Summe

$\sigma E (F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots)$, und folglich auch

$F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots =$ Null sein.

Fig. 380.



Diese Summe ist aber nur dann Null, wenn der Axpunkt S mit dem Schwerpunkte der Fläche $F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots$ zusammenfällt; es geht folglich die **neutrale Axe eines Querschnittes** F **durch dessen Schwerpunkt** S.

Das Moment des Kräftepaares (Q, — Q)

$\sigma E (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 + \cdots)$

ist natürlich dem Momente des Kräftepaares (P, — P) gleich zu setzen. Bezeichnen wir nun den Abstand SH des Schwer- oder Axpunktes S von der Richtung AP der Biegungskraft durch x, so haben wir das Moment des letzteren Paares $= Px$, und daher

$Px = \sigma E (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots)$ zu setzen.

Endlich haben wir noch für den **Krümmungshalbmesser** $MR = MS$ der neutralen Faserschicht die Proportion

$$\frac{MR}{RS} = \frac{SU}{UU_1},$$

oder, wenn man $MR = r$, $RS = 1$, $SU = 1$ und $UU_1 = \sigma$ einsetzt,

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{\sigma}.$$

Es ist folglich $r\sigma = 1$, oder $\sigma = \frac{1}{r}$, demnach das Kraftmoment:

$$Px = \frac{E}{r}(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots),$$

und endlich der Krümmungshalbmesser an der Stelle S:

$$r = \frac{E}{Px}(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots).$$

Der Ausdruck $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ hängt nur von der Form und Größe des Querschnittes ab, und läßt sich daher auf dem Wege der Geometrie ermitteln. Wir werden ihn in der Folge durch W bezeichnen und die ihm entsprechende Größe das Maß des Biegungsmomentes, sowie WE das Biegungsmoment (franz. moment de flexion; engl. momentum of flexion) selbst nennen. Hiernach ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{WE}{Px} = \frac{WE}{M},$$

unter M das Moment der äußeren Kräfte für den Querschnitt verstanden.

Man kann daher behaupten:

der Krümmungshalbmesser der neutralen Axe eines gebogenen Körpers wächst mit dem Maße W des Biegungsmomentes und dem Elasticitätsmodul E direct und dagegen mit dem Kraftmomente M umgekehrt proportional.

Die Krümmung selbst ist dem Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional, und wächst daher wie das Kraftmoment M und umgekehrt wie das Biegungsmoment WE.

Das im Obigen gefundene Resultat, daß die neutrale Axe eines Querschnittes durch den Schwerpunkt desselben geht, beruht wesentlich auf der Annahme, daß die in die neutrale Faserschicht fallende Seitenkraft $P_2 = P \sin. \alpha = 0$, d. h. daß die Biegung des Balkens nur unbedeutend ist. Denn wenn $P \sin. \alpha$ einen merklichen Werth hat, so muß die Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein:

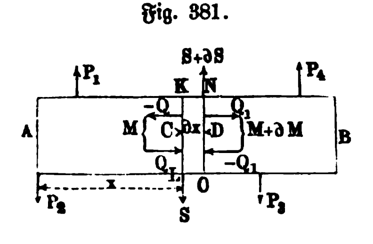
$$\sigma E (F_1 z_1 + F_2 z_2 + F_3 z_3 + \cdots) = P \sin. \alpha = P_2.$$

Bezeichnet man nun mit e die Entfernung des Schwerpunktes von der neutralen Axe des Querschnittes, so kann man nach der bekannten Eigenschaft des Schwerpunktes $(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) = Fe$ setzen, und es wird daher die Gleichung übergehen in $\sigma EFe = P_2$; oder für E den Werth $E = \frac{rM}{W}$ eingesetzt, so folgt $\frac{\sigma r M . Fe}{W} = P_2$; oder, da $\sigma r = 1$, folgt $e = \frac{P_2 W}{M . F}$. Dieser Ausdruck kann bei einer geringen Größe von M sehr beträchtlich werden, und wird sogar unendlich groß, wenn $M = 0$ ist. Es ist indessen nicht nöthig, dieses Verhalten näher zu be-

rücksichtigen, da die nähere Kenntniß von σ in den Querschnitten, für welche M sehr klein ist, ohne praktische Bedeutung ist.

Es sei AB, Fig. 381, ein durch beliebige Kräfte $P_1 P_2 P_3 \cdots$ auf Biegung beanspruchter Balken. Legt man durch C im Abstande x vom freien Ende A einen zur Axe AB des Balkens senkrechten Querschnitt KL, so kann man das Balkenstück AC ganz beseitigen, wenn man dasselbe durch die von ihm auf den Querschnitt KL ausgeübten inneren Kräfte ersetzt. Diese inneren Kräfte bestehen nach dem Vorigen aus einer in die Schnittebene KL fallenden Schubkraft S und einem Kräftepaar $(Q, -Q)$, dessen Moment M gleich dem Momente der äußeren Kräfte in Bezug auf den Punkt C ist. Denkt man sich durch D in dem unendlich kleinen Abstande ∂x von C einen zweiten Schnitt gelegt, so kann man in gleicher Weise das Balkenstück DB ersetzen durch eine Schubkraft und ein Kräftepaar. Wenn man voraussetzt, daß zwischen KL und NO nicht eine äußere Kraft ihren Angriffspunkt hat, daß also zwischen den beiden Querschnitten keine Stetigkeitsunterbrechung der Belastung stattfindet, so wird die in NO wirksame Schubkraft einen Werth haben, welcher von dem Werthe S der Schubkraft in KL um eine sehr kleine Größe abweicht, die mit ∂S bezeichnet werde. Gleiches läßt sich von der Größe des Momentes behaupten, welches dem auf die Ebene NO wirkenden Kräftepaare $(Q_1, -Q_1)$ zugehört. Es möge dieses Moment durch $M + \partial M$ bezeichnet werden. Das aus dem Balken herausgeschnittene Stück $KLON$ steht demnach unter dem Einflusse von zwei Schubkräften S und $S + \partial S$; und von zwei entgegengesetzt drehenden Kräftepaaren, deren Momente M und $M + \partial M$. Alle diese Kräfte müssen sich im Gleichgewichte halten und es muß daher, wenn man den Punkt D als Mittelpunkt der statischen Momente auffaßt, die Gleichung erfüllt sein:

Fig. 381.



$$M + \partial M - M - S\partial x = 0; \text{ oder}$$

$$\partial M = S \partial x; \qquad S = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Diese interessante Gleichung besagt also, daß in einem durch ganz beliebige biegende Kräfte beanspruchten Balken, die in irgend einem Querschnitte wirkende Schubkraft S das Maß abgiebt für die Geschwindigkeit, mit welcher zwischen diesem und dem unmittelbar daranstoßenden Querschnitte das Moment M der äußeren Kräfte, also auch das ihm gleiche Moment der inneren Spannungen sich ändert. Man kann diese Beziehung benutzen, um in speciellen Fällen diejenigen Stellen des Balkens, d. h. diejenigen Werthe

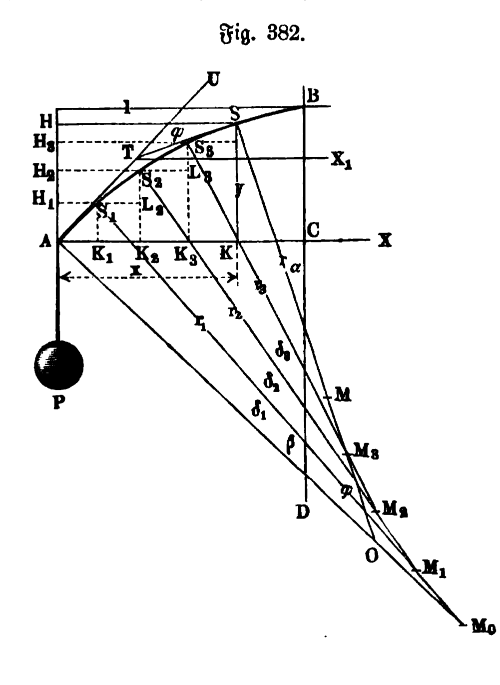
von x aufzufinden, für welche das Moment M ein Maximum wird, da die Kenntniß gerade dieser Stellen in der Praxis von besonderer Wichtigkeit ist. Dazu hat man nämlich nur nöthig (vergl. analyt. Hülfslehren §. 13) den Werth von S oder $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$ zu setzen, d. h. dasjenige x aufzusuchen, für welches $S = 0$ ausfällt. Diesem Punkte entspricht dann entweder ein Maximum oder ein Minimum von M, je nachdem für den betrachteten Querschnitt der Werth von $\frac{\partial S}{\partial x}$ negativ oder positiv ausfällt.

§. 221. **Elastische Linie.** Hat man für die Querschnitte der gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Körper die Biegungsmomente WE bestimmt, so kann man durch dieselben auch die Krümmung und hieraus wieder die Gestalt der neutralen Faserschicht, oder der sogenannten elastischen Linie ermitteln, d. h. der Linie, in welcher die neutrale Faserschicht von der Kraftebene geschnitten wird. Die Gleichung

$$Mr = Pxr = WE \text{ oder } r = \frac{WE}{Px} = \frac{WE}{M}$$

sagt uns, daß bei einem prismatischen Körper das Product aus Krümmungshalbmesser und Kraftmoment für alle Punkte der elastischen Linie AB, Fig. 382, eins und dasselbe ist, daß folglich r um so größer oder kleiner ausfällt, je kleiner oder größer der Hebelarm x der Kraft ist, oder je näher oder entfernter der in Betrachtung zu ziehende Punkt S dem Ende A der neutralen Faser liegt. In A ist $x = 0$, und folglich der Krümmungshalbmesser r unendlich groß, im festen Punkte B ist dagegen x am größten und daher der Krümmungshalbmesser am kleinsten; es nimmt also derselbe, wenn man vom festen Punkte B

Fig. 382.



allmälig nach dem Endpunkte A zu fortschreitet, von einem gewissen endlichen Werthe an, nach und nach bis ins Unendliche zu.

Theilt man ein Stück AS der elastischen Linie, dessen Länge $= s$ sein möge, in lauter gleiche Theile, und errichtet man in den End- und Theilpunkten A, S_1, S_2, S_3 u. s. w. Perpendikel auf die Curve, so schneiden sich dieselben in den Mittelpunkten M_0, M_1, M_2 der Krümmungskreise, und es sind folglich die Abschnitte $M_0 A = M_0 S_1$, $M_1 S_1 = M_1 S_2$, $M_2 S_2 = M_2 S_3$ u. s. w. die gesuchten Krümmungshalbmesser (s. analyt. Hülfslehren §. 33) r_1, r_2, r_3 u. s. w. der elastischen Linie. Ist n die Anzahl der Theile dieser Linie, so hat man die Größe eines Theiles, $= \frac{s}{n}$, und bezeichnet man die Bogenmaße (für den Radius $= 1$) der Krümmungswinkel $A M_0 S_1 = \delta_1^0$, $S_1 M_1 S_2 = \delta_2^0$, $S_2 M_2 S_3 = \delta_3^0$ u. s. w. durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ u. s. w. schlechtweg, so läßt sich $\frac{s}{n} = \delta_1 r_1 = \delta_2 r_2 = \delta_3 r_3$ u. s. w. setzen, wonach sich nun $\delta_1 = \frac{s}{n r_1}$, $\delta_2 = \frac{s}{n r_2}$, $\delta_3 = \frac{s}{n r_3}$ u. s. w. bestimmt.

Wenn wir noch voraussetzen, daß die elastische Linie nur wenig gebogen ist, so können wir die Projectionen der Bogentheile in der rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung gelegten Abscissenaxe AX diesen Bogentheilen gleich, also $AK_1 = H_1 S_1 = K_1 K_2 = K_2 K_3$ u. s. w. setzen, so daß nun die Hebelarme der Kraft P in Hinsicht auf die Punkte S_1, S_2, S_3 u. s. w.

$$H_1 S_1 = \frac{s}{n},$$

$$H_2 S_2 = H_1 S_1 + S_1 L_2 = 2 \frac{s}{n},$$

$$H_3 S_3 = H_2 S_2 + S_2 L_3 = 3 \frac{s}{n} \text{ u. s. w.}$$

und folglich die entsprechenden Kraftmomente oder Werthe für Px folgende sind:

$$\frac{Ps}{n}, \frac{2Ps}{n}, \frac{3Ps}{n} \text{ u. s. w.}$$

Setzt man endlich diese Werthe in die obige Formel $r = \frac{WE}{Px}$ für den Krümmungshalbmesser, statt Px nach und nach ein, so erhält man folgende Reihe für die Krümmungshalbmesser:

$$r_1 = n \frac{WE}{Ps}, r_2 = \frac{n}{2} \frac{WE}{Ps}, r_3 = \frac{n}{3} \frac{WE}{Ps} \text{ u. s. w.,}$$

und daher für die entsprechenden Krümmungsmaße:

$$\delta_1 = \frac{s}{n r_1} = \frac{P s^2}{n^2 W E},\ \delta_2 = \frac{s}{n r_2} = 2 \cdot \frac{P s^2}{n^2 W E},$$

$$\delta_3 = \frac{s}{n r_3} = 3 \cdot \frac{P s^2}{n^2 W E} \text{ u. s. w.}$$

Durch Summation dieser Winkelmaße ergiebt sich nun für den Krümmungswinkel $A O S = \varphi$ des ganzen Bogens $A S = s = x$:

$$\varphi = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots + \delta_n$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n) \frac{P s^2}{n^2 W E},$$

oder, da, wie bekannt, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n^2}{2}$ zu setzen ist,

$$\varphi = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{P s^2}{n^2 W E} = \frac{P s^2}{2 W E},$$

wofür unter der gemachten Voraussetzung natürlich auch

$$\varphi = \frac{P x^2}{2 W E} \text{ gesetzt werden kann.}$$

Dieser Bogen oder Winkel drückt, da der Winkel zwischen zwei Linien gleich ist dem Winkel zwischen den Normalen zu diesen Linien, auch den Winkel $S T U$ aus, um welchen die durch A und S gelegten Berührungslinien $A T$ und $S T$ von einander abweichen, oder um welchen die Curve in A mehr gegen die Abscissenaxe geneigt ist als in S.

Fig. 383.

Gehen wir von einem unbestimmten Punkte S auf den festen Endpunkt B über, so haben wir statt s die ganze Länge l von $A S B$, oder annähernd, die Projection $A C$ derselben in der Abscissenaxe einzusetzen, und es geht dann, unter der Voraussetzung, daß in B die Curve

rechtwinkelig zur Kraftrichtung, also mit der Abscissenaxe parallel läuft, der Winkel φ in

$$ADB = \beta = \frac{Pl^2}{2\,WE},$$

dagegen aber der Neigungs- oder Tangentenwinkel $TSH = STX_1$ in

$$\alpha = \beta - \varphi = \frac{Pl^2}{2\,WE} - \frac{Ps^2}{2\,WE} = \frac{P(l^2 - s^2)}{2\,WE} = \frac{P(l^2 - x^2)}{2\,WE} \text{ über.}$$

Wäre die Curve im festen Punkte B nicht genau rechtwinkelig auf der Kraftrichtung, sondern hätte sie an dieser Stelle einen kleinen Neigungswinkel α_1, so würde sein:

$$\beta = \alpha_1 + \frac{Pl^2}{2\,WE} \text{ und daher:}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,WE}.$$

Gleichung der elastischen Linie. Mit Hülfe der letzten Formel kann man nun auch die Gleichung der elastischen Linie entwickeln. Die Ordinate $KS = y$ dieser Curve läßt sich aus unendlich vielen (n) Stücken, wie z. B. $K_1\,S_1$, $L_2\,S_2$, $L_3\,S_3$ u. s. w. zusammensetzen, welche sich durch Multiplication eines Bogenelementes §. 222.

$$A\,S_1 = S_1\,S_2 = S_2\,S_3 \text{ ꝛc.} = \frac{s}{n}$$

mit den Sinus der entsprechenden Tangentenwinkel $S_1\,A\,K_1$, $S_2\,S_1\,L_2$, $S_3\,S_2\,L_3$ u. s. w. bestimmen lassen. Es ist

$$KS = K_1\,S_1 + L_2\,S_2 + L_3\,S_3 + \cdots, \text{ oder}$$

$$y = \frac{s}{n}\,(\sin.\,S_1\,AK + \sin.\,S_2\,S_1\,L_2 + \sin.\,S_3\,S_2\,L_3 + \cdots),$$

also, wenn man die Abscisse $AK = x$ statt des Bogens $AS = s$ einführt, und die letzten Sinus durch nach der Formel

$$\alpha = \frac{P\,(l^2 - x^2)}{2\,WE}$$

zu berechnende Bögen ersetzt, indem man für x nach und nach $\frac{x}{n}$, $\frac{2\,x}{n}$, $\frac{3\,x}{n}$ u. s. w. einführt.

$$y = \frac{x}{n} \cdot \frac{P}{2\,WE}\left[l^2 - \left(\frac{x}{n}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + l^2 - \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + l^2 - \left(\frac{nx}{n}\right)^2\right].$$

Nun läßt sich aber $l^2 + l^2 + \cdots + l^2 = n l^2$ und

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \left(\frac{3x}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nx}{n}\right)^2$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\left(\frac{x}{n}\right)^2 = \frac{n^3}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^2$$

setzen (s. „Ingenieur", Seite 88); es folgt daher:

$$y = \frac{x}{n} \cdot \frac{P}{2\,WE}\left[n l^2 - \frac{n^3}{3}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right], \text{ oder}$$
$$y = \frac{Px\,(l^2 - {}^1/_3\,x^2)}{2\,WE},$$

die gesuchte Gleichung der elastischen Linie, unter der Voraussetzung, daß dieselbe nur wenig gekrümmt ist.

Setzt man in dieser Gleichung $x = l$, so erhält man statt y die Bogenhöhe

$$\overline{BC} = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

Während also der Tangentenwinkel α wie die Kraft und wie das Quadrat der Länge wächst, nimmt die Bogenhöhe oder Einbiegung a wie die Kraft und wie der Cubus der Länge des gebogenen Körpers zu.

Wenn die elastische Linie AB im festen Punkte B schon eine kleine Neigung α_1 hat, so ist zum obigen Ausdrucke für y noch die Verticalprojection eines Tangentenstückes x, d. i. $\alpha_1 x$ zu addiren, so daß sich dann die Ordinate

$$y = \left(\alpha_1 + \frac{P\,(l^2 - {}^1/_3\,x^2)}{2\,WE}\right) x;$$

sowie die Bogenhöhe

$$a = \left(\alpha_1 + \frac{Pl^2}{3\,WE}\right) l$$

herausstellt.

Die mechanische Arbeit L, welche zum Biegen des Körpers aufzuwenden ist, bestimmt sich, da die Kraft

$$P = \frac{3\,WEa}{l^3}$$

mit ihrem Wege gleichmäßig wächst, sich also im Mittel

$${}^1/_2\,P = {}^3/_2\,\frac{WEa}{l^3} \text{ setzen läßt, durch den Ausdruck:}$$

$$L = {}^1/_2\,Pa = {}^3/_2\,\frac{WEa^2}{l^3} = {}^1/_6\,\frac{P^2 l^3}{WE}.$$

Allgemeinere Gleichung der elastischen Linie. Die im Vorhergehenden entwickelte Gleichung der elastischen Linie hat nur für den daselbst betrachteten speciellen Fall Gültigkeit. Zu einer ganz allgemeinen für jede beliebige Belastungsweise sowie für jede Befestigungs- oder Unterstützungsart gültigen Gleichung gelangt man mit Hülfe der in §. 220 gefundenen Beziehung §. 223.

$$r = \frac{WE}{M},$$

worin r den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie und M das statische Moment aller auf das betrachtete Balkenstück einwirkenden äußeren Kräfte für den betreffenden Querschnitt bedeuten. Zu diesen äußeren Kräften gehören nicht nur die Belastungen und das Eigengewicht der Construction, sondern auch die von den Stützpunkten gegen den Balken ausgeübten Auflagerreactionen. Man hat sich nämlich bei der Betrachtung eines Balkenstückes, welches man in mehrerwähnter Art von dem Balken durch einen Schnitt getrennt denkt, dasselbe ganz frei von den Auflagern zu denken, indem man die letzteren durch ihre Reactionen ersetzt.

Denkt man sich die elastische Linie auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen, dessen Axen in der Folge horizontal (X Axe) und vertical (Y Axe) angenommen werden mögen, und sei die elastische Linie durch die Gleichung

$y = f(x)$ ausgedrückt.

Die Function $f(x)$ ist vorläufig noch unbekannt, und von der jeweiligen Belastungs- und Unterstützungsart des Balkens abhängig, daher in jedem Falle besonders zu ermitteln. Bezeichnet nun α den Winkel, welchen die elastische Linie in einem beliebigen Punkte, dessen Ordinaten x und y sind, mit der X Axe bildet, so ist (§. 33 analytische Hülfslehren)

$$r = -\frac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial (tang.\,\alpha)},$$

und wenn man hierin nach §. 32

$$\partial s = \sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2}\,.\,\partial x \text{ einsetzt,}$$

so wird

$$r = \frac{[\sqrt{1 + (tang.\,\alpha)^2}]^3\,\partial x^3}{\partial x^2\,\partial (tang.\,\alpha)} = \frac{[1 + (tang.\,\alpha)^2]^{3/2}}{\partial (tang.\,\alpha)}\,\partial x.$$

Nun ist $tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$; daher auch

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\,\partial x = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Da nun die Biegung des Balkens immer nur eine geringe ist, also $tang. \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ auch nur einen kleinen Werth annehmen kann, so darf man ohne beträchtlichen Fehler $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ gegen 1 im Zähler vernachlässigen und man erhält sodann die Gleichung

$$r = \frac{1}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}; \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Dies eingesetzt in $\frac{WE}{r} = M$, liefert für die elastische Linie die Gleichung:

$$WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M.$$

Diese für die Praxis hinreichend genaue Gleichung gilt ganz allgemein für gebogene Balken, und giebt bei zweimaliger Integration in jedem besonderen Falle über die Biegungsverhältnisse Aufklärung. Ein einfaches Beispiel möge dies erläutern.

Sei AB, Fig. 384, ein Balken von der Länge l, welcher auf zwei Stützen A und B ruht, und eine gleichmäßig über seine ganze Länge ausgebreitete Last trägt, welche per Längeneinheit p betrage. Die Gesammtlast ist dann gleich lp, wovon jede Stütze die Hälfte mit $A = B = \frac{lp}{2}$ zu tragen hat. Nimmt man A als Coordinatenanfang an, so gilt für das Stück AC von der Länge x die Gleichung:

Fig. 384.

$$WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Ax - px \cdot \frac{x}{2} = \frac{lp}{2} x - p \frac{x^2}{2}.$$

Durch Integration wird:

$$WE \frac{\partial y}{\partial x} = lp \frac{x^2}{4} - p \frac{x^3}{6} + Const.$$

Zur Bestimmung der Constanten hat man für $x = \frac{l}{2}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; d. i. die elastische Linie muß in der Mitte eine horizontale Tangente haben, also

$$WE \, . \, 0 = \frac{lp}{4} \left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{p}{6} \left(\frac{l}{2}\right)^3 + Const.; \text{ also}$$

$$Const. = p \frac{l^3}{48} - p \frac{l^3}{16} = - p \frac{l^3}{24}, \text{ folglich}$$

$$WE\frac{\partial y}{\partial x} = pl\frac{x^2}{4} - p\frac{x^3}{6} - p\frac{l^3}{24}.$$

Durch abermalige Integration wird:

$$WEy = pl\frac{x^3}{4\,.\,3} - p\frac{x^4}{6\,.\,4} - p\frac{l^3}{24}x + Const.$$

Die Constante ist hier $= 0$, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muß. Die Gleichung der elastischen Linie ist daher:

$$y = \frac{p}{WE}\left(\frac{lx^3}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{l^3x}{24}\right) = \frac{p}{12\,WE}\left(lx^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{l^3x}{2}\right),$$

und die größte Durchbiegung in der Mitte, für $x = \frac{l}{2}$ beträgt:

$$a = \frac{p}{12\,WE}\left(\frac{l^4}{8} - \frac{l^4}{32} - \frac{l^4}{4}\right) = -\frac{p}{12\,WE}\cdot\frac{5\,l^4}{32}.$$

Wenn wie bisher angenommen wurde, auf den an einem Ende festgeklemmten Balken nur eine Kraft am freien Ende, oder auf den beiderseits auf Stützen ruhenden Balken eine gleichmäßig vertheilte Last wirkt, so bildet die elastische Linie eine stetig verlaufende Curve. Es entstehen in derselben aber Stetigkeitsunterbrechungen, wenn in der Belastung solche vorhanden sind, d. h. wenn in einzelnen Punkten concentrirte Belastungen angreifen, oder die gleichförmig vertheilten Belastungen ihren Betrag pro Längeneinheit in gewissen Punkten plötzlich um meßbare Größen verändern. Solche Stetigkeitsunterbrechungen der elastischen Linie erheischen für jede einzelne Strecke derselben, innerhalb welcher eine solche Unterbrechung nicht stattfindet, eine besondere Untersuchung und die Ermittelung einer besonderen Gleichung für jede solche Strecke. Wenn eine über eine gewisse Länge vertheilte Belastung nicht plötzlich in einzelnen Punkten, sondern nach einem bestimmten Gesetze allmälig veränderlich ist, so ist hiermit keine Stetigkeitsunterbrechung verbunden, und diese Strecke ist, so lange das Belastungsgesetz sich nicht ändert, durch eine einzige Gleichung dargestellt.

Da die einzelnen Stützen durch äußere Kräfte, nämlich durch die Auflagerreactionen dargestellt werden, so treten bei einer größeren Zahl von Stützen ebenfalls Stetigkeitsunterbrechungen auf, und es sind für die zwischen zwei benachbarten Stützpunkten gelegenen Strecken besondere Gleichungen gültig. Hier ist die Untersuchung der elastischen Linie von besonderer Wichtigkeit für die Bestimmung der einzelnen Auflagerdrucke selbst.

So lange ein Balken auf nicht mehr als zwei Stützen A und B ruht, ist der Druck, welchen eine Kraft P, deren Abstände von A und B bezüglich durch a und b bezeichnet seien, auf jede Stütze ausübt, von vornherein bekannt. Nach den Gesetzen des Gleichgewichtes paralleler Kräfte ist dann immer, unter A und B die Drucke in diesen Punkten selbst verstanden:

$$A = \frac{Pb}{a+b}; \quad B = \frac{Pa}{a+b}.$$

Dies gilt ebenso auch für beliebig viele Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$, deren Abstände $a_1, a_2, a_3 \ldots$ resp. $b_1, b_2, b_3 \ldots$ sind, so daß man immer hat:

$$A = \sum \frac{Pb}{a+b}; \quad B = \sum \frac{Pa}{a+b}.$$

Sobald aber der Balken auf mehr als zwei Stützen ruht, ist man mit Hülfe der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr im Stande, die Drucke in den Stützen zu berechnen; indem diese Gleichgewichtsbedingungen sich hier auf die beiden reduciren, daß die Summe aller verticalen Kräfte gleich Null, und daß das Moment derselben für irgend einen Punkt ebenfalls gleich Null sein muß, aus diesen beiden Gleichungen daher auch nur zwei Unbekannte ermittelt werden können. In diesen Fällen dient gerade die Gleichung der elastischen Linie dazu, die einzelnen Auflagerreactionen zu bestimmen.

Denkt man sich beispielsweise einen Balken auf drei Stützen A, B, C ruhend, so sind außer den Drucken A, B, C auch die Winkel α, β, γ zuvörderst unbekannt, unter welchen die elastische Linie in den Stützpunkten gegen den Horizont geneigt ist. Wenn man nun für die beiden Strecken AB und BC die Differentialgleichungen $\left(WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M\right)$ aufstellt, und jede zweimal integrirt, so treten zu jenen sechs unbekannten Größen noch vier Integrationsconstanten hinzu, die ebenfalls noch nicht bekannt sind, also im Ganzen hat man zehn Unbekannte. [Bei n Stützen $2n + 2(n-1) = 4n - 2$.] Zur Bestimmung dieser zehn Unbekannten erhält man nun außer den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen noch dadurch acht weitere Gleichungen, daß die beiden Gleichungen für $\frac{\partial y}{\partial x}$ und für y, welche für eine Strecke gelten, den Bedingungen genügen müssen, daß für die beiden begrenzenden Stützpunkte $\frac{\partial y}{\partial x}$ gleich der Tangente des Neigungswinkels der elastischen Linie daselbst (α, β, γ) und $y = 0$ sein muß, da die elastische Linie durch diese Punkte hindurchgeht. Für die beiden Strecken erhält man auf diese Weise $2 \cdot 4 = 8$ Bedingungsgleichungen [bei n Stützen $4(n-1)$], welche mit den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zusammen genügend sind zur Bestimmung der zehn Unbekannten.

Hierdurch ist allgemein erwiesen, daß für eine ganz beliebige Anzahl von Stützpunkten die Auflagerdrucke mit Hülfe der elastischen Linie immer bestimmt werden können, wie dies in dem Folgenden mehrfach ausgeführt ist.

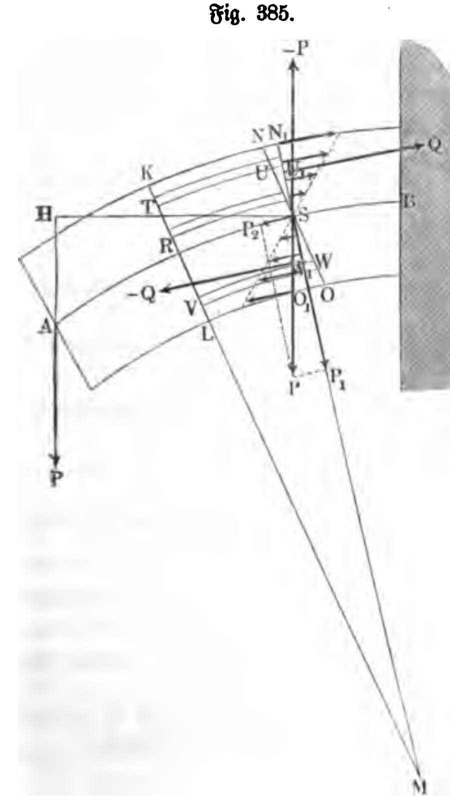
Aus der allgemeinen Gleichung

$$\frac{WE}{M} = r$$

ergiebt sich ohne Weiteres, daß r constant ausfällt, d. h. daß die elastische Linie ein Kreisbogen wird, sobald $\frac{W}{M}$ constant ist, d. h. wenn das Biegungsmoment für die verschiedenen Querschnitte in demselben Verhältnisse sich ändert, wie das Moment der äußeren Kräfte.

Biegungsfestigkeit. Kennt man das Biegungsmoment WE der einzelnen Querschnitte eines auf Biegung beanspruchten Körpers, so kann man, vorausgesetzt, daß die Belastungen ebenfalls bekannt sind, auch die Spannungen in jedem Querschnitte des Körpers berechnen. Bezeichnet z. B. S die Spannung pro Quadratmillimeter in einer Entfernung $SN = e$ von der neutralen Axe S, Fig. 385, so sind die Spannungen in den Abständen $z_1, z_2, z_3 \cdots$, von der Größe §. 224.

Fig. 385.



$$S_1 = \frac{z_1}{e} S;$$

$$S_2 = \frac{z_2}{e} S;$$

$$S_3 = \frac{z_3}{e} S \ldots,$$

und für die Querschnittselemente $F_1, F_2 \ldots$, die Momente der Spannungen:

$$M_1 = F_1 S_1 z_1 = F_1 z_1^2 \cdot \frac{S}{e};\; M_2 = F_2 z_2^2 \cdot \frac{S}{e};\; M_3 = F_3 z_3^2 \cdot \frac{S}{e} \cdots,$$

und es folgt die Summe der Momente der sämmtlichen Spannungen im Querschnitte NO:

$$M = M_1 + M_2 + \cdots = (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots)\frac{S}{e} = \frac{WS}{e}.$$

Ist nun x der Abstand SH des Querschnittes NO vom Angriffspunkte A der Kraft P, so hat man auch $M = Px$, und es folgt daher

$$1)\ Px = \frac{WS}{e},\ \text{oder}\ Pxe = WS,$$

sowie die Spannung des Körpers in dem Abstande e von der neutralen Axe,

$$2)\ S = \frac{Me}{W} = \frac{Pxe}{W}.$$

Dieselbe wächst mit x gleichmäßig und ist daher für $x = l$, d. i. im Befestigungspunkte B am größten. Ebenso nimmt sie auch mit e gleichmäßig zu, und ist daher an der Stelle am größten, welche von der neutralen Axe am meisten absteht. Damit der Körper an keiner Stelle über die Elasticitätsgrenze hinaus gespannt werde, darf die Maximalspannung S höchstens den Tragmodul T erreichen, ist folglich

$$S = T = \frac{Ple}{W},\ \text{oder}$$

$$Pl = \frac{WT}{e}$$

zu setzen, wonach also die Tragkraft des Balkens $AKOB$:

$$P = \frac{WT}{le}\ \text{folgt.}$$

Ebenso erhält man auch die Kraft zum Abbrechen des Körpers in B:

$$P_1 = \frac{WK}{le},$$

wobei man für K einen, allerdings durch Zerbrechungsversuche besonders zu bestimmenden Festigkeitsmodul einzusetzen hat.

Es läßt sich die Grundformel $Px = \frac{WS}{e}$ auch aus oben (§. 220) gefundener Grundformel $Px = \frac{WE}{r}$, wie folgt, unmittelbar ableiten. Wenn man die von der Spannung S hervorgebrachte Ausdehnung NN_1 durch σ bezeichnet, so ist auch $S = \sigma E$, und wenn man in der Proportion

$$\frac{NN_1}{SN} = \frac{RS}{MR},$$

$\overline{NN_1} = \sigma$, $\overline{SN} = e$, $\overline{RS} = 1$, und $\overline{MR} = r$, den Krümmungshalbmesser einführt, also $\frac{\sigma}{e} = \frac{1}{r}$ oder $\sigma = \frac{e}{r}$ setzt, so folgt

$$S = \frac{e}{r} E, \text{ oder } \frac{S}{e} = \frac{E}{r}, \text{ und daher auch}$$

$$Px = \frac{WE}{r} = \frac{WS}{e}.$$

Setzen wir in der Formel $L = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{WE}$ (§. 222) für die mechanische Arbeit zum Biegen des Körpers AKB, das Moment $Pl = \frac{TW}{e}$ und den Tragmodul $T = \sigma E$ ein, so erhalten wir

$$L = \frac{1}{6} \frac{T^2 W^2}{e^2} \cdot \frac{l}{WE} = \frac{1}{2} \sigma^2 E \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Nun ist aber (nach §. 212) $\frac{1}{2} \sigma^2 E$ der Arbeitsmodul A der Elasticität, daher folgt die mechanische Arbeit, durch welche der Körper bis zur Elasticitätsgrenze gebogen wird,

$$L = A \frac{Wl}{3 e^2}.$$

Für die Arbeit zum Abbrechen ist ebenso

$$L_1 = B \frac{Wl}{3 e^2}$$

zu setzen, wenn B den Arbeitsmodel des Abbrechens bezeichnet.

Biegungsmomente. Aus den vorhergehenden Entwickelungen ergiebt §. **225.** sich, daß die Biegung sowohl wie die relative Festigkeit der Körper wesentlich von der Größe W abhängig ist, welche Größe lediglich aus den Abmessungen des Querschnittes des Körpers sich bestimmt. Wir hatten die Größe W, d. h. die Summe der Producte aus den einzelnen Elementen des Querschnitts in die Quadrate der Entfernungen derselben von der neutralen Axe das Maß*) des Biegungsmomentes des Körpers genannt. Es war dabei eine prismatische Körpergestalt vorausgesetzt, weil man sonst, wenn die Querschnitte nicht in allen Punkten übereinstimmen, genau nur von dem Biegungsmomente des Körpers in einem bestimmten Querschnitte sprechen muß.

Ehe die Untersuchung der einzelnen Fälle der Biegungsfestigkeit weiter fortgeführt wird, mögen die Biegungsmomente für Körper von verschiedenen häufiger vorkommenden Querschnitten ermittelt werden. Für diese Ermittelung ist zunächst die Kenntniß einiger allgemeinerer Beziehungen zwischen den Biegungsmomenten der Körper von Vortheil.

*) Die Analogie zwischen diesem Werthe und dem Trägheitsmomente von plattenförmigen Körpern hat viele Autoren veranlaßt, dieser Größe den Namen des Trägheitsmomentes des Querschnittes beizulegen (s. „Trägheitsmomente").

Kennt man das Biegungsmoment $W_1 E$ eines Körpers ACD, Fig. 386, in Beziehung auf eine Axe $N_1 N_1$ außerhalb des Schwerpunktes des Querschnittes, so läßt sich leicht auch das Biegungsmoment in Beziehung auf eine andere durch den Schwerpunkt S gehende Axe NN finden, welche mit der ersteren parallel läuft. Ist der Abstand $HH_1 = KK_1$ zwischen beiden Axen $= d$, und sind die Abstände der Flächenelemente F_1, F_2 u. s. w. von der neutralen Axe $NN = z_1, z_2$ u. s. w., so hat man die Abstände von der Axe $N_1 N_1 = d + z_1, d + z_2$ u. s. w., und es ist nun das Biegungsmoment:

Fig. 386.

$$W_1 E = [F_1 (d + z_1)^2 + F_2 (d + z_2)^2 + \cdots] E$$
$$= [F_1 (d^2 + 2dz_1 + z_1^2) + F_2 (d^2 + 2dz_2 + z_2^2) + \cdots] E$$
$$= [d^2 (F_1 + F_2 + \cdots) + 2d (F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) + (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots)] E.$$

Nun ist aber

$$F_1 + F_2 + \cdots$$

als Summe aller Elemente gleich dem Querschnitte F, ferner

$$F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots = 0$$

als Summe der statischen Momente in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe, und

$$(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 \cdots) E$$

das Biegungsmoment WE in Beziehung auf die neutrale Axe NN. Es folgt daher:

$$W_1 E = (W + Fd^2) E,$$

oder:

$$W_1 = W + Fd^2,$$

und umgekehrt:

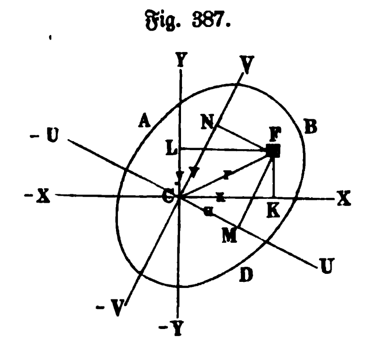
$$W = W_1 - Fd^2.$$

Es ist also das Maß W des Biegungsmomentes in Beziehung auf die neutrale Axe gleich dem Maße W_1 des Biegungsmomentes in Beziehung auf eine zweite Parallelaxe, vermindert um das Product aus dem Querschnitt F und dem Quadrat des Abstandes beider Axen. Auch folgt hieraus, daß unter allen Biegungsmomenten das in Hinsicht auf die neutrale Axe am kleinsten ist.

Von vielen Körpern lassen sich die Biegungsmomente in Hinsicht auf irgend eine Axe leicht finden, man kann daher diese dazu benutzen, um mittelst der gefundenen Formel die Momente in Hinsicht auf die neutrale Axe zu bestimmen.

Sind $CK = x$ und $CL = y$, Fig. 387, die Coordinaten eines Punktes F in Hinsicht auf ein rechtwinkeliges Axenkreuz $\overline{X}X$, $\overline{Y}Y$; sind ebenso $CM = u$ und $CN = v$ die Coordinaten dieses Punktes auf ein anderes rechtwinkeliges Axenkreuz $\overline{U}U$, $\overline{V}V$, und ist endlich $CF = r$ der Abstand des gedachten Punktes F von dem gemeinschaftlichen Nullpunkte C beider Axensysteme, so gelten, dem Pythagoreischen Lehrsatze zufolge, die Gleichungen: §. 226.

Fig. 387.



$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = r^2,$$

und es ist also auch

$$Fx^2 + Fy^2 = Fu^2 + Fv^2 = Fr^2.$$

Setzen wir nun in diesen Gleichungen statt F nach und nach die Elemente F_1, F_2, F_3 u. s. w. des ganzen Querschnittes ABD, und ebenso statt x, y, u und v die entsprechenden Coordinaten x_1, x_2, x_3 u. s. w., y_1, y_2, y_3 u. s. w., sowie $u_1, u_2 \cdots$ und $v_1, v_2 \cdots$ ein, so erhalten wir durch Addition folgende Gleichungen:

$$F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots + F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \cdots$$
$$= F_1 u_1^2 + F_2 u_2^2 + \cdots + F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2 + \cdots$$
$$= F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \cdots,$$

oder, wenn wir

$$F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(Fx^2),$$

ferner

$$F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(Fy^2),$$

sowie

$$F_1 u_1^2 + F_2 u_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(Fu^2),$$
$$F_1 v_1^2 + F_2 v_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(Fv^2),$$

und

$$F_1 r_1^2 + F_2 r_2^2 + \cdots \text{ durch } \Sigma\,(Fr^2)$$

bezeichnen,

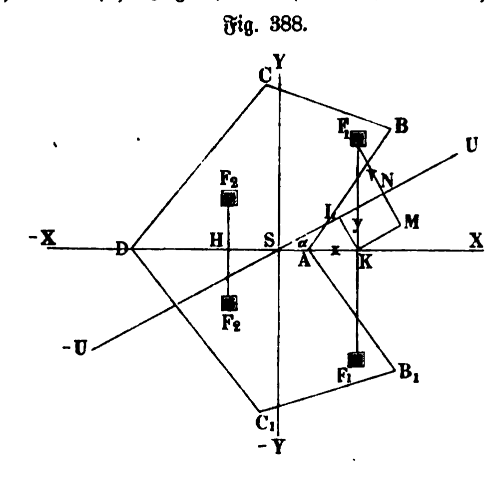
$$\Sigma\,(Fx^2) + \Sigma\,(Fy^2) = \Sigma\,(Fu^2) + \Sigma\,(Fv^2) = \Sigma\,(Fr^2).$$

Es ist hiernach die Summe der Maße der Biegungsmomente, in Hinsicht auf beide Axen XX und YY eines rechtwinkeligen Axensystems gleich der Summe der Maße der Biegungsmomente in Hinsicht auf beide Axen eines anderen ebenfalls rechtwinkeligen von demselben Anfangspunkte ausgehenden Axensystems und gleich dem Maße des Biegungsmomentes in Hinsicht auf den gemeinschaftlichen Anfangspunkt, d. i.

gleich der Summe der Producte aus den Elementen des Querschnittes und aus den Quadraten ihrer Entfernung von der Axe C.

Ist der Querschnitt $A\,C\,C_1$, Fig. 388, eines gebogenen Körpers eine symmetrische Figur, und ist die Axe $\overline{Y}Y$ rechtwinkelig gegen die Symmetrieaxe $\overline{X}X$, so findet noch eine Relation zwischen den Biegungsmomenten statt. Sind wieder $SK = x$ und $KF = y$ die Coordinaten eines Flächenelementes F in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$, und ist auch $FN = v$ der Abstand desselben Elementes F von einer anderen Axe $\overline{U}U$, welche um den Winkel $XSU = \alpha$ von der ersten Axe $\overline{X}X$ abweicht, so haben wir für denselben

Fig. 388.



$$v = MF - MN = MF - KL$$
$$= KF \cos. KFM - SK \sin. KSL = y \cos. \alpha - x \sin. \alpha,$$

daher:

$$v^2 = x^2 (\sin. \alpha)^2 + y^2 (\cos. \alpha)^2 - 2xy \sin. \alpha \cos. \alpha, \text{ sowie auch}$$
$$Fv^2 = (\sin. \alpha)^2 Fx^2 + (\cos. \alpha)^2 Fy^2 - \sin. 2\alpha\, Fxy, \text{ und}$$
$$\Sigma (Fv^2) = (\sin. \alpha)^2 \Sigma (Fx^2) + (\cos. \alpha)^2 \Sigma (Fy^2) - \sin. 2\alpha \Sigma (Fxy).$$

Da wegen der symmetrischen Gestalt der Figur jedem Elemente $F_1, F_2 \ldots$ ein gleiches Gegenelement $F_1, F_2 \ldots$ zukommt, bei welchem y und folglich auch das ganze Product negativ ist, so fällt die Summe der entsprechenden Producte für je zwei solcher Elemente, und folglich auch die ganze Summe

$$\Sigma (Fxy) = \text{Null aus, und es ist daher:}$$
$$\Sigma (Fv^2) = (\sin. \alpha)^2 \Sigma (Fx^2) + (\cos. \alpha)^2 \Sigma (Fy^2), \text{ oder:}$$
$$W = (\sin. \alpha)^2 W_1 + (\cos. \alpha)^2 W_2,$$

wobei W das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf irgend eine Axe $\overline{U}U$, W_2 das in Hinsicht auf die Symmetrieaxe $\overline{X}X$ und W_1 das in Hinsich auf die rechtwinkelig zur Symmetrieaxe stehende Axe $\overline{Y}Y$ bezeichnen, und

vorausgesetzt wird, daß die Axen $\overline{U}U$ und $\overline{Y}Y$ sowie die Symmetrieaxe $\overline{X}X$ durch den Schwerpunkt S der Figur gehen.

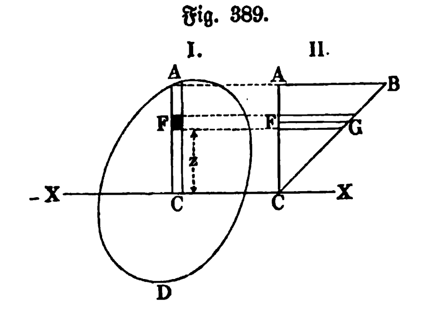
Mit Hülfe der beiden vorstehenden Regeln kann man nicht selten aus dem bekannten Biegungsmomente eines Körpers in Hinsicht auf eine gewisse Axe das Biegungsmoment desselben in Hinsicht auf eine andere Axe finden.

Biegungsmoment eines Streifens. Um das Biegungsmoment eines Körpers von bekanntem Querschnitte AD, Fig. 389, I., in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$ zu finden, denken wir uns diesen Querschnitt durch Perpendikel zu $\overline{X}X$ in lauter schmale Streifen und jeden solchen Streifen, wie z. B. CA, wieder in rectanguläre Elemente F_1, F_2, F_3 u. s. w. zerlegt. Sind dann z_1, z_2, z_3 u. s. w. die Abstände (CF) dieser Elemente von der Axe $\overline{X}X$, so haben wir das Maß des Biegungsmomentes für einen solchen Streifen: §. 227.

$$F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + F_3 z_3^2 \cdots$$
$$= F_1 z_1 \,.\, z_1 + F_2 z_2 \,.\, z_2 + F_3 z_3 \,.\, z_3 + \cdots$$

Ziehen wir nun in Fig. 389, II., AB rechtwinkelig auf und gleich CA, und verbinden wir B und C durch eine gerade Linie, so schneidet dieselbe von den in den Abständen $(CF) = z_1$, z_2, z_3 u. s. w. auf CA errichteten Perpendikeln gleiche Stücke $(FG) = z_1, z_2, z_3$ u. s. w. ab. Es lassen sich nun $F_1 z_1$, $F_2 z_2$ u. s. w. als die Inhalte von Prismen, sowie $F_1 z_1 \,.\, z_1$, $F_2 z_2 \,.\, z_2$ u. s. w. als die statischen Momente derselben in Hinsicht auf die Axe C ansehen. Die Prismen $F_1 z_1$, $F_2 z_2$ u. s. w. machen aber zusammen ein dreiseitiges Prisma aus, dessen Grundfläche das Dreieck ABC und dessen Höhe die Breite des Streifens AC (I.) ist. Es ist daher auch die Summe der obigen statischen Momente gleich dem Momente des Prismas ABC in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$. Setzen wir die Höhe $CA = z$ und die Breite des Streifens $= b$, so haben wir den Inhalt des gedachten dreiseitigen Prismas

Fig. 389.



$$= \tfrac{1}{2} b z^2,$$

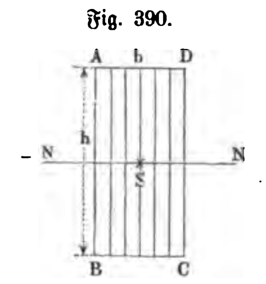
und da der Abstand seines Schwerpunktes von C, $\tfrac{2}{3} z$ beträgt (s. §. 111), so ergiebt sich das statische Moment des Prismas und folglich auch das Maß des Biegungsmomentes vom Streifen CA in Beziehung auf die Axe $\overline{X}X$:

$$W = \tfrac{1}{2} b z^2 \,.\, \tfrac{2}{3} z = \tfrac{1}{3} b z^3.$$

Um nun das Biegungsmoment des ganzen Querschnittes AD zu finden, bedarf es natürlich nur einer Addition der Biegungsmomente der Streifen wie CA, in welche sich die ganze Fläche durch Perpendikel zur Axe $\overline{X}X$ zerlegen läßt.

Am einfachsten ist die Bestimmung bei einem rectangulären Querschnitte $ABCD$, Fig. 390. Hier sind die Streifen, in welche sich die Flächen zerlegen, von gleicher Größe, und machen daher zusammen einen einzigen Streifen von der Breite $AD = b$ des ganzen Rechteckes aus. Ist dann noch die Höhe AB dieses Rechteckes $= h$, so hat man die Höhe eines Streifens:

Fig. 390.



$$z = \frac{1}{2} h,$$

daher das Maß des Biegungsmomentes einer Hälfte dieser Fläche:

$$\frac{1}{3} b \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b h^3}{24},$$

und endlich dieses Maß vom ganzen Rechtecke für die neutrale Axe $\overline{N}N$:

$$W = 2 \cdot \frac{b h^3}{24} = \frac{b h^3}{12}.$$

Die Entfernung e der neutralen Axe von den davon am weitesten abstehenden Fasern (in AD) beträgt hier $e = \frac{h}{2}$, daher ist

$$\frac{W}{e} = \frac{\frac{b h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b h^2}{6}.$$

Es wächst dem Vorstehenden zufolge, bei einem parallelepipedischen Balken das Biegungsmoment $WE = \frac{b h^3}{12} E$ wie die Breite und wie der Cubus der Höhe des Balkens.

§. 228. **Hohle Balken.** Von einem hohlen parallelepipedischen Balken $ABCD$, Fig. 391, bestimmt sich das Biegungsmoment, wenn man von dem Momente des vollständigen Balkens das Moment der Höhlung abzieht. Sind $AB = b$ und $BC = h$ die äußere Breite und Höhe und $A_1 B_1 = b_1$ und $B_1 C_1 = h_1$ die innere Breite und Höhe, so hat man die Maße der Biegungsmomente der Flächen AC und $A_1 C_1$:

$$= \frac{b h^3}{12} \text{ und } \frac{b_1 h_1^3}{12},$$

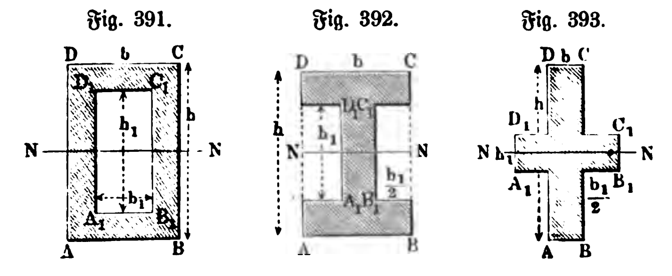
und es folgt durch Subtraction das **Biegungsmoment des hohlen Balkens**:

$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Der Abstand der äußersten Faser von der neutralen Axe ist hier:

$$e = \frac{h}{2};\ \text{daher}\ \frac{W}{e} = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{6 h}.$$

Ganz auf gleiche Weise ergiebt sich das Biegungsmoment des **an den Seiten ausgehöhlten Körpers** $ABCD$, Fig. 392. Sind $AB = b$



und $BC = h$ äußere Breite und Höhe, und ist $AB - A_1 B_1 = b_1$, sowie $B_1 C_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der beiden Höhlungen, so erhält man wieder durch Subtraction:

$$W = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}.$$

Ferner ist hier wie vorher:

$$e = \frac{h}{2};\ \text{und}\ \frac{W}{e} = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{6 h}.$$

Ebenso ergiebt sich das Biegungsmoment des Körpers $ABCD$, Fig. 393, mit kreuzförmigem Querschnitte. Ist hier $AB = b$ und $BC = h$ die Breite und Höhe des Mittelstückes, und ist $A_1 B_1 - AB = b_1$ und $A_1 D_1 = h_1$ die Summe der Breiten und die Höhe der Seitenstücke, so folgt durch Addition das Biegungsmoment des Ganzen:

$$W = \frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$$

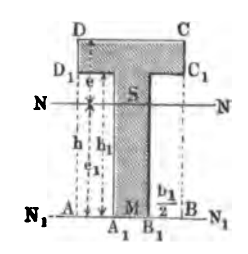
und

$$e = \frac{h}{2};\ \frac{W}{e} = \frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6 h}.$$

Auf dieselbe Weise kann man die Biegungsmomente vieler anderen in der Praxis vorkommenden Körper finden. So ist z. B. für den Körper mit Tförmigem Querschnitte $A_1 B_1 CD$, Fig. 394 (a. f. S.), bei den Dimensionen

$$AB = CD = b,$$
$$AB - A_1 B_1 = AA_1 + BB_1 = b_1,$$
$$AD = BC = h \text{ und}$$
$$AD_1 = BC_1 = BC - CC_1 = h_1,$$

Fig. 394.



das Maß des Biegungsmomentes in Beziehung auf die untere Kante $A_1 B_1$:
Moment des Rechteckes $ABCD$ minus Moment der Rechtecke $A_1 D_1$ und $B_1 C_1$, d. i.:

$$W_1 = {}^1/_2 \cdot \frac{b\,(2\,h)^3}{12} - {}^1/_2 \cdot \frac{b_1\,(2\,h_1)^3}{12}$$
$$= \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{3},$$

wie sich ergiebt, wenn man jedes dieser Rechtecke als die Hälfte von doppelt so hohen Rechtecken mit der neutralen Axe $N_1 N_1$ ansieht. Nun ist die Fläche $A_1 C_1 D = F = bh - b_1 h_1$, und ihr statisches Moment:

$$F \cdot e_1 = bh \cdot \frac{h}{2} - b_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} = {}^1/_2\,(b h^2 - b_1 h_1^2);$$

es folgt daher der Hebelarm

$$MS = e_1 = \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{2\,(bh - b_1 h_1)},$$

das Product

$$F\,.\,e_1^2 = {}^1/_4\,(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 : (bh - b_1 h_1)$$

und das Biegungsmoment des Körpers in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt S gehende neutrale Axe NN:

$$W = W_1 - F\,.\,e_1^2 = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{3} - {}^1/_4\,(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 : (bh - b_1 h_1)$$
$$= \frac{4\,(b h^3 - b_1 h_1^3)\,(bh - b_1 h_1) - 3\,(b h^2 - b_1 h_1^2)^2}{12\,(bh - b_1 h_1)}$$
$$= \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\,b h b_1 h_1\,(h - h_1)^2}{12\,(bh - b_1 h_1)}.$$

Hier ist der Abstand der äußersten Faser von der neutralen Axe auf der einen Seite der letzteren von anderer Größe, als auf der anderen Seite. Bezeichnet e_1 den Abstand der Faser in $A_1 B_1$ und e denjenigen der Fasern in DC von NN, so ergab sich oben:

$$e_1 = \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{2\,(bh - b_1 h_1)} \text{ und daher folgt}$$

$$\frac{W}{e_1} = \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\,b h b_1 h_1\,(h - h_1)^2}{12\,(bh - b_1 h_1)} : \frac{b h^2 - b_1 h_1^2}{2\,(bh - b_1 h_1)}$$

$$= \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b h b_1 h_1\, (h - h_1)^2}{6\, (b h^2 - b_1 h_1^2)}.$$

Andererseits folgt:

$$e = h - e_1 = \frac{h\, .\, 2\, (b h - b_1 h_1) - (b h^2 - b_1 h_1^2)}{2\, (b h - b_1 h_1)}$$

$$= \frac{b h^2 - 2\, b_1 h h_1 + b_1 h_1^2}{2\, (b h - b_1 h_1)}, \text{ daher}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b h b_1 h_1\, (h - h_1)^2}{12\, (b h - b_1 h_1)} : \frac{b h^2 - 2\, b_1 h h_1 + b_1 h_1^2}{2\, (b h - b_1 h_1)}$$

$$= \frac{(b h^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b h b_1 h_1\, (h - h_1)^2}{6\, (b h^2 - 2\, b_1 h h_1 + b_1 h_1^2)}.$$

Bei der Bestimmung der Tragkraft gußeiserner Balken von Tförmigem Querschnitte ist, wie aus dem Späteren sich ergeben wird, je nach den Umständen der Werth von $\frac{W}{e}$ oder $\frac{W}{e_1}$ maßgebend.

Es ist leicht einzusehen, daß die hohen, ausgehöhlten und gefiederten Körper bei gleicher Masse ein größeres Biegungsmoment haben, als die breiten, massiven Körper. Weil dieses Moment mit dem Querschnitte F und dem Quadrate (z^2) der Entfernung von der neutralen Axe wächst, so hat eine und dieselbe Faser um so mehr Widerstand gegen die Biegung, je entfernter sie von der neutralen Axe liegt. Ist z. B. bei einem massiven parallelepipedischen Balken die Höhe h gleich der doppelten Breite b, so fällt das Biegungsmoment entweder

$$W = \frac{b\, .\, (2\, b)^3}{12} = {}^2/_3\, b^4 \text{ oder } = \frac{2\, b\, .\, b^3}{12} = {}^1/_6\, b^4$$

aus, je nachdem man diesen Balken mit der kleineren Breite b oder mit der größeren $2\,b$ auflegt; es ist also im ersten Falle das Biegungsmoment viermal so groß, als im zweiten Falle. Die Größe $\frac{W}{e}$, von welcher die Festigkeit und Tragkraft des Körpers abhängig sind, ist dagegen in den beiden Fällen ${}^2/_3\, b^4 : b = {}^2/_3\, b^3$ und ${}^1/_6\, b^4 : \frac{b}{2} = {}^1/_3\, b^3$; also im ersten Falle doppelt so groß als im zweiten. Wenn man ferner den massiven Balken vom Querschnitte $b h$ durch einen hohlen ersetzt, dessen Höhlung $b h$ gleich ist dem massiven Theile vom Querschnitte $b_1 h_1 - b h$, wenn also $b_1 h_1 - b h = b h$, d. i. $b_1 h_1 = 2\, b h$, oder $b_1 = b \sqrt{2}$ und $h_1 = h \sqrt{2}$ ist, so erhält man für den letzteren das Biegungsmoment:

$$\frac{b_1 h_1^3 - b h^3}{12} = \frac{b \sqrt{2}\, (h \sqrt{2})^3 - b h^3}{12} = {}^3/_{12}\, b h^3,$$

d. i. dreimal so groß als für den ersteren.

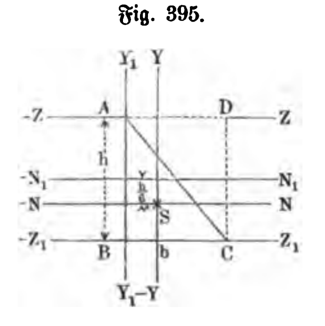
Der Werth von $\frac{W}{e}$, welcher bei dem massiven Balken zu $\frac{W}{e} = \frac{bh^2}{6}$ sich ergiebt, berechnet sich hier zu:

$$\frac{W}{e} = \frac{3\,b\,h^3}{12} : \frac{h}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{b\,h^2}{6} = 2{,}122\,\frac{b\,h^2}{6},$$

so daß für den hohlen Balken unter übrigens gleichen Umständen die Tragkraft 2,122 mal so groß ist, wie für den massiven.

§. 229. **Dreiseitige Balken.** Das Maß des Biegungsmomentes eines prismatischen Körpers mit dreiseitigem Querschnitte ABC, Fig. 395, wird mit Hülfe der letzten Paragraphen wie folgt bestimmt. Für das Prisma mit rectangulärem Querschnitte $ABCD$ ist, wenn man die Bezeichnungen des vorletzten Paragraphen beibehält, das Maß des Biegungsmomentes $= \frac{b\,h^3}{12}$, folglich das für seine Hälfte mit dem triangulären Querschnitte ABC, und zwar in Hinsicht auf die Mittellinie $\overline{N_1 N_1}$:

Fig. 395.



$$W_1 = {}^1/_2\,\frac{b\,h^3}{12} = \frac{b\,h^3}{24}.$$

Nun steht aber die Schwerlinie $\overline{NN}$ des Dreiecks um ${}^1/_6\,AB = {}^1/_6\,h$ von der Mittellinie oder Schwerlinie $\overline{N_1 N_1}$ des Rechteckes ab, daher ist nach §. 225, das Moment in Hinsicht auf $\overline{NN}$:

$$W = W_1 - \left(\frac{h}{6}\right)^2 F = \frac{b\,h^3}{24} - \frac{b\,h^3}{72} = \frac{b\,h^3}{36} = {}^1/_3 \cdot \frac{b\,h^3}{12},$$

also das Biegungsmoment W des Balkens mit dreiseitigem Querschnitte ist nur ein Drittel vom Biegungsmomente des parallelepipedischen, bei gleicher Grundlinie und Höhe des Querschnittes. Da nun aber der letztere Balken nur doppelt so viel Volumen hat als der erstere, so folgt, daß bei übrigens gleichen Dimensionen der trianguläre Balken nur ${}^2/_3$ so viel Biegungsmoment besitzt als der rectanguläre Balken.

Für die Axe $\overline{Z_1 Z_1}$ durch die Basis BC ist ferner dieses Moment:

$$W_2 = W + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot F = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h^3}{18} = \frac{b\,h^3}{12},$$

und für die Axe $\overline{ZZ}$ durch die scharfe Kante B ist es:

$$W_3 = W + \left(\frac{2\,h}{3}\right)^2 \frac{b\,h}{2} = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{4\,b\,h^3}{18} = \frac{b\,h^3}{4}.$$

Diese Formeln bedingen übrigens nicht einen rechtwinkelig triangulären Querschnitt. Es gelten dieselben auch für jedes andere Dreieck ABC, Fig. 396, dessen Basis BC rechtwinkelig gegen die Biegungskraft P steht; denn es läßt sich dasselbe in zwei rechtwinkelige Dreiecke ABD und ACD zerlegen, deren Grundlinien $BD = b_1$ und $DC = b_2$ zusammen die Grundlinie $BC = b$ des schiefen Dreieckes ABC ausmachen, so daß sich daher für das letztere

Fig. 396.

$$W = \frac{1}{36} b_1 h^3 + \frac{1}{36} b_2 h^3 = \frac{1}{36} (b_1 + b_2) h^3 = \frac{b h^3}{36}$$

berechnet.

Uebrigens ist es natürlich ganz einerlei, ob die Grundlinie BC oben oder unten, also wie in I. oder in II., liegt. Es ist für beide Fälle das Biegungsmoment selbst

$$WE = \frac{b h^3}{36} E,$$

so lange die Elasticitätsmodel (E) für Ausdehnung und Zusammendrückung nicht von einander abweichen.

Anders verhält es sich hinsichtlich der Tragkraft und Festigkeit des Balkens, wenn die Tragmodel und Festigkeitsmodel des Materials verschieden sind. Bezeichnet man nämlich mit e_1 und e_2 die Abstände der neutralen Axe von der Spitze A resp. der Grundlinie BC; so ist

$$\frac{W}{e_1} = \frac{1}{36} \frac{b h^3}{\frac{2h}{3}} = \frac{b h^2}{24}$$

$$\frac{W}{e_2} = \frac{1}{36} \frac{b h^3}{\frac{h}{3}} = \frac{b h^2}{12}.$$

Sobald T_{I} (für Zug) gleich T_{II} (für Druck) ist, muß man von den beiden Werthen $\frac{W}{e_1}$ und $\frac{W}{e_2}$ immer den kleineren nehmen, hier also den für die Spitze

$$\frac{W}{e_1} = \frac{b h^2}{24}.$$

Sind T_{I} und T_{II} verschieden, so hat man den Balken so zu legen, daß dem größeren Tragmodul T auch der größere Abstand e entspricht, und der

Rechnung hat man dasjenige e zu Grunde zu legen, für welches $\frac{T}{e}$ den kleineren Werth annimmt.

Dieselben Formeln finden auch ihre Anwendung bei einem rhomboidalen Querschnitt $ABCD$, Fig. 397, mit horizontaler Diagonale BD. Ist wieder die Breite $BD = b$ und Höhe $AC = h$, so hat man für Körper mit diesem Querschnitte:

$$W = 2 \cdot \frac{b}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{b h^3}{48} = \frac{1}{4} \frac{b h^3}{12},$$

und
$$\frac{W}{e} = \frac{1}{4} \frac{b h^3}{12 \frac{h}{2}} = \frac{1}{4} \frac{b h^2}{6},$$

d. i. ein Viertel von dem Momente des Balkens mit rectangulärem Querschnitte $EFGH$ bei gleicher Breite und Höhe. Auch folgt hiernach für ein Doppeltrapez $ABED$, Fig. 398, von der Höhe $AC = BD = h$, äußeren Breite $AB = CD = b$ und inneren Breite $EF = b_1$,

$$W = \frac{b h^3}{12} - (b - b_1) \frac{h^3}{48} = \frac{(3b + b_1) h^3}{48},$$

und
$$\frac{W}{e} = \frac{(3b + b_1) h^2}{24}.$$

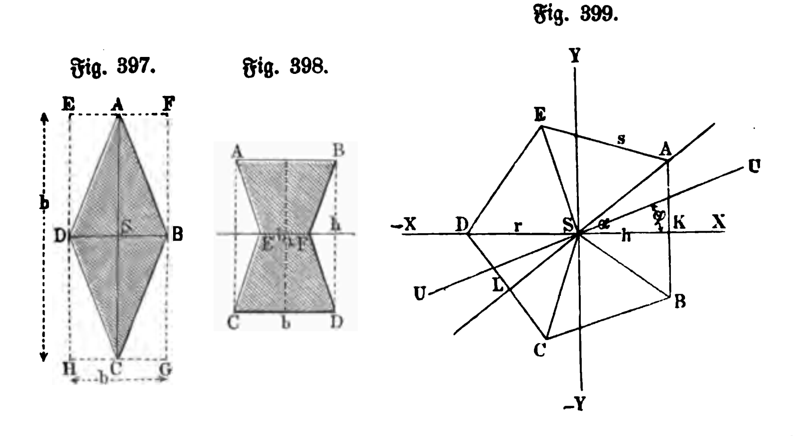


Fig. 397. Fig. 398. Fig. 399.

§. 230. **Polygonale Balken.** Die vorstehende Theorie kann auch auf Körper mit regelmäßig polygonalen Querschnitten wie ACE, Fig. 399, angewendet werden, bei welchen die neutrale Axe $\overline{XX}$ zugleich eine Symmetrieaxe ist. Da sich ein solches Polygon in lauter congruente Dreiecke zerlegen läßt, so kommt es bei dieser Bestimmung vorzüglich darauf an, das

Biegungsmoment eines solches Dreieckes ASB zu ermitteln. Bezeichnet man die Seite $AB = BC = CD$ des Polygons oder die Grundlinie eines Ergänzungsdreieckes desselben, durch s, und die Höhe SK desselben durch h, so hat man das Maß seines Biegungsmomentes in Hinsicht auf die Axe $\overline{X}X$: $= \frac{1}{4} \cdot \frac{h s^3}{12} = \frac{h s^3}{48}$, dagegen dasselbe in Hinsicht auf die zweite Axe $\overline{Y}Y$: $= \frac{s h^3}{4}$, und es ist folglich die Summe beider Momente:

$$\frac{s h^3}{4} + \frac{h s^3}{48} = \frac{s h}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right).$$

Diese Summe gilt nun (nach §. 226) auch für jedes der übrigen Dreiecke, und es ist daher dieselbe für das Polygon von n Seiten:

$$W_1 + W_2 = \frac{n s h}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right) = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

wenn man den Inhalt desselben:

$$n \cdot \frac{s h}{2}, \text{ durch } F \text{ ausdrückt.}$$

Bezeichnen wir den Winkel ASX durch α, so ist nach §. 226 das Moment in Hinsicht auf die Axe ASL:

$$= W_1 \, (sin.\, \alpha)^2 + W_2 \, (cos.\, \alpha)^2;$$

dasselbe ist aber auch gleich dem Momente W_2 in Hinsicht auf KSD oder $\overline{X}X$, daher hat man:

$$W_2 = W_1 \, (sin.\, \alpha)^2 + W_2 \, (cos.\, \alpha)^2, \text{ oder:}$$
$$W_1 \, (sin.\, \alpha)^2 = W_2 \, [1 - (cos.\, \alpha)^2], \text{ d. i.:}$$
$$W_1 \, (sin.\, \alpha)^2 = W_2 \, (sin.\, \alpha)^2, \text{ und folglich:}$$
$$W_1 = W_2.$$

Für eine Axe $\overline{U}U$, welche um einen willkürlichen Winkel $XSU = \varphi$ von der Axe $\overline{X}X$ der Symmetrie abweicht, ist ferner das Moment:

$$W = W_1 \, sin.\, \varphi^2 + W_2 \, cos.\, \varphi^2 = W_1 \, (sin.\, \varphi^2 + cos.\, \varphi^2) = W_1.$$

Wenn man folglich in der obigen Gleichung

$$W_1 + W_2 = \frac{F}{2}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right), \; W = W_1 = W_2$$

einsetzt, so erhält man für jede beliebige Axe des regulären Polygons das Maß des Biegungsmomentes:

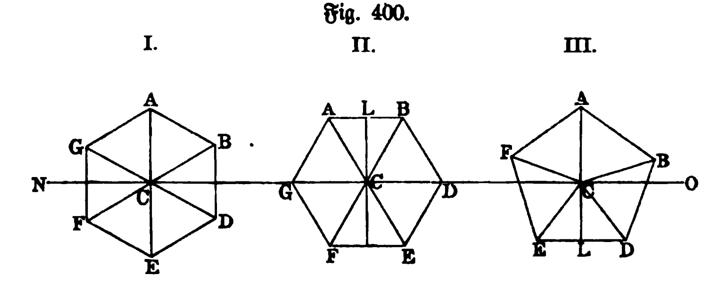
$$W = W_1 = W_2 = \frac{F}{4}\left(h^2 + \frac{s^2}{12}\right),$$

oder, wenn man noch den Halbmesser des Polygons $SA = SB = r$, und hiernach $h^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}$ setzt:

$$W = \frac{F}{4}\left(r^2 - \frac{s^2}{6}\right) = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12}.$$

Für einen Balken mit regelmäßig $2n$ seitigem Querschnitt, wie ADF, Fig. 400, I. und II., hat man, wenn r den äußeren Halbmesser CA, s die

Fig. 400.



Seitenlänge AB, h den inneren Halbmesser CL bezeichnet, entweder

$$e = r \text{ oder } e = h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

zu setzen, je nachdem die im Schwerpunkte auf der neutralen Axe errichtete Normale einen Eckpunkt (Fig. 400, I.) oder die Mitte einer Seite (Fig. 400, II.) trifft.

Daher folgt für den ersten Fall:

$$\frac{W}{e_1} = \frac{W}{r} = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12r} \text{ und für den zweiten:}$$

$$\frac{W}{e_2} = \frac{W}{h} = \frac{F(r^2 + 2h^2)}{12h}, \text{ während in beiden Fällen:}$$

$$F = \tfrac{1}{2}nsh = nh\sqrt{r^2 - h^2} = \tfrac{1}{2}ns\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} \text{ ist.}$$

Das Verhältniß der Tragmomente $\frac{W}{r}T$ und $\frac{W}{h}T$ ist $= \frac{h}{r}$.

Ist die Anzahl n der Seiten des polygonalen Querschnittes ungerade (Fig. 400, III.), so hat man für e stets $CA = r$ als den größeren Abstand in Rechnung zu bringen, vorausgesetzt, daß die Kraftrichtung in eine Symmetrieaxe des Querschnittes hineinfällt.

Für den quadratischen Querschnitt ist $s = 2h = r\sqrt{2}$ und daher das Tragmoment

$$\frac{W}{e_1} T = {}^1/_{12} \frac{s^4}{\frac{s}{\sqrt{2}}} T = \frac{s^3}{6\sqrt{2}} T = {}^1/_{12} \frac{(2 r^2)^2}{r} T = \frac{r^3}{3} T = 0{,}333\, r^3\, T,$$

dagegen

$$\frac{W}{e_2} T = {}^1/_{12} \frac{s^4}{\frac{s}{2}} T = \frac{s^3}{6} T = \frac{r^3 \sqrt{2}}{3} T = 0{,}471\, r^3\, T.$$

Während also das Biegungsmoment des Balkens mit quadratischem Querschnitte dasselbe ist, ob derselbe mit einer Kante oder mit einer Fläche nach unten gelagert wird, ist das Tragvermögen im letzteren Falle $\sqrt{2} = 1{,}414$ mal so groß wie im ersteren.

Für den sechsseitigen Querschnitt hat man

$$s = r = \frac{2\,h}{\sqrt{3}};\quad F = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2 = 2{,}598\, s^2, \text{ daher:}$$

$$\frac{W}{e_1} = \frac{F}{4} \left(\frac{h^2 + {}^1/_{12} s^2}{s}\right) = \frac{3\sqrt{3} s^2}{8 s} \left(\frac{3 s^2}{4} + {}^1/_{12} s^2\right) = \frac{5\sqrt{3}\,.\, s^3}{16}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{16} r^3 = 0{,}541\, r^3 \text{ und}$$

$$\frac{W}{e_2} = \frac{{}^3/_2 \sqrt{3}\,.\, s^2\,.\, {}^5/_6\, s^2}{4\,.\,\frac{s}{2}\sqrt{3}} = {}^5/_8\, s^3 = {}^5/_8\, r^3 = 0{,}625\, r^3.$$

Für den regelmäßig achtseitigen Querschnitt ist:

$$s = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},\ h = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ und}$$

$$F = 4\, s\, h = 2\,.\,\sqrt{2}\,.\, r^2 = \frac{2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} s^2; \text{ daher:}$$

$$\frac{W}{e_1} = \frac{W}{r} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{6} r^3 = 0{,}638\, r^3 \text{ und}$$

$$\frac{W}{e_2} = \frac{W}{h} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{3\sqrt{2 + \sqrt{2}}} r^3 = 0{,}691\, r^3.$$

Balken mit kreisförmigem und elliptischem Querschnitte. §. 231.
Für den Kreis als Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ist $s = 0$, daher folgt das Maß des Biegungsmomentes eines Cylinders:

$$W = \frac{F}{4} r^2 = \frac{\pi r^4}{4} = 0{,}7854\, r^4 \text{ und}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^3}{4} = 0{,}7854\ r^3.$$

Für einen hohlen Cylinder oder eine Röhre mit dem äußeren Halbmesser r_1 und dem inneren Halbmesser r_2 folgt daher durch Subtraction:

$$W = \frac{\pi (r_1^4 - r_2^4)}{4} = \frac{\pi (r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 + r_2^2)}{4} = F \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{4}$$
$$= \frac{F r^2}{2}\left[1 + \left(\frac{b}{2r}\right)^2\right] = \frac{F}{2}\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right],$$

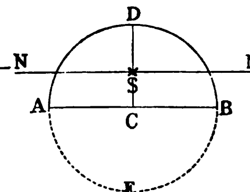
wenn $F = \pi (r_1^2 - r_2^2)$ den Inhalt des ringförmigen Querschnittes, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ den mittleren Halbmesser, und $b = r_1 - r_2$ die Wanddicke des Cylinders bezeichnen.

Für den hohlen Cylinder folgt das Tragmoment

$$\frac{W}{e} T = \frac{\pi}{4} \frac{(r_1^4 - r_2^4)}{r_1} T = \frac{F r}{2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{b}{2r}\right)^2}{1 + \frac{b}{2r}} T.$$

Der horizontale Durchmesser AB theilt den Vollkreis DE, Fig. 401, in zwei Halbkreise ADB und AEB, und es ist das Maß des Biegungsmomentes für eine solche Hälfte in Hinsicht auf den Durchmesser AB:

Fig. 401.



$$W_1 = \tfrac{1}{2} \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{8}.$$

Nun steht aber der Schwerpunkt S des Halbkreises um $CS = \frac{4r}{3\pi}$ (s. §. 116) von dem Mittelpunkte C des Kreises ab, es ist daher für die parallele Axe $\overline{NN}$ durch S:

$$W = W_1 - F \cdot \overline{CS}^2 = W_1 - F \cdot \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$
$$= \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) = 0{,}1098 \cdot r^4.$$

Ferner ist:

$$CS = e_2 = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244\ r \text{ und}$$
$$DS = e_1 = 0{,}5756\ r, \text{ folglich:}$$
$$\frac{W}{e_1} = \frac{0{,}1098}{0{,}5756} r^3 = 0{,}1907\ r^3 \text{ und}$$

$$\frac{W}{e_2} = \frac{0,1098}{0,4244} r^3 = 0,2587\ r^3.$$

Dagegen ist für den Halbkreis mit verticalem Durchmesser:

$$W = \frac{\pi r^4}{8} = 0,3927\ r^4 \text{ und}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^3}{8} = 0,3927\ r^3.$$

In Hinsicht auf eine Axe $\overline{NN}$, welche um den Winkel $NSX = \alpha$ von der Symmetrieaxe CD, Fig. 402, abweicht, ist das Moment des Halbkreises:

$$W = \frac{\pi r^4}{8} \cos. \alpha^2 + \pi r^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right) \sin. \alpha^2$$
$$= (0,3927 \cos. \alpha^2 + 0,1098 \sin. \alpha^2)\ r^4.$$

Fig. 402.

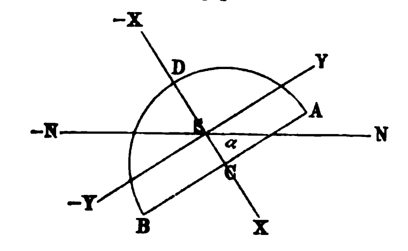
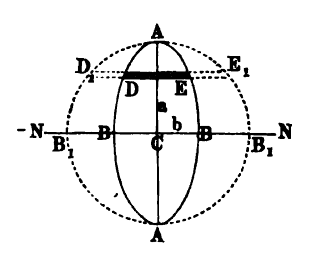


Fig. 403.



Aus der Formel

$$W = \frac{\pi r^4}{4}$$

für das Biegungsmoment des Vollkreises läßt sich auch das für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 403, ableiten. In Folge der aus §. 12 der analytischen Hülfslehren bekannten Beziehung der Ellipse zum Kreise ist, wenn AB_1AB_1 einen Kreis vorstellt, dessen Halbmesser CA der einen Halbaxe a der Ellipse gleich ist, und wenn die andere Halbaxe CB der Ellipse durch b bezeichnet wird, das Verhältniß $\frac{DE}{D_1E_1}$ der Breite DE eines elliptischen Elementes zur Breite D_1E_1 eines gleichliegenden und gleichhohen Elementes vom Kreise

$$= \frac{BB}{B_1B_1} = \frac{CB}{CB_1} = \frac{b}{a}.$$

Da nun aber das Biegungsmoment eines solchen Streifens nur der einfachen Breite proportional wächst, so verhält sich daher auch das Moment eines Streifens DE der Ellipse zu dem entsprechenden Streifen D_1E_1 des Kreises

wie b zu a, und es ist folglich auch das Maß des Biegungsmomentes für den Körper mit elliptischem Querschnitte gleich $\frac{b}{a}$ von dem mit kreisförmigem Querschnitte, d. i.:

$$W = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{1}{4} F \,.\, a^2 \text{ und}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{W}{a} = \frac{\pi a^2 b}{4} = \frac{1}{4} F \,.\, a.$$

Enthält dieser Körper noch eine elliptische Höhlung mit den Halbaxen a_1 und b_1, so hat man für denselben:

$$W = \frac{\pi (a^3 b - a_1^3 b_1)}{4} = F \frac{a^2 - a_1^2}{4} \text{ und}$$

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi (a^3 b - a_1^3 b_1)}{4 a} = F \frac{a^2 - a_1^2}{4 a}.$$

Ist ferner ein Körper mit rectangulärem Querschnitte entweder um seine Axe herum, oder, wie in Fig. 404, an den Seiten elliptisch ausgehöhlt, so hat man für dessen Biegungsmoment:

Fig. 404.

$$W = \frac{b h^3}{12} - \frac{\pi a_1^3 b_1}{4}$$

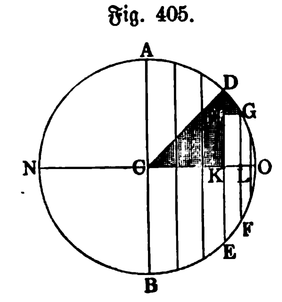
zu setzen, wobei b und h die Breite AB und Höhe $AA = BB$ des rectangulären Querschnittes $ABBA$, dagegen a_1 und b_1 die Halbaxen CE und CF der halbelliptischen Ausschnitte DFE bezeichnen.

Das Tragmoment hat die Größe:

$$\frac{W}{e} T = \frac{\frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{4} \pi b_1 a_1^3}{\frac{1}{2} h} T = \frac{b h^3 - 3 \pi b_1 a_1^3}{6 h} T.$$

§. 232. Das Maß W des Biegungsmomentes von einem Cylinder oder einem Cylinderabschnitte läßt sich einfach auch auf folgende Weise ermitteln. Man theile den Quadranten ADO des Cylinderquerschnittes $AOBN$, Fig. 405, in n gleiche Theile, führe durch die Theilpunkte verticale Schnitte, wie DE, FG u. s. w. und bestimme die Biegungsmomente der dadurch erhaltenen, als gerade Parallelepipede anzusehenden Blätter, z. B. $DEFG$ u. s. w. Die Summe der Biegungsmomente dieser Blätter giebt das Biegungsmoment des halben Cylinders AOB, und durch Verdoppelung dieses

Fig. 405.



Momentes erhält man das Biegungsmoment des ganzen Cylinders. Bezeichnet r den Halbmesser $CA = CO$ des kreisförmigen Querschnittes $AOBN$, so ist ein Bogentheil $DG = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi r}{2n}$, und in Folge der Aehnlichkeit der Dreiecke DGH und CDK hat man für die Dicke KL des Cylinderblattes $DEFG = 2 \,.\, DGLK$:

$$KL = GH = \frac{KD}{CD} \cdot DG = \frac{KD}{CD} \cdot \frac{\pi r}{2n} = \frac{\pi}{2n} \cdot \overline{KD}.$$

Nun folgt nach der bekannten Formel in §. 227 das Maß des Biegungsmomentes von dem Blatte $DEFG$:

$$= \frac{\overline{KL} \,.\, (2\overline{KD})^3}{12} = \frac{8}{12} \cdot \frac{\pi}{2n} \cdot \overline{KD}^4 = \frac{\pi}{3n} \overline{KD}^4.$$

Setzen wir den veränderlichen Winkel ACD, welcher den Abstand des Schnittes DE vom verticalen Durchmesser AB bestimmt, $= \varphi$, so erhalten wir für die Ordinate oder halbe Blatthöhe $DK = r \cos. \varphi$, und daher das letzte Biegungsmoment $= \frac{\pi r^4}{3n} (\cos. \varphi)^4 = \frac{\pi r^4}{3n} \frac{3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi}{8}$, da sich $(\cos. \varphi)^4 = \frac{3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi}{8}$ setzen läßt (siehe „Ingenieur“ Seite 157). Um nun das Maß des Biegungsmomentes des halben Cylinders zu finden, hat man im Factor $3 + 4 \cos. 2\varphi + \cos. 4\varphi$, für φ nach und nach die Werthe $1 \cdot \frac{\pi}{2n}$, $2 \cdot \frac{\pi}{2n}$, $3 \cdot \frac{\pi}{2n}$ bis $n \cdot \frac{\pi}{2n}$ einzusetzen, die erhaltenen Ergebnisse zu addiren, und zuletzt noch mit dem gemeinschaftlichen Factor $\frac{\pi r^4}{24n}$ zu multipliciren. Nun giebt aber die Zahl 3, $n$mal zu sich addirt, das Product $3n$, ferner ist die Summe der Cosinuse von 0 bis π = Null, weil die Cosinuse im zweiten Quadranten von $\frac{\pi}{2}$ bis π gleich und entgegengesetzt sind den Cosinusen im ersten Quadranten von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, und ebenso die Summe der Cosinuse von 0 bis 2π, = Null, weil auch die Cosinuse im dritten Quadranten von π bis $^3/_2\,\pi$ die im vierten Quadranten von $^3/_2\,\pi$ bis 2π aufheben, daher bleibt für das Maß des Biegungsmomentes von der Cylinderhälfte AOB:

$$\frac{W}{2} = \frac{\pi r^4}{24n} \cdot 3n = \frac{\pi r^4}{8}, \text{ und endlich für den ganzen Cylinder:}$$

$$W = \frac{\pi r^4}{4} = 0{,}7854\, r^4, \text{ oder auch}$$

$$W = \frac{\pi d^4}{64} = 0{,}09817\, d^4,$$

wenn $d = 2r$, den Durchmesser des Cylinders bezeichnet.

(Anmerkung.) Im Gewande der Differenzial- und Integralrechnung ist, da $\partial \varphi$ ein Element des Bogens φ bezeichnet, das Element $DG = \frac{r\pi}{2n}$, $= r\partial\varphi$, und daher das Moment des blattförmigen Flächenelementes $DEFG$,

$$= \frac{2\partial\varphi \cdot r^4}{3}(cos.\,\varphi)^4 = \frac{2r^4\partial\varphi}{3}\left(\frac{3 + 4\,cos.\,2\varphi + cos.\,4\varphi}{8}\right)$$

$$= \frac{r^4}{12}(3 + 4\,cos.\,2\varphi + cos.\,4\varphi)\,\partial\varphi = \frac{r^4}{12}(3\partial\varphi + 4\,cos.\,2\varphi\partial\varphi + cos.\,4\varphi\partial\varphi)$$

$$= \frac{r^4}{12}[3\partial\varphi + 2\,cos.\,2\varphi\partial(2\varphi) + {}^1\!/_4\,cos.\,4\varphi\partial(4\varphi)]$$

und endlich das Moment des Cylinderstückes $ABED$:

$$W = \frac{r^4}{12}\left(3\int\partial\varphi + 2\int cos.\,2\varphi\partial(2\varphi) + {}^1\!/_4\int cos.\,4\varphi\partial(4\varphi)\right), \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{r^4}{12}(3\varphi + 2\,sin.\,2\varphi + {}^1\!/_4\,sin.\,4\varphi)$$ (s. analyt. Hülfslehren, §. 26, I.).

Wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $sin.\,2\varphi = sin.\,\pi = 0$, und $sin.\,4\varphi = sin.\,2\pi = 0$, eingesetzt und das Ganze verdoppelt, so erhält man, wie oben, das Biegungsmoment des ganzen Cylinders, wieder

$$W = \frac{r^4}{12} \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot 2 = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Für das Segment DOE ist dagegen

$$W = \frac{\pi r^4}{8} - (3\varphi + 2\,sin.\,2\varphi + {}^1\!/_4\,sin.\,4\varphi)\frac{r^4}{12}$$

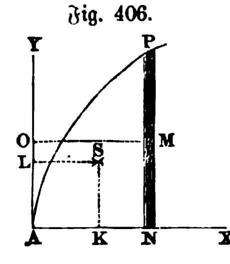
$$= \left[\frac{\pi - 2\varphi}{8} - \left(\frac{2\,sin.\,2\varphi + {}^1\!/_4\,sin.\,4\varphi}{12}\right)\right] r^4$$

$$= [6(\pi - 2\varphi) - 8\,sin.\,2\varphi - sin.\,4\varphi]\,\frac{r^4}{48}.$$

Durch einfache Subtraction läßt sich mittels der letzten Formel auch das Moment W für ein Brett $DEFG$ von endlicher Dicke KL bestimmen.

(§. 233.) **Balken mit krummlinigen Querschnitten.** Für Körper mit gesetzmäßig krummlinigen Querschnitten bestimmt sich das Maß W des Biegungsmomentes am sichersten mit Hülfe der höheren Analysis. Man zerlegt zu diesem Zwecke eine solche Fläche ANP, Fig. 406, durch Ordinaten in ihre Elemente, und bestimmt nun die Momente eines solchen Elementes sowohl in Hinsicht auf die Abscissenaxe AX als auch in Hinsicht auf die Ordinatenaxe AY.

Fig. 406.



Ist x die Abscisse AN und y die Ordinate NP, so hat man den Inhalt eines Elementes:

$$\partial F = y \partial x$$

(s. analyt. Hülfslehren, §. 29) und daher das Maß seines Biegungsmomentes in Hinsicht auf die Axe AX:

$$\partial W_1 = \frac{1}{3} y^2 \cdot \partial F = \frac{1}{3} y^3 \partial x$$

(s. §. 227), und dagegen in Hinsicht auf die Axe AY:

$$\partial W_2 = x^2 y \partial x,$$

da hier das Element an allen Stellen um x von AY absteht.

Durch Integration erhält man nun für die ganze Fläche $ANP = F$:

$$W_1 = \frac{1}{3} \int y^3 \partial x$$

und

$$W_2 = \int x^2 y \partial x.$$

Hat man nun (nach §. 117) den Schwerpunkt S der Fläche ANP ermittelt, also seine Coordinaten $AK = u$ und $KS = v$ bestimmt, so findet man hiernach die Maße der Biegungsmomente in Hinsicht auf die durch den Schwerpunkt gehenden und den Coordinatenrichtungen parallel laufenden Axen:

$$W_1 = \frac{1}{3} \int y^3 \partial x - v^2 F,$$

und

$$W_2 = \int x^2 y \partial x - u^2 F.$$

Z. B. für eine Parabelfläche ANP, deren Gleichung $y^2 = px$ ist, hat man (nach §. 29 der analyt. Hülfslehren):

$$F = \frac{2}{3} xy, \text{ und (nach §. 117)}$$
$$u = \frac{3}{5} x \text{ und } v = \frac{3}{8} y,$$

daher:

$$v^2 F = \left(\frac{3}{8}\right)^2 F y^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 y^2 \cdot \frac{2}{3} xy = \frac{3}{32} xy^3$$

und

$$u^2 F = \left(\frac{3}{5}\right)^2 F x^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 x^2 \cdot \frac{2}{3} xy = \frac{6}{25} x^3 y.$$

Da ferner aus $y^2 = px$, $x = \frac{y^2}{p}$ und $\partial x = \frac{2 y \partial y}{p}$ folgt, so ist:

$$\frac{1}{3} \int y^3 \partial x = \frac{1}{3} \int y^3 \cdot \frac{2 y \partial y}{p} = \frac{2}{3p} \int y^4 \partial y = \frac{2 y^5}{15 p} = \frac{2}{15} y^3 x$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} xy \cdot y^2 = \frac{1}{5} F y^2,$$

und

$$\int x^2 y \partial x = \int \frac{y^4}{p^2} \cdot \frac{2 y^2 \partial y}{p} = \frac{2}{p^3} \int y^6 \partial y = \frac{2 y^7}{7 p^3} = \frac{2}{7} x^3 y$$
$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} x y \,.\, x^2 = \frac{3}{7} F x^2.$$

Endlich ergiebt sich:

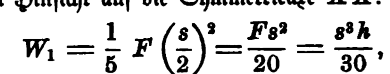
$$W_1 = \frac{1}{5} F y^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 F y^2 = \left(\frac{1}{5} - \frac{9}{64}\right) F y^2 = \frac{19}{320} F y^2,$$

und

$$W_2 = \frac{3}{7} F x^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 F x^2 = \frac{12}{175} F x^2.$$

Für eine symmetrische Parabelfläche ADB, Fig. 407, deren Sehne $AB = s$ und Höhe $CD = h$ ist, läßt sich hiernach setzen: das Moment in Hinsicht auf die Symmetrieaxe $\overline{X}X$:

Fig. 407.



$$W_1 = \frac{1}{5} F \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{F s^2}{20} = \frac{s^3 h}{30},$$

wogegen das in Hinsicht auf die normale Axe $\overline{Y}Y$ bleibt:

$$W_2 = \frac{12}{175} F h^2 = \frac{8}{175} h^3 s.$$

Für einen parallelepipedischen Balken mit parabolischen Flankenhöhlungen beiderseits, Fig. 404, ist:

$$\frac{W}{e} = \frac{{}^1/_{12}\, b h^3 - 2 \,.\, {}^1/_{30}\, b_1 (2 a_1)^3}{{}^1/_2\, h}$$
$$= \frac{5 b h^3 - 32 b_1 a_1^3}{30 h},$$

wobei b die äußere Breite, h die äußere Höhe, b_1 die Tiefe einer Höhlung und a_1 die halbe Höhe derselben bezeichnen.

§. 234. **Krummlinige Querschnitte.** — Kommt es darauf an, das Biegungsmoment eines Körpers zu ermitteln, dessen Querschnitt eine zusammengesetzte oder eine ungesetzmäßige Figur bildet, so muß man entweder diesen Querschnitt in Theile zerlegen, für welche das Maß W bereits bekannt ist, oder man muß denselben durch verticale Linien in schmale Streifen zertheilen, die Maße der Biegungsmomente dieser Streifen (nach §. 227) berechnen und zuletzt noch dieselben durch Addition vereinigen, wobei wieder mit Vortheil die Regel von Simpson oder Cotes in Anwendung gebracht werden kann.

Ist z. B. $ABEC$, Fig. 408, eine solche Figur oder ein solcher Theil des Körperquerschnittes, und soll das Biegungsmoment desselben in Hinsicht

auf die Axe AX bestimmt werden, so ermittelt man erst das Maß W_1 für den Flächentheil $ABGD$, und dann das Maß W_2 für den Theil CED; subtrahirt man dann das letztere vom ersteren, so erhält man das gesuchte Moment:

Fig. 408.

$$W = W_1 - W_2.$$

Ist die Grundlinie AD des ersten Theiles $= x$, und sind die in gleichen Abständen von einander stehenden Höhen desselben z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, so hat man das entsprechende Maß des Biegungsmomentes nach der Simpson'schen Regel:

$$W_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{12} (z_0^3 + 4 z_1^3 + 2 z_2^3 + 4 z_3^3 + z_4^3).$$

Ist dagegen die Breite CD des abzuziehenden Stückes $CDE = x_1$, und sind die Höhen desselben y_0, y_1, y_2, y_3, so hat man nach der Regel von Cotes (s. analyt. Hülfslehren, §. 39):

$$W_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_1}{8} (y_0^3 + 3 y_1^3 + 3 y_2^3 + y_3^3).$$

Geht AX nicht durch den Schwerpunkt S des ganzen Querschnittes, so muß dann noch durch die bekannte Regel (§. 225) eine Reduction auf die Axe durch S vorgenommen werden. Auf diese Weise sind natürlich auch noch andere, vielleicht unter AX und neben AY gelegene Theile des ganzen Querschnittes zu behandeln. Den Schwerpunkt S kann man entweder nach §. 127, oder auch empirisch bestimmen, indem man die ganze Fläche aus dünnem Blech oder Papier ausschneidet, und auf eine scharfe Schneide legt (s. §. 106). Wenn man auf diese Weise zwei Schwerlinien bestimmt, so erhält man im Durchschnitte derselben den gesuchten Schwerpunkt.

Beispiel. In der Fig. 408 ist $ABGEC$ ein Theil von dem Querschnitte einer Eisenbahnschiene, welcher sich als die Differenz zweier Flächen $ABGD$ und CED ansehen läßt. Wenn nun die erstere eine Breite AD von 35 und die letztere eine Breite CD von 25 Millimeter hat, und wenn ferner die Höhen des ersteren Theiles

$z_0 = 74$; $z_1 = 73$; $z_2 = 71$; $z_3 = 67$ und $z_4 = 60$,

und die des letzteren

$y_0 = 5$; $y_1 = 39$; $y_2 = 47$ und $y_3 = 56$ Millimeter

betragen, so ist das Maß des Biegungsmomentes vom ersten Theile:

$$W_1 = \frac{1}{3} \cdot 35 \cdot \frac{1}{12} [74^3 + 60^3 + 4 (73^3 + 67^3) + 2 \,.\, 71^3]$$

$$= \frac{35}{36} \cdot 4'096167 = 3'982384,$$

und dagegen das vom zweiten Theile:

$$W_2 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot \frac{1}{8} [5^3 + 56^3 + 3 (39^3 + 47^3)]$$

$$= \frac{25}{24} \cdot 665167 = 692882,$$

daher das gesuchte Maß für die ganze Fläche $ABGEC$:

$$W = W_1 - W_2 = 3'982384 - 692882 = 3'289502.$$

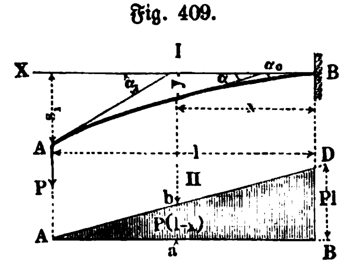
Anmerkung. Auch kann man setzen:

$$W = \frac{z}{12}\left(\frac{z}{4}\right)^2 (1 \cdot 0^2 \cdot y_0 + 4 \cdot 1^2 \cdot y_1 + 2 \cdot 2^2 \cdot y_2 + 4 \cdot 3^2 \cdot y_3 + 1 \cdot 4^2 \cdot y_4)$$
$$= \frac{z^3}{192}(4 y_1 + 8 y_2 + 36 y_3 + 16 y_4),$$

wenn y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 die in den Abständen $0/_4\, z$, $1/_4\, z$, $2/_4\, z$, $3/_4\, z$, $4/_4\, z$, von AX gemessenen Breiten bezeichnen.

§. 235. **Balken an einem Ende befestigt, am anderen frei.** Im Folgenden soll, sobald nicht das Gegentheil bemerkt ist, vorausgesetzt werden, daß der Balken prismatisch, und die Richtung der angreifenden Kräfte vertical sei. Abwärts gerichtete Kräfte gelten dabei als positiv, aufwärts gerichtete Kräfte sind daher negativ. Als Coordinatenanfang gilt der Befestigungspunkt B; die Horizontale BX sei die positive XAxe, die positive YAxe ist vertical abwärts gedacht BY (Fig. 409). Unter α sei der Neigungswinkel (Bogenlänge für den Halbmesser Eins) an einer beliebigen Stelle der elastischen Linie, unter y die Ordinate daselbst, d. h. die Senkung unter der horizontalen XAxe verstanden, und insbesondere bedeute α_0 den Einklemmungswinkel bei B; α_1 den Neigungswinkel im Angriffspunkte der Kraft P; s_1 die Senkung in demselben Punkte A. Bei mehreren Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ sollen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ und $s_1, s_2, s_3 \ldots$ die entsprechende Bedeutung für die bezüglichen Angriffspunkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$ haben. Die Winkel α sollen positiv genommen werden, wenn sie unterhalb AX, negativ, wenn sie oberhalb AX liegen. Ein Kraftmoment endlich soll positiv sein, wenn es den Balken unten concav zu biegen strebt, im entgegengesetzten Falle wird es als negativ in Rechnung gesetzt. Die Winkel α seien in allen Fällen hinreichend klein vorausgesetzt, um diejenige Componente (S_a) der verticalen Schubkraft eines Querschnittes vernachlässigen zu dürfen, welche, bei einer Zerlegung dieser Verticalkraft nach der Ebene des Querschnittes und senkrecht darauf, nach dieser letzteren Richtung sich ergiebt. Dem entsprechend sei immer $tang. \alpha = sin. \alpha = \alpha$ gesetzt.

Fig. 409.



Für die Tragkraft des Balkens in einem gewissen Querschnitte im Abstande x von B ist nach dem Früheren die Gleichung maßgebend:

$$M = P\,(l - x) = T\,\frac{W}{e},$$

oder, wenn die Spannung der von der neutralen Schicht am weitesten abstehenden Faser nicht bis zur Elasticitätsgrenze gesteigert werden, sondern nur den Werth k erreichen soll, so gilt

$$M = P\,(l - x) = k\,\frac{W}{e}.$$

Diese Gleichung kann dazu dienen, entweder aus der bekannten Belastungsart die Querschnittsdimensionen, nämlich $\frac{W}{e}$, oder bei gegebenem Querschnitt die daselbst in den äußersten Fasern eintretende Spannung k zu ermitteln. Man ersieht sogleich, daß k mit M wächst, und für den größten Werth $max.\ M$ ebenfalls den größten Werth annimmt. Die am meisten gefährdete Stelle wird daher diejenige sein, für welche M ein Maximum wird.

In dem vorliegenden Falle erreicht M offenbar seinen größten Werth für $x = 0$, also im Befestigungspunkte B, und man nennt diesen Punkt den Bruchpunkt oder Bruchquerschnitt, für welchen also die Gleichung gilt:

$$M = Pl = k\,\frac{W}{e}.$$

Wie aus dem Späteren sich ergeben wird, können zuweilen mehrere Punkte in dem Balken vorhanden sein, in welchen das Moment M der äußeren Kräfte ein Maximum wird, d. h. wo es größer ist als in den beiderseits benachbarten Punkten. Man nennt diese Punkte alsdann relative Bruchpunkte, und es kommt dann darauf an, unter diesen verschiedenen Maximalwerthen von M denjenigen herauszusuchen, welcher absolut genommen der größte ist. Der Querschnitt, für welchen dieses Moment gilt, heißt dann als der bei dem prismatischen Körper am meisten gefährdete der absolute Bruchquerschnitt.

Nach dem Vorstehenden ist die Aufsuchung der Bruchpunkte, d. h. also der Maximalwerthe von M ihrer Größe und Lage nach immer von besonderer Wichtigkeit. Man kann sich diese Untersuchung durch graphische Darstellungen sehr erleichtern, und erreicht dabei den Vortheil, von der Veränderlichkeit des Momentes M immer ein anschauliches Bild zu erhalten. Denkt man sich zu dem Zwecke für jeden Punkt des Balkens das Moment berechnet, und auf einer Geraden AB, Fig. 409, II., von der Länge des Balkens in den einzelnen Punkten Ordinaten ab aufgetragen, welche den Momenten in den darüberliegenden Punkten des Balkens nach einem beliebigen Verhältnisse proportional sind (nach oben für positive, abwärts für negative Momente), so giebt die Verbindung der Endpunkte sämmtlicher Ordinaten eine gewisse gerade oder krumme Linie, welche in ihrem Verlaufe ein deutliches Bild von

der Veränderlichkeit der Momente ergiebt. Es ist dazu in den meisten Fällen, wenn nicht etwa die Belastungsart eine ganz unregelmäßige ist, nur die Berechnung und Auftragung einer oder einiger weniger Ordinaten nöthig, um die entsprechende Curve ihrem Gesetze gemäß zu verzeichnen. So z. B. hat man in dem vorliegenden Falle nur nöthig, das Moment in einem Punkte, etwa in B zu berechnen und gleich BD nach einem beliebigen Maßstabe aufzutragen. Die gerade Verbindungslinie AD ist dann die gesuchte Linie. Namentlich läßt diese Darstellung eine Combination der Momente, die von verschiedenen Kräften und Belastungen herrühren, zu, wobei man natürlich den an sich beliebigen Maßstab für sämmtliche Momente beibehalten muß.

Für die elastische Linie des Balkens hat man nach §. 223 für irgend welchen Punkt im Abstande x von B die Bedingung:

$$WE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P.(l - x),$$

woraus durch Integration

$$1)\quad \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{P}{WE}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \alpha_0.$$

Die Constante ist nämlich hier α_0, weil für $x = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha_0$ sein muß.

Aus 1 folgt wieder durch Integration:

$$2)\quad y = \frac{P}{2WE}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \alpha_0 x.$$

Diese beiden Gleichungen geben für jeden Punkt der elastischen Linie die Neigung und die Senkung an, und man erhält speciell die Neigung α_1 im Angriffspunkte A und die Senkung s ebendaselbst, wenn man $x = l$ in die Gleichungen einsetzt, zu:

$$3)\quad \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{P}{2WE}l^2,$$

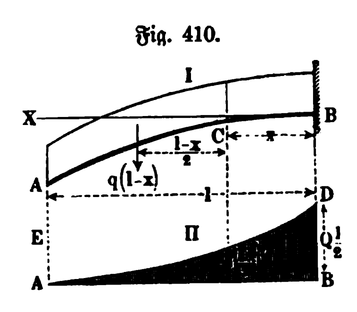
$$4)\quad s = \alpha_0 l + \frac{P}{3WE}l^3.$$

Bei einer horizontalen Einmauerung des Balkens hat man $\alpha_0 = 0$ zu setzen. Wenn der Balken über den Angriffspunkt der Kraft hinaus noch um eine bestimmte Länge l' verlängert wäre, so würde die Verlängerung zwar eine Krümmung nicht erleiden, sie würde jedoch unter dem aus Gleichung 3 sich ergebenden Neigungswinkel α_1 gegen den Horizont geneigt sein, und in Folge dessen beträgt die Senkung des freien Endes außer dem für den Angriffspunkt A aus Gleichung 4 sich ergebenden Betrage s noch den Werth $l'\alpha_1$, im Ganzen also

$$s + \alpha_1 l' = \alpha_0 l + \frac{P}{3WE}l^3 + \alpha_0 l' + \frac{P}{2WE}l^2 l'.$$

Wenn der Balken AB, Fig. 410 I., eine über seine ganze Länge l gleichmäßig vertheilte Last Q zu tragen hat, wobei q die Belastung $q = \frac{Q}{l}$ pro Längeneinheit beträgt, so bestimmt sich das Moment M für einen Querschnitt C im Abstande x von B, als das Moment der auf dem Balkenstücke $AC = l - x$ ruhenden Belastung $q(l - x)$. Da diese Last in ihrem Schwerpunkte, also im Abstande $\frac{l-x}{2}$ von C wirkend zu denken ist, so folgt das Moment §. 236.

Fig. 410.



$$M = q(l - x)\frac{l - x}{2} = q\frac{(l - x)^2}{2},$$

und für die Tragkraft des Balkens in C gilt daher die Gleichung:

$$q\frac{(l - x)^2}{2} = k\frac{W}{e}.$$

Das Moment M ist hier ebenfalls für $x = 0$ ein Maximum, welches sich zu $q l \frac{l}{2} = \frac{Q l}{2}$ herausstellt, also nur halb so groß, als das Bruchmoment ist, welches derselben Last am Ende des Balkens entspricht. Die Momentencurve, Fig. 410 II., ist hier eine Parabel. Um dies zu erkennen, setze man in dem Ausdrucke für $M = q\frac{(l - x)^2}{2}$ die Differenz $l - x = z$, so wird die Gleichung $M = \frac{q}{2} z^2$, welche Gleichung für eine Parabel gilt, deren Parameter $\frac{2}{q}$ ist, deren Scheitel in A und deren Axe in AE fällt.

Die Gleichung der elastischen Linie folgt wie im vorigen Paragraph zu:

$$WE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{q}{2}(l - x)^2 = \frac{q}{2}(l^2 - 2lx + x^2)$$

und daraus

$$\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \alpha_0 + \frac{q}{2WE}\left(l^2 x - l x^2 + \frac{x^3}{3}\right)$$

$$y = \alpha_0 x + \frac{q}{2WE}\left(\frac{l^2 x^2}{2} - \frac{l x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right),$$

woraus, wenn $x = l$ eingesetzt wird, für das freie Balkenende folgt:

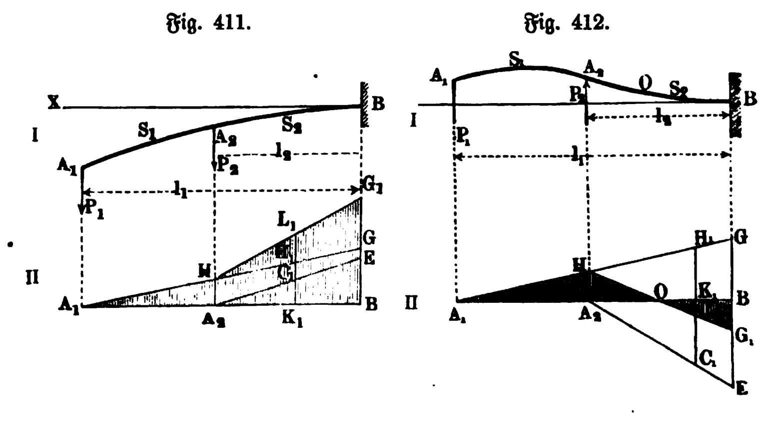
$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{q}{2WE}\left(l^3 - l^3 + \frac{l^3}{3}\right) = \alpha_0 + \frac{Q l^2}{6WE}, \text{ und}$$

$$s = \alpha_0 l + \frac{q}{2WE}\left(\frac{l^4}{2} - \frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{12}\right) = \alpha_0 l + \frac{Ql^3}{8WE}.$$

Die Neigung des Balkens am Ende beträgt daher nur $^1/_3$ von derjenigen, welche der Balken annehmen würde, wenn die Last im Endpunkte A concentrirt wäre, und die Senkung am Ende ist nur $^3/_8$ von derjenigen des am Ende belasteten Balkens.

§. 237. **Biegung durch zwei Kräfte.** Wird ein an einem Endpunkte B fest eingeklemmter Balken $A_1 A_2 B$, Fig. 411 und 412, von zwei Kräften

Fig. 411. Fig. 412.



P_1 und P_2 gebogen, deren Angriffspunkte A_1 und A_2 von dem Befestigungspunkte die Abstände l_1 und l_2 haben, so fällt das Biegungsmoment in einem Punkte S_1 des Stückes $A_1 A_2$:

$$M_1 = P_1 (l_1 - x),$$

und dagegen das in einem Punkte S_2 des Stückes $A_2 B$:

$$M_2 = P_1 (l_1 - x) \pm P_2 (l_2 - x)$$

aus, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Kraft P_2 dieselbe oder die entgegengesetzte Richtung hat wie P_1. Macht man in Fig. 411 und 412 II. $BG = P_1 l_1$ und $BE = P_2 l_2$, so stellen die geraden Linien $A_1 G$ und $A_2 E$ die Momente dar, welche den Kräften P_1 und P_2 einzeln für die verschiedenen Querschnitte des Balkens entsprechen. Um von dem resultirenden Momente beider Kräfte eine Darstellung zu erhalten, hat man daher nöthig, in jedem Punkte die beiden diesem Punkte zugehörigen Ordinaten der beiden Geraden $A_1 G$ und $A_2 E$ zu addiren, indem man z. B. $K_1 C_1$ von H_1 in der entsprechenden Richtung nach $H_1 L_1$ anträgt.

Sind, wie in dem vorliegenden Falle die Momente durch gerade Linien dargestellt, so genügt es offenbar, nur einmal etwa in B die gedachte Antragung vorzunehmen, und man erhält, wenn man $G G_1 = BE$ macht,

und $H G_1$ zieht, durch die gebrochene Linie $A H G_1$ ein Bild von der Veränderlichkeit des resultirenden Kraftmomentes.

Wenn die beiden Kräfte P_1 und P_2 in derselben Richtung wirken, so hat das resultirende Moment, wie Fig. 411 II. zeigt, sein Maximum in B, und es gilt für die Tragfähigkeit des Balkens die Gleichung:

$$max. M = P_1 l_1 + P_2 l_2 = k \frac{W}{e}.$$

Da das Moment in diesem Falle überall positive Werthe hat, so wird der Balken auch an allen Punkten nach derselben Richtung gekrümmt sein, und zwar nach unten concav. Die Krümmung ist von A_1 nach B hin wachsend, da das Moment fortwährend in dieser Richtung größer wird.

Wenn die beiden Kräfte entgegengesetzte Richtung haben, Fig. 412, so ist das Moment in B ausgedrückt durch:

$$M = P_1 l_1 - P_2 l_2,$$

das Moment in A_2 ist wie im ersten Falle $P_1 (l_1 - l_2)$.

Es kommt nun ganz auf das Verhältniß von $P_1 l_1$ zu $P_2 l_2$ an, welcher von den beiden Werthen des Momentes in A_2 und B der absolut größere und daher bei der Beurtheilung der Tragfähigkeit maßgebende ist. Setzt man $P_1 l_1 = P_2 l_2$, so fällt die Linie $H G_1$ nach $H B$; das Moment in B ist Null und A_2 ist der Bruchquerschnitt. Ist indeß $P_1 l_1 > P_2 l_2$, so rückt der Punkt G_1 über B, das Moment in B hat einen positiven Werth, welcher in dem Falle, daß $P_1 = P_2$ wird, sich berechnet zu

$$P_1 l_1 - P_1 l_2 = P_1 (l_1 - l_2),$$

also ebenso groß, wie das Moment in A_2. Die Momentenlinie $H G_1$ fällt dann parallel mit der Axe $B A_1$ aus, und das Moment ist in der Strecke $A_2 B$ constant gleich $P_1 (l_1 - l_2)$. In diesem Falle ist die Krümmung des Balkens zwischen A_2 und B ebenfalls constant, d. h. die elastische Linie ist zwischen A_2 und B ein Kreisbogen, dessen Halbmesser nach dem Früheren aus

$$M = \frac{WE}{r} \text{ zu } r = \frac{WE}{P_1 (l_1 - l_2)}$$

sich berechnet.

Wenn $P_2 < P_1$ ist, so rückt der Punkt G_1 noch höher hinauf, und nähert sich dem Punkte G, ohne denselben jedoch jemals zu erreichen, so lange P_2 nicht zu Null wird.

Setzt man jedoch $P_1 l_1 < P_2 l_2$ voraus, so rückt, wie in Fig. 412, G_1 unter die Axe $B A_1$ herunter, und die Linie $H G_1$ schneidet die Axe irgendwo in einem Punkte O, dessen Abstand x von B gegeben ist durch die Bedingung:

$$P_1 (l_1 - x) = P_2 (l_2 - x).$$

Auf der Strecke $A_1\,O$ ist das Moment überall positiv, daher die elastische Linie hier überall concav nach unten gekrümmt. Das Moment erreicht auf dieser Strecke sein Maximum in A_2 und zwar $P_1\,(l_1 - l_2)$. In O ist $M = 0$; daher der Radius der elastischen Linie daselbst:

$$r = \frac{WE}{M} = \frac{WE}{0} = \infty,$$

d. h. der Balken nimmt an dieser Stelle gar keine Krümmung an, die elastische Linie hat daselbst einen Wende- oder Inflexionspunkt (siehe analyt. Hülfslehren, §. 14). Zwischen O und B ist das Moment negativ, der Balken wird daher in dieser Strecke concav nach oben gebogen. Das Moment erreicht hier seinen größten Werth in B von der Größe $P_1 l_1 - P_2 l_2$. Es sind sonach hier zwei relative Bruchpunkte vorhanden, einer in A_2, der andere in B; und für die Tragfähigkeit des Balkens ist derjenige Werth von $P_1\,(l_1 - l_2)$ und $P_1\,l_1 - P_2\,l_2$ maßgebend, welcher absolut genommen der größere ist.

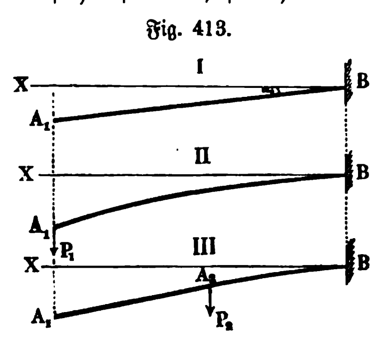
§. 238. **Elastische Linie für zwei Kräfte.** Die Gleichungen der elastischen Linie eines von zwei Kräften P_1 und P_2 angegriffenen Balkens lassen sich aus den in den Paragraphen 235 und 236 gefundenen Formeln leicht zusammensetzen. Da durch die in A_2 wirkende Kraft P_2, Fig. 411 und 412, in der elastischen Linie eine Stetigkeitsunterbrechung erzeugt wird, so gelten für die beiden Strecken $A_1\,A_2$ und $A_2\,B$ natürlich auch besondere Gleichungen.

Die Neigungen und Senkungen der elastischen Linie entstehen hier aus drei Ursachen, und zwar aus:

1) der Neigung α_0, unter welcher der Balken bei B befestigt ist,
2) der Einwirkung der Kraft P_1 und
3) der Einwirkung der Kraft P_2.

Addirt man für jeden Punkt des Balkens die Wirkungen, welche aus diesen drei Ursachen stammen, so erhält man die Ausdrücke für die resultirenden Neigungen und Senkungen der elastischen Linie. In Fig. 413 ist in I. ein nicht durch Kräfte angegriffener unter α_0 eingeklemmter Balken gezeichnet. Man erkennt, daß die Neigung in allen Punkten dieselbe α_0 und daß die Senkung, in Folge der schrägen Einspannung allein, im Abstande x von B, $\alpha_0\,x$ und am Ende $\alpha_0\,l_1$ beträgt. In II. ist ein horizontal

Fig. 413.



eingespannter Balken dargestellt, an dessen freiem Ende die Kraft P_1 wirkt. Die Neigung und Senkung jedes Punktes ist hier bekannt durch die Formeln in §. 235. In III. endlich ist ein ebenfalls horizontal eingeklemmter Balken gezeichnet von der Länge l_1, welcher in A_2 im Abstande l_2 von B durch eine Kraft P_2 angegriffen wird. Für die Strecke $A_2 B$ ist die Neigung und Senkung jedes Punktes ebenfalls durch die erwähnten Gleichungen §. 235 bestimmt, für das überragende Stück $A_2 A_1$ hat man zu berücksichtigen, daß für dasselbe überall die in A_2 stattfindende Neigung

$$\alpha = \frac{P_2}{WE} \frac{l_2^2}{2}$$

vorhanden ist, und daß vermöge dieser Neigung, ähnlich wie in I., ein Punkt im Abstande x von B noch um die Größe

$$\alpha (x - l_2) = \frac{P}{WE} \frac{l_2^2}{2} \cdot (x - l_2)$$

tiefer liegt, als A_2, so daß in diesem Punkte, durch alleinigen Einfluß von P_2 eine totale Senkung von

$$\frac{P_2}{3\,WE} l_2^3 + \frac{P_2}{WE} \frac{l_2^2}{2} \cdot (x - l_2)$$

und in A_1 eine solche von

$$\frac{P_2}{3\,WE} l_2^3 + \frac{P_2}{WE} (l_1 - l_2)$$

eintritt. Wenn man dies berücksichtigt, so kann man die Gleichungen für die elastische Linie ohne Weiteres hinschreiben. Dieselben sind, wenn α im Allgemeinen die Neigung und y im Allgemeinen die Senkung eines beliebigen Punktes im Abstande x von B bedeuten, folgende:

a) für die Strecke $A_2 B$:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{P_1}{WE}\left(l_1 x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{P_2}{WE}\left(l_2 x - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \alpha_0 + \frac{P_1 (2\, l_1 x - x^2) + P_2 (2\, l_2 x - x^2)}{2\; WE},$$

$$y = \alpha_0 x + \frac{P_1}{2\,WE}\left(l_1 x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{P_2}{2\,WE}\left(l_2 x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$

$$= \alpha_0 x + \frac{P_1 (3\, l_1 x^2 - x^3) + P_2 (3\, l_2 x^2 - x^3)}{6\; WE}$$

und speciell für A_2 ist:

$$\alpha_2 = \alpha_0 + \frac{P_1 (2\, l_1 l_2 - l_2^2) + P_2 l_2^2}{2\; WE},$$

$$s_2 = \alpha_0 l_2 + \frac{P_1 (3\, l_1 l_2^2 - l_2^3) + P_2 \,.\, 2\, l_2^3}{6\; WE};$$

b) für die Strecke $A_1 A_2$:

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{P_1}{WE}\left(l_1 x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{P_2}{WE}\frac{l_2^2}{2}$$

$$= \alpha_0 + \frac{P_1(2 l_1 x - x^2) + P_2 l_2^2}{2\, WE},$$

$$y = \alpha_0 x + \frac{P_1}{2\, WE}\left(l_1 x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{P_2}{3\, WE} l_2^3 + (x - l_2)\frac{P_2}{WE}\frac{l_2^2}{2}$$

$$= \alpha_0 x + \frac{P_1(3 l_1 x^2 - x^3) + P_2[2 l_2^3 + 3(x - l_2) l_2^2]}{6\, WE},$$

und speciell für A_1 ist:

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2}{2\, WE} \text{ und}$$

$$s_1 = \alpha_0 l_1 + \frac{P_1 \,.\, 2 l_1^3 + P_2[2 l_2^3 + 3(l_1 - l_2) l_2^2]}{6\, WE}$$

$$= \alpha_0 l_1 + \frac{P_1\, 2 l_1^3 + P_2(3 l_1 l_2^2 - l_2^3)}{6\, WE}.$$

In derselben Weise könnte man auch für beliebig viele Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ die Gleichungen für die einzelnen Strecken der elastischen Linie, und damit überall die Neigung und Senkung derselben finden. Ist ferner anstatt einer dieser Kräfte P eine gleichmäßig vertheilte Belastung vorhanden, so sind für dieselbe die Formeln aus §. 236 anzuwenden.

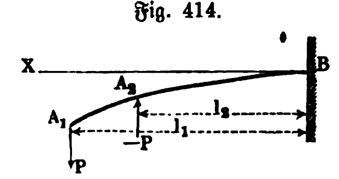
§. 239. **Wirkung eines Kräftepaars.** Wenn der Balken $A_1 B$, Fig. 414, unter der Einwirkung eines Kräftepaars P, $-P$, steht, so erhält man die Gleichung der elastischen Linie für die Strecke $A_2 B$, wenn man in der oben entwickelten Formel $P_1 = P$ und $P_2 = -P$ setzt. Es folgt dann, wenn man $\alpha_0 = 0$ annimmt:

$$\alpha = \frac{P(2 l_1 x - x^2 - 2 l_2 x + x^2)}{2\, WE} = \frac{P(l_1 x - l_2 x)}{WE} = \frac{P(l_1 - l_2)}{WE} x.$$

Nun ist aber $P(l_1 - l_2)$ nichts anderes, als das Moment des Kräftepaars, welches mit M bezeichnet werde, so daß man also auch schreiben kann

$$\alpha = \frac{M}{WE} x, \text{ oder } \frac{\alpha}{x} = \frac{M}{WE}.$$

Fig. 414.



Aus der letzten Gleichung folgt, daß die auf die Längeneinheit entfallende Biegung $\frac{\alpha}{x}$ constant für alle Punkte der Strecke $A_2 B$ ist, und außer von dem Biegungsmomente WE nur von dem Momente M des Kräftepaars, nicht aber

von der Länge l_2 abhängt. In Folge dieser constanten Krümmung ist die elastische Linie zwischen A_2 und B ein Kreis, wie wir schon früher anführten. Die Neigung der elastischen Linie in A_2 ergiebt sich hier zu:

$$\alpha_2 = \frac{M}{WE} l_2 \text{ oder allgemein } \alpha = \frac{M}{WE} l.$$

Denkt man sich einen Balken von der Länge l, welcher an einem Ende die Last P zu tragen hat, so ist die Neigung am Ende gegeben durch

$$\frac{Pl^2}{2WE} = \frac{M}{WE} \cdot \frac{l}{2},$$

unter M das Angriffsmoment Pl verstanden, und wenn die Last $2P$ gleichmäßig über den Balken verbreitet ist, so beträgt die Neigung am Ende

$$\frac{2Pl^2}{6WE} = \frac{Pl}{WE}\frac{l}{3} = \frac{M}{WE}\frac{l}{3},$$

unter M das Moment $2P \cdot \frac{l}{2} = Pl$ verstanden. Es geht daraus hervor, daß ein Kräftepaar, dessen Moment M ist, an einem Balken von der Länge l eine doppelt so große Neigung des freien Endes erzeugt, als eine Kraft P, die am freien Ende wirkt und deren Moment $Pl = M$ ist, und eine dreimal so große Neigung, als eine gleichmäßig vertheilte Last, deren Moment

$$2P \cdot \frac{l}{2} = M \text{ ist.}$$

Um die Senkung des von einem Kräftepaar $P, -P$, in dem Punkte A_2, d. h. im Abstande l_2 zu ermitteln, erhält man nach Einsetzung von P für P_1 und $-P$ für P_2 in der betreffenden Gleichung in §. 238 das Resultat:

$$s_2 = \frac{P.(3l_1l_2^2 - l_2^3) - P.2l_2^3}{6WE} = \frac{P(l_1 - l_2)l_2^2}{2WE} = \frac{M}{2WE}l_2^2,$$

oder allgemein

$$s = \frac{M}{2WE}l^2.$$

Wenn die Senkung an einem Balken von gleicher Länge l durch ein am Ende wirkendes Gewicht P hervorgebracht wird, dessen Moment Pl gleich dem Momente des Kräftepaars ist, so beträgt sie

$$\frac{Pl^3}{3WE} = \frac{M}{WE}\frac{l^2}{3},$$

und wenn sie durch eine gleichmäßig vertheilte Last $2P$ erzeugt wird, deren Moment $2P\frac{l}{2}$ ebenfalls gleiche Größe mit dem Momente des Kräftepaars hat, so beträgt sie

$$\frac{2P.l^3}{8WE} = \frac{2P\cdot\frac{l}{2}}{WE}\cdot\frac{l^2}{4} = \frac{M}{WE}\frac{l^2}{4}.$$

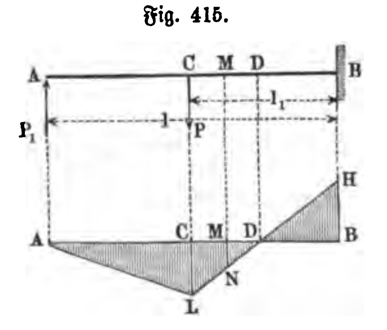
Es beträgt also die von dem Kräftepaar erzeugte Senkung $^3/_2$ mal so viel, als die durch die Kraft P; und 2mal so viel als die durch die Last $2P$ erzeugte Durchbiegung.

Die Einwirkung eines Kräftepaars auf das Balkenende muß immer angenommen werden, sobald ein solches Ende nicht auf einer einfachen Stütze ruht, sondern in der Mauer eingeklemmt, oder durch Schrauben so mit dem betreffenden festen Gerüst verbunden ist, daß die Balkenaxe an der Befestigungsstelle genöthigt ist, in einer bestimmten Richtung (meist in der horizontalen) zu verharren. Da nämlich ein auf Stützen ruhender Balken bei der Biegung über den Stützpunkten Neigungen annimmt, wie sie im Vorstehenden ermittelt worden sind, so muß man die Wirkung des Einklemmens oder Einspannens sich so vorstellen, als ob an der Befestigungsstelle ein Kräftepaar wirkend wäre, welches das Balkenende so weit zurückbiegt, als die äußeren Kräfte bestrebt sind, den Balken von der Richtung abzubiegen, unter welcher die Einspannung geschehen ist. Es liegt daher auf der Hand, daß dieses Kräftepaar nicht auftreten würde, wenn man die Enden eines auf Stützen ruhenden Balkens unter denjenigen Winkeln einklemmen wollte, unter welchen diese Enden sich durch den Einfluß der äußeren Kräfte schon von vornherein biegen würden. Ein Zwang würde in diesem Falle durch das Einklemmen nicht ausgeübt werden.

Der hier betrachtete Fall der Einwirkung eines Kräftepaars auf einen Balken kommt in der Praxis u. A. bei den Axen der Eisenbahnwagen vor. Es ist dabei der Druck der Feder auf die Axbüchse P, und die Reaction der Schiene $-P$ (oder umgekehrt), und man kann sich die Axe in der Mitte horizontal eingespannt denken, da die Belastung beiderseits symmetrisch angeordnet ist.

§. 240. **Einseitig aufliegender Balken.** Die Formeln in §. 238 finden in mehreren Fällen der Praxis ihre Anwendung. Ist z. B. ein Balken AB, Fig. 415, in einem Endpunkte B horizontal eingemauert und im anderen Endpunkte A einfach unterstützt, so entsteht die Frage, welches ist die Biegungskraft in A oder welchen Druck P_1 hat die Stütze A auszuhalten, während der Balken in einem Zwischenpunkte C von einer Last P niedergezogen wird?

Fig. 415.



Es sei die ganze freie Balkenlänge $AB = l$, die Armlänge

der Last P, also $BC = l_1$; so ist in der Formel für s_1, §. 238, zu setzen:

l für l_1; l_1 für l_2; $-P_1$ für P_1; P für P_2 und $\alpha_0 = 0$.

Da nun A und B in gleichem Niveau liegen, so muß s_1, d. h. die Senkung des Angriffspunktes A von P_1, gleich Null sein. Demnach folgt:

$$s_1 = 0 = \frac{-P_1\, 2\, l^3 + P\,(3\, l\, l_1^2 - l_1^3)}{6\, WE},$$

woraus die gesuchte Stützkraft in A:

$$P_1 = \frac{3\, l\, l_1^2 - l_1^3}{2\, l^3} \cdot P.$$

Für den Fall, daß P in der Mitte wirkt, d. h. wenn $l = 2\, l_1$ ist, folgt:

$$P_1 = \frac{3\, l\, \frac{l^2}{4} - \frac{l^3}{8}}{2\, l^3}\, P = \frac{5}{16}\, P.$$

Hieraus folgt das Biegungsmoment in C:

$$M_1 = -P_1\, \frac{l}{2} = -\frac{5}{32}\, Pl = -0{,}15625\, Pl;$$

dagegen das in B:

$$M_2 = -P_1\, l + P\, \frac{l}{2} = \frac{3}{16}\, Pl = 0{,}1875\, Pl.$$

Es ist also das Moment in B größer, als in C, und daher B der Bruchpunkt, für welchen die Beziehung gilt:

$$M = \frac{3}{16}\, Pl = k\, \frac{W}{e},$$

woraus die Tragkraft des Balkens zu:

$$P = \frac{16}{3}\, \frac{kW}{le}$$

folgt.

Für einen Punkt M zwischen B und C, dessen Abstand von A gleich x sei, ist das Moment

$$-P_1 \,.\, x + P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{-5\, Px + 16\, P\left(x - \frac{l}{2}\right)}{16}.$$

Setzt man diesen Werth gleich Null, so ergiebt sich

$$x = \frac{8}{11}\, l = 0{,}7272\, l$$

als der Abstand des Punktes D, in welchem eine Biegung nicht eintritt, d. h. des Inflexionspunktes. Die Veränderlichkeit dieses Momentes und der Biegung des Balkens wird durch die Ordinaten der Geraden HL und LA

veranschaulicht, welche durch die Endpunkte von $BH = \frac{6}{32} Pl$ und von $CL = -\frac{5}{32} Pl$ gehen.

Wenn man sich die Aufgabe stellt, die beiden größten Momente in B und C gleich groß zu machen, so ergiebt sich aus:

$$P_1 (l - l_1) = P l_1 - P_1 l;\ P_1 = \frac{l_1}{2l - l_1} P$$

oder wenn wieder $l = 2 l_1$ ist:

$$P_1 = \frac{P}{3}.$$

Das Moment ist dann in B wie in C

$$M_1 = M_2 = \frac{P}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{6} Pl = 0{,}16667\ Pl.$$

Wenn man den Werth $\frac{P}{3}$ für P_1 in den Ausdruck für die Senkung s_1 einsetzt, so wird:

$$s_1 = \frac{-\frac{P}{3} 2 l^3 + P\left(3 l \frac{l^2}{4} - \frac{l^3}{8}\right)}{6\ WE} = -\frac{1}{24} \frac{Pl^3}{6\ WE} = -\frac{Pl^3}{144\ WE}.$$

Wenn man also dem Stützpunkte A eine Senkung von $-\frac{Pl^3}{144\ WE}$ giebt, d. h. denselben um dieselbe positive Größe höher legt als B, so erhält man in B und C gleich große Bruchmomente von der Größe $\frac{Pl}{6}$. Das Bruchmoment ist daher durch diese Anordnung um $\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{6}\right) Pl = 0{,}0208\ Pl$, d. h. um etwa 9 Procent kleiner geworden, als wenn A und B in gleicher Höhe liegen.

Es ist hierbei immer $\alpha_0 = 0$, d. h. eine horizontale Einmauerung des Balkens bei B vorausgesetzt. Man könnte die Gleichheit der Momente aber bei gleicher Höhenlage der Stützpunkte A und B auch durch eine schräge Einmauerung unter einem Winkel α_0 erlangen, welcher Winkel sich aus

$$s_1 = 0 = \alpha_0 l + \frac{-\frac{P}{3} 2 l^3 + P\left(3 l \frac{l^2}{4} - \frac{l^3}{8}\right)}{6\ WE}$$

ergiebt. Es folgt daraus

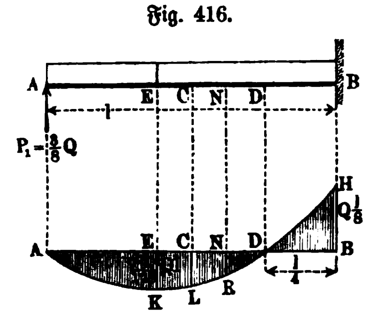
$$\alpha_0 = + \frac{Pl^2}{144\ WE},$$

d. h. man muß bei gleicher Höhe von A und B den Balken unter diesem Winkel α_0 nach unten schräg einmauern.

Der Inflexionspunkt D liegt unter der Voraussetzung der vortheilhaftesten Unterstützung, d. h. wenn $AH = CL$, offenbar in der Mitte zwischen A und C.

Wenn der Balken AB, Fig. 416, eine gleichmäßig über seine Länge vertheilte Last $Q = ql$ zu tragen hat, so berechnet sich ebenso wie vorher die Stützkraft P_1 in A dadurch, daß die unter Einfluß von P_1 und Q dem Balken in A ertheilte Senkung $s_1 = 0$ gesetzt wird, sobald die Punkte A und B gleich hoch gelegen sind. Ist auch $\alpha_0 = 0$, so gilt also die Gleichung:

Fig. 416.



$$s_1 = 0 = \frac{Q l^3}{8 WE} - \frac{P_1 l^3}{3 WE},$$

woraus

$$P_1 = \frac{3}{8} Q \text{ sich ergiebt.}$$

Das Biegungsmoment in irgend einem Punkte, dessen Abstand von A gleich x ist, berechnet sich zu:

$$M = - P_1 x + q \frac{x^2}{2} = - \frac{3}{8} q l x + q \frac{x^2}{2}.$$

Dasselbe hat zunächst einen größten Werth M_1 für $x = l$, nämlich:

$$M_1 = - \frac{3}{8} q l^2 + q \frac{l^2}{2} = q \frac{l^2}{8} = \frac{Ql}{8}.$$

Ein anderes Maximum besteht für $x = \frac{P_1}{q}$ *).

Setzt man diesen Werth ein in die allgemeine Gleichung

$$M = - P_1 x + q \frac{x^2}{2},$$

so folgt das zweite Maximum des Momentes:

$$M_2 = - P_1 \frac{P_1}{q} + \frac{q}{2} \cdot \frac{P_1^2}{q^2} = - \frac{P_1^2}{2q},$$

*) In dem Abstande von $x = \frac{P_1}{q}$ von A ist nämlich die verticale Schubkraft Null, daher das Moment nach §. 220 ein Maximum. Auch findet man aus $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$, ohne Weiteres $- P_1 + \frac{q}{2} \cdot 2x = 0$, also $x = \frac{P_1}{q}$.

oder da $P_1 = \frac{3}{8} q l,$

so ist auch $M_2 = - \frac{9}{64} \frac{q^2 l^2}{2 q} = - \frac{9}{128} Q l.$

Da $M_1 = \frac{1}{8} Q l = \frac{16}{128} Q l$ größer als M_2 ist, so gilt für die Tragkraft des Balkens die Gleichung

$$M_1 = \frac{Q l}{8} = k \frac{W}{e};$$

woraus die Tragkraft Q also $8 \,.\, {}^3/_{16} = 1^1/_2$mal so groß folgt, als wenn die Last in der Mitte concentrirt ist.

Das Moment $M = - P_1 x + q \frac{x^2}{2}$ ist Null für $x = 0$ und $x = 2 \frac{P_1}{q} = {}^3/_4 l$; so daß der Inflexionspunkt D, von dem Balkenende A einen Abstand ${}^3/_4 l$ hat. Die Curve $HDKA$ in Fig. 416 läßt die Veränderlichkeit des Momentes erkennen.

Man kann sich auch hier die Aufgabe stellen, die beiden Momente $M_1 = BH$ und $M_2 = KE$ gleich groß zu machen, und hat dann:

$$M_1 = - P_1 l + q \frac{l^2}{2} = \frac{P_1^2}{2 q} = - M_2.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man:

$$P_1 = - q l + \sqrt{(q l)^2 + (q l)^2} = q l \left(- 1 + \sqrt{2}\right) = 0{,}4141\, Q.$$

Setzt man diesen Werth für P_1 ein, so erhält man das Moment in B

$$M_1 = - 0{,}4141\, Q l + Q \frac{l}{2} = 0{,}0857\, Q l.$$

Das Maximum M_2 liegt jetzt im Abstande

$$x = \frac{P_1}{q} = \frac{0{,}4141\, q l}{q} = 0{,}4141\, l,$$

und es beträgt für diesen Punkt ebenfalls

$$M_2 = - P_1\, 0{,}4141\, l + \frac{(0{,}4141\, l)^2}{2} q = - 0{,}0857\, Q l.$$

Um die Gleichheit der Momente zu erreichen ist wie vorher entweder eine Ueberhöhung der Stütze A, oder eine schräge Einmauerung nach unten unter dem Winkel α_0 nöthig, und man findet wie vordem die Erhöhung

$$s_1 = - \frac{0{,}4141\, Q \,.\, l^3}{3\, W E} + \frac{Q l^3}{8\, W E} = \frac{- 3{,}3128 + 3}{24} Q l^3$$
$$= - 0{,}013 \frac{Q l^3}{W E},$$

oder die Neigung

$$\alpha_0 = +\ 0{,}013\ \frac{Q l^2}{W E}.$$

Durch diese Anordnung wird das bei gleicher Höhe von A und B und horizontaler Einmauerung $\frac{1}{8}\ Q l$ betragende Bruchmoment um $0{,}0393\ Q l$ oder um etwa 31 Procent herabgezogen, also die Tragkraft in entsprechendem Verhältnisse vergrößert.

Beispiel. Wie hoch muß ein 0,200 Meter breiter hölzerner Balken gemacht werden, welcher an einem Ende horizontal eingemauert und in 5 Meter Entfernung durch eine Säule unterstützt ist, und pro laufenden Meter mit 500 Kilogramm gleichmäßig belastet ist, wenn die größte zulässige Spannung zu 0,75 Kilogramm pro 1 Quadratmillimeter angenommen wird?

Wenn die beiden Stützpunkte in gleichem Niveau liegen, so ist das größte Biegungsmoment an der Einmauerungsstelle

$$M_1 = \frac{Q l}{8} = \frac{q l^2}{8} = \frac{0{,}5 \cdot 5000 \cdot 5000}{8} = 1'562500,$$

daher folgt die erforderliche Höhe h des Querschnittes aus:

$$M_1 = 1'562500 = \frac{1}{6}\ b h^2 k = \frac{200 \cdot h^2 \cdot 0{,}75}{6} \text{ zu } h = \sqrt{62500} = 250 \text{ Millim.}$$

Wenn man durch Hebung der Stütze $M_1 = M_2 = 0{,}0857\ Q l$ macht, so folgt h_1 aus

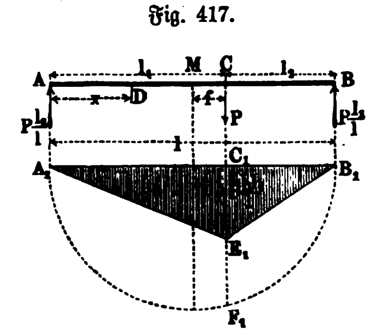
$$0{,}0857 \cdot 0{,}5 \cdot 5000^2 = \frac{1}{6}\ 200\ h_1^2\ 0{,}75 \text{ zu } h_1 = 205 \text{ Millimeter.}$$

Die hierzu erforderliche Hebung s der Stütze bestimmt sich, wenn man den Elasticitätsmodul $E = 1100$ Kilogramm annimmt:

$$s = 0{,}013\ \frac{q l^4}{W E} = 0{,}013\ \frac{0{,}5 \cdot 5000^4}{\frac{1}{12}\ 200 \cdot 205^3 \cdot 1100} = 25{,}7 \text{ Millimeter.}$$

Balken auf zwei Stützen. Wenn ein Balken AB, Fig. 417, von der Länge l in A und B auf zwei Stützen aufruht, und in C im Abstande $AC = l_1$ von A und $BC = l_2$ von B eine Last P zu tragen hat, so erhält die Stütze A einen Druck P_1, welcher durch die Momentengleichung in Bezug auf B: §. 241.

Fig. 417.



$$-P_1 l + P l_2 = 0$$

sich ergiebt zu

$$P_1 = P\ \frac{l_2}{l}.$$

Ebenso ist der Auflagerdruck P_2 in B; $P_2 = P\ \frac{l_1}{l}$. Das Bie-

gungsmoment in einem Punkte D, dessen Abstand von A gleich x sein mag, ist:

$$P_1 x = P \cdot \frac{l_2}{l} x,$$

welches Moment in C sein Maximum erreicht, gleich

$$P_1 l_1 = P \cdot \frac{l_1 l_2}{l}.$$

Trägt man diese Größe in C_1 gleich $C_1 E_1$ auf, so stellen die Ordinaten der Geraden $A_1 E_1$ für jeden Punkt des Balkenstückes AC die Kraftmomente dar, da dieselben den Abständen x proportional wachsen. Eine gleiche Betrachtung läßt sich für das andere Balkenstück BC anstellen, für welches die Gerade $E_1 B_1$ die Kraftmomente darstellt. Der Balken ist auf seiner ganzen Länge concav nach oben gekrümmt, und der Bruchpunkt liegt in C. Man hat daher für die Tragkraft die Gleichung:

$$P \frac{l_1 l_2}{l} = k \frac{W}{e}.$$

Wenn P in der Mitte wirksam ist, so hat man $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ und es geht obige Gleichung über in:

$$P \frac{l}{4} = k \frac{W}{e},$$

d. h. ein auf zwei Stützen ruhender in der Mitte belasteter Balken hat eine viermal so große Tragkraft, wie ein an einem Ende eingeklemmter und am anderen Ende belasteter Balken von derselben Länge.

Wenn die Kraft P in der Mitte wirkt, so ist die Tragkraft des Balkens am kleinsten, denn das Product $P \frac{l_1 l_2}{l}$ ist offenbar ein Maximum für $l_1 = l_2$. Der Ausdruck $l_1 l_2$ ist nämlich als ein Rechteck mit den Seiten l_1 und l_2 aufzufassen. Wenn man über $A_1 B_1$ einen Halbkreis zeichnet, so ist das in C errichtete Loth $C_1 F_1$ nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises von solcher Größe, daß $C_1 F_1^2 = A_1 C_1 \times B_1 C_1$. Das von P in verschiedenen Lagen des Angriffspunktes hervorgerufene Bruchmoment ist daher den Quadraten dieser Lothe proportional, und am größten, wenn C in der Mitte zwischen A und B liegt. Bezeichnet man die Entfernung des Angriffspunktes C von dieser Mitte mit f, so ist das Bruchmoment:

$$M = P \frac{\left(\frac{1}{2} l - f\right) \cdot \left(\frac{1}{2} l + f\right)}{l} = P \frac{\frac{l^2}{4} - f^2}{l},$$

woraus man erkennt, daß die entsprechende Verminderung des Bruchmomentes der Größe f^2 proportional ausfällt.

Wenn der Balken eine über seine ganze Länge l gleichmäßig vertheilte Last $Q = ql$ zu tragen hat, so betragen die Auflagerdrucke in A und B, Fig. 418, jederseits $\frac{Q}{2}$ und das Moment ist für einen Punkt D im Abstande x von A:

Fig. 418.

$$M = \frac{Q}{2}x - q\frac{x^2}{2} = q\frac{lx - x^2}{2}.$$

Dieser Ausdruck wird zu einem Maximum für $x = \frac{l}{2}$ *) und zwar ist der Werth des Biegungsmomentes in der Mitte:

$$M = q\,\frac{l\,\frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{ql^2}{8} = \frac{Ql}{8},$$

folglich ergiebt sich für die Tragfähigkeit des Balkens aus

$$\frac{Ql}{8} = k\,\frac{W}{e}$$

ein doppelt so großer Werth, als einem gleich langen Balken bei in der Mitte concentrirter Belastung zukommt.

Wenn man für jeden Punkt von $A_1 B_1$ die Größe des Momentes $M = q\,\frac{lx - x^2}{2}$ berechnet und als Ordinate y aufträgt, so giebt die Curve $A_1 C_1 B_1$ eine Darstellung von der Veränderlichkeit des Kraftmomentes in den verschiedenen Querschnitten. Diese Curve, welcher die Gleichung $y = \frac{q}{2}(lx - x^2)$ entspricht, ist eine Parabel, deren Scheitel in C_1 und deren Hauptaxe in $C_1 E_1$ fällt. Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man den Coordinatenanfang von A_1 nach C_1 verlegt, d. h. $x_1 = \frac{l}{2} - x$ und $y_1 = \frac{ql^2}{8} - y$ setzt, dann wird die Gleichung:

$$\frac{ql^2}{8} - y_1 = \frac{q}{2}\,l\left(\frac{l}{2} - x_1\right) - \frac{q}{2}\left(\frac{l}{2} - x_1\right)^2 \text{ oder}$$

$$y_1 = \frac{q}{2}\,x_1^2,$$

welches die Scheitelgleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{2}{q}$ ist.

*) Um dies zu beweisen bilde man $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$; also

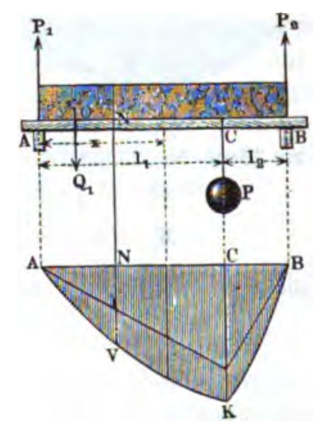
$$\frac{ql}{2} - q\,\frac{2x}{2} = 0; \text{ oder } x = \frac{l}{2}.$$

Wenn der Balken AB, Fig. 419 und 420, außer der gleichmäßig vertheilten Last Q noch in dem Punkte C eine concentrirte Kraft P zu tragen hat, so nehmen die Stützpunkte A und B die Drucke

$$P_1 = P\,\frac{l_2}{l} + \frac{Q}{2} \text{ und } P_2 = P\,\frac{l_1}{l} + \frac{Q}{2}$$

Fig. 419.


Fig. 420.



auf, und es ist das Biegungsmoment in einem Punkte N, welcher um x von A absteht:

$$\overline{NV} = P_1 x - \frac{q x^2}{2} = \left(P_1 - \frac{q x}{2}\right) x = \frac{q}{2}\left(\frac{2\,P_1}{q} - x\right) x.$$

Das Biegungsmoment ist ein Maximum in demjenigen Punkte, in welchem die Verticalkraft gleich Null ist, also für

$$P_1 = q x; \text{ oder für } x = \frac{P_1}{q},$$

vorausgesetzt, daß $x < l_1$, Fig. 419, d. h. daß die über l_1 ausgebreitete Last größer ist, als der Auflagerdruck in A. Es ist ohne Weiteres ersichtlich, daß x unter allen Umständen größer als $\frac{l}{2}$ sein muß, da $P_1 > \frac{Q}{2}$, d. h. $P_1 > q\,\frac{l}{2}$ ist. Es kann somit der betreffende Punkt, in welchem das Moment ein Maximum ist, nur in der größeren Abtheilung des Balkens, und zwar zwischen der Balkenmitte und dem Angriffspunkte C der Kraft P liegen.

Für den Fall, daß $q l_1 < P_1$, Fig. 420, findet das Maximum des Biegungsmomentes in C statt, und zwar hat dasselbe dann den Werth:

$$\overline{CK} = P_1 l_1 - \frac{q l_1^2}{2} = P \frac{l_1 l_2}{l} + \frac{Q}{2} l_1 - q \frac{l_1^2}{2} = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l_1 l_2}{l}.$$

Für den Fall, daß

$$x = \frac{P_1}{q} = \left(P \frac{l_2}{l} + \frac{Q}{2}\right) \frac{l}{Q} = l_1$$

ist, folgt

$$\frac{P}{Q} = \frac{l_1 - \frac{1}{2} l}{l_2} = \frac{2 l_1 - l}{2 l_2} = \frac{l_1 - l_2}{2 l_2}.$$

Es dient also der Werth $\frac{P}{Q}$ als Kriterium dafür, ob das Maximalmoment zwischen die Balkenmitte und den Angriffspunkt C der Kraft P fällt, oder ob es in C stattfindet. Man hat daher für die Tragfähigkeit des Balkens:

a) wenn $\frac{P}{Q} < \frac{l_1 - l_2}{2 l_2}$ ist:

$$max.\ M = P_1 \frac{P_1}{q} - \frac{q}{2} \left(\frac{P_1}{q}\right)^2 = \frac{1}{2 q} P_1^2 = \left(P \frac{l_2}{l} + \frac{Q}{2}\right)^2 \frac{l}{2 Q}$$
$$= k \frac{W}{e},$$

und

b) wenn $\frac{P}{Q} \geqq \frac{l_1 - l_2}{2 l_2}$ ist:

$$max.\ M = \left(P + \frac{Q}{2}\right) \frac{l_1 l_2}{l} = k \frac{W}{e}$$

zu setzen.

Diese Formeln finden insbesondere ihre Anwendung, wenn man das Gewicht G des Trägers mit in Rechnung bringen will, wo dann G statt Q einzusetzen ist.

Um die Biegungsverhältnisse zu ermitteln, kann man sich vorstellen, der Träger sei in dem Angriffspunkte C der Kraft P fest eingespannt, und das Ende $A C$ werde durch die Kraft $- P_1$ in A und durch die gleichmäßig vertheilte Last $q l_1$ angegriffen, während das Ende $B C$ unter der Einwirkung der Kraft $- P_2$ und der Last $q l_2$ steht. Wenn der Neigungswinkel γ, unter welchem bei C die elastische Linie gegen die horizontale X Axe geneigt ist, bekannt wäre, so ließen sich die Senkungen und Neigungen für jeden Punkt des Trägers nach den Formeln in den Paragraphen 235, 236 berechnen. Die Neigung γ in C ist aber von vornherein nicht gegeben. Man kann indessen γ leicht bestimmen, wenn man die Ausdrücke für die Senkungen der Punkte A und B unter C einander gleichsetzt, da A und B bei

der Biegung um gleich viel über C liegen müssen. In dem Ausdrucke für die Senkung von A kommt der Winkel γ vor, als derjenige, unter welchem die Einspannung des Balkens bei C zu denken ist. Es muß daher bei Betrachtung des anderen Balkenstückes $B\,C$ offenbar $-\gamma$ als Einspannungswinkel angenommen werden.

Bezeichnen wir wieder die (hier negative) Senkung des Punktes A unter C mit s, so folgt für A:

$$s = l_1 \gamma - \frac{P_1 l_1^3}{3\,WE} + \frac{q\,l_1}{8\,WE}\,l_1^3$$

und für B:

$$s = -\,l_2 \gamma - \frac{P_2 l_2^3}{3\,WE} + \frac{q\,l_2}{8\,WE}\,l_2^3.$$

Nach Gleichsetzung dieser Werthe von s folgt für γ:

$$\gamma\,(l_1 + l_2) = \frac{P_1 l_1^3 - P_2 l_2^3}{3\;WE} + \frac{q\,(l_2^4 - l_1^4)}{8\;WE} = \frac{P\left(\frac{l_2}{l}\,l_1^3 - \frac{l_1}{l}\,l_2^3\right)}{3\;WE}$$
$$+ \frac{q\,\frac{l}{2}\,(l_1^3 - l_2^3)}{3\;WE} + \frac{q\,(l_2^4 - l_1^4)}{8\;WE}.$$

Setzt man nun $l = l_1 + l_2$, so folgt nach entsprechender Reduction:

$$\gamma = \frac{l_1 - l_2}{3\;WE}\left(P\,\frac{l_1\,l_2}{l} + Q\,\frac{l^2 + 2\,l_1\,l_2}{8\,l}\right).$$

Setzt man diesen Werth für γ in die Gleichung für die Senkung s des Punktes A oder B ein, so erhält man als Durchsenkung des Balkens in C den Ausdruck

$$s = l_1 \gamma - \frac{P_1 l_1^3}{3\,WE} + \frac{q\,l_1}{8\,WE}\,l_1^3$$
$$= l_1\,\frac{l_1 - l_2}{3\;WE.l}\left(P.\,l_1 l_2 + Q\,\frac{l^2 + 2\,l_1\,l_2}{8}\right) - \frac{P\,\frac{l_2}{l}\,l_1^3 + \frac{Q}{2}\,l_1^3}{3\;WE} + \frac{q\,l_1^4}{8\,WE}$$
$$= -\,\frac{l_1^2 l_2^2}{3\;WE.l}\left(P + Q\,\frac{l^2 + l_1\,l_2}{8\,l_1\,l_2}\right).$$

Setzt man in dem Ausdrucke für γ

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2},$$

so folgt:

$$\gamma = 0;$$

es findet also dann in der Mitte die größte Durchbiegung statt. Um dieselbe zu finden, hat man nur in dem Ausdrucke für s ebenfalls $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ einzusetzen, so folgt die Senkung in der Mitte:

$$s = \frac{l^4}{16.3\,WEl}\left(P + Q\,\frac{l^2 + {}^1/_4\,l^2}{8\,.\,{}^1/_4\,l^2}\right) = \frac{l^3}{48\,WE}\,(P + {}^5/_8\,Q).$$

Für $P = 0$ ist also $s = {}^5/_8 \cdot \frac{Q\,l^3}{48\,WE}$. Wenn daher die ganze Last gleichmäßig auf den an beiden Enden unterstützten Balken vertheilt ist, so fällt die Bogenhöhe nur ${}^5/_8$ mal so groß aus, als wenn dieselbe in der Mitte des Balkens hinge.

Die Winkel α_1 und β_1, welche die elastische Linie in den Stützpunkten mit der horizontalen X Axe bildet, bestimmen sich nach den Paragraphen 235 und 236 zu

$$\alpha_1 = \gamma - \frac{P_1\,l_1^2}{2\,WE} + \frac{q\,l_1^3}{6\,WE}$$

und

$$\beta_1 = -\,\gamma - \frac{P_2\,l_2^2}{2\,WE} + \frac{q\,l_2^3}{6\,WE}.$$

Setzt man hierin die Werthe für γ_1, P_1 und P_2, so folgt:

$$\alpha_1 = -\,\frac{1}{WE}\left(P\,\frac{l_1\,l_2\,(l_1 + 2\,l_2)}{6\,l} + Q\,\frac{l^2}{24}\right),$$

$$\beta_1 = \frac{1}{WE}\left(P\,\frac{l_1\,l_2\,(l_2 + 2\,l_1)}{6\,l} + Q\,\frac{l^2}{24}\right).$$

Wenn $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, so wird

$$-\,\alpha_1 = \beta_1 = \frac{P\,.\,l^2}{16\,WE} + \frac{Q\,l^2}{24\,WE} = \frac{l^2}{48\,WE}\,(3\,P + 2\,Q).$$

Wenn P nicht in der Mitte des Trägers wirksam ist, so findet die größte Einsenkung nicht in C statt, weil sonst $\gamma = 0$ sein müßte. Will man den Punkt der größten Durchbiegung ermitteln, so setzt man den allgemeinen Ausdruck für den Neigungswinkel der elastischen Linie in der größeren Strecke $A\,C$ gleich Null. Diese Gleichung ist nach den Paragraphen 235, 236

$$\alpha = \gamma - \frac{P_1}{WE}\left(l_1\,x - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{q}{2\,WE}\left(l_1^2\,x - l_1\,x^2 + \frac{x^3}{3}\right).$$

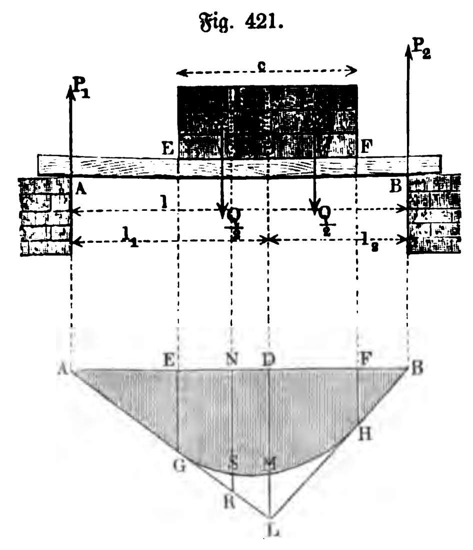
Wenn man diesen Werth gleich Null setzt, so findet man durch Auflösung nach x den Abstand desjenigen Punktes von C, in welchem die Tangente der elastischen Linie horizontal, also die Einsenkung ein Maximum ist. Diese Einsenkung selbst erhält man dann durch Einsetzen des gefundenen Werthes von x in die allgemeine Gleichung für die Senkung:

$$y = \gamma\,x - \frac{P_1}{2\,WE}\left(l_1\,x^2 - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{q}{2\,WE}\left(\frac{l_1^2\,x^2}{2} - \frac{l_1\,x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right).$$

Ein anderer in der Praxis nicht selten vorkommender Fall ist der, daß ine Last $Q = cq$ gleichförmig vertheilt ist auf einen Theil $\overline{EF} = c$

der ganzen Länge l des Balkens AB, Fig. 421. Bezeichnen wir wieder die Entfernungen der Mitte D dieser Last von den Stützpunkten A und B,

Fig. 421.



durch l_1 und l_2, sowie die von diesen Punkten aufgenommenen Kräfte durch P_1 und P_2, so haben wir auch wieder

$$P_1 = \frac{l_2}{l}\, Q = \frac{l_2 c q}{l}$$

und

$$P_2 = \frac{l_1}{l}\, Q = \frac{l_1 c q}{l}.$$

Wäre Q nicht vertheilt, sondern griffe diese Kraft nur in D an, so würde das Moment für D, $= \frac{Q l_1 l_2}{l}$ sein, und wenn man dasselbe durch eine Ordinate $\overline{DL}$ repräsentirt, so ließen sich die Momente für die anderen Punkte von AB durch die geraden Linien LA und LB abschneiden. Da aber für die Punkte innerhalb EF den Kräften P_1 und P_2 noch die darüber liegende Last entgegenwirkt, so erleiden die Ordinaten zwischen EG und FH noch eine Verminderung. Für den Mittelpunkt D der belasteten Basis EF kommt z. B. das Moment des halben Gewichtes, d. i.:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{c}{4} = \overline{ML},$$

in Abzug, und es bleibt daher von der Ordinate $\overline{DL} = \frac{Q l_1 l_2}{l}$ nur noch das Stück

$$\overline{DM} = \overline{DL} - \overline{ML} = Q\left(\frac{l_1 l_2}{l} - \frac{c}{8}\right)$$

übrig. Für einen anderen Punkt N, dessen Abscisse $AN = x$ sein möge, ist dagegen das Moment:

$$P_1 \,.\, \overline{NA} - \overline{NE} \,.\, q \,.\, \frac{\overline{NE}}{2} = P_1 x - \frac{(x - l_1 + \frac{1}{2} c)^2 q}{2},$$

und wenn nun $P_1 x$ durch die Ordinate $\overline{NR}$ und $\frac{(x - l_1 + \frac{1}{2} c)^2 q}{2}$ durch das Stück $\overline{SR}$ repräsentirt wird, giebt die Ordinate $\overline{NS}$ das ganze Moment:

$$P_1 x - \frac{(x - l_1 + \frac{1}{2} c)^2 q}{2}$$

an. Dasselbe fällt natürlich für verschiedene x, d. i. für verschiedene Punkte sehr verschieden aus, ist aber für $x - l_1 + \frac{1}{2} c = \frac{P_1}{q}$ ein Maximum, und zwar:

$$P_1 \left(\frac{P_1}{q} + l_1 - \frac{1}{2} c\right) - \frac{P_1^2}{2q} = P_1 \left(\frac{P_1}{2q} + l_1 - \frac{1}{2} c\right)$$

$$= P_1 \left(l_1 - \frac{c}{2} + \frac{c l_2}{2 l}\right) = P_1 l_1 \left(1 - \frac{c}{2 l}\right) = \frac{Q l_1 l_2}{l} \left(1 - \frac{c}{2 l}\right).$$

Hiernach haben wir also für das Tragvermögen dieses Balkens zu setzen:

$$\frac{Q l_1 l_2}{l} \left(1 - \frac{c}{2 l}\right) = \frac{W k}{e}.$$

Beispiel. Welche Last trägt ein hohler parallelepipedischer Träger aus 10 Millimeter dickem Eisenblech, dessen äußere Höhe 0,500 Meter und äußere Breite 0,160 Meter beträgt, wenn er auf 2 Meter Länge gleichförmig belastet wird und der Schwerpunkt der Last von den beiden Stützpunkten 3 Meter und 2 Meter horizontale Abstände hat. Man hat hier:

$$\frac{W}{e} = \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h} = \frac{160 \,.\, 500^3 - 140 \,.\, 480^3}{500} = 9034250$$

und

$$\frac{l_1 l_2}{l} \left(1 - \frac{c}{2 l}\right) = \frac{3000 \,.\, 2000}{5000} \left(1 - \frac{2000}{2 \,.\, 5000}\right) = 1200 \,.\, \frac{4}{5} = 960,$$

und daher die gesuchte Last:

$$Q = 9034250 \cdot \frac{k}{960} = 9410\, k,$$

oder wenn die höchstens zulässige Spannung k für Schmiedeeisen zu 6 Kilogramm angenommen wird, so folgt $Q = 56460$ Kilogramm.

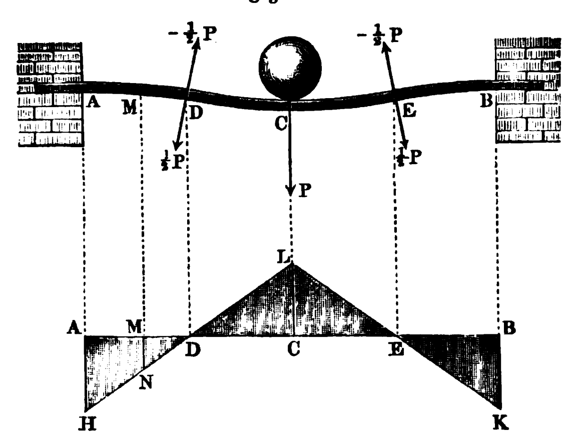
Anmerkung. Wenn die Last Q nicht gleichmäßig über EF vertheilt ist, sondern je eine Hälfte derselben in den Endpunkten E und F angreift, so ist die Linie GMH eine gerade, und das größte Moment durch die Ordinate GE dargestellt, also

$$\frac{Q l_2}{l}\left(l_1 - \frac{c}{2}\right) = \frac{W k}{e}$$

zu setzen, wofern l_1 den größeren Abstand DA, und l_2 den kleineren Abstand DB der Mitte D von den Enden A und B bezeichnet.

§. 242. **An beiden Enden eingemauerte Balken.** Ist ein in der Mitte C belasteter Balken AB, Fig. 422, an beiden Enden horizontal eingeklemmt,

Fig. 422.



so nimmt derselbe in der Mitte C eine Biegung nach oben concav, und in jedem der beiden Auflagerungspunkte A und B eine Biegung nach unten an, und es bilden sich dabei in den Mittelpunkten D und E der Balkenhälften CA und CB Wendepunkte, wo die Biegung Null, oder der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Das Gewicht P wird zur Hälfte von AD und zur Hälfte von BE getragen, und es ist daher anzunehmen, daß jedes Balkenviertel AD und BE an den Enden D und E durch $\frac{P}{2}$ abwärts, und dagegen die Balkenhälfte DE an jedem ihrer Enden D und E durch $\left(-\frac{P}{2}\right)$ aufwärts gebogen wird. Jede dieser Kräfte hat den Hebelarm $AD = CD$ u. s. w. $= \frac{AB}{4} = \frac{l}{4}$, es ist folglich das Moment derselben

$$\frac{P}{2}\cdot\frac{l}{4} = \frac{Pl}{8}, \text{ daher auch}$$

$$\frac{Pl}{8} = k\,\frac{W}{e} \text{ und die Tragkraft}$$

$$P = \frac{8 \,.\, kW}{le} = 2 \cdot \frac{4kW}{le} \text{ zu setzen.}$$

Es trägt also ein solcher Balken doppelt so viel, als wenn er an beiden Enden frei aufliegt.

Macht man die Ordinaten $\overline{AH} = \overline{BK} = \overline{CL} = \frac{Pl}{8}$, und zieht dann die Geraden HL und KL, so schneiden die letzteren die den Kraftmomenten und Biegungen proportionalen Ordinaten ($\overline{MN}$) für jede andere Stelle (M) des Balkens ab.

Setzt man in der gefundenen Formel den Festigkeitsmodul K statt der zulässigen Spannung k ein, so giebt sie natürlich die Kraft zum Zerbrechen des Balkens, also:

$$P = \frac{8KW}{le}.$$

Da die Momente in A, B und C gleich groß sind, so ist auch in allen drei Punkten gleiche Bruchgefahr.

Daß die Wendepunkte wirklich in den Mitten zwischen A und C sowie zwischen BC liegen müssen, ergiebt sich leicht aus dem Vorhergehenden. Gesetzt nämlich, der Balken läge bei A und B einfach auf Stützen, so würde die elastische Linie in A eine Neigung annehmen, welche nach §. 241 zu

$$\alpha = -\frac{Pl^2}{16\,WE}$$

sich berechnet. In Folge der horizontalen Einmauerung des Balkenendes ist selbiges verhindert, eine Neigung anzunehmen. Man hat sich daher die Wirkung des Einmauerns so vorzustellen, als wäre an jedem Balkenende ein Kräftepaar angebracht, dessen Drehungsrichtung und Moment so beschaffen sind, daß die durch die Belastung angestrebte Neigung der Balkenenden α vollständig verhindert wird. Nach §. 239 beträgt nun die durch ein Kräftepaar, dessen Moment M ist, per Längeneinheit des Balkens hervorgebrachte Neigung $\frac{M}{WE}$. Es muß daher die Wirkung des in A auftretenden Kräftepaars auf das halbe Balkenstück AC von der Länge $\frac{l}{2}$ eine derartige sein, daß dieselbe allein in A eine Neigung $-\alpha$ hervorbringen würde. Bezeichnet daher M_1 dieses Moment in A, so hat man nach §. 241:

$$\alpha = -\frac{Pl^2}{16\,WE} = -\frac{M_1}{WE}\frac{l}{2}; \text{ woraus } M_1 = \frac{Pl}{8}.$$

Wenn man also den Abstand x von A bestimmen will, in welchem das resultirende Biegungsmoment Null wird, so hat man, wenn wieder $P_1 = \frac{P}{2}$ den Auflagerdruck in A bezeichnet:

$$0 = -P_1 x + M_1 = -\frac{P}{2} x + \frac{Pl}{8};$$

woraus

$$x = \frac{l}{4},$$

d. i: die Inflexionspunkte liegen in der Mitte zwischen A und C sowie zwischen B und C. Das Bruchmoment in C ist:

$$M = -\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} + M_1 = -\frac{Pl}{4} + \frac{Pl}{8} = -\frac{Pl}{8},$$

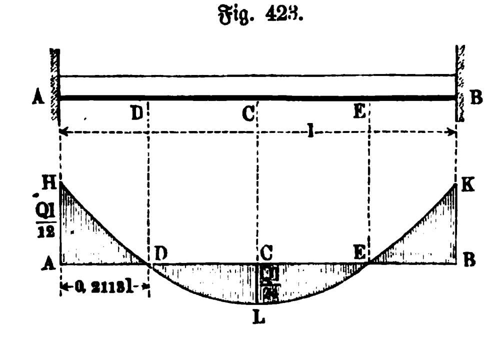
also ebenso groß, wie das Moment M_1 in A und B, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet, d. h. einer entgegengesetzten Krümmung entsprechend.

Die Senkung in der Mitte bestimmt sich nach den Paragraphen 235 und 239 zu:

$$s = -\frac{P_1 \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,WE} + \frac{M_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,WE} = -\frac{Pl^3}{2.8.3\,WE} + \frac{Pl^3}{8.4.2\,WE}$$
$$= \frac{P}{48\,WE}\left(-l^3 + \frac{3}{4}l^3\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{Pl^3}{48\,WE}.$$

Wenn in dem vorliegenden Falle die Last $Q = ql$ gleichmäßig vertheilt ist, so nimmt der Balken zwar auch in der Mitte eine Biegung nach oben concav und in jedem Auflagerpunkte eine solche nach unten concav an, nur liegen die Wendepunkte D und E, Fig. 423, nicht mehr in der Mitte der

Fig. 423.



Balkenhälften, da die Biegungskräfte R, R der Stücke AD und BE noch durch die darauf liegende Last verstärkt, und dagegen die Biegungskräfte $-R, -R$ des Mittelstückes DE von dieser Last geschwächt werden. Man findet den Abstand $x = AD = BE$ dieser Wendepunkte wie vorher.

Wäre nämlich der Balken in A und B einfach unterstützt, so wäre nach §. 241 der Neigungswinkel der elastischen Linie in A und B:

$$\alpha = -\frac{Q l^2}{24 WE}$$

und, wenn M_1 wieder das Moment in A oder B bezeichnet, so hätte man wie vorher:

$$\alpha = -\frac{M_1}{WE}\frac{l}{2}; \text{ so daß aus}$$

$$-\frac{Q l^2}{24 WE} = -\frac{M_1 l}{2 WE};\ M_1 = \frac{Ql}{12} \text{ folgt.}$$

Das resultirende Moment ist also Null in einem Abstande $AD = BE = x$, welcher aus

$$-\frac{Q}{2}x + M_1 + q\frac{x^2}{2} = 0 \text{ sich ergiebt zu:}$$

$$x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{6}} = \frac{l}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = 0{,}7887\, l \text{ und } 0{,}2113\, l,$$

von welchen der erste Werth $0{,}7887\, l = AE$ und der zweite Werth $0{,}2113\, l = AD$ ist.

Das Kraftmoment in der Mitte C berechnet sich demnach durch:

$$M = -\frac{Q}{2}\frac{l}{2} + M_1 + q\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = -\frac{Ql}{4} + \frac{Ql}{12} + \frac{Ql}{8} = -\frac{Ql}{24},$$

folglich nur halb so groß, wie in A und B.

Es folgt daher aus

$$\frac{Ql}{12} = k\frac{W}{e} \text{ die Tragkraft } Q = 12\frac{kW}{le},$$

d. h. $\frac{3}{2}$ mal so groß, als wenn die Last Q in der Mitte concentrirt wäre.

Trägt man $\frac{Ql}{12}$ als Ordinaten AH und BK in A und B; sowie $\frac{Ql}{24} = CL$ in C auf, so erhält man drei Punkte H, L und K der Curve (Parabel) $HDLEK$, durch welche die Veränderlichkeit der Momente dargestellt ist.

Die Senkung in der Mitte berechnet sich nach den Paragraphen 235, 236 und 239 zu:

$$s = -\frac{P_1\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,WE} + M_1\,\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,WE} + \frac{Q}{2}\,\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{8\,WE}$$

$$= -\frac{Q\,l^3}{2.8.3\,WE} + \frac{Q\,l^3}{12.4.2\,WE} + \frac{Q\,l^3}{2.8.8\,WE}$$

$$= \frac{Q}{48\,WE}\left(-l^3 + \frac{l^3}{2} + \frac{3\,l^3}{8}\right) = -\frac{1}{8}\cdot\frac{Q\,l^3}{48\,WE}.$$

Wenn man sich auch hier die Aufgabe stellt, die Anordnung so zu treffen, daß das Moment M_1 über den Stützen A oder B gerade so groß ausfallen soll, wie das Moment M in C, so hat man zunächst die Gleichung:

$$-M_1 = -\frac{Q}{2}\cdot\frac{l}{2} + M_1 + q\,\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2}, \text{ woraus}$$

$$2\,M_1 = \frac{Q\,l}{8} \text{ oder } M_1 = \frac{Q\,l}{16} = -M.$$

Damit nun aber M_1 in den Stützen nur gleich $\frac{Q\,l}{16}$ ausfällt und nicht, wie bei horizontaler Einmauerung gleich $\frac{Q\,l}{12}$, müssen die Balkenenden A und B unter gewissen Winkeln α_0 eingemauert werden, wofür nach dem Früheren, §§. 239 und 241, wie vorher die Gleichung angesetzt werden kann:

$$-\frac{Q\,l^2}{24\,WE} + \frac{M_1\,l}{2\,WE} = \alpha_0 \text{ oder da } M_1 = \frac{Q\,l}{16} \text{ sein soll,}$$

$$-\frac{Q\,l^2}{24\,WE} + \frac{Q\,l^2}{32\,WE} = \alpha_0 = -\frac{Q\,l^2}{96\,WE}.$$

Wenn man daher die beiden Enden des Balkens unter diesem Winkel α_0 schräg (nach unten) einmauert, so werden die Biegungsmomente in A, B und C absolut genommen einander gleich, nämlich $\frac{Q\,l}{16}$. Es ist daher vermöge dieser Anordnung das Biegungsmoment, welches bei horizontaler Befestigung in den Stützpunkten $\frac{Q\,l}{12}$ betrug, in dem Verhältniß von 12 : 16 kleiner geworden, die Tragkraft des Balkens beträgt daher jetzt $Q = \frac{16\,k\,W}{le}$, d. h. sie ist um $33^1/_3$ Procent vergrößert.

Es ist leicht, die Formeln ohne Weiteres hinzusetzen, wenn der Balken gleichzeitig eine gleichmäßig vertheilte Last Q und eine concentrirte Last P in der Mitte zu tragen hat. Es ist in diesem Falle:

Das Biegungsmoment M_1 über den Stützen A und B:

$$M_1 = \frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{12} = (3P + 2Q)\frac{l}{24}$$

und das Biegungsmoment in der Mitte:

$$M = -\left(\frac{Pl}{8} + \frac{Ql}{24}\right) = -(3P + Q)\frac{l}{24}.$$

Die Senkung in der Mitte ist in diesem Falle:

$$s = -\left(\frac{1}{4}P + \frac{1}{8}Q\right)\frac{l^3}{48\,WE}.$$

Wenn die Kraft P den Balken außerhalb der Mitte in einem Punkte C angreift, welcher von A und B die Abstände $AC = l_1$ und $BC = l_2$ hat, so sind außer den Momenten M_1 in A und M_2 in B auch die Auflagerdrucke in diesen Punkten P_1 in A und P_2 in B vorläufig unbekannt. Man kann zu der Bestimmung von P_1 und M_1 durch Auflösung von zwei Gleichungen leicht gelangen, wenn man wie bisher die Formeln der Paragraphen 235, 236, 239 anwendet. Der Balken AB läßt sich nämlich ansehen wie ein nur bei B festgehaltener Träger, welcher außer durch die gleichmäßig vertheilte Last Q noch in C durch die Kraft P; in A durch die Reaction $-P_1$ und ebendaselbst durch ein Kräftepaar vom Moment M_1 angegriffen wird. Schreibt man dieser Inanspruchnahme entsprechend die Werthe für die Neigung α und Senkung s des Balkenendes A hin, so muß α mit dem Winkel α_0 übereinstimmen, unter welchem der Balken bei A eingeklemmt ist, und s muß gleich Null sein, da A und B in gleichem Niveau liegen. Bezeichnet noch β_0 den Einmauerungswinkel bei B, so hat man für die Neigung in A:

$$\alpha = \alpha_0 = \beta_0 + \frac{Pl_2^2}{2\,WE} + \frac{Ql^2}{6\,WE} - \frac{P_1 l^2}{2\,WE} + \frac{M_1 l}{WE};$$

und für die Senkung s in A:

$$s = 0 = \beta_0 l + \frac{Pl_2^3}{3\,WE} + \frac{Pl_2^2}{2\,WE}l_1 + \frac{Ql^3}{8\,WE} - \frac{P_1 l^3}{3\,WE} + \frac{M_1 l^2}{2\,WE}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen die Werthe für M_1 gleichgesetzt, liefert zur Entwickelung von P_1 die Gleichung:

$$M_1 = \frac{2}{l^2}\left(\frac{P_1 l^3}{3} - \frac{Ql^3}{8} - \frac{Pl_2^3}{3} - \frac{Pl_2^2 l_1}{2} - \beta_0 l\,WE\right)$$

$$= \frac{1}{l}\left[\frac{P_1 l^2}{2} - \frac{Ql^2}{6} - \frac{Pl_2^2}{2} + (\alpha_0 - \beta_0)\,WE\right],$$

woraus:

$$P_1 = P\frac{l_2^2(l_2 + 3l_1)}{l^3} + \frac{Q}{2} + (\alpha_0 + \beta_0)\frac{6\,WE}{l^2}, \text{ und ebenso}$$

$$P_2 = P\frac{l_1^2(l_1 + 3l_2)}{l^3} + \frac{Q}{2} - (\alpha_0 + \beta_0)\frac{6\,WE}{l^2}.$$

Unter α und β sind hier die algebraischen Werthe verstanden, d. h. wenn z. B. beide Balkenenden unter den Winkeln α_0 und β_0 schräg nach unten eingemauert sind, so ist α_0 negativ, β_0 positiv zu nehmen.

Setzt man für P_1 seinen Werth in den Ausdruck für M_1 ein, so folgt:

$$M_1 = P\frac{l_2^2 l_1}{l^2} + \frac{Ql}{12} + \frac{2WE}{l}(2\alpha_0 + \beta_0) \text{ und}$$

$$M_2 = P\frac{l_1^2 l_2}{l^2} + \frac{Ql}{12} - \frac{2WE}{l}(\alpha_0 + 2\beta_0).$$

Für den Abstand x von A desjenigen Punktes zwischen A und B, welchem das größte Moment entspricht, hat man wieder:

$$P_1 - qx = 0;$$

vorausgesetzt, daß $x < l_1$ und $l_1 > l_2$ ist. Das Maximalmoment M ist in diesem Falle:

$$M = M_1 - P_1 x + q\frac{x^2}{2} = M_1 - P_1\frac{P_1}{q} + \frac{q}{2}\left(\frac{P_1}{q}\right)^2 = M_1 - \frac{P_1^2}{2q}.$$

Wenn $x > l_1$, so liegt der Bruchpunkt in dem Angriffspunkte c der Kraft P_1 und das Moment ist daselbst $M = M_1 - P_1 l_1 - q\frac{l_1^2}{2}$.

Wo der absolute Bruchpunkt liegt, entscheidet der absolut größte Werth von M, M_1 und M_2. Setzt man $M = M_1 = M_2$, so lassen sich ähnlich wie früher die Winkel α_0 und β_0 für die vortheilhafteste Einmauerung des Balkens bestimmen, bei welcher die drei relativen Bruchpunkte gleicher Bruchgefahr ausgesetzt sind.

Für die Inflexionspunkte der elastischen Linie hat man die Gleichungen

a) für die Strecke AC:

$$M_1 - P_1 x_1 - q\frac{x_1^2}{2} = 0; \text{ und}$$

b) für die Strecke BC:

$$M_2 - P_2 x_2 - q\frac{x_2^2}{2} = 0.$$

Die Werthe von x_1 und x_2 bedeuten dabei den Abstand des betreffenden Inflexionspunktes resp. von A und B.

Die Gleichung der elastischen Linie, die tiefste Durchsenkung u. s. w. lassen sich mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen in den Paragraphen 235, 236 und 239 leicht aufstellen.

Beispiel. Zur Ueberdeckung eines 3 Meter im Lichten weiten Schaufensters soll ein aus 10 Millimeter starkem Blech gefertigter hohler Träger von rectangulärem Querschnitte (wie Fig. 387), dessen äußere Breite 0,200 Meter beträgt, angewendet werden. Wenn die auf dem Träger oberhalb ruhende Mauermasse einer Belastung von 6000 Kilogramm pro Meter entspricht, wie groß muß die Höhe h des Querschnittes genommen werden, wenn die höchstens zulässige Spannung des Trägers zu 6 Kilogramm vorausgesetzt wird?

Hier ist $q = 6$, $l = 3000$, $k = 6$, also:

$$M_1 = \frac{q l^2}{12} = 4'500000 \text{ und daher zu setzen:}$$

$$4'500000 = k \frac{b h^3 - (b - 20)(h - 20)^3}{12 \frac{h}{2}} = 6 \frac{200 h^3 - 180 (h - 20)^3}{6 h}$$

$$= 20 h^2 + 10800 h - 216000 + \frac{1'440000}{h}.$$

Hieraus folgt durch Näherungsrechnung $h = 286$ Millimeter, wofür rund $h = 0{,}300$ Meter genommen werden kann.

Anmerkung. Wenn man die in diesem Paragraphen entwickelten Formeln für eingemauerte Balken anwenden will, so muß man sicher sein, daß die Enden der Balken auch genügend befestigt sind, um sie als unwandelbar eingeklemmt ansehen zu dürfen. Diese Befestigung geschieht in der Praxis entweder so, daß man die Enden des Trägers hinlänglich weit in die Mauern hineinragen läßt, so daß durch das Gewicht der auf den eingemauerten Endstücken lastenden Mauermasse die Einklemmung bewirkt wird, oder man befestigt die Enden durch Ankerbolzen, welche in die Pfeiler hineingehen. Jedenfalls muß die Anordnung so getroffen sein, daß das Moment der auf das Endstück wirkenden Belastung resp. des Ankerzuges mindestens gleich M_1 sein muß. Würde dieses Moment kleiner sein, so würde der Balken über den Stützpunkten eine Neigung gegen die Horizontale annehmen können, und das Verhalten des Trägers würde sich um so mehr demjenigen eines nur auf Stützen ruhenden Balkens nähern, je kleiner der auf die Enden ausgeübte Zwang der Einklemmung ist. Nennen wir in dem obigen Beispiele x die Länge, um welche jedes einzelne Balkenende in die Mauer hineintritt, so lastet auf einem solchen Endstück das Gewicht $q x$, und das Moment desselben für den Bruchpunkt ist

$$\frac{q x^2}{2} = \frac{6 x^2}{2} = 3 x^2.$$

Es folgt daher aus

$$3 x^2 = \frac{q l^2}{12} = \frac{6 \,.\, 3000^2}{12} = 4'500000; \; x = \sqrt{1500000} = 1{,}24 \text{ Meter.}$$

Man wird aber immer gut thun, die Enden entweder länger in die Mauer hineintreten zu lassen, oder in sonst einer Weise (etwa durch Anker) zu befestigen, weil jene berechnete Länge nur dem Grenzfalle entspricht, wo das Moment des auf die Enden ausgeübten Zwanges gerade gleich dem Bruchmoment ist, also nur gleich derjenigen Größe, in welcher es bei der Belastung des Balkens gefordert wird. Gegen Erschütterung des Balkens wäre in dieser Beziehung dann keine Sicherheit vorhanden. Wenn eine derartige genügende Befestigung der Balkenenden unterbleibt, wie in der Praxis allerdings häufig geschieht, so darf man den Balken nicht nach den Formeln des §. 242, sondern nach denen von §. 241 berechnen, wie sie für einen einfach unterstützten Balken gelten.

Soll die Befestigung des Balkenendes durch Ankerbolzen geschehen, welche von der stützenden Kante den Abstand x_1 haben, so berechnet sich die Zugkraft Z welche diese Anker auszuhalten haben, durch

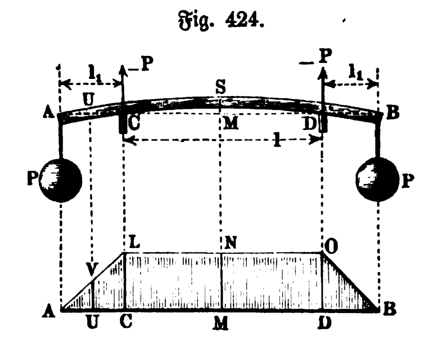
$$Z \,.\, x_1 = M_1 = \frac{q l^2}{12},$$

also im vorliegenden Beispiele, wenn man x_1 etwa gleich 1 Meter annimmt,

$$Z \,.\, 1000 = 4'500000; \; Z = 4500 \text{ Kilogramm.}$$

§. 243. **In Zwischenpunkten unterstützte Balken.** Wenn ein an beiden Enden mit gleichen Gewichten P, P belasteter Balken AB, Fig. 424, in zwei Punkten C und D unterstützt ist, welche von den Enden A und B um $AC = BD = l_1$ abstehen, so nimmt jeder dieser Punkte die Kraft P auf, und es ist für einen Punkt M innerhalb CD im Abstande x von A das Biegungsmoment

Fig. 424.



$$CL = DO = MN = Px - P(x - l_1) = Pl_1$$

constant, also die neutrale Faser von CD kreisförmig gebogen. Für einen Punkt U innerhalb AC ist das Moment $\overline{UV} = Px$ veränderlich, jedoch kleiner als Pl_1, welchen Werth es erst in C und D erreicht.

Der Krümmungshalbmesser vom Mittelstück CD ist $r = \frac{WE}{Pl_1}$, folglich der Neigungswinkel der Balkenaxe in C und D, $\alpha_1 = \frac{l}{2r} = \frac{Pll_1}{2WE}$, wenn l die Länge CD des Mittelstückes bezeichnet. Ferner folgt die Bogenhöhe

$$MS = a = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2r} = \frac{l^2}{8r} = \frac{Pl^2 l_1}{8WE},$$

sowie die Bogenhöhe von CA

$$a_1 = \alpha_1 l_1 + \frac{Pl_1^3}{3WE} = \frac{Pll_1^2}{2WE} + \frac{Pl_1^3}{3WE} = \frac{Pl_1^2}{WE}\left(\frac{l}{2} + \frac{l_1}{3}\right).$$

Das Tragvermögen dieses Balkens ist gegeben durch

$$Pl_1 = k\frac{W}{e}.$$

Der hier erörterte Fall der Inanspruchnahme tritt bei den Axen der Eisenbahnwagen ein (s. §. 239).

Ist derselbe Balken AB, wie Fig. 425 darstellt, gleichmäßig belastet, so fällt bei gewissen Belastungen das Biegungsmoment theils positiv, theils negativ, und daher in zwei Punkten gleich Null aus.

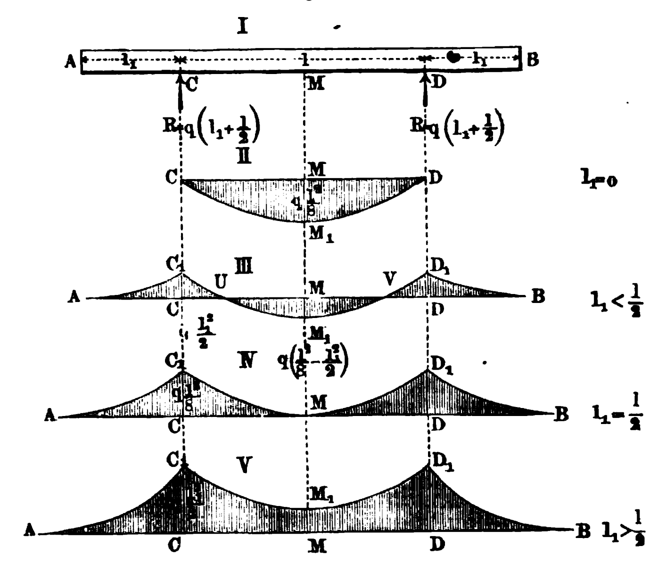
Für einen Punkt innerhalb AC und BD ist dieses Moment $\frac{1}{2}qx^2$.

Der Auflagerdruck R in C oder D beträgt $R = q\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)$, daher das Moment in irgend einem Punkte zwischen C und D, dessen Abstand von C mit x bezeichnet werde:

$$M = -Rx + q\frac{(l_1 + x)^2}{2} = -q\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)x + q\left(\frac{l_1^2}{2} + l_1 x + \frac{x^2}{2}\right)$$
$$= -\frac{q}{2}(lx - x^2) + q\frac{l_1^2}{2}.$$

Der erste Theil $-\frac{q}{2}(lx - x^2)$ dieses Ausdruckes stimmt offenbar mit dem in §. 241 entwickelten Ausdrucke für das Biegungsmoment eines auf zwei Stützen liegenden, durch die gleichmäßig vertheilte Belastung q pro

Fig. 425.



Längeneinheit belasteten Balkens von der Länge l überein. Die graphische Darstellung ergiebt danach eine Parabel, deren Scheitel in M_1 liegt (Fig. 425 II.) und welche durch die Punkte C und D hindurchgeht. Die Scheitelordinate MM_1 beträgt $MM_1 = -\frac{q\,l}{8}$.

Der zweite Theil $q\frac{l_1^2}{2}$ in dem Ausdrucke für M ist für alle Punkte zwischen C und D constant, da derselbe von x unabhängig ist, und nur von dem überragenden Stücke AC und dessen Belastung herrührt, und zwar ist dieser Werth gleich dem Biegungsmoment in C oder D. Denkt man sich daher die Ordinaten der gedachten Parabel CM_1D um das constante Stück $CC_1 = q\frac{l_1^2}{2}$, Fig. 425 III., vergrößert, d. h. denkt man sich die Parabel

um dieses Stück in der Richtung der positiven Y Axe (nach oben) verschoben, so erhält man in $C_1 M_1 D_1$ die Curve, welche die Größe des Biegungsmomentes für jeden Punkt innerhalb CD darstellt; während die Momente für die überstehenden Enden AC und BD durch die Parabelbögen AC_1 und BD_1 bestimmt sind, deren Scheitel in A und B liegen, und für welche AB die Scheiteltangente ist (vergl. §. 236).

Man erkennt aus den Figuren, daß es wesentlich auf die Größe von CC_1, d. h. auf die Länge l_1 ankommt, ob die resultirende Momentencurve wie in III. die Gerade AB schneidet, oder wie in V. ganz oberhalb derselben verbleibt. Als Grenzfall zwischen diesen beiden ist der in IV. dargestellte zu erkennen, in welchem der Parabelbogen $C_1 M_1 D_1$ so weit hinauf gerückt ist, daß er die Gerade AB in M berührt. In diesem Falle hat man das Moment in M gleich Null zu setzen, und es folgt daraus für diesen Fall:

$$-R\frac{l}{2} + q\frac{\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)^2}{2} = 0; \text{ oder}$$

$$-q\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)\frac{l}{2} + q\frac{\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)^2}{2} = 0; \text{ woraus}$$

$$l = l_1 + \frac{l}{2} \text{ oder } l_1 = \frac{l}{2}.$$

Wenn also die über C und D hinausragenden Balkenstücke AC und BD einzeln gleich der halben Länge CD sind, so findet in der Mitte des Balkens eine Biegung gar nicht statt, und man könnte den Balken in der Mitte durchschneiden ohne seine Tragfähigkeit zu beeinträchtigen. Man hat sich aber zu hüten, den Punkt M als einen Inflexionspunkt anzusehen, das ist er nicht, weil die Biegungen der links und rechts von ihm gelegenen Balkentheile nach derselben Richtung (concav nach unten) geschehen. Es entspricht vielmehr der Punkt M einem Minimum des Biegungsmomentes, und letzteres fällt in diesem besonderen Falle gleich Null aus. Das Maximalmoment findet in C und D statt, woselbst es die Größe

$$\frac{q l_1^2}{2} = q\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = q\frac{l^2}{8}$$

annimmt.

Wenn $l_1 < \frac{l}{2}$ ist, so zeigt die Momentencurve den in Fig. 425 III. dargestellten Verlauf. Es treten hierbei zwei Inflexionspunkte in der elastischen Linie in U und V ein, für deren Abstand x von C man hat:

$$0 = -R \,.\, x + q\frac{(l_1 + x)^2}{2} = -q\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)x + q\frac{(l_1 + x)^2}{2}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert:

$$x_1 = \frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2} = \overline{CU} \text{ und}$$

$$x_2 = \frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - l_1^2} = \overline{CV}.$$

Für das Biegungsmoment hat man hier drei relative Maxima, und zwar in C und D:

$$M_1 = q\,\frac{l_1^2}{2} \text{ und in der Mitte}$$

$$M = -q\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)\frac{l}{2} + q\,\frac{\left(l_1 + \frac{l}{2}\right)^2}{2} = -q\left(\frac{l^2}{8} - \frac{l_1^2}{2}\right).$$

Ob für die Tragfähigkeit des Balkens M oder M_1 in Rechnung zu stellen ist, hängt davon ab, welcher der Werthe absolut genommen der größere ist. Für den Fall, daß beide gleich groß sein sollen, hat man

$$\frac{l^2}{8} - \frac{l_1^2}{2} = \frac{l_1^2}{2};\ \text{d. i. } l_1 = l\sqrt{\frac{1}{8}} = 0{,}3536\,l.$$

In diesem Falle sind die Momente in C, M und D sämmtlich

$$M = q\,\frac{l_1^2}{2} = \frac{q}{2}\left(l\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 = \frac{q\,l^2}{16},$$

und es entspricht daher dieser Fall demjenigen eines an beiden Enden unter den vortheilhaftesten Winkeln eingemauerten Balkens von der Länge l (vergl. §. 242).

Sobald $l_1 < l\sqrt{\frac{1}{8}}$ ist, hat das Moment in M den größten Werth, und für die Tragkraft gilt die Formel:

$$q\left(\frac{l^2}{8} - \frac{l_1^2}{2}\right) = k\,\frac{W}{e}.$$

Ist aber $l_1 > l\sqrt{\frac{1}{8}}$, so liegen die Bruchpunkte in C und D und es gilt für die Tragkraft:

$$q\,\frac{l_1^2}{2} = k\,\frac{W}{e}.$$

Will man denselben Belastungszustand haben wie bei dem beiderseits horizontal eingemauerten Balken, so wäre das Moment in C oder D nach §. 242 $M_1 = q\,\frac{l^2}{12}$ zu setzen, und aus

$$q\,\frac{l_1^2}{2} = q\,\frac{l^2}{12} \text{ folgt } l_1 = l\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}4083\,l.$$

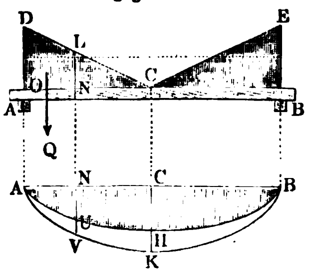
So lange $l_1 < 0{,}5\,l$ ist, wird der Balken nach dem Obigen nach oben und unten gebogen, und es treten immer zwei Wendepunkte in der elastischen Linie auf. Sobald aber $l_1 > \frac{l}{2}$ wird, nimmt die Curve des Biegungsmomentes den in Fig. 425 V. dargestellten Verlauf an, der Balken wird in allen Punkten concav nach unten gebogen, und die Bruchpunkte liegen unter allen Umständen in den Stützen, wofür die Gleichung gilt:

$$q\,\frac{l_1^2}{2} = k\,\frac{W}{e}.$$

In vorstehenden Formeln kann man überall $\frac{Q}{2\,l_1 + l}$ für q an die Stelle setzen.

§. 244. **Ungleichförmig belastete Balken.** Wenn ein Balken AB, Fig. 426, ungleichförmig, jedoch so belastet ist, daß die Last auf den laufenden Fuß Balkenlänge mit der Entfernung von der Balkenmitte C nach den Enden zu gleichmäßig wächst, so finden folgende statischen Verhältnisse statt.

Fig. 426.



Ist $l = AB = 2\,CA = 2\,CB$, die Länge des Balkens, zwischen den Stützpunkten A und B gemessen, q das Gewicht der Last pro Flächeneinheit Querschnitt, und ϱ der Neigungswinkel $ACD = BCE$ der Begrenzungsebenen CD und CE der Last, so hat man das Gewicht eines Lastprismas $ACD = BCE$, welches von einem Stützpunkte getragen wird,

$$\frac{Q}{2} = {}^1/_2\,\overline{AC}\,.\,\overline{AD}\,.\,q = {}^1/_2 \left(\frac{l}{2}\right)^2 tang.\,\varrho\,.\,q = {}^1/_8\,q\,l^2\,tang.\,\varrho,$$

und folglich das Moment dieser Kraft in Hinsicht auf einen Punkt N, welcher um $AN = x$ vom Stützpunkte A absteht,

$$y_1 = \frac{Q}{2}\cdot x = {}^1/_8\,q\,l^2\,x\,tang.\,\varrho.$$

Das Gewicht des Lastprismas über $AN = x$ ist $q\left(\frac{AD + NL}{2}\right)AN$, und der Schwerpunkt desselben steht von N um $NO = \frac{2\,AD + NL}{AD + NL}\cdot\frac{AN}{3}$ ab, folglich ist das Moment dieses Prismas in Hinsicht auf N:

$$y_2 = q\,(2\,AD + NL)\,\frac{\overline{AN}^2}{6} = q\left[l\,tang.\,\varrho + \left(\frac{l}{2} - x\right) tang.\,\varrho\right]\frac{x^2}{6}$$
$$= \frac{q x^2}{6}\,tang.\,\varrho\,(^3/_2\,l - x),$$

und das ganze Biegungsmoment des Balkens in N:

$$\overline{NU} = y = y_1 - y_2 = \frac{q\,tang.\,\varrho}{24}\,(3\,l^2 x - 6\,l x^2 + 4\,x^3)$$
$$= \frac{q\,x\,tang.\,\varrho}{24}\,(3\,l^2 - 6\,l x + 4\,x^2) = \frac{q}{6}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - x_1^3\right] tang.\,\varrho,$$

wenn man $CN = x_1 = \frac{l}{2} - x$ setzt, also die Abscisse x_1 von C aus mißt.

Dasselbe ist für $x = \frac{l}{2}$ oder für $x_1 = 0$ ein Maximum, und zwar $\frac{q\,l^3}{48}\,tang.\,\varrho$, daher ist auch das Tragvermögen dieses Balkens:

$$\frac{q\,l^3}{48}\,tang.\,\varrho, \text{ d. i. } \frac{Ql}{12} = k\,\frac{W}{e},$$

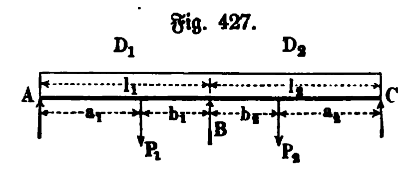
während bei gleichmäßiger Belastung das Biegungsmoment

$$\overline{NV} = y_0 = \frac{q l x}{2} - \frac{q x^2}{2} = \frac{q x}{2}\,(l - x) = \frac{q}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x_1^2\right]$$
$$= \frac{Q}{2\,l}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x_1^2\right] \text{ ist,}$$

und daher das Tragvermögen $\frac{Ql}{8} = k\,\frac{W}{e}$ folgt.

Balken auf drei Stützen. Wenn ein Balken $A\,C$, Fig. 427, auf §. 245
drei in demselben Niveau liegenden Stützen A, B und C aufruht, welche um $AB = l_1$ und $CB = l_2$ von einander abstehen, und derselbe trägt außer der gleichmäßig über seine ganze Länge ausgebreiteten Last

Fig. 427.



$$Q = q\,(l_1 + l_2)$$

noch die in D_1 und D_2 concentrirten Lasten P_1 und P_2, deren Angriffspunkte von B um b_1 resp. b_2 und von den Punkten A und C um a_1 und a_2 abstehen, so sind die Auflagerdrucke A, B, C in den gleichnamigen Stützpunkten vorläufig unbekannt. Ebenso kennt man den Neigungswinkel β der elastischen Linie in B nicht. Zur Bestimmung dieser Größen denkt man sich das Stück $B\,C$ eingemauert, so muß die Senkung s in A gleich 0

gesetzt werden, da A und B in gleicher Höhe liegen; dies liefert die Gleichung:

$$s = 0 = \beta l_1 + P_1 \frac{b_1^3}{3\,WE} + P_1 \frac{b_1^2}{2\,WE} a_1 + q \frac{l_1^4}{8\,WE} - A \frac{l_1^3}{3\,WE}.$$

Dieselbe Betrachtung läßt sich für das Balkenstück CB anstellen, nur hat in dieser Strecke β das entgegengesetzte Vorzeichen, folglich ist auch:

$$s = 0 = -\beta l_2 + P_2 \frac{b_2^3}{3\,WE} + P_2 \frac{b_2^2}{2\,WE} a_2 + q \frac{l_2^4}{8\,WE} - C \frac{l_2^3}{3\,WE}.$$

Aus beiden Gleichungen β entwickelt und die Werthe gleichgesetzt, liefert zwischen A und C die Gleichung:

$$A \,.\, 8\,l_1^2 - P_1 \frac{8\,b_1^3 + 12\,a_1 b_1^2}{l_1} - 3\,q\,l_1^3$$
$$= - C \,.\, 8\,l_2^2 + P_2 \frac{8\,b_2^3 + 12\,a_2 b_2^2}{l_2} + 3\,q\,l_2^3.$$

Diese Gleichung zusammen mit der allgemeinen Bedingung für das Gleichgewicht aller äußeren Kräfte (die Momente aller Kräfte in Bezug auf B gleich Null gesetzt):

$$A l_1 - P_1 b_1 - q \frac{l_1^2}{2} - C l_2 + P_2 b_2 + q \frac{l_2^2}{2} = 0$$

ergiebt A und C; und für B den Werth $B = P_1 + P_2 + Q - A - C$.

Aus den so berechneten Auflagerdrucken lassen sich nun für alle Punkte die Biegungsmomente, die Neigungen und Senkungen berechnen. Das Biegungsmoment wird einen größten Werth über der Mittelstütze, und in jeder der beiden Strecken AB und CB ebenfalls einen solchen annehmen, die Untersuchung wird in jedem besonderen Falle den absolut genommen größten dieser Werthe zu ermitteln haben, und der Punkt, welchem dieses Moment angehört, ist der absolute Bruchpunkt. Will man die Anordnung so treffen, daß sämmtliche drei maximale Momente gleich groß werden, so hat man wie früher, indem man die Momente gleich, also $M_1 = M_2 = M_3$ setzt, hieraus die Werthe der Auflagerdrucke A und C, als Functionen der belastenden Kräfte und der gegebenen Abstände zu entwickeln, und diese Werthe für A und C in die Gleichungen für die Senkung einzusetzen, worauf die berechnete Senkung s die Höhe angiebt, um welche die Stützen A und C über das Niveau von B zu erhöhen sind.

Setzen wir speciell $l_1 = l_2 = l$; ferner $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = \frac{l}{2}$ und $P_1 = P_2 = P$ voraus, so ist, wegen der symmetrischen Anordnung des Balkens die Tangente der elastischen Linie in B horizontal, d. i. $\beta = 0$; und man hat einfach, bei gleicher Höhenlage der Stützpunkte A, B und C die Senkung in A oder C:

$$s = 0 = P \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,WE} + P \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2\,WE} \frac{l}{2} + q \frac{l^4}{8\,WE} - A \frac{l^3}{3\,WE};$$

woraus $A = \frac{5}{16} P + \frac{3}{8} ql$ folgt. Ebenso groß ist der Auflagerdruck in C und derjenige in B ist:

$$B = 2P + 2ql - \frac{5}{8} P - \frac{3}{4} ql = \frac{11}{8} P + \frac{5}{4} ql.$$

Es stimmt dieses Resultat mit dem in §. 240 erhaltenen insofern überein, als der Druck in der Endstütze in beiden Fällen derselbe ist, während die Mittelstütze hier doppelt so viel Druck empfängt als in jenem Falle die Einmauerungsstelle, da die Mittelstütze hier von den beiderseits angeordneten Lasten gedrückt wird.

Das Maximum des Momentes M_1 zwischen A und B liegt in einer Entfernung x von A, welche nach §. 220

$$x = \frac{A}{q} = \frac{\frac{5}{16} Pl}{q} + \frac{3}{8} l$$

beträgt. Dieser Punkt liegt offenbar von der Mitte der Strecke AB höchstens $^1/_8\, l$ nach A hin entfernt. Das Moment M_1 selbst ist für diesen Punkt

$$M_1 = -Ax + q\frac{x^2}{2} = -A\frac{A}{q} + q\frac{1}{2}\left(\frac{A}{q}\right)^2 = -\frac{A^2}{2q}.$$

Das Moment über der Mittelstütze ist

$$M_2 = -Al + P\frac{l}{2} + q\frac{l^2}{2}.$$

Setzt man $-M_1 = M_2$, so folgt aus

$$\frac{A^2}{2q} = -Al + P\frac{l}{2} + q\frac{l^2}{2}$$

für A der Werth

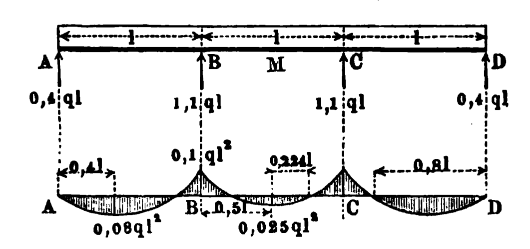
$$A = -ql + \sqrt{P.ql + 2q^2l^2}.$$

Wird dieser Werth in den Ausdruck für die Senkung s in A eingesetzt, so folgt in derselben Art wie in §. 240 die Größe s, um wie viel die Stützen A und C gesenkt werden müssen, wenn das Biegungsmoment über der Mittelstütze gerade so groß sein soll, wie die größten Momente zwischen den Stützen.

Balken auf beliebig vielen Stützen. Der Balken AD (Fig. 428 a. f. S) sei auf vier um die Länge l von einander abstehenden Stützen A, B, C, D §. 246.

gelagert, und durch eine gleichmäßig über die ganze Länge vertheilte Last angegriffen, deren Betrag pro Längeneinheit q sein mag. Wegen der sym-

Fig. 428.



metrischen Anordnung muß die Tangente der elastischen Linie in der Mitte M des Balkens horizontal sein. Man kann daher die eine Hälfte MD des Balkens sich eingemauert denken, und die andere Hälfte AM als einen am Ende horizontal eingeklemmten, durch die Last $\frac{3}{2}\,ql$ und die Stützkräfte A und B angegriffenen Balken ansehen. Die Reactionen A, B, C, D sind vorläufig nicht bekannt, man weiß nur so viel, daß $A = D$ und $B = C$, daher $A + B = \frac{Q}{2} = \frac{3}{2}\,ql$ sein muß. Wenn die Stützen A und B, wie hier vorausgesetzt werde, in gleichem Niveau liegen, so hat man die Senkung des Punktes A gegen M gleich derjenigen des Punktes B gegen M zu setzen, wodurch man eine Gleichung zwischen A und B erhält. Es ist die Senkung in A:

$$s = -\frac{A}{3\,WE}\left(\frac{3}{2}\,l\right)^3 - \frac{B}{3\,WE}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{B}{2\,WE}\left(\frac{l}{2}\right)^2 l + \frac{q}{8\,WE}\left(\frac{3}{2}\,l\right)^4$$

und in B:

$$s = -\frac{B}{3\,WE}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{A}{2\,WE}\left[\frac{3}{2}\,l\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3}\right]$$

$$+ \frac{q}{2\,WE}\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\,l\right)^2\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} - \frac{\frac{3}{2}\,l\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4}{12}\right]$$

Durch Gleichsetzung dieser Werthe folgt:

$$-B\,\frac{l^3}{8} - A\,\frac{23}{24}\,l^3 = -q\,\frac{25}{48}\,l^4,$$

oder für B seinen Werth $\frac{3}{2}\,ql - A$ eingesetzt, erhält man:

$$A \cdot \frac{5}{6}\, l^3 = q\left(\frac{25}{48} - \frac{3}{16}\right) l^4 = \frac{q\, l^4}{3}, \text{ woraus:}$$

$$A = \frac{2}{5}\, q l = 0{,}4\; q l \text{ und}$$

$$B = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5}\right) q l = 1{,}1\; q l \text{ sich ergiebt.}$$

Nunmehr folgt für das Moment in der Mitte:

$$M = -A \cdot \frac{3}{2}\, l - B \cdot \frac{l}{2} + q\, \frac{\left(\frac{3}{2}\, l\right)^2}{2} = -0{,}6\, q l^2 - 0{,}55\, q l^2 + 1{,}125\, q l^2$$
$$= -\,0{,}025\; q l^2;$$

für das Biegungsmoment in B:

$$M_1 = -\,A l + q\, \frac{l^2}{2} = (-\,0{,}4 + 0{,}5)\; q l^2 = +\,0{,}1\; q l^2,$$

und endlich für das größte Moment zwischen A und B, welches in der Entfernung von A

$$x = \frac{A}{q} = 0{,}4\; l \text{ stattfindet (s. §. 220)}$$

$$M_2 = -\,A\, .\, 0{,}4\, l + q\, \frac{(0{,}4\, l)^2}{2} = -\,0{,}08\; q l^2.$$

In der Strecke AB ist ein Inflexionspunkt in dem Abstande x von A gelegen, welcher aus

$$-\,A x + q\, \frac{x^2}{2} = 0 \text{ folgt zu } x = 0{,}8\; l.$$

Einen anderen Wendepunkt hat die elastische Linie zwischen B und der Mitte M und zwar in der Entfernung x von A, welche sich aus der Gleichung:

$$-\,A x - B\,(x - l) + q\, \frac{x^2}{2} = 0 \text{ ergiebt zu:}$$

$$x = 1{,}5\, l \pm \sqrt{0{,}05\, l^2} = 1{,}2764\, l \text{ oder } 1{,}7236\, l.$$

Es liegen also die Inflexionspunkte der Strecke BC von der Mitte M um $0{,}2236\, l$ entfernt.

Setzt man die Werthe von A und B in einen der Ausdrücke ein, welche oben für s gefunden wurden, so erhält man die Durchbiegung in der Mitte. Ebenso kann man die Durchbiegung in jedem beliebigen Punkte der elastischen Linie in derselben Art, wie in §. 237 geschehen, ermitteln.

Wenn der Balken auf beliebig vielen Stützen ruht, so ist die Bestimmung der in den Stützpunkten auftretenden Reactionen in derselben Weise, wie bisher geschehen, immer möglich. Für den Fall insbesondere, daß die Unter-

stützungen und Belastungen gegen die Mitte M des Balkens symmetrisch angebracht sind, kann man immer die eine Hälfte des Balkens horizontal eingemauert ansehen. Ist dann die Zahl der Stützen eine ungerade gleich $2n + 1$, so erhält man für die n Stützkräfte der einen Balkenhälfte n Gleichungen dadurch, daß man die Senkungen in den n Stützpunkten einzeln gleich Null setzt. Der Druck in dem mittleren Stützpunkte ergiebt sich dann als der Ueberschuß der gesammten Belastung über die Summe der $2n$ Auflagerreactionen der beiderseitigen übrigen Stützen.

Ist die Anzahl der Stützen eine gerade $(2n)$, so ist die Senkung der Balkenmitte zwar nicht Null, aber die Senkung beträgt in Bezug auf alle Stützpunkte gleich viel. Man erhält demnach durch Gleichsetzung der Senkungen der n Auflagerpunkte einer Balkenhälfte $n - 1$ Gleichungen, welche in Verbindung mit der Beziehung, daß die n Auflagerreactionen zusammen genommen gleich der halben Totalbelastung sein müssen, genügen, um die n Reactionen zu bestimmen.

Wenn die Unterstützung und Belastung nicht symmetrisch sind, so ist im Allgemeinen die elastische Linie in der Mitte des Balkens nicht horizontal, sondern unter einem bestimmten vorläufig nicht bekannten Winkel γ gegen den Horizont geneigt. Man kann dann den Balken in irgend einem Punkte, etwa einem Stützpunkte unter dem Winkel γ, eingeklemmt denken, und indem man dann, wenn n Stützen vorhanden sind, die Senkungen für die $n - 1$ übrigen Stützpunkte einzeln gleich Null (wenn die Stützen sämmtlich in gleicher Höhe liegen) oder gleich den betreffenden Niveaudifferenzen setzt (wenn die Stützen verschieden hoch liegen), erhält man $n - 1$ Gleichungen. Diese mit den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma P = 0$ und $\Sigma M = 0$ genügen zur Bestimmung der n Auflagerreactionen und des Winkels γ.

Wenn der Balken an den Enden nicht einfach gestützt, sondern daselbst unter den Winkeln α_1 und β_1 eingemauert ist, so bleibt das Verfahren zur Bestimmung der Auflagerreactionen im Ganzen dasselbe, nur kommen alsdann noch zwei unbekanute Momente an den Enden hinzu, zu deren Bestimmung zwei fernere Gleichungen erhalten werden, wenn man unter Berücksichtigung von §. 239 die Neigungen der beiden Balkenenden berechnet, und dieselben den bekannten Einklemmungswinkeln α_1 resp. β_1 gleichsetzt.

Nachdem in solcher Weise die sämmtlichen Auflagerreactionen ermittelt sind, macht die Berechnung der Maximalmomente, Inflexionspunkte, Durchbiegungen, Neigungen u. s. w. keine Schwierigkeit mehr. Die graphische Tabelle auf der folgenden Seite giebt für Balken auf 3, 4, 5, 7 und 9 Stützen die Größe der Auflagerreactionen, die Lage der relativen Bruchpunkte und die Größe der Biegungsmomente daselbst, sowie die Lage der Inflexionspunkte an. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Entfernung je zweier

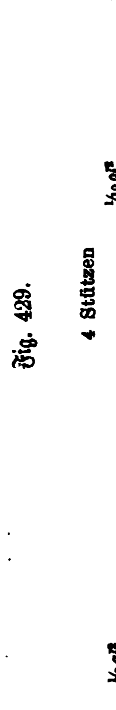


Fig. 429.

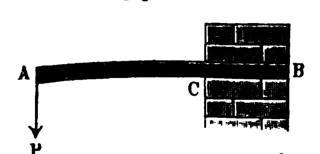
benachbarter Stützen gleich l ist, und die Stützpunkte alle in gleicher Höhe liegen. Die Belastung ist gleichmäßig über die ganze Länge vertheilt und pro Längeneinheit gleich q angenommen. Wegen der symmetrischen Anordnung der Balken sind die Angaben bei den Balken auf 5, 7 und 9 Stützen nur für eine Hälfte gemacht worden.

§. 247. **Verschiedenheit der Tragmodel.** Die Formel

$$P = \frac{WT}{el}$$

für die Tragkraft eines an einem Ende eingemauerten Balkens A, Fig. 430, hat nur dann eine allgemeine Gültigkeit, wenn die Ausdehnung σ_I und die Compression σ_{II} des Körpers bei der Elasticitätsgrenze einander gleich sind, weil nur dann der Tragmodul

Fig. 430.



$$T_I = \sigma_I E$$

für die Ausdehnung dem Tragmodul

$$T_{II} = \sigma_{II} E$$

für die Compression gleichzusetzen ist. Bei dem Schmiedeeisen scheint diese Gleichheit so ziemlich, und bei dem Holze wenigstens annähernd vorzukommen; ganz anders ist aber dieses Verhältniß bei dem Gußeisen. Dasselbe hat nicht allein einen viel größeren Modul der Festigkeit für das Zerdrücken als für das Zerreißen, sondern es ist auch bei der allerdings nur ungefähr anzugebenden Elasticitätsgrenze die Compression σ_{II} circa 2 mal so groß als die Ausdehnung σ_I, und folglich auch der Tragmodul T_{II} des Zerdrückens 2 mal so groß als der Tragmodul T_I des Zerreißens.

Um die Tragkraft des Gußeisens oder eines anderen Körpers zu finden, bei welchem eine ansehnliche Verschiedenheit zwischen σ_I und σ_{II} oder T_I und T_{II} statt hat, muß man zuerst untersuchen, welcher von den Quotienten $\frac{T_I}{e_I}$ und $\frac{T_{II}}{e_{II}}$ der kleinere ist, und diesen letzteren statt $\frac{T}{e}$ in die Formel

$$P = \frac{WT}{el}$$

einsetzen.

Die andere Balkenhälfte, welcher das größere Verhältniß $\left(\frac{T_I}{e_I} \text{ oder } \frac{T_{II}}{e_{II}}\right)$ entspricht, ist natürlich dann noch unter der Elasticitätsgrenze gespannt, und hat daher einen unnöthig großen Querschnitt. Um diesen und folglich auch den Querschnitt des ganzen Körpers auf das Minimum zurückzuführen und daher so viel wie möglich an Material zu ersparen, ist nöthig, daß beide

Balkenhälften gleichzeitig bis zu der Elasticitätsgrenze ausgedehnt und comprimirt werden. Deshalb soll man dem Querschnitt des Balkens eine solche Form und eine solche Lage geben, daß

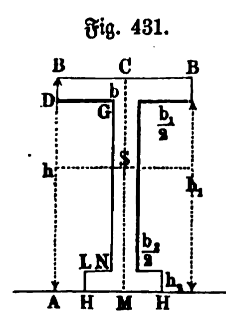
$$\frac{T_I}{e_I} = \frac{T_{II}}{e_{II}} \text{ oder } \frac{e_I}{e_{II}} = \frac{T_I}{T_{II}} = \frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}$$

ausfällt, daß also das Verhältniß zwischen den größten Abständen e_I und e_{II} der Fasern zu beiden Seiten der neutralen Axe gleich ist dem Verhältnisse zwischen den Tragmodeln T_I und T_{II} des Zerreißens und Zerdrückens.

Wenn also beim Gußeisen $\frac{T_{II}}{T_I} = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_I} = 2$ ist (s. §. 217), so müssen wir hiernach den Querschnitt eines gußeisernen Balkens so gestalten und so legen, daß $\frac{e_{II}}{e_I}$ so viel wie möglich $= 2$ ausfällt. Ein dreiseitiger Balken aus Gußeisen ist folglich so zu legen, daß die Hälfte desselben mit dem dreiseitigen Querschnitte comprimirt, und dagegen die mit dem trapezoidalen Querschnitte ausgedehnt wird. Legt man hierbei die eine Seitenfläche des Prismas horizontal oder rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung, so hat man $\frac{e_{II}}{e_I} = \frac{2}{1}$, während bei der umgekehrten Lage, $\frac{e_{II}}{e_I}$ nur $= \frac{1}{2}$ ist.

Bei einem gußeisernen Träger, dessen Querschnitt beinahe die Form eines T hat, wie z. B. Fig. 431 vor Augen führt, läßt sich unter gewissen Voraussetzungen das Verhältniß $\frac{e_{II}}{e_I} = 2$ ebenfalls vollkommen herstellen.

Fig. 431.



Es sei die ganze Höhe dieses Balkens, $AB = h$, und die Breite seiner Kopfplatte, $BB = 2\,BC = b$, ferner die Höhe seiner Höhlungen zur Seite:

$$\overline{AD} = h_1 = \mu_1 h,$$

und die Breite derselben:

$$2\,\overline{DG} = b_1 = \nu_1 b;$$

endlich sei die Höhe seiner Fußplatte:

$$\overline{HL} = h_2 = \mu_2 h$$

und die Ausladung derselben zu beiden Seiten:

$$2\,\overline{LN} = b_2 = \nu_2 b.$$

Dann ist der Abstand des Schwerpunktes S des ganzen Querschnittes von der untersten Kante HH:

$$\overline{MS} = e_{II} = \frac{1}{2}\,\frac{bh^2 - b_1 h_1^2 + b_2 h_2^2}{bh - b_1 h_1 + b_2 h_2}$$

$$= \frac{h}{2}\,\frac{1 - \mu_1^2 \nu_1 + \mu_2^2 \nu_2}{1 - \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2} \text{ (s. §. 107 und §. 111).}$$

Setzt man nun $\frac{e_{II}}{e_I} = 2$, sowie $e_I + e_{II} = h$, so erhält man $e_I = \frac{1}{3} h$ und $e_{II} = \frac{2}{3} h$, und daher die Bestimmungsgleichung

$$\frac{2}{3} h = \frac{h}{2} \cdot \frac{1 - \mu_1^2 \nu_1 + \mu_2^2 \nu_2}{1 - \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2},$$

welche sich in folgende umgestalten läßt:

$$\mu_1 \nu_1 (4 - 3\mu_1) - \mu_2 \nu_2 (4 - 3\mu_2) = 1.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man aus drei der Dimensionsverhältnisse μ_1, ν_1, μ_2 und ν_2 das vierte berechnen. Nimmt man $\mu_2 = 0$ an, so hat man es mit einem Querprofile wie Fig. 432 zu thun, dessen Biegungsmoment schon oben (§. 228) bestimmt worden ist, und für welches wir

$$\mu_1 \nu_1 (4 - 3\mu_1) = 1 \text{ haben.}$$

Anmerkung. Die Herren Moll und Reuleaux (s. deren Schrift: „Die Festigkeit der Materialien, Braunschweig 1853") empfehlen zur Bestimmung zweckmäßiger Querschnittsformen die Anwendung einer Wage, deren Wagbalken aus einer Tafel besteht, auf welche die in Blech ausgeschnittene Querschnittsform so gelegt wird, daß ihre, durch das Verhältniß $\frac{e_I}{e_{II}} = \frac{\sigma_I}{\sigma_{II}}$ bestimmte neutrale Axe genau über die Drehungskante der Wage zu liegen kommt. Wenn nun hierbei die Wage einspielt, so hat diese Schablone eine zweckentsprechende Form; außerdem ist dieselbe durch Abschneiden an den Flanken so lange umzugestalten, bis das Einspielen bei der vorgeschriebenen Lage eintritt.

Beispiel 1. Wenn bei einem gußeisernen Balken, dessen Querschnitt die Gestalt Fig. 431 hat, die Höhenverhältnisse

$$\mu_1 = \frac{h_1}{h} = \frac{7}{8} \text{ und } \mu_2 = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

sind, so hat man für dessen Breitenverhältnisse die Bedingung:

$$\frac{7}{8}\left(4 - \frac{21}{8}\right)\nu_1 - \frac{1}{8}\left(4 - \frac{3}{8}\right)\nu_2 = 1, \text{ d. i.:}$$

$$77\,\nu_1 - 29\,\nu_2 = 64.$$

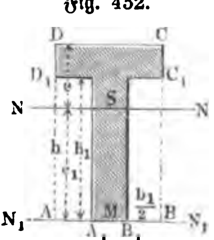
Läßt man die Fußplatte ganz weg, so ist $\nu_2 = 0$, und daher:

$$\nu_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{64}{77} = 0{,}831,$$

also die Dicke des eigentlichen Trägers, $b - b_1 = 0{,}169\,b$.

Nimmt man hingegen $\nu_2 = \frac{\nu_1}{6}$ an, so ist $\left(77 - \frac{29}{6}\right)\nu_1 = 64$, folglich

Fig. 432.



$\nu_1 = 0{,}887$ und $\nu_2 = \frac{1}{6} \cdot 0{,}887 = 0{,}148$. Für $h = 0{,}200$ Meter und $b = 0{,}150$ Meter ist daher $h_1 = 0{,}175$ Meter, $h_2 = 0{,}025$ Meter, $b_1 = 0{,}133$ Meter und $b_2 = 0{,}022$ Meter; so daß die Dicke der Fuß- und Kopfplatte 0,025 Meter, die des Mittelstückes aber nur 0,017 Meter beträgt.

Beispiel 2. Für den Balken mit dem Tförmigen Querschnitt, Fig. 432, ist (§. 228):

$$W = \frac{(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b b_1\, h h_1 (h - h_1)^2}{12 (bh - b_1 h_1)}$$

gefunden worden und

$$SM = e_{II} = \frac{1}{2}\, \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{bh - b_1 h_1}$$

zu setzen, woraus für den Fall, daß er an einem Ende festgehalten und am anderen belastet wird,

$$Pl = \frac{(bh^2 - b_1 h_1^2)^2 - 4\, b b_1\, h h_1 (h - h_1)^2}{bh^2 - b_1 h_1^2}\, \frac{T_{II}}{6} \text{ folgt.}$$

Setzen wir nun hierin $h_1 = \mu_1 h$, und $b_1 = \nu_1 b$ ein, so erhalten wir:

$$Pl = \frac{(1 - \mu_1^2 \nu_1)^2 - 4\, \mu_1 \nu_1 (1 - \mu_1)^2}{1 - \mu_1^2 \nu_1}\, \frac{bh^2}{6}\, T_{II};$$

daher, wenn der Balken aus Gußeisen besteht und $\mu_1 = {}^6/_7$ und $\nu_1 = {}^7/_8$ eingeführt wird:

$$Pl = \frac{({}^5/_{14})^2 - 3\, ({}^1/_7)^2}{{}^5/_{14}} \cdot \frac{bh^2}{6}\, T_{II} = \frac{13}{70} \cdot \frac{bh^2}{6}\, T_{II}.$$

Wäre z. B. $h = 0{,}250$ Meter, $b = 0{,}200$ Meter und folglich:

$h_1 = {}^6/_7 \,.\, 0{,}250$ Meter $= 0{,}214$ Meter, $h - h_1 = 0{,}036$ Meter,

$b_1 = {}^7/_8 \,.\, 0{,}200$ Meter $= 0{,}175$ Meter, sowie $b - b_1 = 0{,}025$ Meter,

so hätte man:

$$Pl = \frac{13}{70}\, \frac{200 \,.\, 250^2}{6} \cdot T_{II} = 386900\, T_{II}.$$

Führt man nun noch $T_{II} = 13{,}2$ Kilogramm ein, so stellt sich das Tragmoment

$$Pl = 386900 \,.\, 13{,}2 = 5'107080 \text{ Millimeterkilogramm}$$

heraus, wofür zur Sicherheit 1'600000 zu setzen sein dürfte.

Hat dieser gußeiserne Balken eine Länge von 2,500 Meter, so ist hiernach seine Tragkraft am freien Ende

$$P = \frac{1600000}{2500} = 640 \text{ Kilogramm.}$$

Liegt der Balken an beiden Enden auf, und trägt er die Last in der Mitte, so ist dagegen:

$$P = 4 \,.\, 640 = 2560 \text{ Kilogramm.}$$

Während im ersteren Falle die horizontale Querrippe oben liegen muß, hat man im zweiten Falle dieselbe unten zu legen, so daß sie jedenfalls einem Zuge ausgesetzt ist.

Verschiedenheit der Festigkeitsmodel. Wenn man den Elasticitäts- und den Tragmodul durch Biegungsversuche, und zwar mittels der Formeln §. 248.

$$E = \frac{Plr}{W} \text{ und } T = \frac{Ple}{W}$$

bestimmt, so stößt man in der Regel auf eine vollkommen genügende Uebereinstimmung zwischen den so gefundenen Werthen von E und T und den durch directe Ausdehnungs- und Compressionsversuche mittels der Formeln

$$E = \frac{Pl}{\lambda F} \text{ und } T = \frac{P}{F}$$

bestimmten Werthen dieser Model (§. 218).

Anders ist aber das Verhältniß bei den **Festigkeitsmodeln.** Da der Elasticitätsmodul E außerhalb der Elasticitätsgrenze nicht mehr als constant angesehen werden kann, sondern immer mehr und mehr abnimmt, je weiter die Ausdehnung oder Compression gesteigert wird, und da ferner auch dann der Elasticitätsmodul für die Ausdehnung nicht mehr gleich ist dem für die Zusammendrückung, so sind die Spannungen der über einander liegenden Fasern des Körpers nicht mehr den Abständen von der neutralen Axe proportional zu setzen. Es geht folglich auch die neutrale Axe nicht mehr durch den Schwerpunkt des Querschnittes, und es nehmen also die Abstände e_I und e_{II} ganz andere Werthe an als bei der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze.

Bedeutet W_I das Maß des Biegungsmomentes für die ausgedehnte Hälfte des Balkens, sowie E_I den mittleren Elasticitätsmodul für dieselbe, und bezeichnet W_{II} dieses Maß für die zusammengedrückte Hälfte, sowie E_{II} ihren mittleren Elasticitätsmodul, so haben wir für größere Biegungen das Moment der Biegungskraft:

$$Pl = \frac{W_I E_I + W_{II} E_{II}}{r},$$

also wenn wir, wenigstens annähernd, $\frac{K_I}{E_I} = \frac{e_I}{r}$ und $\frac{K_{II}}{E_{II}} = \frac{e_{II}}{r}$ setzen, wobei K_I und K_{II} die Festigkeitsmodel für das Zerreißen und für das Zerdrücken bezeichnen, das Moment zum Abbrechen:

$$Pl \text{ entweder } = \frac{K_I(W_I E_I + W_{II} E_{II})}{E_I e_I} \text{ oder } = \frac{K_{II}(W_I E_I + W_{II} E_{II})}{E_{II} e_{II}}.$$

Bezeichnen wir ferner das statische Moment des Querschnittes des ausgedehnten Körperstückes in Hinsicht auf die neutrale Axe durch M_I, und das des Querschnittes des comprimirten Körperstückes in Hinsicht auf eben diese Axe durch M_{II}, so haben wir noch die Spannkraft der einen Hälfte, $= \frac{M_I E_I}{r}$ und die der anderen, $= \frac{M_{II} E_{II}}{r}$, und es ist, da beide Kräfte ein Paar bilden müssen,

$$M_I E_I = M_{II} E_{II}$$

zu setzen. Diese Gleichung dient zur Bestimmung der neutralen Axe mittels ihrer Abstände e_I und e_{II}.

Für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte ist z. B.

$$M_I = \frac{b e_I^2}{2} \text{ und } M_{II} = \frac{b e_{II}^2}{2},$$

daher

$$E_I e_I^2 = E_{II} e_{II}^2$$

anzunehmen. Es ergiebt sich hiernach:

$$e_{II} = e_I \sqrt{\frac{E_I}{E_{II}}},$$

und setzt man diesen Werth in die Gleichung $e_{\text{I}} + e_{\text{II}} = h$ ein, so folgt:

$$e_{\text{I}} = \frac{h\sqrt{E_{\text{II}}}}{\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}}} \text{ und } e_{\text{II}} = \frac{h\sqrt{E_{\text{I}}}}{\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}}}.$$

Die Maße der Biegungsmomente sind in diesem Falle:

$$W_{\text{I}} = \frac{b e_{\text{I}}^3}{3} \text{ und } W_{\text{II}} = \frac{b e_{\text{II}}^3}{3};$$

folglich ergiebt sich

$$Pl = \frac{b}{3r}(E_{\text{I}} e_{\text{I}}^3 + E_{\text{II}} e_{\text{II}}^3) = \frac{bh^3}{3r}\left(\frac{E_{\text{I}} E_{\text{II}}\sqrt{E_{\text{II}}} + E_{\text{I}} E_{\text{II}}\sqrt{E_{\text{I}}}}{(\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}})^3}\right)$$

$$= \frac{bh^3}{3r} \cdot \frac{E_{\text{I}} E_{\text{II}}}{(\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}})^2},$$

und daher das Moment zum Abbrechen:

$$Pl \text{ entweder } = \frac{K_{\text{I}} . bh^3}{3E_{\text{I}} e_{\text{I}}} \cdot \frac{E_{\text{I}} E_{\text{II}}}{(\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}})^2} = \frac{bh^2}{3} \cdot K_{\text{I}} \cdot \frac{\sqrt{E_{\text{II}}}}{\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}}}$$

$$\text{oder } = \frac{bh^2}{3} K_{\text{II}} \cdot \frac{\sqrt{E_{\text{I}}}}{\sqrt{E_{\text{I}}} + \sqrt{E_{\text{II}}}}.$$

Für $E_{\text{I}} = E_{\text{II}}$ erhält man natürlich, wie oben:

$$Pl = \frac{bh^2}{6} K.$$

Bei Holz und Schmiedeeisen ist so ziemlich $E_{\text{I}} = E_{\text{II}}$, und daher annähernd

$$Pl = \frac{bh^2}{6} K,$$

wobei man für K den kleineren der beiden Festigkeitsmodel zu setzen hat.

Beim Gußeisen ist jedenfalls E_{II} viel größer als E_{I}, daher nähert sich hier Pl dem Werthe $\frac{bh^2}{3} K_{\text{I}}$, wenn K_{I} den Festigkeitsmodul für das Zerreißen ausdrückt.

Beim Holz hätte man hiernach im Mittel den Festigkeitsmodul für das Zerdrücken (s. Tabelle II, §. 218), also $K_{\text{II}} = 4{,}8$ Kilogramm $= 6500$ Pfund einzusetzen, was mit den Versuchen von Eytelwein, Gerstner u. s. w. sehr gut übereinstimmt. Ebenso ist für schmiedeeiserne Balken statt K, der Festigkeitsmodul für das Zerdrücken, d. i.

$$K_{\text{II}} = 22 \text{ Kilogramm} = 30000 \text{ Pfund}$$

einzuführen. Während unter übrigens gleichen Verhältnissen das Holz und Schmiedeeisen durch Zerdrücken zerbricht, gelangt das Gußeisen mittels des Zerreißens zum Bruche. Wäre bei demselben noch K_{I} nahe $= K_{\text{II}}$, so würde

folglich für gußeiserne Träger in obige Formel der Modul für das Zerreißen, d. i.

$$K = 13 \text{ Kilogramm} = 17800 \text{ Pfund}$$

einzusetzen sein; vielfachen Versuchen zufolge ist aber hier

$$K = 32 \text{ Kilogramm} = 45000 \text{ Pfund},$$

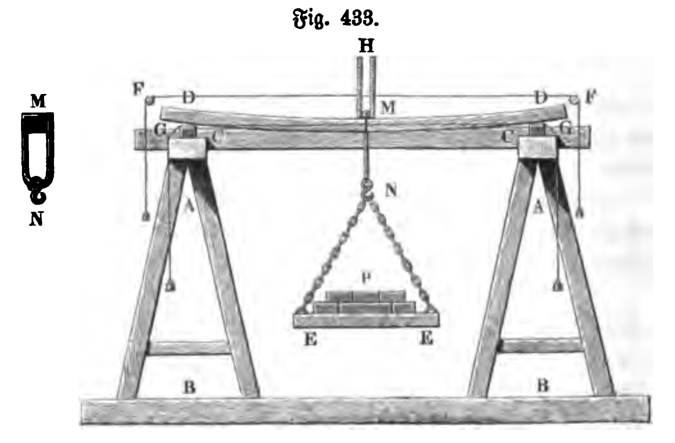
d. i. ziemlich das Mittel zwischen dem Modul des Zerreißens und dem des Zerdrückens zu setzen.

Diese große Abweichung hat jedenfalls nicht allein in der Verschiedenheit zwischen den Elasticitätsmodeln E_{I} und E_{II}, sondern auch in der körnigen Structur des Gußeisens seinen Grund, vermöge deren die Annahme, daß der Balken gleichsam aus einem Bündel von Ruthen besteht, nicht zulässig ist.

Uebrigens wirken auf die Elasticität, Tragkraft und Festigkeit der Körper noch vielerlei Umstände ein, welche beträchtliche Abweichungen in den Ergebnissen der Erfahrungen zur Folge haben. So ist z. B. das Holz am Kerne und an der Wurzel stärker als am Splint und an dem Gipfel; auch trägt das Holz mehr, wenn die Kraft parallel zu den Jahresringen wirkt als winkelrecht darauf; endlich haben noch der Erdboden und die Lage des Ortes, wo das Holz gewachsen ist, Temperatur, Zustand der Trockenheit, Alter u. s. w. Einfluß auf den Widerstand der Hölzer. Endlich fällt die Biegung, welche ein Körper, nachdem er längere Zeit belastet gewesen ist, erleidet, immer etwas größer aus, als die Biegung, welche gleich anfangs beim Auflegen der Last eintritt.

§. 249. **Biegungs- und Brechungsversuche.** Die Versuche über die Elasticität und Festigkeit wurden von Eytelwein und von Gerstner mit einem in Fig. 433 abgebildeten Apparate angestellt. *AB* und *AB* sind zwei Rüstböcke, *C* und *C* darauf befestigte Eisenlager, und *DD* ist der darüber liegende, zur Untersuchung bestimmte parallelepipedische Körper. Die Last *P*

Fig. 433.



zum Biegen des Körpers liegt auf einer Wagschale *EE*, die an einem Bügel *MN* hängt, dessen oberer und abgerundeter Theil in der Mitte *M* des Balkens aufliegt. Um die einer Belastung *P* entsprechende Durchbiegung *a* zu finden, wendete Eytelwein zwei feine Horizontalfäden *FF* und *GG*, sowie eine in der Mitte auf dem Balken aufsitzende Scala *MH* an. Gerstner hingegen bediente sich eines langen einarmigen Fühlhebels, der nahe bei seinem Drehpunkte in *M* auflag und mit seinem Ende, wie der Zeiger einer Uhr, an einer verticalen Scala die Senkung von *M* verfünfzehnfacht angab. Lagerhjelm wendete einen Zeiger an, der mittels eines Fadens und einer Rolle in Bewegung gesetzt wurde, und die Biegung des Balkens auf einer eingetheilten Kreisscheibe vergrößert angab.

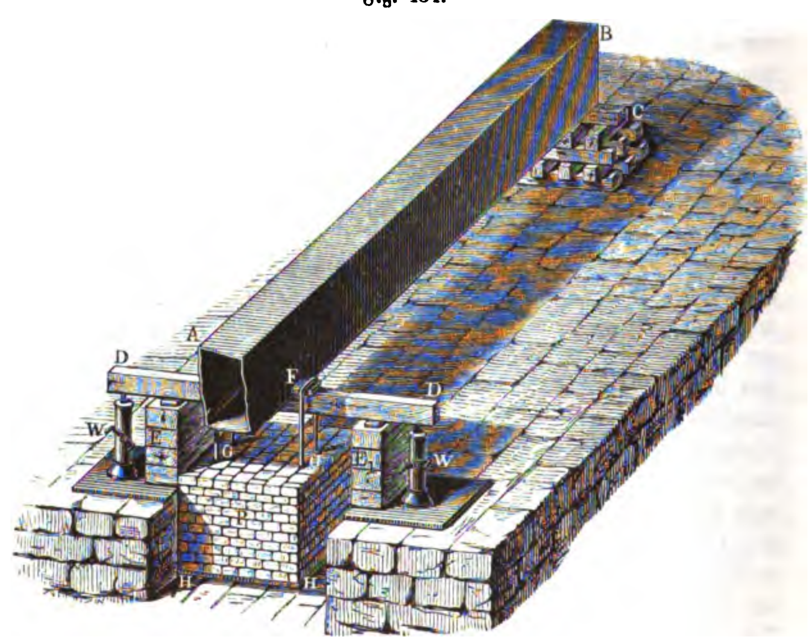
Andere, wie z. B. Morin, bedienten sich zur Ausmittelung der Durchbiegung (*a*) eines Kathetometers, welches auf eine in der Mitte des Balkens angebrachte Spitze gerichtet war; bei den englischen Versuchen ist dagegen zur Ausmessung dieser Größe ein langes Keilmaß angewendet worden, welches in der Mitte des Balkens zwischen demselben und einer festen Stütze eingeschoben wurde. Um die Genauigkeit in der Messung von *a* durch das Nachgeben der Stützen nicht zu beeinträchtigen, legt man entweder die Balken während des Versuchs auf harte steinerne Unterlagen (Morin), oder man führt ein langes Lineal in einem gewissen Abstande über dem Balken hin, befestigt dasselbe an seinen Enden mit den Enden des Balkens so, daß es sich nicht mit dem Balken biegen kann, und mißt nun bei jedem Versuche den Abstand zwischen der Mitte des gebogenen Balkens und der unteren Kante dieses Lineals (Fairbairn).

Die Art und Weise, wie Stephenson u. s. w. die Biegung und Festigkeit der hohlen Träger aus Eisenblech ermittelt hat, ist vorzüglich aus Fig. 434 (a. f. S.) zu ersehen. Die 75 Fuß lange Röhre *AB*, von welcher in der Figur das vordere Stück weggelassen ist, ruhete an beiden Enden, wie z. B. in *C*, auf Holzböcken auf, und wurde in der Mitte durch einen Balken *DD* unterstützt, welcher auf den Stempeln zweier Winden *W*, *W* aufruhete. Durch die Mitte des Röhrenträgers, und zwar nahe über dem Boden desselben, ging ein eiserner Querarm, wovon in der Figur nur das eine Ende *F* zu sehen ist, und über diesen waren zwei Gabeln *G*, *G* gelegt, an welchen die Schale *HH* zur Aufnahme der Gewichte *P* hing. Vor dem Versuche und während des Auflegens der Gewichte ruhte die ganze Last auf dem Balken *DD*, wurden aber die Stempel der Winden niedergelassen, so sank *DD* und legte sich auf die Unterlage *E*, *E* auf, während das nun durch *P* belastete Röhrenmittel *AF* ganz frei wurde, und eine der Last *P* entsprechende und mit einem Keilmaß zu messende Durchbiegung annehmen konnte.

Um bei Versuchen mit starken Trägern nicht sehr große Gewichte anhängen zu müssen, belastet man auch wohl den Balken nicht unmittelbar mit

Gewichten, sondern man läßt auf denselben den kürzeren Arm einer ungleicharmigen Wage wirken, deren längerer Arm durch Gewichte niedergezogen

Fig. 434.



wird. Zu diesem Zwecke ließ endlich Hodgkinson diese Hebelkraft nicht auf die Mitte des an den Enden unterstützten Balkens wirken, sondern er unterstützte den Balken in seiner Mitte, ließ diese Kraft an dem einen Ende des Balkens angreifen und befestigte das andere Ende desselben durch einen starken Bolzen mit dem Fundamente.

Durch die unter sehr verschiedenen Umständen und Verhältnissen und mit verschiedenen Stoffen, namentlich aber mit sehr verschiedenen Holz- und Eisengattungen angestellten Versuche ist in der Hauptsache eine Uebereinstimmung der im Vorstehenden entwickelten theoretischen Regeln mit der Erfahrung nachgewiesen worden. Was insbesondere das Zerbrechen parallelepipedischer Balken anlangt, so hat sich hierbei herausgestellt, daß das Holz und das Schmiedeeisen unter gleichen Umständen nur durch das Zerdrücken, das Gußeisen hingegen entweder durch das Zerreißen der äußersten Fasern beginnt, oder dadurch erfolgt, daß an der am stärksten gebogenen Stelle (in der Mitte) und zwar auf der comprimirten Seite, ein Keil ausbricht.

Auch hat man sich an parallelepipedischen Holzstäben mit Hülfe von Sägeschnitten, welche auf der comprimirten Seite angebracht und durch feste

Blättchen wieder ausgefüllt wurden, ferner mittelst einer Reihe von Querlinien, welche an den Seitenflächen dieses Balkens rechtwinkelig zur Längenaxe desselben gezogen waren, und endlich durch ein Paar dünne Stäbchen, wovon das eine längs der ausgedehnten und das andere längs der zusammengedrückten Seite dieses Balkens hinlief, von der Richtigkeit des in §. 219 vorausgesetzten Verhaltens der Fasern der gebogenen Körper überzeugen können.

Die Ermittelung des Elasticitätsmoduls E durch Biegungsversuche gründet sich auf die in §. 241 gefundene Formel für die Durchbiegung eines an beiden Enden gestützten, durch das Eigengewicht Q und das Gewicht P in der Mitte belasteten Balkens, welche sich zu

$$s = \frac{l^3}{48\,WE}\left(P + \frac{5}{8}\,Q\right)$$

berechnet.

Besonders geeignet ist diese Methode für die Bestimmung des Elasticitätsmoduls solcher Materialien, welche sich nicht in hinreichend dünnen langen Drähten darstellen lassen, um directe Ausdehnungsversuche, wie in §. 216 angegeben, damit anstellen zu können. Die Bestimmung von E durch Biegungsversuche gewährt außerdem unter bestimmten Verhältnissen, d. h. bei nicht zu geringer Länge des untersuchten Balkens eine größere Sicherheit, als die Bestimmung durch Ausdehnungsversuche, insofern nämlich die zu messenden Durchbiegungen größere Werthe annehmen, daher sicherer zu messen sind, als die directen Ausdehnungen.

Um sich hiervon zu überzeugen, denke man einen Stab von der Länge l das eine Mal durch eine Kraft gezogen, das andere Mal durch eine andere Kraft gebogen, unter der Voraussetzung, daß in beiden Fällen die eintretende größte specifische Spannung denselben noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegenden Werth k erreichen soll.

Der gezogene Stab dehnt sich dabei aus um $\lambda = \frac{k}{E}\,l$ (vergl. §. 210).

Für den gedrückten Stab ist die zur Hervorbringung der größten Spannung k erforderliche Kraft P, wenn W und e die bisherigen Bedeutungen haben, gegeben durch:

$$\frac{Pl}{4} = k\,\frac{W}{e};\quad P = \frac{4\,k\,W}{l\,e}.$$

Durch diese Kraft wird nun dem Balken in der Mitte eine Senkung s ertheilt:

$$s = \frac{P l^3}{48\,WE} = \frac{4\,k\,W l^3}{48\,W E l e} = \frac{k l^2}{12\,E e}.$$

Es ist daher

$$s : \lambda = \frac{kl^2}{12\,Ee} : \frac{kl}{E} = \frac{l}{12\,e} : 1,$$

d. h. s ist größer als λ, sobald die Länge l des Balkens die Größe $12\,e$ oder bei dem parallelepipedischen Balken die Größe $6\,h$ übersteigt, wenn h die Höhe des Querschnitts bedeutet.

§. 250. **Trag- und Festigkeitsmodel.** In der folgenden Tabelle sind die mittleren Werthe für die Elasticitäts-, Trag- und Festigkeitsmodel, wie sie aus den Biegungs- und Brechungsversuchen hervorgegangen sind, aufgezeichnet. Die ersteren weichen von denjenigen, welche durch Ausdehnungs- und Compressionsversuche bestimmt worden sind, nicht ansehnlich ab; anders ist es aber, aus den oben (§. 248) angegebenen Gründen, mit den Festigkeitsmodeln. Von den beiden Werthen innerhalb einer Klammer { } drückt der obere den Modul im preußischen Maß (Neupfund auf den Quadratzoll) und der untere denselben im französischen Maß (in Kilogramm pro Quadratmillimeter) aus.

Tabelle

der Trag- und Festigkeitsmodel verschiedener Körper in Hinsicht auf das Biegen und Brechen.

Namen der Körper.	Elasticitätsmodul E.	Tragmodul T.	Festigkeitsmodul K.
Laubholz	1'230000 900	3000 2,2	9000 6,5
Nadelholz	2'000000 1500	4100 3,0	12000 9,0
Gußeisen	16'400000 12000	10260 7,5	43800 32,0
Schmiedeeisen	27'800000 20000	17000 12,0	31500 23,0
Kalk- und Sandstein . .	—	—	1700 1,24
Thonschiefer	—	—	4800 3,5

Um mit Hülfe der Werthe in der vorstehenden Tabelle die Kräfte zu ermitteln, welche die Balken oder Träger mit Sicherheit auf die Dauer tragen

können, führt man in den oben gefundenen Formeln für die Tragkraft beim Holz:

statt T, entweder $\frac{1}{3}\,T$, oder statt K, $\frac{1}{10}\,K$,

ferner beim Gußeisen:

statt T, entweder $\frac{1}{2}\,T$, oder statt K, $\frac{1}{5}\,K$,

und beim Schmiedeeisen:

statt T, entweder $\frac{1}{2}\,T$, oder statt K, $\frac{1}{4}\,K$

als Sicherheitsmodel ein.

Hiernach möge in der Folge für Holz:

$k = 0{,}73$ Kilogramm $= 1000$ Pfund,

für Gußeisen:

$k = 5{,}1$ Kilogramm $= 7000$ Pfund,

und für Schmiedeeisen:

$k = 6{,}6$ Kilogramm $= 9000$ Pfund

gesetzt werden.

Diese Werthe gelten jedoch nicht für Wellen und andere Maschinentheile, welche wegen ihrer steten Bewegung und in Folge ihrer Abnutzung eine noch größere Sicherheit und daher die Annahme kleinerer Werthe für k fordern.

Setzen wir diese Werthe in den Formeln

$$Pl = bh^2\,\frac{k}{6} \text{ und } Pl = \pi r^3\,\frac{k}{4} = \pi d^3\,\frac{k}{32}$$

für die parallelepipedischen Balken und für die cylindrischen Träger ein, so erhalten wir folgende praktische Formeln.

Für Holz:

$$Pl = 167\;bh^2 = 785\;r^3 = 98\;d^3 \text{ Zollpfund,}$$
$$= 0{,}12\,bh^2 = 0{,}57\;r^3 = 0{,}072\;d^3 \text{ Millimeterkilogramm.}$$

Für Gußeisen:

$$Pl = 1167\;bh^2 = 5500\;r^3 = 687\;d^3 \text{ Zollpfund,}$$
$$= 0{,}85\;bh^2 = 4{,}0\;r^3 = 0{,}5\;d^3 \text{ Millimeterkilogramm,}$$

und für Schmiedeeisen den größeren Werth:

$$Pl = 1500\;bh^2 = 7070\;r^3 = 884\;d^3 \text{ Zollpfund,}$$
$$= 1{,}1\;bh^2 = 5{,}18\;r^3 = 0{,}65\;d^3 \text{ Millimeterkilogramm.}$$

Wenn man nach Morin, und englischen Constructionen entsprechend, beim Gußeisen

$$\text{statt } k, \quad \frac{K}{4} \text{ bis } \frac{K}{5} = 7{,}5 \text{ Kilogramm}$$

und beim Schmiedeeisen

$$\text{statt } k, \quad \frac{K}{4} = 6{,}0 \text{ Kilogramm}$$

einsetzt, so erhält man für Gußeisen:

$$Pl = 1710\ bh^2 = 8060\ r^3 = 1008\ d^3 \text{ Zollpfund}$$
$$= 1{,}25\ bh^2 = 5{,}9\ r^3 = 0{,}74\ d^3 \text{ Millimeterkilogramm,}$$

und dagegen für Schmiedeeisen den kleineren Werth:

$$Pl = 1370\ bh^2 = 6500\ r^3 = 810\ d^3 \text{ Zollpfund}$$
$$= 1{,}0\ bh^2 = 4{,}7\ r^3 = 0{,}59\ d^3 \text{ Millimeterkilogramm.}$$

Hängt die Last Q nicht am Ende des Balkens, sondern ist dieselbe gleichmäßig auf dem Balken vertheilt, so ist der Hebelarm derselben nicht l, sondern $\frac{l}{2}$, und folglich auch das Moment nur halb so groß, also:

$$\frac{Ql}{2} = \frac{Wk}{e}, \text{ oder } Ql = 2 \cdot \frac{Wk}{e} \text{ zu setzen.}$$

Ruht ferner der Balken an beiden Enden frei auf (s. Fig. 417) und wirkt die Last P in der Mitte zwischen beiden Stützen, deren Entfernung von einander $= l$ ist, so ist die Kraft an jedem Ende $= \frac{P}{2}$ und der Hebelarm derselben $= \frac{l}{2}$, also ihr Moment:

$$\frac{Pl}{4} = \frac{Wk}{e} \text{ und } Pl = 4\,\frac{Wk}{e}.$$

Es trägt also unter übrigens gleichen Verhältnissen der Balken im zweiten Falle doppelt, und im dritten vier Mal so viel als im ersten Falle.

Ist endlich der an den beiden Enden aufliegende Balken auf seiner ganzen Länge gleichmäßig belastet (Fig. 418) so wird er erstens von einer Kraft $\frac{Q}{2}$ von unten nach oben gebogen, welche den Hebelarm $\frac{l}{2}$, also das Moment $\frac{Ql}{4}$ hat, und zweitens von einer Kraft $\frac{Q}{2}$ von oben nach unten, deren Angriffspunkt der Schwerpunkt je einer Lasthälfte, deren Hebelarm folglich $= \frac{l}{4}$ und Moment $= \frac{Ql}{8}$ ist. Es resultirt daher das Moment, mit welchem jedes Ende des Balkens von unten nach oben gebogen wird:

$$= \frac{Ql}{4} - \frac{Ql}{8} = \frac{Ql}{8},$$

und es ist folglich $Ql = 8\,\frac{Wk}{e}$, also das Tragvermögen des Balkens unter diesen Umständen 8 Mal so groß als im ersten Falle.

Während bei einem parallelepipedischen Balken im ersten Falle

$$Pl = bh^2\,\frac{k}{6} \text{ ist, hat man im zweiten Falle:}$$

$$Ql = 2 \,.\, bh^2 \frac{k}{6}, \text{ im dritten:}$$

$$Pl = 4 \,.\, bh^2 \frac{k}{6} \text{ und im vierten:}$$

$$Ql = 8 \,.\, bh^2 \frac{k}{6} \text{ zu setzen,}$$

wobei b die Breite und h die Höhe des rectangulären Balkenquerschnittes bezeichnen.

Beispiele. 1) Welche Last kann ein an seinen Enden unterstützter Balken aus Fichtenholz tragen, wenn derselbe die Breite $b = 0{,}180$ Meter und die Höhe $h = 0{,}240$ Meter hat, und wenn der Angriffspunkt dieser Last von jeder Stütze 3 Meter absteht? Es ist hier $l = 2 \,.\, 3000$ Millimeter, daher nach der obigen Formel:

$$Pl = 4 \,.\, 0{,}12 \,.\, bh^2 = 4 \,.\, 0{,}12 \,.\, 180 \,.\, 240^2,$$

und die gesuchte Tragkraft:

$$P = \frac{4 \,.\, 0{,}12 \,.\, 180 \,.\, 240^2}{6000} = 829{,}4 \text{ Kilogramm.}$$

2) Ein an einem Ende eingemauerter cylindrischer Stempel aus Holz soll auf seiner ganzen Länge $l = 1{,}6$ Meter eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 5000$ Kilogramm tragen, welche Stärke muß derselbe besitzen?

Es ist hier:

$$\frac{Ql}{2} = \frac{\pi r^3}{4} k = 0{,}57 \,.\, r^3,$$

folglich umgekehrt:

$$r = \sqrt[3]{\frac{Ql}{1{,}14}} = \sqrt[3]{\frac{5000 \,.\, 1600}{1{,}14}} = 191 \text{ Millimeter,}$$

also die gesuchte Stempelstärke $= 2r = 0{,}382$ Meter.

Relative Durchbiegung. Bei beweglichen Maschinentheilen, wie z. B. bei Wellen, Radaxen u. s. w., können Biegungen dadurch nachtheilig auf den Gang der Maschinen wirken, daß sie entweder zu Schwingungen und Erschütterungen der Mechanismen oder zu einem unvollkommenen Eingreifen der letzteren in einander Veranlassung geben, und deshalb bestimmt man in gewissen Fällen die Querdimensionen dieser Maschinentheile nicht nach dem Tragmodul, sondern nach der Durchbiegung, indem man festsetzt, daß diese ein bestimmter sehr kleiner Theil der ganzen Länge des Körpers oder Maschinentheiles sei. §. 251.

Wir haben oben (§. 235) für einen an einem Ende B horizontal eingespannten und am anderen Ende A belasteten prismatischen Körper ASB, Fig. 435 a. f. S., die Durchbiegung

$$BC = s = \frac{Pl^3}{3\,WE}$$

gefunden, und können also ihr gegebenes Verhältniß zur Länge AB:

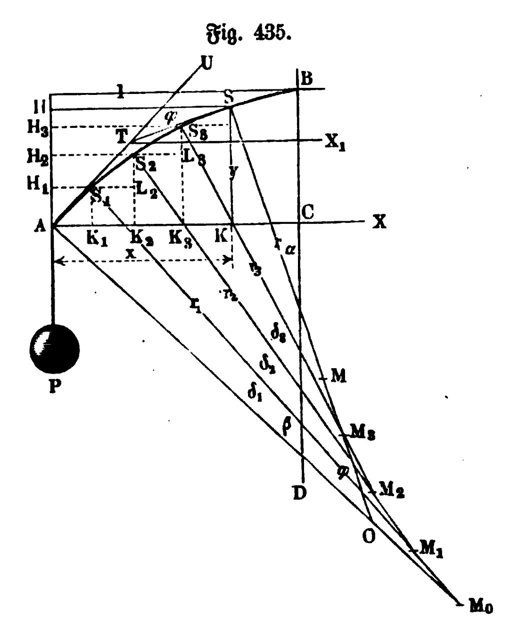
$$\theta = \frac{s}{l} = \frac{Pl^2}{3WE},$$

daher umgekehrt:

$$1)\ Pl^2 = 3\theta WE$$

setzen.

Fig. 435.



Für einen parallelepipedischen Balken hat man hiernach

$$Pl^2 = 3\theta \frac{bh^3}{12} E = \frac{\theta bh^3 E}{4},$$

und für einen cylindrischen

$$Pl^2 = 3\theta \frac{\pi r^4}{4} E = \frac{3}{4} \pi \theta r^4 E.$$

In der Regel ist das relative Biegungsverhältniß $\theta = \frac{s}{l} = {}^1/_{500}$ zulässig, und daher

$$Pl^2 = \frac{1}{2000} bh^3 E = \frac{3\pi}{2000} r^4 E$$

zu setzen.

Führt man nun für Holz den Elasticitätsmodul $E = 1'600000$ Pfund $= 1170$ Kilogramm ein, so erhält man für dasselbe:

$Pl^2 = 800\ bh^3 = 7540\ r^4$ oder für Metermaß:

$= 0{,}584\ bh^3 = 5{,}5\ r^4$.

Für Gußeisen hat man $E = 16'400000 = 12000$ Kilogramm und daher

$$Pl^2 = 8200\, bh^3 = 77250\, r^4 \text{ oder für Metermaß:}$$
$$= \quad 6\, bh^3 = 56{,}4\, r^4,$$

und für Schmiedeeisen, $E = 27'800000$ Pfund $= 20000$ Kilogramm, daher

$$Pl^2 = 13900\, bh^3 = 130900\, r^4 \text{ oder für Metermaß:}$$
$$= \quad 10\, bh^3 = 94{,}2\, r^4.$$

Für die Biegung bis zur Elasticitätsgrenze ist dagegen (§. 224):

$$2)\ Pl = \frac{WT}{e}, \text{ oder } Pl^2 = \frac{WTl}{e};$$

setzt man daher beide Ausdrücke für Pl^2 einander gleich, so erhält man:

$$\frac{WTl}{e} = 3\,\theta\, WE,$$

folglich das Verhältniß derjenigen Länge l des Balkens zum Maximalabstande e, wobei die Durchbiegung und die Spannung die Grenzwerthe θ und T zugleich erreichen:

$$\frac{l}{e} = \frac{3\,\theta E}{T} = \frac{3\,\theta}{\sigma},$$

wenn σ die der Spannung T, d. h. an der Elasticitätsgrenze eintretende specifische Ausdehnung oder Zusammendrückung bezeichnet. Man hat also für parallelepipedische Körper:

$$\frac{l}{h} = {}^3/_2\, \frac{\theta}{\sigma}$$

und für cylindrische Körper:

$$\frac{l}{r} = \frac{3\,\theta}{\sigma}, \text{ also } \frac{l}{d} \text{ ebenfalls } = {}^3/_2\, \frac{\theta}{\sigma}.$$

Ist $\frac{l}{e} < \frac{3\,\theta}{\sigma}$, so findet man durch die erste Formel den größeren Werth für Pl, ist hingegen $\frac{l}{e} > \frac{3\,\theta}{\sigma}$, so erhält man durch die zweite Formel das größere Kraftmoment. Deshalb giebt bei einem gegebenen Kraftmomente (Pl) im ersteren Falle, wo also der Körper noch nicht die Länge $l = \left(\frac{3\,\theta}{\sigma}\right) e$ hat, die Formel

$$\frac{WT}{e} = Pl,$$

und im zweiten Falle, wo $l > \left(\frac{3\,\theta}{\sigma}\right) e$ ist, die Formel

$$3\,\theta\, WE = Pl^2$$

die größeren Querschnittsdimensionen.

Setzt man in dem Grenzverhältnisse $\frac{l}{e} = \frac{3\theta}{\sigma}$, $\theta = \frac{1}{500}$, so erhält man für alle Materialien $\frac{l}{e} = \frac{3}{500\sigma} = \frac{0{,}006}{\sigma}$, daher für Holz, wo $\sigma = \frac{1}{600}$ zu setzen ist, $\frac{l}{e} = 0{,}006 \,.\, 600 = 3{,}6$, und insbesondere für einen prismatischen Balken aus Holz:

$$\frac{l}{h} \text{ sowie auch } \frac{l}{d} = \frac{18}{10} = 1{,}8.$$

Nimmt man für Guß- und Schmiedeeisen $\sigma = \frac{1}{1500}$ an, so ergiebt sich für diese Stoffe

$$\frac{l}{e} = \frac{3 \,.\, 1500}{500} = 9, \text{ und daher}$$

$$\frac{l}{h} \text{ sowie } \frac{l}{d} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Die Formel

$$Pl^2 = \frac{bh^3}{2000} E = \frac{3\pi r^4 E}{2000}$$

gilt natürlich nur für den Normalfall, wo der Körper an einem Ende belastet und am anderen Ende festgeklemmt ist. Bei einer gleichmäßigen Belastung durch Q hat man (nach §. 236) statt P, $^3/_8\, Q$ einzusetzen; ruht ferner der Körper an beiden Enden auf, und trägt er die Last in seiner Mitte, so ist ferner statt P, $\frac{P}{2}$, und statt l, $\frac{l}{2}$, also:

$$Pl^2 = 8 \cdot \frac{bh^3}{2000} E = 8 \cdot \frac{3\pi r^4 E}{2000}$$

zu setzen, und ist bei dieser Auflagerung die Last Q gleichmäßig vertheilt, so hat man statt P, $\frac{5Q}{8}$ einzuführen.

Beispiele. 1) Welche Last in der Mitte trägt bei der Durchbiegung $\theta = {}^1/_{500}$ der im vorigen Paragraphen berechnete 6 Meter lange hölzerne Balken, dessen Querschnitt eine Breite von 0,180 Meter und eine Höhe von 0,240 Meter hat. Es ist hier:

$$P = 8\, \frac{0{,}584\, b h^3}{l^2} = 8\, \frac{0{,}584 \,.\, 180 \,.\, 240^3}{6000^2} = 323 \text{ Kilogramm,}$$

während im vorigen Paragraphen für den Fall einer Biegung bis zur Elasticitätsgrenze $P = 829{,}4$ Kilogramm gefunden wurde.

2) Wie hoch und breit ist ein an beiden Enden aufruhender gußeiserner Träger zu machen, welcher bei dem Dimensionsverhältnisse $\frac{h}{b} = 4$, auf eine Länge von

3 Meter eine gleichmäßig vertheilte Last $Q = 2000$ Kilogramm trägt? Unter der Voraussetzung, daß die Durchbiegung $\theta = 1/_{500}$ sei, ist:

$$5/_8 \; Q l^2 = 8 \,.\, 6 \,.\, b h^3; \text{ d. i.:}$$

$$5/_8 \,.\, 2000 \,.\, 3000^2 = 8 \,.\, 6 \,.\, \frac{h^4}{4};$$

woraus $h = \sqrt[4]{\frac{150 . (100)^4}{16}} = \frac{100}{2} \sqrt[4]{150} = 175$ Millimeter,

und $b = \frac{h}{4} = 43,75$ Millimeter.

Wenn der Balken bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden soll, so ergiebt sich die Höhe h des Querschnittes nach der Formel des vorigen Paragraphen:

$$Q l = 8 \,.\, 0,85 \, b h^2, \text{ oder } 2000 \,.\, 3000 = 8 \,.\, 0,85 \, \frac{h^3}{4},$$

daher die erforderliche Höhe:

$$h = \sqrt[3]{\frac{2000 . 3000}{1,7}} = 100 \,.\, \sqrt[3]{\frac{6}{1,7}} = 154 \text{ Millimeter},$$

und die Breite des Balkens:

$$b = \frac{h}{4} = 38,5 \text{ Millimeter.}$$

Tragmomente. Aus dem Ausdrucke §. 252.

$$P l = b h^2 \frac{T}{6}$$

für das Tragmoment eines parallelepipedischen Balkens ersieht man, daß dieses Moment wie die einfache Breite b und wie das Quadrat der Höhe h und daß die Tragkraft

$$P = \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6},$$

überdies noch umgekehrt wie die Länge (l) dieses Körpers wächst, daß daher bei einem solchen Balken die Höhe einen größeren Einfluß auf die Haltbarkeit desselben hat als die Breite. Ein Balken, welcher doppelt so breit als ein anderer ist, trägt also hiernach nur doppelt so viel als dieser oder auch so viel wie zwei solche Balken neben einander zusammen; ein Balken von der doppelten Höhe trägt hingegen $(2)^2 = 4$ mal so viel als ein Balken von der einfachen Breite und einfachen Höhe. Deshalb giebt man auch dem parallelepipedischen Balken mehr Höhe als Breite, d. h. man legt denselben stets auf die schmale Seite, oder giebt vielmehr dieser Seite eine rechtwinkelige und der breiten Seite eine parallele Richtung zur Kraft (P).

Da $b h$ den Querschnitt F des Balkens ausdrückt, so hat man auch

$$P l = F h \frac{T}{6};$$

es ist hiernach das Tragmoment eines Körpers bei gleichem Querschnitte und also auch bei gleicher Masse oder gleichem Gewichte, der Höhe desselben

einfach proportional. Sind z. B. b und h die Breite und Höhe des einen Körpers, und dagegen $\frac{b}{3}$ und $3h$ die des anderen Körpers, ist also $F = \frac{b}{3} \cdot 3h = bh$ der Inhalt ihres Querschnittes, und haben somit auch beide Körper bei übrigens gleichen Verhältnissen einerlei Gewicht; so trägt dennoch der letztere 3 mal so viel als der erstere.

Ist $b = h$, hat also der Balken einen quadratischen Querschnitt, so kann man das Tragmoment desselben noch dadurch herabziehen, daß man der Diagonale desselben eine aufrechte Lage giebt. Es bleibt hierbei, wie wir aus §. 230 wissen, W unverändert $= \frac{bh^3}{12} = \frac{b^4}{12}$, während dagegen e gleich der halben Diagonale, d. i. $\frac{1}{2} b \sqrt{2} = b \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird. Deshalb ist dann:

$$Pl = \frac{b^4}{12 b \sqrt{\frac{1}{2}}} T = b^3 \frac{T}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707\, b^3 \frac{T}{6},$$

während bei Auflagerung mittels der Seiten, $Pl = b^3 \cdot \frac{T}{6}$ ausfällt.

Ganz gleiche Verhältnisse wie beim parallelepipedischen Balken kommen auch bei dem Balken mit elliptischem Querschnitte vor. Es ist hier (nach §. 231) $W = \frac{\pi b a^3}{4}$, und $e = a$, wobei vorausgesetzt wird, daß die Halbaxe a parallel und die Halbaxe b rechtwinkelig gegen die Kraftrichtung, also, wie gewöhnlich, horizontal zu liegen kommt. Hiernach hat man also für einen solchen Balken:

$$Pl = \frac{\pi b a^2}{4} T = Fa \frac{T}{4},$$

da der Inhalt des elliptischen Querschnittes, $F = \pi a b$ zu setzen ist. Es wächst also auch bei diesem Balken unter übrigens gleichen Verhältnissen, das Tragmoment einfach wie der Inhalt und wie die Höhe a des Querschnittes.

Ist $b = a = r$, hat man es also mit einem cylindrischen Träger vom Halbmesser r zu thun, so geht obige Gleichung in

$$Pl = \frac{\pi r^3}{3} T = Fr \cdot \frac{T}{4}$$

über. Es wächst also das Tragmoment dieses Körpers wie das Product aus der Querschnittsfläche und aus dem Halbmesser desselben.

Bei gleichem Querschnitte oder bei gleichem Gewichte ist das Verhältniß des Tragmomentes des Körpers mit elliptischem Querschnitte zu dem mit

kreisförmigem, $= \frac{a}{r}$. Es ist daher der Balken mit elliptischem Querschnitte (wo $a > r$) stets dem einfachen cylindrischen Balken vorzuziehen.

Dasselbe gilt auch bei allen anderen Querschnittsformen; die regelmäßige Form (das Quadrat, das regelmäßige Sechseck, der Kreis u. s. w.) giebt bei gleichem Inhalte stets ein kleineres Tragmoment als eine Form von größerer Höhe und kleinerer Breite.

Regelmäßige Querschnittsformen sind daher auch nur bei Wellen und anderen um ihre Längenaxe sich drehenden Körpern anzuwenden, wo während der Umdrehung eine Querschnittsdimension stets in die andere übergeht, oder nach je einer Viertelumdrehung die Höhe zur Breite und die Breite zur Höhe wird.

Querschnitt hölzerner Balken. Wenn ein cylindrischer Balken mit einem parallelepipedischen Balken, dessen Breite und Höhe $= b$ ist, einen gleich großen Querschnitt $F = \pi r^2 = b^2$ hat, so ist das Verhältniß: §. 253.

$$\frac{b}{r} = \sqrt{\pi} = 1,77245,$$

und dagegen das Verhältniß zwischen den Tragmomenten M und M_1 (M_2), und zwar erstens, bei Auflagerung des letzteren Körpers auf einer Seitenfläche:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{r}{4} : \frac{b}{6} = \frac{3}{2}\frac{r}{b} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} = 1,5 \;.\; 0,5642 = 0,8462,$$

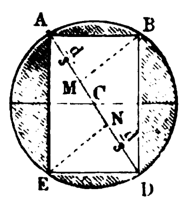
dagegen zweitens, bei aufrechter Stellung der Diagonalebene des letzteren Körpers:

$$\frac{M}{M_2} = \frac{r}{4} : \frac{b\sqrt{2}}{12} = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} = 3 \;.\; 0,3989 = 1,1967.$$

Es ist also das Tragmoment des Cylinders (mit kreisförmiger Basis) im ersten Falle kleiner, und im zweiten Falle größer als das eines Parallelepipeds mit quadratischer Basis und gleichem Inhalte mit dem Cylinder.

Da die hölzernen parallelepipedischen Balken aus runden Baumstämmen gehauen oder geschnitten werden, so ist die Frage, welches Dimensionsverhältniß ist dem Querschnitte eines solchen Balkens zu geben, damit er noch das möglich größte Tragvermögen behalte?

Fig. 436.



Es sei $ABDE$, Fig. 436, der Querschnitt des Stammes, $AD = d$ der Durchmesser desselben, ferner

$$AB = DE = b$$

die Breite und

$$AE = BD = h$$

die Höhe des Balkens. Dann ist:

$$b^2 + h^2 = d^2, \text{ oder}$$
$$h^2 = d^2 - b^2,$$

und das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6}\, bh^2 = \frac{T}{6}\, b\,(d^2 - b^2).$$

Es kommt nun darauf an,

$$b\,(d^2 - b^2) = b\,d^2 - b^3\,{}^{*)}$$

so groß wie möglich zu machen. Setzen wir statt b, $b \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir für den letzten Ausdruck:

$$(b \pm x)\,d^2 - (b \pm x)^3 = bd^2 - b^3 \pm (d^2 - 3\,b^2)\,x - 3\,bx^2,$$

insofern wir x^3 vernachlässigen, und daher die Differenz beider Ausdrücke

$$y = \mp\,(d^2 - 3\,b^2)\,x + 3\,bx^2.$$

Damit der erste Werth $bd^2 - b^3$ in jedem Falle größer ausfällt als der letzte, muß die Differenz

$$y = \mp\,(d^2 - 3\,b^2)\,x + 3\,bx^2$$

positiv sein, man mag b um x größer oder um x kleiner nehmen. Dies ist aber nur möglich, wenn $d^2 - 3\,b^2 = 0$ wird, denn dann ist diese Differenz $= 3\,bx^2$, also positiv, wogegen, wenn $d^2 - 3b^2$ ein positiver oder negativer reeller Werth ist, $3\,bx^2$ vernachlässigt werden kann, und jene Differenz $= \mp\,(d^2 - 3\,b^2)\,x$, d. i. mit x gleichbezeichnet, also bald negativ, bald positiv ausfällt. Setzen wir nun $d^2 - 3\,b^2 = 0$, so folgt die gesuchte Breite:

Fig. 437.

$$b = d\sqrt{1/_3} \text{ und die entsprechende Höhe:}$$
$$h = \sqrt{d^2 - b^2} = d\sqrt{2/_3};$$

also das Verhältniß der Höhe zur Breite:

$$\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} = 1{,}414 \text{ oder ungefähr wie } 7/_5.$$

Man soll also den Baumstamm so zimmern, daß daraus ein Balken hervorgeht, dessen Höhe zur Breite sich wie 7 zu 5 verhält. Um den der größten Festigkeit entsprechenden Querschnitt zu finden, theilen wir den Durchmesser AD, Fig. 437, in drei gleiche Theile, errichten in den Theilpunkten

*) Mit Hülfe der Differenzialrechnung ergiebt sich das Maximum des Werthes $(bd^2 - b^3)$ einfacher durch

$$\frac{\partial\,(bd^2 - b^3)}{\partial\,b} = 0 \text{ (vergl. analyt. Hülfslehren §. 13);}$$

also aus

$$d^2 - 3\,b^2 = 0;\; b = d\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

M und N Perpendikel MB und NE, und verbinden die sich ergebenden Durchschnittspunkte B und E im Kreise mit den Endpunkten A und D durch gerade Linien. Es ist dann $ABDE$ der Querschnitt des größten Widerstandes, denn da

$$AM : AB = AB : AD \text{ und } AN : AE = AE : AD,$$

so ist: $AB = b = \sqrt{AM\,.\,AD} = \sqrt{{}^1\!/_3\, d\,.\,d} = d\sqrt{{}^1\!/_3}$

und $AE = h = \sqrt{AN\,.\,AD} = \sqrt{{}^2\!/_3\, d\,.\,d} = d\sqrt{{}^2\!/_3}$,

also: $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, wie auch wirklich verlangt wird.

Anmerkung 1. Der Baumstamm hat das Tragmoment:

$$Pl = \frac{\pi T}{4} \cdot r^3,$$

für den daraus gezimmerten Balken vom größten Widerstande ist dagegen das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6}\, d\sqrt{{}^1\!/_3} \cdot {}^2\!/_3\, d^2 = \frac{T}{\sqrt{243}} \cdot d^3 = \frac{8\,T}{\sqrt{243}}\, r^3;$$

es verliert folglich der Stamm durch das Beschlagen um

$$1 - \frac{8}{\sqrt{243}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1 - 0{,}65 = 0{,}35,$$

d. i. 35 Procent von seiner Tragkraft. Um diesen Verlust zu mäßigen, behaut man den Stamm oft nicht ganz vierkantig, sondern läßt ihn noch mit abgestumpften Kanten.

Ein aus demselben Stamme gezimmerter Balken mit quadratischem Querschnitte hat das Tragmoment:

$$Pl = \frac{T}{6} \cdot d\sqrt{{}^1\!/_2} \cdot \frac{d^2}{2},$$

weil hier Breite = Höhe = $d\sqrt{{}^1\!/_2} = 0{,}707\, d$ ist; daher fällt hier jener Verlust gar

$$= 1 - \frac{8}{6\,.\,2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\pi} = 1 - \frac{8}{3\pi\sqrt{2}} = 1 - 0{,}60 = 0{,}40,$$

d. i. 40 Procent aus.

(Anmerkung 2.) Um aus einem Baumstamme einen parallelepipedischen Balken zu erhalten, dessen Biegungsmoment ein Maximum, für welchen also $\theta = \frac{s}{l}$ (vergl. §. 251) so klein wie möglich ist, kommt es darauf an,

$$W = \frac{b\,h^3}{12}, \text{ oder } b h^3 = h^3 \sqrt{d^2 - h^2}, \text{ oder } (b h^3)^2 = h^6\,(d^2 - h^2) = d^2 h^6 - h^8$$

so groß wie möglich zu machen. Das Differenzialverhältniß des letzteren Ausdruckes in Hinsicht auf h ist:

$$6\, d^2 h^5 - 8\, h^7,$$

und giebt Null für $h^2 = {}^3\!/_4\, d^2$, d. i.:

$$h = d\sqrt{{}^3\!/_4} = \frac{d\sqrt{3}}{2} \text{ und}$$

$$b = \sqrt{d^2 - h^2} = \sqrt{{}^1\!/_4\, d^2} = \frac{d}{2}.$$

Für diese Werthe (s. analyt. Hülfslehren §. 13) ist das Biegungsmoment des Balkens ein Maximum.

Es ist hier $\frac{h}{b} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1{,}7821$, also nahe $= \frac{7}{4}$, während oben für das Maximum des Tragmomentes $\frac{h}{b}$ annähernd $= \frac{7}{5}$ gefunden wurde.

Dieser Forderung entspricht die Construction in Fig. 437, wenn man $AM = DN = \frac{1}{4} AD$ macht.

§. 254. **Ausgehöhlte und gerippte Balken.** Für einen hohlen parallelepipedischen Balken ist nach §. 228

$$W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}, \text{ und daher das Tragmoment:}$$

$$Pl = \frac{WT}{e} = \frac{WT}{\frac{1}{2}h} = \left(\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{h}\right)\frac{T}{6}.$$

Setzen wir noch $\frac{h_1}{h} = \mu$ und $\frac{b_1}{b} = \nu$, so erhalten wir:

$$\frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{h} = bh^2 (1 - \mu^3 \nu),$$

und da nun der Querschnitt des Balkens,

$F = bh - b_1 h_1 = bh(1 - \mu\nu)$ ist, so ergiebt sich:

$$Pl = \left(\frac{1 - \mu^3\nu}{1 - \mu\nu}\right) Fh \frac{T}{6}.$$

Da $\frac{1 - \mu^3\nu}{1 - \mu\nu} = \frac{1 - \mu\nu + \mu\nu - \mu^3\nu}{1 - \mu\nu} = 1 + \frac{(1 - \mu^2)\mu\nu}{1 - \mu\nu}$ um so größer ausfällt, je größer ν ist, so erhält man den Maximalwerth von Pl, wenn man $\nu = 1$ einsetzt, und zwar:

$$1)\ Pl = \left[1 + \left(\frac{1 - \mu^2}{1 - \mu}\right)\mu\right] Fh \frac{T}{6} = (1 + \mu + \mu^2)\, Fh \frac{T}{6}.$$

Nimmt man dagegen $\nu = \mu$ an, so erhält man:

$$2)\ Pl = (1 + \mu^2)\, Fh \frac{T}{6}.$$

In beiden Fällen ist μ so groß wie möglich und daher nahe = Eins zu nehmen, sind also die Wände des Balkens möglichst dünn zu machen, wenn der Balken die möglichst große Tragfähigkeit besitzen soll.

Hiernach hat man für $\mu = 1$, im ersteren Falle:

$$Pl = 3Fh\frac{T}{6} = Fh\frac{T}{2}, \text{ und im zweiten:}$$

$$Pl = 2Fh\frac{T}{6} = Fh\frac{T}{3}, \text{ wogegen}$$

$$Pl = Fh\frac{T}{6} \text{ ausfällt, wenn man } \mu = 0 \text{ annimmt.}$$

In allen drei Fällen wächst die Tragfähigkeit des Balkens bei gleichem Querschnitte (F) oder Gewichte mit der Höhe (h) gleichmäßig; sie ist aber im ersten Falle, wo der Balken aus zwei Querrippen besteht, am größten, im zweiten Falle, wo er eine parallelepipedische Röhre bildet, eine mittlere, und im dritten Falle, wo er aus einer oder zwei Tragwänden besteht, am kleinsten.

Wenn z. B. ein massiver Balken mit den Querschnittsdimensionen b_1 und h_1 denselben Querschnitt oder dasselbe Gewicht haben soll, wie der gedachte hohle Balken, so ist:

$$F = b_1 h_1 = b h - b_1 h_1, \text{ d. i. } 2 b_1 h_1 = b h \text{ oder } \frac{b_1 h_1}{b h} = \mu \nu = {}^1/_2.$$

Nimmt man nun noch $\frac{b_1}{b} = \frac{h_1}{h}$ an, so erhält man $\mu = \nu = \sqrt{{}^1/_2}$, und daher das Verhältniß zwischen den Tragkräften beider Balken:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{(1 - \mu^3 \nu)}{1 - \mu \nu} \cdot \frac{h}{h_1} = \left(\frac{1 - {}^1/_4}{1 - {}^1/_2}\right) \sqrt{2} = {}^3/_2 \sqrt{2} = 3 \sqrt{{}^1/_2} = 2{,}12;$$

es besitzt also dann der hohle Balken mehr als doppelt so viel Tragfähigkeit als der gleich schwere massive Balken, welcher genau dieselbe Gestalt und Größe hat wie die Höhlung des ersteren.

Dieselben Verhältnisse finden natürlich auch statt bei den Iförmigen Trägern, da sie (nach §. 228) dasselbe Maß W des Biegungsmomentes besitzen. Ebenso lassen sich diese Formeln auch auf Körper mit mehr als zwei Hauptrippen, wie z. B. mit einem Querschnitte, wie Fig. 438, anwenden, wo b die Breite der Fuß- und Deckplatten AB und CD, und h die ganze Höhe $AD = BC$, sowie b_1 die Summe der Breiten und h_1 die Höhe der hohlen Räume M, N, O, P bezeichnen.

Fig. 438.



Für eine Röhre oder für einen hohlen Cylinder hat man dieselben Verhältnisse wie für einen parallelepipedischen Balken. Ist r der äußere und $r_1 = \mu r$ der innere Halbmesser, so ist das Tragmoment dieses Körpers:

$$P l = \frac{\pi (r^4 - r_1^4)}{r} \frac{T}{4} = (1 - \mu^4) \pi r^3 \frac{T}{4} = \left(\frac{1 - \mu^4}{1 - \mu^2}\right) F r \frac{T}{4}$$

$$= (1 + \mu^2) F r \frac{T}{4}.$$

Dieser Ausdruck wird um so größer, je mehr sich $\mu = \frac{r_1}{r}$ der Einheit nähert, je kleiner also die Wandstärke der Röhre ist.

Setzt man $\mu = 1$, so erhält man das entsprechende größte Tragmoment:

$$Pl = 2\,Fr\,\frac{T}{4} = Fr\,\frac{T}{2}.$$

Vergleicht man die Tragkraft dieser Röhre mit der eines gleichschweren massiven Cylinders vom Halbmesser $r_1 = \mu r = r\sqrt{{}^1/_2}$, so hat man, da für diesen

$$P_1 l = Fr_1 \cdot \frac{T}{4} = \mu Fr \cdot \frac{T}{4} \text{ ist,}$$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \mu^2}{\mu} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2{,}12,$$

genau wie beim parallelepipedischen Balken unter denselben Voraussetzungen.

Es ist endlich aus der allgemeinen Gleichung:

$$Pl = \frac{WT}{e} = \frac{(F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdot\cdot)}{e}\,T = (F_1\mu_1^2 + F_2\mu_2^2 + \cdot\cdot)\,e\,T$$

unmittelbar zu ersehen, daß das Tragmoment eines Körpers um so größer ausfällt, je größer die Entfernungen $z_1 = \mu_1 e$, $z_2 = \mu_2 e$ u. s. w. der Querschnittstheile F_1, F_2 u. s. w. von der neutralen Axe sind. Da nun aber diese Entfernungen höchstens $= e$ sein können, so wird folglich derjenige Balken das größte Tragmoment besitzen, dessen Querschnittstheile einen und denselben und zwar möglichst großen Abstand von der neutralen Axe haben. Ein solcher Körper besteht folglich nur aus zwei Querrippen. Da die zur Verbindung der Querrippen dienenden hohen Rippen der Forderung eines größten Tragmomentes nicht entsprechen können, so ist es auch gar nicht möglich, mit der Tragkraft eines Balkens ein absolutes Maximum zu erreichen; und man muß sich daher nur damit begnügen, die Tragfähigkeit eines Balkens durch Aushöhlung oder Schwächung desselben in der Nähe der Axe und durch Anbringung von Rippen oder Federn in möglichst großem Abstande von der Axe zu erhöhen.

Die Dicke, welche die Mittelrippe eines solchen Körpers erhalten muß, um der Schubfestigkeit widerstehen zu können, wird im folgenden Capitel bestimmt.

Anmerkung. Unter der Voraussetzung, daß die Tragmodel mit den Festigkeitsmodeln wachsen und abnehmen, geben die englischen Ingenieure den Trägern aus dem dem Zerdrücken mehr widerstehenden Gußeisen auf der Zugseite und dagegen den Trägern aus Schmiedeeisen, welches dem Zerreißen mehr widersteht, auf der Druckseite eine besondere Verstärkung. Ruhen diese Träger an ihren Enden auf, so erhalten sie deshalb, z. B. je nachdem sie aus Guß- oder aus Schmiedeeisen bestehen, entweder eine breitere und dickere Fuß-, oder eine breitere und dickere Kopfplatte, oder statt derselben Doppelplatten mit verticalen Zwischenwänden, ähnlich wie Fig. 438 zeigt. Gußeiserne Träger erhalten in dieser Absicht die schon aus dem Obigen (§. 247) bekannten T förmigen Querschnitte.

Beispiel. Ein Tragbalken aus Eichenholz von 0,2 Meter Breite und 0,3 Meter Höhe, welcher seither hinreichende Tragfähigkeit gewährt hat, soll durch einen hohlen gußeisernen Balken von 0,12 Meter äußerer Breite und 0,25 Meter Höhe ersetzt werden, welche Wandstärke wird man demselben geben müssen? Setzt man die doppelte Metallstärke desselben $= x$ Millimeter, so ist die Breite der Höhlung $= 120 - x$ und die Höhe derselben $= 250 - x$ Millimeter. Es ist daher für den hohlen Balken:

$$b_1 h_1^3 - b_2 h_2^3 = 120 \,.\, 250^3 - (120 - x)(250 - x)^3 = 38'125000\,x - 277500\,x^2 + 870\,x^3 - x^4,$$

und das Tragmoment

$$Pl = \frac{5{,}1}{6 \,.\, 250}\,(38125000\,x - 277500\,x^2 + 870\,x^3 - x^4).$$

Wenn für den massiven hölzernen Balken das Tragmoment

$$Pl = \frac{0{,}73}{6}\,200 \,.\, 300^2 = {}^1/_6 \,.\, 13'140000$$

ist, so hat man zu setzen:

$$\frac{5{,}1}{250}\,(38125000\,x - 277500\,x^2 + 870\,x^3 - x^4) = 13'140000 \text{ oder:}$$

$$38'125000\,x - 277500\,x^2 + 870\,x^3 - x^4 = 644'117647.$$

Zunächst ist annähernd $x = \frac{644'117647}{38'125000} = 16{,}9$ Millimeter, wofür aber $x = 18$ Millimeter gesetzt werden soll. Dann folgt

$$277500\,x^2 = 89'910000;\; 870\,x^3 = 5'073840;\; x^4 = 104976,$$

daher läßt sich setzen:

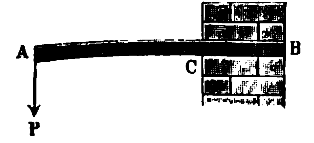
$$x = \frac{644'117647 + 89'910000 - 5'073840 + 104976}{38'125000} = 19{,}4 \text{ Millimeter},$$

und folglich die gesuchte Metallstärke:

$$\frac{x}{2} = 9{,}7 \text{ Millimeter} = rot.\ 10 \text{ Millimeter}.$$

Der Brechungsquerschnitt. In den bisher behandelten Fällen der Biegung der Körper AB, Fig. 439, haben wir immer eine prismatische Form derselben, und folglich auch ein constantes Biegungsmoment WE vorausgesetzt, weshalb wir mittels der Grundformel (aus §. 220) §. 255.

Fig. 439.



$$Pxr = WE$$

schließen können, daß der Krümmungshalbmesser

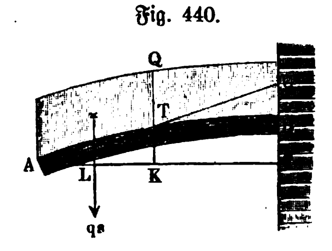
$$r = \frac{WE}{Px}$$

umgekehrt, und daher die Biegung selbst direct dem Momente (Px) der auf den Körper von außen wirkenden Kraft P proportional ist, und folglich auch die Biegung mit Px zugleich ein Maximum und Minimum wird. Ist daher die Kraft P constant, oder wächst dieselbe mit x (wie z. B. $Q = qx$, in

34*

dem Fig. 440 abgebildeten Falle), so nimmt die Biegung mit x ab und zu, und ist auch mit x zugleich ein Maximum und Minimum. Wenn hingegen

Fig. 440.



der Querschnitt F des Körpers an verschiedenen Stellen seiner Axe verschieden ist, so fällt natürlich auch $W = \Sigma (F z^2)$ veränderlich aus, und dann ist der Krümmungshalbmesser r dem Quotienten $\frac{W}{Px}$, und also die Krümmung selbst dem Ausdrucke $\frac{Px}{W}$ proportional. Kommt es folglich darauf an, die Stellen der stärksten und schwächsten Biegungen zu finden, so hat man nur diejenigen Werthe für die Armlänge x zu bestimmen, bei welchen der Ausdruck $\frac{Px}{W}$ zum Maximum und zum Minimum wird.

Ebenso wird, der Formel

$$S = \frac{P x e}{W}$$

aus §. 224 zufolge, die Spannung S in der äußersten Faserschicht des im Abstande x von dem freien Balkenende gelegenen Querschnittes mit dem Ausdrucke $\frac{Px \cdot e}{W}$ ein Maximum oder Minimum.

Bei einem prismatischen Körper ist $\frac{W}{e}$ eine constante Zahl, und folglich diese Maximalspannung S nur dem Kraftmomente Px proportional; bei Körpern von veränderlichem Querschnitte, wo $\frac{W}{e}$ eine veränderliche Zahl ist, hängt dagegen diese Spannung auch noch mit von diesem Quotienten ab; im ersteren Falle ist diese Spannung mit Px zugleich, also bei einer in einem Punkte angreifenden Kraft P und bei einer auf x gleichmäßig vertheilten Last $Q = qx$, für $x = l$, ein Maximum; im zweiten Falle läßt sich hingegen dieses Maximum von S ohne nähere Kenntniß der Veränderlichkeit des Querschnittes im Voraus nicht angeben. Um diese Stelle oder den Querschnitt des Balkens zu finden, wo die Maximalspannung vorkommt, ist es nöthig, das Maximum von dem Ausdrucke $\frac{P x e}{W}$ algebraisch zu bestimmen. Jedenfalls ist die Stelle im Körper, wo diese Maximalspannung vorkommt, auch diejenige, wo bei hinreichender Belastung die Spannung S zuerst in T oder gar in K übergeht, und folglich zunächst die Elasticitätsgrenze erreicht wird oder das Zerbrechen eintritt. Man nennt

deshalb auch den dieser Stelle des Maximalwerthes von $\left(\frac{Pxe}{W}\right)$ entsprechenden Querschnitt des Körpers den Brechungsquerschnitt (franz. section de rupture; engl. section of rupture), oder auch den gefährlichen (schwachen) Querschnitt.

Hat der Körper einen rectangulären Querschnitt mit der veränderlichen Breite u und der veränderlichen Höhe v, so ist

$$\frac{W}{e} = \frac{u v^2}{6},$$

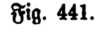
und daher der schwache Querschnitt durch das Maximum von $\frac{Px}{uv^2}$ oder das Minimum von $\frac{uv^2}{Px}$ bestimmt. Bei einem Körper mit elliptischem Querschnitte, dessen veränderliche Halbaxen u und v sind, hat man:

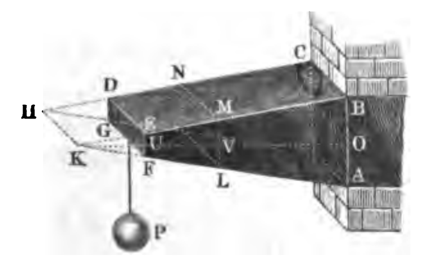
$$\frac{W}{e} = \frac{\pi u v^2}{4},$$

und daher wieder das Minimum von $\frac{uv^2}{Px}$ aufzusuchen, wenn es darauf ankommt, die schwache Stelle des Körpers zu bestimmen.

Bei constantem Gewichte kommt P ganz außer Betracht, ist also bloß das Minimum von $\frac{uv^2}{x}$ zu ermitteln, ist dagegen das Gewicht $Q = qx$, also gleichmäßig auf den Balken vertheilt, so muß man das Minimum von $\frac{uv^2}{x^2}$ bestimmen, um den Brechungsquerschnitt zu finden.

Bildet der Körper $ACDF$, Fig. 441, einen abgestumpften Keil, §. 256.
oder ein liegendes Prisma mit trapezoidaler Seitenfläche $ABEF$, dessen unveränderliche Breite $BC = DE = b$ ist, und wirkt die Kraft P an dem Ende DF desselben, so hat man nur das Minimum von $\frac{v^2}{x}$ zu ermitteln, um den schwachen Querschnitt desselben zu finden. Setzen wir die Höhe $DG = EF$ seiner Endfläche $= h$ und die Höhe KU des Ergänzungsstückes $HKU = c$, und nehmen wir unserer seitherigen


Fig. 441.



Bezeichnung entsprechend an, daß der Brechungsquerschnitt LMN um $UV = x$ von der Endfläche DEF abstehe, so haben wir die Höhe desselben:

$$ML = v = h + \frac{x}{c}\,h = h\left(1 + \frac{x}{c}\right),$$

und daher nur das Minimum des Ausdruckes:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^2 = h^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{c} + \frac{x}{c^2}\right),$$

oder, da h und c bestimmt sind, nur von $\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}$ zu ermitteln.

Nimmt man $x = c$ an, so ergiebt sich der letzte Ausdruck $= \frac{2}{c}$, macht man aber x wenig (um x_1) größer oder kleiner, so erhält man:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{c \pm x_1} = \frac{1}{c\left(1 \pm \frac{x_1}{c}\right)} = \frac{1}{c}\left(1 \mp \frac{x_1}{c} + \frac{x_1^2}{c^2}\right) \text{ und}$$

$$\frac{x}{c^2} = \frac{c \pm x_1}{c^2} = \frac{1}{c} \pm \frac{x_1}{c^2},$$

folglich

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2} = \frac{2}{c} + \frac{x_1^2}{c^3},$$

also jedenfalls größer als $\frac{2}{c}$. Es giebt also $x = c$ das gesuchte Minimum, d. i. der schwache Querschnitt LMN steht um die Höhe $KU = c$, nämlich eben so viel von der Endfläche DEF ab, als die abgeschnittene Kante HK auf der anderen Seite.

Mit Hülfe der Differenzialrechnung findet man einfacher

$$Min.\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}\right)$$

durch

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{c^2}\right)}{\partial x} = 0;\ \text{d. i.} -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{c^2} = 0;\ \text{oder } x = c.$$

Die Höhe dieses schwachen Querschnittes ist

$$v = h + \frac{h}{c}\,c = 2h,$$

und folglich die Tragkraft dieses Körpers:

$$P = \frac{b(2h)^2}{c}\,\frac{T}{6} = \frac{4bh^2}{c}\,\frac{T}{6}.$$

Ein parallelepipedischer Balken hat bei gleicher Länge $l = c$, gleicher Breite b und gleichem Volumen $V = b h_1 l$ die Höhe:

$$h_1 = \frac{h + 2h}{2} = {}^3/_2\, h,$$

und folglich die Tragkraft:

$$P = \frac{b h_1^2}{c} \cdot \frac{T}{6} = \frac{9}{4} \frac{b h^2}{c} \cdot \frac{T}{6},$$

trägt also nur ${}^9/_{16}$ mal so viel als der behandelte keilförmige Körper.

Ist der Körper eine abgekürzte Pyramide, so schneiden sich die Ebenen AE, BD u. s. w. gehörig erweitert; in einer Spitze, und wenn man die Höhe der abgeschnittenen oder Ergänzungspyramide wieder mit c und die anfängliche Breite DE mit b bezeichnet, so ist:

$$MN = u = b\left(1 + \frac{x}{c}\right) \text{ und } LM = v = h\left(1 + \frac{x}{c}\right);$$

und man hat daher das Minimum von

$$\frac{u v^2}{x} = \frac{b h^2}{x}\left(1 + \frac{x}{c}\right)^3$$

oder von

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$$

zu ermitteln, um den Brechungsquerschnitt zu finden. Durch Differenzialrechnung findet man

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{x} + \frac{3x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{c^2} + \frac{2x}{c^3} = 0;$$

oder $c^3 = 3c \,.\, x^2 + 2x^3$, aus welcher Gleichung $x = {}^1/_2\, c$ folgt.

Man kann sich leicht von der Richtigkeit dieses Werthes überzeugen, wenn man einmal $x = {}^1/_2\, c + x_1$ und ein anderes Mal ${}^1/_2\, c - x_1$ setzt. In jedem Falle erhält man einen größeren Werth als

$$\frac{2}{c} + \frac{3}{2c} + \frac{1}{4c} = \frac{15}{4c}, \text{ welchen der Ausdruck:}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{3x}{c^2} + \frac{x^2}{c^3}$$

für $x = {}^1/_2\, c$ annimmt. Es ist also der Abstand der Brechungsfläche LN von der Endfläche DF gleich der Hälfte der Höhe c des Ergänzungsstückes der abgestumpften Pyramide. Die Dimensionen dieser Fläche sind:

$$u = b\,(1 + {}^1/_2) = {}^3/_2\, b \text{ und } v = {}^3/_2\, h,$$

folglich ist die gesuchte Tragkraft des Balkens:

$$P = \frac{{}^3/_2\, b\,({}^3/_2\, h)^2}{{}^1/_2\, c} \frac{T}{6} = \frac{27}{4} \frac{b h^2}{c} \frac{T}{6}.$$

Für einen Körper in Form eines abgekürzten Kegels hat man bei dem Halbmesser r seiner Endfläche und der Höhe c des abgeschnittenen Stückes, den Halbmesser der Brechungsfläche, $r_1 = {}^3/_2\, r$, und daher:

$$P = \frac{27}{4} \frac{\pi r^3}{c} \frac{T}{4}.$$

§. 257. **Körper von gleichem Widerstande.** Wenn ein Körper so gebogen wird, daß sowohl die Maximalspannung S auf der Zugseite der neutralen Axe als auch die größte Spannung auf der Druckseite derselben an allen Stellen eine und dieselbe ist, so heißt er ein Körper von gleichem Widerstande (franz. corps d'égale résistance; engl. body of the strongest form). Ein solcher Körper erreicht bei einer gewissen Kraft in allen Querschnitten zugleich die Grenze der Elasticität, hat also an jeder Stelle den der Tragkraft entsprechenden Querschnitt, und erfordert deshalb unter allen Körpern, bei übrigens gleichen Verhältnissen, die kleinste Menge an Stoff. Wegen Ersparniß und zur Vermeidung unnöthiger Belastungen sind daher in dem Bauwesen vorzugsweise solche Körperformen in Anwendung zu bringen. Da die stärkste Spannung in einem Querschnitte durch den Ausdruck

$$S = \frac{Pxe}{W} \text{ (s. §. 255)}$$

bestimmt ist, so fordert ein Körper von gleichem Widerstande, daß die Größe $\frac{Pxe}{W}$ für alle Querschnitte des Körpers eine und dieselbe sei.

Ist die Kraft P constant und greift dieselbe am Ende des Körpers an, so hat man folglich einfacher

$$\frac{ex}{W} \text{ oder } \frac{W}{ex}$$

constant zu setzen, wogegen dann, wenn die Kraft $Q = qx$, also gleichmäßig auf den Balken vertheilt ist,

$$\frac{ex^2}{W} \text{ oder } \frac{W}{ex^2}$$

constant gefordert werden muß. Bei einem Balken mit rectangulären Querschnitten (s. §. 255), deren Dimensionen u und v sind, ist im ersteren Falle:

$\frac{uv^2}{x}$, und im zweiten:

$\frac{uv^2}{x^2}$ constant zu setzen.

Ist an einer Stelle in dem Abstande l von der Endfläche die Breite b und die Höhe h, so hat man folglich im ersteren Falle:

$$\frac{u v^2}{x} = \frac{b h^2}{l},$$

und dagegen im letzteren:

$$\frac{u v^2}{x^2} = \frac{b h^2}{l^2}$$

zu fordern. Bei constanter Breite $u = b$ ist daher im ersteren Falle:

$$\frac{v^2}{x} = \frac{h^2}{l}, \text{ d. i.}$$

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l} \text{ oder } \frac{v}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}.$$

Da die Gleichung $\frac{v^2}{h^2} = \frac{x}{l}$ einer Parabel zukommt (s. §. 38, Anmerkung), so hat folglich das Längenprofil ABE, Fig. 442, eines solchen

Fig. 442.

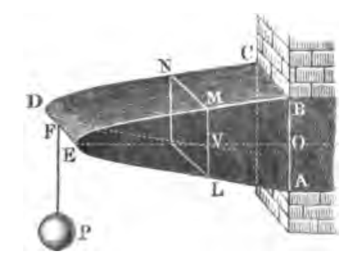
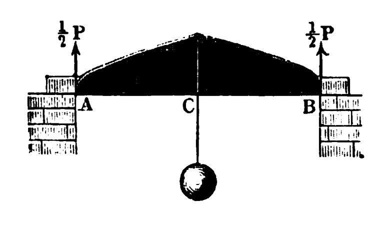


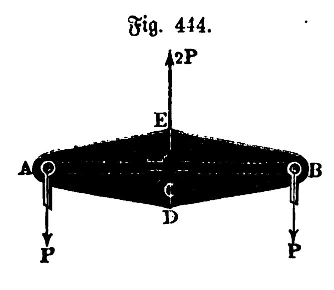
Fig. 443.



Körpers die Form einer Parabel, und zwar einer Parabel, deren Scheitel E mit dem End- oder Aufhängepunkt der Last P zusammenfällt.

Ruht der Balken AB, Fig. 443, von gleicher Breite, mit seinen Enden auf, und trägt er die Last P in seiner Mitte, oder wird der Balken AB, Fig. 444, in der Mitte C unterstützt, und an den Enden A und B durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräfte ergriffen, so erhält das Längenprofil die Gestalt von zwei in der Mitte zusammenstoßenden Parabeln. Der letzte Fall kommt bei Balanciers und Wagbalken vor. Da dieselben durch die Zapfenlöcher A, C, B geschwächt werden, so versieht man sie noch mit Rippen, oder giebt ihnen einen Mittelsteg AB.

Fig. 444.



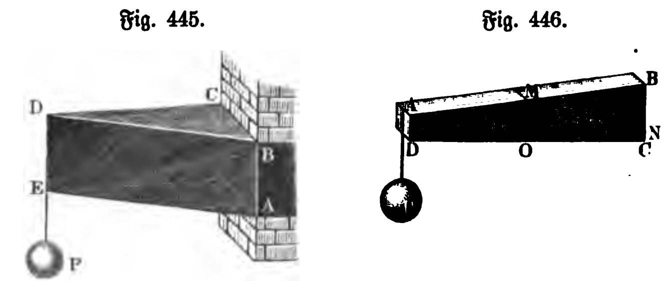
Die Anordnung der Augen für die Zapfen in A und B macht hier eine Abweichung von der genauen parabolischen Form nöthig. Ueberhaupt darf in den Endpunkten F, Fig. 442, A und B, Fig. 443, die Höhe v des Querschnittes nicht bis zu Null abnehmen, wegen der durch die daselbst angreifenden Kräfte erzeugten Schubspannungen, worüber in dem folgenden Capitel das Nähere vorkommt.

Ist die Höhe $v = h$ constant, so hat man:

$$\frac{u}{x} = \frac{b}{l} \text{ oder } \frac{u}{b} = \frac{x}{l},$$

dann ist also die Breite u ihrer Entfernung von dem Ende proportional, es bildet deshalb die Horizontalprojection des Balkens. ACE, Fig. 445, ein Dreieck BCD, und der ganze Balken einen Keil mit verticaler, in die Kraftrichtung fallender Schärfe DE.

Fig. 445. Fig. 446.



Man ersetzt gewöhnlich die parabolischen Träger in Fig. 442 durch ebenflächige Träger, wie ACB in Fig. 446. Um hierbei so viel wie möglich Material zu ersparen, giebt man diesem Träger in der Mitte M dieselbe Höhe $MO = h_m = h\sqrt{1/2}$, welche der parabolische Träger erhalten würde, und führt die ebene Begrenzungsfläche CD tangential an die entsprechende Parabelfläche. Nun ist, da die Tangente CD die über A verlängerte Axe BA in einem Punkte trifft, welcher von A um die Länge AM entfernt ist:

$$\frac{BC}{MO} = \frac{3\,AM}{2\,AM} = {}^3/_2, \text{ und } \frac{AD}{MO} = \frac{AM}{2\,AM} = {}^1/_2;$$

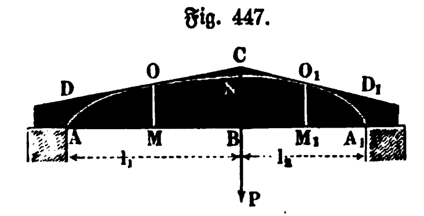
daher folgt, wenn man die größere Höhe BC des Körpers durch h_1 und die kleinere Höhe AD desselben durch h_2 bezeichnet,

$$h_1 = {}^3/_2\,h_m = {}^3/_2\,h\sqrt{1/2} = 1{,}0607\,h \text{ und}$$
$$h_2 = {}^1/_2\,h_m = {}^1/_2\,h\sqrt{1/2} = 0{,}3536\,h,$$

wobei die Höhe $BN = h$ mittels der bekannten Formel $Pl = bh^2\,\frac{T}{6}$ zu bestimmen ist.

Das Volumen eines solchen ebenflächigen Trägers ist $\frac{bl\,(h_1 + h_2)}{2}$ $= 0{,}7071\,blh$, wogegen das des parabolischen Trägers von gleichem Widerstande, $= \frac{2}{3}\,blh = 0{,}667\,blh$, d. i. 5,7 Procent kleiner ausfällt.

Fig. 447.

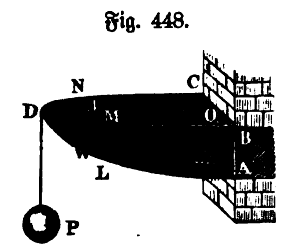


Ebenso kann man den an den Enden A und B unterstützten Träger ANA_1, Fig. 447, aus zwei ebenflächigen Stücken zusammensetzen, welche im Angriffspunkte der Last die gemeinschaftliche Höhe $\overline{BC} = h_1 = 1{,}0607\,h$ und an den Enden die Höhe $\overline{AD} = \overline{A_1 D_1} = h_0 = 0{,}3536\,h$ haben; nur ist hier die Höhe $\overline{BN} = h$ durch die Formel

$$\frac{P l_1 l_2}{l} = \frac{b h^2 T}{6} \text{ zu bestimmen.}$$

Soll der Körper ABD, Fig. 448, lauter ähnliche Querschnitte LMN, ABC u. s. w. haben, so ist zu setzen: §. 258.

Fig. 448.



$$\frac{v}{h} = \frac{u}{b}, \text{ daher:}$$

$$\frac{u v^2}{x} = \frac{u \,.\, u^2 h^2}{b^2 x} = \frac{b h^2}{l},$$

d. i.:

$$\frac{u^3}{b^3} = \frac{x}{l}, \text{ oder } \frac{u}{b} = \frac{v}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}};$$

dann wachsen also die Breiten und Höhen wie die Cubikwurzeln aus den entsprechenden Hebelarmen. In der achtfachen Entfernung vom Ende ist z. B. die Höhe und Breite nur doppelt so groß als in der einfachen Entfernung.

Man kann diesen Körper durch eine abgekürzte Pyramide $ACEG$, Fig. 449 (a. f. S.), ersetzen, welcher in der halben Länge die Höhe $MO = h_m = \sqrt[3]{1/2}\,.\,h = 0{,}7937\,h$ und die Breite $MN = b_m = \sqrt[3]{1/2}\,.\,b = 0{,}7937\,b$ mit dem gefundenen Körper von genau gleichem Widerstande gemeinschaftlich hat.

Für den Tangentenwinkel der Curve $\frac{v}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, oder $v = \frac{h}{\sqrt[3]{l}}\, x^{1/3}$, ist nach analyt. Hülfslehren §. 10, $tang.\,\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{h}{3\sqrt[3]{l}}\, x^{-2/3} = \frac{h}{3\sqrt[3]{l x^2}}$, daher folgt für

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\, l\, tang.\, \alpha = \frac{1}{6}\, h \sqrt[3]{\left(\frac{l}{x}\right)^2} = \frac{1}{6}\, h\, \sqrt[3]{4} = \frac{h}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$= 0{,}2646\, h$, und ebenso folgt für die Curve

$$\frac{u}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}},\ tang.\, \beta = \frac{b}{3\sqrt[3]{l x^2}} \text{ und}$$

$$\frac{1}{2}\, l\, tang.\, \beta = \frac{b}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ergeben sich nun die Dimensionen der großen Grundfläche ABC:
$AB = h_1 = h_m + \frac{1}{2}\, l\, tang.\, \alpha = \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, .\, h = 1{,}0583\, h$ und
$BC = b_1 = b_m + \frac{1}{2}\, l\, tang.\, \beta = \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, .\, b = 1{,}0583\, b$,
sowie die der kleinen Grundfläche EFG:

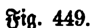


Fig. 449.

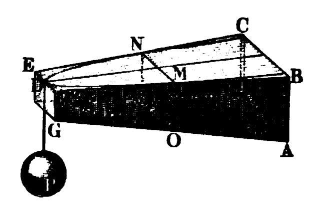
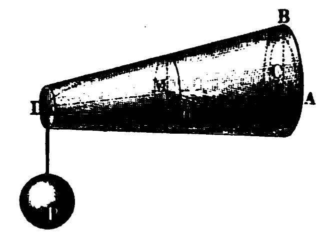


Fig. 450.



$FG = h_2 = h_m - \frac{1}{2}\, l\, tang.\, \alpha = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, .\, h = 0{,}5291\, h$ und
$EF = b_2 = b_m - \frac{1}{2}\, l\, tang.\, \beta = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, .\, b = 0{,}5291\, b$.

Uebrigens ist natürlich $Pl = \frac{b h^2 T}{6}$ zu setzen.

Giebt man dem Körper von gleichem Widerstande **kreisförmige Querschnitte**, so gilt für den veränderlichen Querschnittshalbmesser die Gleichung

$$u = v = z = \sqrt[3]{\frac{x}{l}},$$

und wenn man diesen Körper durch einen **abgekürzten** Kegel ABE, Fig. 450, ersetzt, so sind die Halbmesser desselben:

$$MO = r_m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, .\, r = 0{,}7937\, r,\ CA = r_1 = 1{,}0583\, r \text{ und}$$
$$DE = r_2 = 0{,}5291\, r,$$

und es ist der Halbmesser r der Grundfläche des Körpers von gleichem Widerstande nach der Formel

$$Pl = \frac{\pi r^3}{4}\, T \text{ zu berechnen.}$$

Ist ein Balken **gleichförmig belastet** und die **Breite unveränderlich**, also $u = b$, so hat man:

$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{x^2}{l^2}, \text{ also auch}$$

$$\frac{v}{h} = \frac{x}{l},$$

und es erhält deshalb derselbe die Gestalt eines Keiles mit triangulärem Längenprofil ABD, Fig. 451.

Fig. 451.

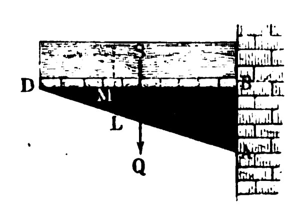
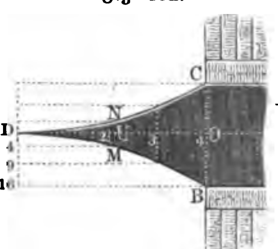


Fig. 452.

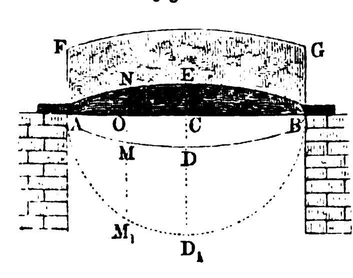


Bei constanter Höhe ist in diesem Falle $\frac{u}{b} = \frac{x^2}{l^2}$, und daher der Grundriß des Balkens eine von entgegengesetzten Parabelbögen BD und CD begrenzte Fläche BDC, wie Fig. 452.

Macht man wieder ähnliche Querschnitte, so ist $\frac{u^3}{b^3} = \frac{v^3}{h^3} = \frac{x^2}{l^2}$, dann hat man es also sowohl im Vertical- als auch im Horizontalprofile mit der **cubischen Parabel**, bei welcher die Cuben der Ordinaten wie die Quadrate der Abscissen wachsen, zu thun.

Wird ein in beiden Enden aufruhender Körper AEB, Fig. 453, gleichförmig und zwar auf den laufenden Fuß durch q, also auf die ganze Länge $AB = l$ durch $Q = ql$ belastet, so hat man das Kraftmoment für einen Punkt O in der Entfernung $AO = x$ von einem Stützpunkte A:

Fig. 453.



$$\frac{Q}{2} \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2),$$

dagegen für die Mitte C:

$$= \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

Nehmen wir einen Körper von unveränderlicher Breite b an, so haben wir zu setzen:

$$b\,r^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{q}{2}\,(lx - x^2) \text{ und}$$

$$b h^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{q l^2}{8},$$

wenn h die Höhe CE des Körpers in der Mitte bezeichnet, und es folgt nun durch Division:

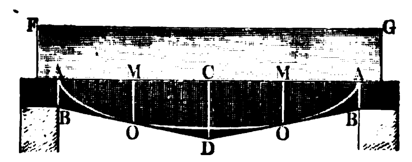
$$\frac{v^2}{h^2} = \frac{l x - x^2}{{}^1/_4 l^2}, \text{ oder}$$

$$v^2 = \left(\frac{h}{{}^1/_2 l}\right)^2 (l x - x^2).$$

Wäre $h = {}^1/_2 l$, so würde $v^2 = l x - x^2$, und deshalb das Längenprofil der mit ${}^1/_2 l$ als Halbmesser construirte Kreis $A D_1 B$ sein; weil aber $l x - x^2$ noch durch $\left(\frac{h}{{}^1/_2 l}\right)^2$ zu multipliciren ist, um das Quadrat v^2 der jedesmaligen Höhe $MO = NO$ zu erhalten, so geht dieser Kreis in eine Ellipse ADB oder AEB über, deren Halbaxen $CA = a_1 = {}^1/_2 l$ und $CD = CE = b_1 = h$ sind.

Man kann diesen Körper durch einen ebenflächigen Träger $AABDB$, Fig. 454, ersetzen, welcher in dem Abstande $AM = {}^1/_4 l$ von den Stützpunkten B und B, die Höhe $MO = h_m$ $= \frac{h}{{}^1/_2 l} \sqrt{{}^1/_4 l^2 - {}^1/_{16} l^2}$ $= {}^1/_2 \sqrt{3} \,.\, h$ hat. Der Neigungswinkel α der Fläche BD gegen die Axe AC ist durch die Gleichung

Fig. 454.



$$tang. \alpha = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{h}{{}^1/_2 l} \sqrt{l x - x^2}\right)}{\partial x} = \frac{h}{{}^1/_2 l} \cdot \frac{{}^1/_2 l - x}{\sqrt{l x - x^2}}$$

$$= \frac{2 h}{l} \cdot \frac{{}^1/_4 l}{\sqrt{{}^3/_{16} l^2}} = \frac{2 h}{l \sqrt{3}} = {}^2/_3 \sqrt{3} \,.\, \frac{h}{l}$$

bestimmt; daher folgt $\frac{l}{4}\, tang. \alpha = {}^1/_6 \sqrt{3} \,.\, h$ und die Höhe des Körpers in der Mitte:

$$CD = MO + \frac{l}{4}\, tang. \alpha = {}^2/_3 \sqrt{3} \,.\, h = 1{,}1548\, h,$$

dagegen die Höhe desselben an den Enden:

$$AB = MO - \frac{l}{4}\, tang. \alpha = {}^1/_3 \sqrt{3} \,.\, h = 0{,}5774\, h.$$

§. 259. Die Biegung eines Körpers von gleichem Widerstande ist natürlich unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen eine größere als

die eines prismatischen Balkens. Für den Fall, daß der Balken an einem Ende festgeklemmt ist und am anderen Ende von einer Kraft P ergriffen wird, bestimmt sich die Durchbiegung wie folgt.

Die bekannte Gleichung $\frac{r}{e} = \frac{E}{T}$ liefert $\frac{1}{r} = \frac{T}{Ee}$, wodurch der Krümmungshalbmesser als Function des Abstandes e ausgedrückt wird. Es kann übrigens hier für den Tragmodul T auch jede beliebige innerhalb der Elasticitätsgrenze befindliche specifische Spannung k gesetzt werden. Setzt man wie in §. 223

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ so folgt wie dort}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha = \frac{T}{E} \int \frac{\partial x}{e}.$$

Ist nun die Abhängigkeit zwischen e und x bekannt, so läßt sich diese Rechnung ausführen, und für jede Stelle der elastischen Linie ihre Neigung α sowie nach nochmaliger Integration die Ordinate y, also auch die Senkung daselbst bestimmen.

Nimmt man z. B. einen Balken gleichen Widerstandes mit rectangulärem Querschnitte an, so ist $e = \frac{1}{2} v$, und wenn noch die Breite $u = b = Const.$ ist, so hat man:

$$\frac{bv^2}{x} = \frac{bh^2}{l}, \text{ oder } v = h\sqrt{\frac{x}{l}}, \text{ daher } e = \frac{h}{2\sqrt{l}}\sqrt{x},$$

folglich:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha = \frac{2T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}\int\frac{\partial x}{\sqrt{x}} = \frac{4T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}\sqrt{x} + Const.$$

Die Constante ergiebt sich mit Rücksicht darauf, daß für

$$x = l;\ \alpha = 0 \text{ ist zu } -\frac{4T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}\sqrt{l};$$

daher hat man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha = \frac{4T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}(\sqrt{x} - \sqrt{l})$$

und durch Integration:

$$y = \frac{4T}{E}\frac{\sqrt{l}}{h}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{x} - \sqrt{l}\right)x.$$

Die Constante ist Null, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ ist.

Für $x = l$ ergiebt sich für die Ordinate y am festgehaltenen Punkte, d. h. auch für die Senkung des freien Endes

$$y = s = \tfrac{4}{3}\frac{Tl^2}{Eh}.$$

Noch ist $Pl = bh^2 \cdot \frac{T}{6}$, oder $T = \frac{6\,Pl}{bh^2}$, daher ergiebt sich endlich die Durchbiegung:

$$s = \frac{8\,Pl^3}{Ebh^3} = 2 \cdot \frac{4\,Pl^3}{Ebh^3},$$

d. i. 2 mal so groß als bei dem parallelepipedischen Balken von der Breite b und Höhe h (vergl. §§. 227 und 235).

Wirkt die Kraft in der Mitte des Körpers, während der Balken an den beiden Enden aufliegt, so ist natürlich statt P, $\frac{P}{2}$, und statt l, $\frac{l}{2}$ einzuführen, und es fällt alsdann

$$s = {}^1/_{16} \cdot \frac{8\,Pl^3}{Ebh^3},$$

d. i. sechszehn Mal kleiner aus als bei einseitiger Wirkung der Kraft.

Bei einem Körper von gleichem Widerstande mit triangulärer Basis wie Fig. 445 darstellt, ist die veränderliche Breite $u = \frac{x}{l}\,b$, und

$$Prx = \frac{uh^3}{12}\,E = \frac{bh^3x}{12\,l}\,E,$$

daher der Krümmungshalbmesser $r = \frac{bh^3}{12\,l}\,\frac{E}{P}$ constant, also die Biegungscurve ein Kreis, und die entsprechende Bogenhöhe

$$s = \frac{l^2}{2r} = \frac{6\,Pl^3}{bh^3E} = {}^3/_2 \cdot \frac{4\,Pl^3}{bh^3E},$$

d. i. $^3/_2$ mal so groß als bei dem parallelepipedischen Balken.

Während die Körper gleichen Widerstandes dadurch gekennzeichnet sind, daß $\frac{1}{k} = \frac{1}{P} \cdot \frac{W}{ex}$ für alle Querschnitte constant, nämlich gleich dem reciproken Werthe der größten specifischen Spannung ist, so gilt für die Balken von überall gleicher Krümmung, d. i. für diejenigen, deren elastische Linie ein Kreisbogen ist, ganz allgemein die Gleichung:

$$r = \frac{E}{P} \cdot \frac{W}{x} = Const.$$

Aus der Vergleichung beider Werthe erkennt man, daß ein Balken gleichen Widerstandes auch ein solcher von gleicher Krümmung ist, sobald e eine constante Größe ist.

Drittes Capitel.

Die Schub-Elasticität und Festigkeit.

Die Schubfestigkeit oder der Widerstand des Abscheerens, Abdrückens (franz. résistance par glissement ou cisaillement; engl. strength of shearing), wobei die Trennungsfläche in die Richtung der Kraft fällt, ist ähnlich wie die Zugfestigkeit zu beurtheilen. Man hat es hier mit der Zusammenwirkung dreier Parallelkräfte P, Q und R, Fig. 455, zu thun, wobei die Angriffspunkte A und C von zweien derselben (P und R), einander so nahe liegen, daß eine Biegung des zwischenliegenden Stückes AC nicht möglich ist, und daher eine Trennung zwischen A und C, und zwar in einer Fläche DD rechtwinkelig zur Axe des Körpers, erfolgt. §. 260.

Fig. 455.

Der Widerstand des Abschiebens ist, wie der des Zerreißens und der des Zerdrückens, dem Querschnitte des Körpers, oder vielmehr der Größe der Trennungsfläche F proportional, und läßt sich beim Schmiedeeisen sogar annähernd dem des Zerreißens gleichsetzen. Es kann daher für Schmiedeeisen der Modul K der Zugfestigkeit auch als Festigkeitsmodul für das Abschieben gelten, und folglich die Kraft zum Abschieben bei dem Querschnitte F

$$P = FK$$

gesetzt werden. Allgemein ist aber

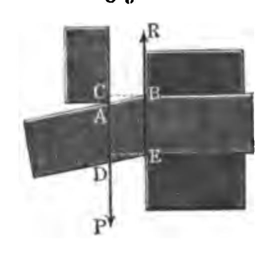
$$P = F \,.\, K_{III},$$

wenn K_{III} den durch Versuche zu ermittelnden Widerstand des Abschiebens oder Abscheerens pro Flächeneinheit bezeichnet.

Die Elasticitätsformel $P = \frac{\lambda}{l}\, FE = \sigma F E$ für Zug- und Druckkräfte läßt sich auch auf die Schubkraft P, Fig. 456 (a. f. S.), anwenden, nur bedeutet hier σ das Verhältniß $\tau = \frac{CA}{CB}$ der Verschiebung CA zur Länge oder dem Abstande CB der Kraftrichtungen AP und ER von einander, und ist für E eine durch besondere Versuche zu ermittelnde Er-

fahrungszahl C einzusetzen. Unter dem Verhältniß $\tau = \frac{CA}{CB} = tang.\, CBA$ kann man bei der Kleinheit von CA auch den Winkel (Bogenlänge für den Halbmesser Eins) $CBA = BAD - BCD$ verstehen, d. h. denjenigen Winkel, um welchen der ursprünglich rechte Winkel bei C sich durch die Verschiebung von C nach A verändert hat.

Fig. 456.



Bezeichnet man die specifische Schubspannung, d. h. den Widerstand gegen Verschiebung, welcher von der Flächeneinheit des Querschnittes ausgeübt wird, mit t, so ist

$$t = \frac{P}{F} = \tau C;\ \text{oder}\ \frac{t}{\tau} = C.$$

Es findet also zwischen der specifischen Schubspannung t und der Verschiebung τ eine eben solche Beziehung statt $\frac{t}{\tau} = C = Const.$ wie zwischen der Zug- oder Druckspannung k und der Ausdehnung σ, $\left(\frac{k}{\sigma} = E\right)$. Die Größe C nennt man den Modul der Schubelasticität.

Da die Verschiebungen, wie überhaupt alle Formänderungen im Innern eines elastischen Körpers auf Veränderungen der Abstände der einzelnen materiellen Punkte, also auf Ausdehnung resp. Zusammendrückung, zurückzuführen sind, so muß eine gewisse Abhängigkeit zwischen den Coefficienten der Schubelasticität und denen der Zug- oder Druckelasticität, also zwischen C und E bestehen, wie auch durch die Erfahrung bestätigt wird.

Denkt man sich nämlich auf einen stabförmigen Körper nach einer bestimmten Richtung einen Zug oder Druck ausgeübt, so zeigt sich, daß außer der in dieser Richtung eintretenden Ausdehnung resp. Zusammendrückung σ auch eine solche in jeder zur Druckrichtung senkrechten Richtung stattfindet; und zwar zeigt der gezogene Körper in den Querdimensionen eine Zusammendrückung und der gedrückte Körper eine Ausdehnung.

Der Betrag dieser in der Querrichtung erfolgenden Zusammendrückung resp. Ausdehnung τ ist immer kleiner, als die direct durch den Zug oder Druck hervorgebrachte Ausdehnung oder Zusammendrückung σ, und zwar gilt die Beziehung:

$$\tau = -\frac{\sigma}{m},$$

unter m eine Zahl, größer als Eins verstanden.

Um nun das Verhältniß von C und E zu finden, denke man sich unter $ABCD$, Fig. 457, den Durchschnitt eines sehr kleinen Würfels im Innern eines durch eine Zugkraft angegriffenen elastischen Körpers. Die Kante des

Würfels sei gleich der Längeneinheit, und es wirke auf die Fläche AB die Zugkraft k. In Folge davon verlängern sich die Kanten AD und BC zu A_1D_1 resp. B_1C_1 um die Größe σ; und verkürzen sich die Kanten AB und DC zu A_1B_1 und D_1C_1 um die Größe $\frac{\sigma}{m}$. Aus dem Quadrate $ABCD$ ist daher ein Rechteck geworden, dessen Seiten $A_1D_1 = 1 + \sigma$; und $A_1B_1 = 1 - \frac{\sigma}{m}$ sind.

Fig. 457.

In den Diagonalebenen B_1D_1 und A_1C_1 finden hierbei gleichfalls kleine Verschiebungen nach den Richtungen B_1D_1 und A_1C_1 statt, indem der ursprünglich rechte Winkel der Diagonalen AEB in den kleineren Winkel $A_1E_1B_1$ übergeht. Bezeichnet γ die Veränderung dieses Winkels, so daß

$$\gamma = AEB - A_1E_1B_1 = \frac{\pi}{2} - A_1E_1B_1$$

ist, so bedeutet nach dem Vorigen γ die Verschiebung jeder der beiden Diagonalebenen BD und AC. Um γ zu ermitteln, hat man

$$A_1D_1B_1 = {}^1/_2\, A_1E_1B_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \text{ und}$$

$$tang.\ A_1D_1B_1 = \frac{1 - \frac{\sigma}{m}}{1 + \sigma} = tang.\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\left(1 - \frac{\sigma}{m}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right) = (1 + \sigma)\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)$$

oder mit Vernachlässigung der kleinen Größen zweiter Ordnung

$$\gamma = \frac{m + 1}{m}\,\sigma.$$

Denkt man sich nun den Würfel in der Diagonale DB zerschnitten, so kann man das abgeschnittene Stück CDB dadurch ersetzen, daß man in der Schnittebene DB zwei Spannungen anbringt, von denen die eine p normal zu BD ist und die andere t in die Ebene BD hineinfällt. Diese beiden Spannungen müssen mit k im Gleichgewicht sein, wozu die beiden Gleichungen erfüllt sein müssen:

$$AB\,.\,k = BD\,.\,t\ cos.\ 45^0 + BD\,.\,p\ sin.\ 45^0 = (t + p)\,BD\ cos.\ 45^0$$
$$= (t + p)\,AB,$$

und

$$BD\,.\,t\ sin.\ 45^0 = BD\,.\,p\ cos.\ 45^0;\ \text{daher } t = p$$

und nach der ersten Gleichung folgt daraus:

$$t = \frac{k}{2}.$$

Dividirt man dies durch $\gamma = \frac{m+1}{m}\sigma$, so folgt

$$\frac{t}{\gamma} = \frac{m}{2(m+1)}\frac{k}{\sigma},$$

oder, weil

$$\frac{t}{\gamma} = C \text{ und } \frac{k}{\sigma} = E,$$

so hat man schließlich

$$C = \frac{m}{2(m+1)}E.$$

Durch eine ähnliche Betrachtung findet man, daß die Verschiebung γ in jedem Punkte irgend einer Ebene nach einer beliebigen Richtung der letzteren, doppelt so groß ist, als der Werth der größten in diesem Punkte eintretenden specifischen Ausdehnung σ, also $\frac{\gamma}{\sigma} = 2$, und es gilt daher, unter t und k die höchstens zulässigen Schub- und Zugspannungen verstanden, die Beziehung:

$$\frac{t}{k} = \frac{\gamma C}{\sigma E} = 2\frac{C}{E} = \frac{m}{m+1}.$$

Die Constante m ist durch die theoretischen Untersuchungen von Navier, Poisson, Cauchy u. A. gleich vier ermittelt, nach den Versuchen von Wertheim und Regnault scheint sie aber etwas kleiner und für verschiedene Materialien verschieden zu sein.

Diese Versuche*) wurden mit hohlen Stäben gemacht, deren Höhlung mit einer Flüssigkeit angefüllt war, und welche einem Zuge ausgesetzt wurden. Dadurch, daß man nicht nur die Längenausdehnung, sondern auch die Volumenänderung vermöge der aus dem Stabe heraus in eine Capillarröhre tretenden Flüssigkeit messen konnte, ließ sich die Größe m wie folgt bestimmen: Bezeichnet l die Länge, d die Weite und v das Volumen der cylindrischen Bohrung des Stabes, und sind unter Δl, Δd, Δv die Veränderungen dieser Werthe verstanden, welche sich einstellen, wenn der Stab einem bestimmten Zuge ausgesetzt wird, so ist

$$v = l d^2 \frac{\pi}{4}; \text{ und}$$

$$\Delta v = (l + \Delta l)(d + \Delta d)^2 \frac{\pi}{4} - l d^2 \frac{\pi}{4}; \text{ folglich}$$

*) Siehe Grashof: Die Festigkeitslehre, S. 145.

$$\frac{v + \Delta v}{v} = \frac{(l + \Delta l)(d + \Delta d)^2}{l d^2}.$$

Wenn nun die specifische Ausdehnung des Stabes $\frac{\Delta l}{l}$ beträgt, so ist die specifische Veränderung der Querdimensionen also von d nach dem Vorstehenden gegeben durch

$$\frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{m}\frac{\Delta l}{l};$$

dies eingesetzt giebt, wenn man die kleinen Größen höherer Ordnung vernachlässigt:

$$m = \frac{2 \cdot \frac{\Delta l}{l}}{\frac{\Delta l}{l} - \frac{\Delta v}{v}}.$$

Auf solche Weise fand Wertheim m zwischen 3 und 4; genauer:

für Messing: $m = 2{,}84 - 3{,}05$, im Mittel $m = 2{,}94$,
für Eisenblech: $m = 3{,}25 - 4{,}05$, im Mittel $m = 3{,}64$.

Es folgt daraus, daß

	für $m = 3$.	für $m = 4$.
$C = \frac{m}{2(m+1)} E =$	$^3/_8\, E$	$^2/_5\, E$
$\frac{t}{k} = \frac{m}{m+1} =$	$^3/_4$	$^4/_5$

Das Verhalten der Massentheilchen bei einer Anstrengung, welche die Elasticitätsgrenze überschreitet, läßt sich theoretisch nicht untersuchen, und es kann die Ermittelung des Festigkeitsmodels K_{III} nur durch directe Versuche geschehen. Die Versuche, welche hauptsächlich mit Schmiedeeisen angestellt worden sind, haben abweichende Resultate ergeben, indem die gefundenen Werthe von K_{III} zwischen K_I und $^2/_3\, K_I$ schwankten, unter K_I die absolute Festigkeit verstanden.

Folgende Tabelle enthält die bis jetzt bekannten Elasticitäts- und Festigkeitsmodel entsprechend den Formeln $P = \tau F C$ und $P = F K_{III}$ für die Schub-Elasticität und Festigkeit.

Tabelle III.

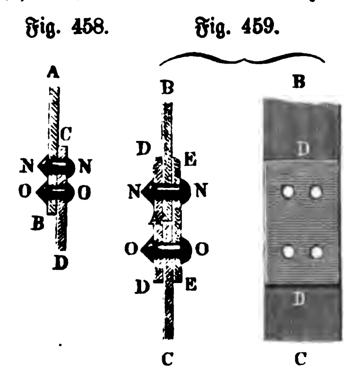
Die Model der Elasticität und Festigkeit beim Schub (des Abscheerens).

Namen der Körper.	Elasticitätsmodul C.	Festigkeitsmodul K_{III}.
Gußeisen	2'700000 2000	31000 22,7
Schmiedeeisen	8'600000 6300	48000 35
Feiner Gußstahl	13'680000 10000	88900 65
Kupfer	6'000000 4400	—
Messing	5'100000 3700	—
Laubholz	547000 400	650 0,48
Nadelholz	592000 433	2200 1,61

Gewöhnlich nimmt man $C = \frac{1}{3} E$ und $K_{III} = K$ an.

§. **261.** **Vernietungen.** Auf Abscheeren sind vorzüglich die Nietbolzen beansprucht, welche zur Verbindung von Blechen und anderen plattenförmigen Körpern dienen. Es sind hierbei der Hauptsache nach zwei Fälle zu unterscheiden, entweder werden die zu verbindenden Blechenden AB und CD, Fig. 458, über einander geblattet und durch Nieten NN und OO zusammengehalten (einschnittige Nietung), oder es werden, Fig. 459, die Blechenden AB und AC stumpf zusammengestoßen, mit gelochten Laschen oder Deckplatten DD und EE bedeckt, und durch Nieten NN und OO fest mit einander verbunden (zweischnittige Nietung). Bei der ersteren besonders bei Dampfkesseln üblichen Verbindungsweise, bei welcher jeder Niet nur in einem Querschnitte auf Abscheerung angesprochen wird, bilden die Zugkräfte P, $-P$ in den beiden Platten ein Kräftepaar, dessen Moment $P\delta$ ist, wenn δ die Stärke des

Fig. 458. Fig. 459.



Bleches bedeutet. Hierdurch erleiden beide Bleche außer der Dehnung auch noch eine Biegung und verlieren daher an Tragfähigkeit. Es ist daher die zweite Verbindungsart, bei welcher dieses Kräftepaar nicht hervorgerufen wird, und bei welcher der Niet in zwei Querschnitten der Abscheerung widersteht, die bessere, und wird dieselbe deswegen bei der Construction eiserner Brückenträger u. s. w. immer gewählt.

Die Nietbolzen widerstehen einer durch die Zugkraft P angestrebten Lösung der Verbindung außer durch ihre Festigkeit gegen Abscheeren auch vermöge der Reibung R, welche sie zwischen den Blechen in Folge einer in den Bolzen vorhandenen absoluten Spannung hervorrufen. Da ein Nietbolzen nämlich gewöhnlich weißglühend in das Loch eingebracht, und in diesem Zustande der Schließkopf angestaucht wird, so entsteht durch die nach der Herstellung eintretende Erkaltung des Bolzens eine Zusammenziehung desselben und in Folge dessen eine starke Pressung der Platten gegen einander. Die hierdurch erzeugte Reibung kann unter Umständen so stark werden, daß sie allein der Zugkraft P das Gleichgewicht hält, der Nietbolzen daher gar nicht auf Abscheeren in Anspruch genommen wird. Nach Versuchen, welche in dieser Hinsicht von Fairbairn u. A. (unter Verwendung länglicher Nietlöcher, in welchen die Bolzen Spielraum hatten) angestellt worden sind, betrug der Reibungswiderstand pro 1 Quadratmillimeter des Nietquerschnittes zwischen 10 und 14 Kilogramm, in besonderen Fällen bei Anwendung von Gußstahlnieten sogar über 17 Kilogramm. Setzt man einen Reibungscoefficienten der Ruhe von 0,18 (s. §. 178) voraus, so würde, da die Reibung an zwei Flächen stattfindet, die in dem Bolzen vorhandene Spannung k pro Quadratmillimeter diesen Versuchen zufolge betragen haben:

$$\text{bei Schmiedeeisen } k = \frac{10}{2\,.\,0{,}18} \text{ bis } \frac{14}{2\,.\,0{,}18} = 27{,}7 \text{ bis } 38{,}9 \text{ Kilogrm.,}$$

$$\text{bei Gußstahl } \quad k = \frac{17{,}3}{2\,.\,0{,}18} = 48{,}1 \text{ Kilogramm,}$$

also Werthe, welche den Festigkeitsmodeln K_1 dieser Materialien nahe liegen.

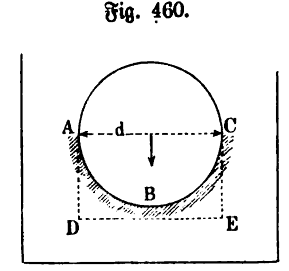
Da aber auf die durch die Erkaltung des Nietbolzens hervorgerufene Längenspannung niemals mit voller Sicherheit zu rechnen ist, indem die Zusammenziehung von sehr vielen Nebenumständen*) abhängt, welche sich einer genauen Rechnung fast gänzlich entziehen, so pflegt man von dieser Reibung in der Regel zu abstrahiren, und sie nur als eine besondere Sicherheit anzusehen.

---

*) Von Einfluß hierauf ist z. B. die Temperatur, bei welcher das Stauchen des Nietkopfes aufhört, diejenige, welche die Bleche während des Nietens angenommen haben, die Beschaffenheit der Flächen, die Geschicklichkeit der Arbeiter u. s. w.

Für die Widerstandsfähigkeit der Nietungen haben die, insbesondere von Fairbairn bei Gelegenheit des Baues der Britanniabrücke angestellten Versuche ergeben, daß die Niete auf einer Seite der Stoßfuge zusammen genommen etwa denselben Querschnitt haben müssen, welchen das Blech an der durch die Nietlöcher verschwächten Stelle behalten hat, wenn die Festigkeit der Nietverbindung eben so groß, wie diejenige des Bleches sein soll, d. h. wenn der Bruch mit gleicher Wahrscheinlichkeit in den Nieten und im Bleche eintreten soll. Man pflegt daher die zulässige Schubspannung pro 1 Quadratmillimeter Nietquerschnitt gleich der zulässigen absoluten Spannung k_I pro 1 Quadratmillimeter Blech anzunehmen. Hierbei ist es nicht gleichgültig, wie groß man den Durchmesser jedes einzelnen Nietes macht. In der Regel pflegt man den Durchmesser d des Nietbolzens gleich der doppelten Blechdicke δ zu machen, also $d = 2\,\delta$. Unter diesen Verhältnissen beträgt die von einem Niet aufzunehmende Zugkraft $k_I \frac{d^2 \pi}{4}$. Die Uebertragung dieser Kraft vom Bleche auf den Nietbolzen geschieht auf einer Berührungsfläche, welche die Hälfte ABC, Fig. 460, eines Cylindermantels vom Durchmesser d und der Höhe δ ist. Die Projection DE dieser Berührungsfläche auf eine zur Druckrichtung senkrechte Ebene ist $\delta\,d$, und wenn k_{II} die specifische rückwirkende Spannung auf diese Projection bedeutet, so hat man zu deren Bestimmung:

Fig. 460.



$$P = k_I \frac{d^2 \pi}{4} = k_{II}\, \delta\, d = k_{II}\, d\, \frac{d}{2};\ \text{woraus}$$

$$k_{II} = \frac{\pi}{2} k_I = \text{circa}\ {}^3/_2\, k_I.$$

Wollte man dem Nietbolzen einen größeren Durchmesser geben als die doppelte Blechstärke beträgt, so würde das Blech im Nietloche eine zu große rückwirkende Spannung erleiden, und man würde Gefahr laufen, daß in Folge davon an dem Nietloche auf der Druckseite aufgeworfene Ränder entstehen würden.

Eine Nietverbindung kann zum Bruche gelangen entweder dadurch, daß die Nietbolzen abgescheert werden, oder dadurch, daß das zwischen den Nieten stehen bleibende Blech abgerissen wird.

Bezeichnet e die Entfernung zweier neben einander in einer Querreihe befindlichen Nieten von Mitte zu Mitte, so muß, damit in beiden Hinsichten gleiche Sicherheit vorhanden ist, bei Vernachlässigung der Reibung, die Gleichung gelten:

$$\frac{d^2\pi}{4} k_1 = (e - d)\,\delta\, k_1 = (e - d)\,\frac{d}{2}\, k_1, \text{ woraus}$$

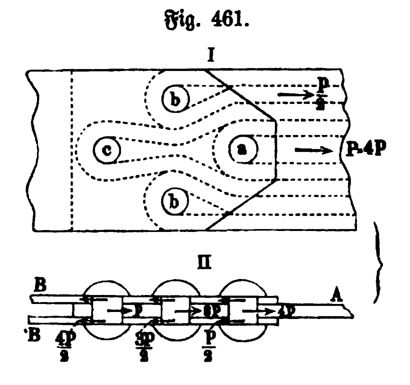
$$e = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) d = 2^1/_2\, d \text{ bis } 3\,d \text{ folgt.}$$

Die Anzahl n der Nietbolzen, welche auf jeder Seite der Stoßfuge anzubringen sind, ergiebt sich nach dem Obigen durch $n\,\frac{d^2\pi}{4}\,k_1 = P$, unter P die gesammte Zugkraft der Bleche verstanden. Wollte man diese Nieten sämmtlich neben einander in einer Querreihe anordnen, so wäre, unter b die Breite des Bleches von der Dicke $\delta = \frac{d}{2}$ verstanden, der wirksame Blechquerschnitt $(b - n d)\,\delta$, und man hätte

$$n\,\frac{d^2\pi}{4}\,k_1 = (b - nd)\,\frac{d}{2}\,k_1; \text{ oder } b = n\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) d.$$

Die Verschwächung des Bleches betrüge in diesem Falle $n d \delta$ und die Tragkraft an der Nietstelle würde zu der des vollen Bleches wie $\frac{\pi}{2}$ zu $\frac{\pi}{2} + 1$ sich verhalten, oder wie $1{,}57 : 2{,}57 = 0{,}6 : 1$. Bei dieser Anordnung beträgt daher die relative Verschwächung des Bleches circa 40 Procent. Um diese bedeutende Verminderung der Tragfähigkeit zu umgehen, ordnet man die Nieten in mehreren Reihen*) an, Fig. 461, derart, daß die erste Reihe beiderseits nur einen Niet, die zweite zwei u. s. w. erhält. Um den Vortheil dieser Anordnung zu erkennen, sei die in der gestoßenen Platte A wirkende Zugkraft $P = 4p$ gesetzt, und angenommen, daß jeder der vier Nieten a, b, b, c gleichmäßig die Kraft p auf die Laschen B, B übertrage. Die Platte A wird dann bis zum Querschnitte durch das Nietloch a mit $4\,p$ gezogen. Der Nietbolzen a überträgt die Kraft p an die beiden Stoßplatten, an jede $\frac{p}{2}$, so daß der Zug der Platte A zwischen a und b nur mehr $3\,p$, dagegen

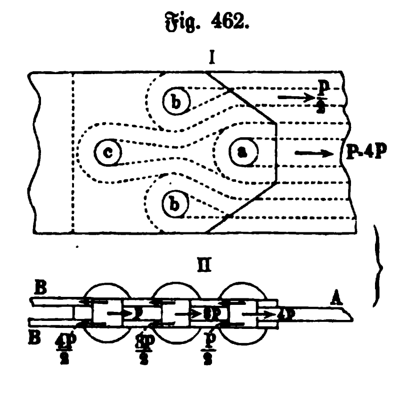
Fig. 461.



*) Siehe den Aufsatz von Herrn Schwedler. Wochenblatt d. Archit. Ver. Jahrgang I.

der in den beiden Stoßplatten BB zusammen p beträgt. In derselben Art wird durch die beiden Nieten b, b die Kraft $2p$ von A auf B, B übertragen (an jede Stoßplatte p), so daß zwischen b, b und c der Zug in A nur noch p, der Zug in B, B ebendaselbst $3p$ beträgt. Der Niet c endlich überträgt den Rest p der Platte A an die Laschen B, B, deren Anspannungen dadurch zusammen auf $4p$ gebracht werden. Um sich diese Wirkungsweise zu verdeutlichen, kann man die Platte A als aus einzelnen Strängen bestehend denken, welche an die Nietbolzen gehängt sind, wie Fig. 462 I. zeigt. Man erkennt aus der Vertheilung der Kräfte, wie sie in Fig. 462 II. eingetragen ist, daß die ganze Verbindung, d. h. die gestoßene Platte A und die Laschen B, B in dem Querschnitte durch die Mittelnietreihe bb dem geringsten Zuge ausgesetzt ist. Man kann daher auch diesen mittleren Querschnitt durch eine größere Anzahl Nietlöcher verschwächen, als die Schnittflächen durch die äußeren Nieten a, c, ohne diesen mittleren Querschnitt dabei einer größeren Gefahr auszusetzen. Es läßt sich hierdurch erreichen, daß die Verschwächung der gestoßenen Platte nur den Betrag eines Nietloches ausmacht. Bei n Nieten vom Durchmesser $d = 2\delta$ ist daher die erforderliche Breite des Bleches gegeben durch:

Fig. 462.



$$n\frac{d^2\pi}{4} = (b - d)\frac{d}{2};\; b = \left(n\frac{\pi}{2} + 1\right)d,$$

und die Tragfähigkeit der Verbindung ist

$$\frac{n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2} + 1}$$

von derjenigen des vollen Bleches. Dieser Werth wird für:

$$n = 1;\; \frac{n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2} + 1} = \frac{1{,}57}{2{,}57} = 0{,}61,$$

wie bei beliebig vielen Nieten, welche alle in einer Querreihe angeordnet sind.

Die folgende Tabelle giebt für verschiedene Werthe von n die entsprechenden Werthe von

$$\frac{n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2}+1} = \alpha,$$

sowie die erforderliche Breite

$$b = n\left(\frac{\pi}{2}+1\right)d = \beta d.$$

Die beiden letzten Columnen geben die erforderliche Breite des Bleches bei Rietdurchmessern von 20 und 25 Millimeter an.

Anzahl der Nieten n.	Anordnung in Reihen.	Wirkungsgrad $\alpha = \frac{n\frac{\pi}{2}}{n\frac{\pi}{2}+1}$.	Breite		
			$\beta d = \left(n\frac{\pi}{2}+1\right)d.$	für d = 20 Mm.	für d=25 Mm.
1	1	0,61	2,57 d	51,4 Mm.	64 Mm.
2	1, 1	0,76	4,14 d	83 „	104 „
3	1, 1, 1	0,82	5,71 d	114 „	143 „
4	1, 2, 1	0,86	7,28 d	146 „	182 „
6	1, 2, 2, 1	0,90	10,42 d	208 „	261 „
9	1, 2, 3, 2, 1	0,93	15,3 d	303 „	378 „
12	1, 2, 3, 3, 2, 1	0,95	19,84 d	397 „	496 „
16	1, 2, 3, 4, 3, 2, 1	0,96	26,12 d	524 „	653 „

Die drei ersten Werthe von α stimmen mit den von Fairbairn gefundenen Resultaten nahe überein. Derselbe fand nämlich

bei nur einer Reihe von Nieten α = 55,67 Proc.,
bei zwei Nietreihen α = 73,86 „ ,
bei drei Nietreihen α = 81,47 „ .

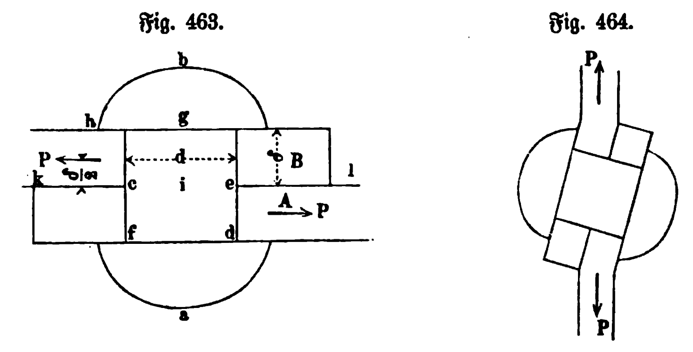
Wenn die einzelnen Niete im Allgemeinen auch nicht so gleichmäßig beansprucht werden, wie hier angenommen, so können die in obiger Tabelle enthaltenen Zahlen doch als hinreichend scharfe Anhaltspunkte angesehen werden.

Die Verschwächung der gestoßenen Platte durch die Nietlöcher hat man nur zu berücksichtigen, wenn der Stoß auf Zug in Anspruch genommen wird. Bei gedrückten Stößen, wie sie bei den unteren Gurtungen der Brückenträger vorzukommen pflegen, findet durch die Nietlöcher eine Verschwächung nicht statt, indem die Nietbolzen, sofern sie sorgfältig eingepaßt

sind, den Druck ebenso gut übertragen, als das aus dem Nietloche herausgefallene Material es zu thun vermöchte. Man darf daher bei gedrückten Stößen den Querschnitt des vollen Bleches als widerstehend in Rechnung stellen. Der Querschnitt der Nietbolzen bestimmt sich in derselben Art, wie bei gezogenen Stößen.

§. 262. **Nietung der Dampfkessel.** Die Vernietung durch Ueberblattung der Bleche (einschnittige Vernietung), wie sie bei Dampfkesseln ganz allgemein vorkommt, zeigt Fig. 463. Bezeichnet dabei b die Breite des Bleches im Querschnitte ab nach Abzug des Nietloches, so ist die in diesem Querschnitte durch P erzeugte absolute Spannung $k = \frac{P}{F} = \frac{P}{b\delta}$. Durch die Kraft P in der Platte B wird das Blech A außer auf Abreißen noch auf Abbrechen im Querschnitte ab beansprucht. Es tritt in Folge dessen in

Fig. 463. Fig. 464.



A noch eine relative Spannung k_1 (Zugspannung in der Berührungsfläche von A und B) auf, welche sich bestimmt durch die Formel:

$$M = P\,\frac{\delta}{2} = k_1\,\frac{W}{e} = k_1\,\frac{b\,\delta^2}{6} \text{ zu:}$$

$$k_1 = 3\,\frac{P}{b\,\delta} = 3\,k.$$

Die Gesammtspannung in der die Berührungsfläche bildenden Faserschicht ce beträgt daher

$$k_2 = k + k_1 = 4\,k;$$

und in der Schicht fd, wo k_1 rückwirkende Spannung bedeutet:

$$k_2 = k - k_1 = -\,2\,k.$$

Man darf bei dieser Verbindungsart das Blech daher nur mit $^1/_4\,k$ belasten, wenn k die höchstens zulässige specifische absolute Spannung bedeutet. Die relative Inanspruchnahme des Bleches vermindert sich, sobald bei ein-

tretender Biegung des Bleches der Hebelarm $\frac{\delta}{2}$ der Kraft P kleiner wird, und man pflegt wohl aus diesem Grunde den beiden Blechen von vornherein eine dauernde Biegung zu geben, wie Fig. 464 zeigt. Es wirkt dann jedoch das Kräftepaar auf Abbiegen des Nietkopfes, welcher dadurch der Gefahr des Abspringens ausgesetzt werden kann.

Die Beurtheilung der Vernietung bleibt übrigens dieselbe, ob die beiden Blechränder direct über einander gelegt sind, oder ob die Verbindung durch nur auf einer Seite aufgelegte Deckplatten bewirkt wird. Bei Anwendung einer doppelten Nietung (zwei Nietreihen) fällt die relative Beanspruchung des Bleches, wie der Nieten geringer aus, weßhalb sich die Anwendung derselben bei Dampfkesseln besonders empfiehlt, und bei Locomotivkesseln auch allgemein stattfindet.

Es ist übrigens zu bemerken, daß bei Dampfkesselnietungen die Rücksicht auf möglichste Dichtigkeit der Fuge eine enge Stellung der Nieten bedingt, weßhalb man die Entfernung der Nietbolzen von Mitte zu Mitte nicht größer als $2\frac{1}{2}\, d = 5\,\delta$ zu machen pflegt. Bei Brückenträgern u. s. w. wird diese Entfernung meist größer angenommen.

Vernietungen auf Reibung construirt. In den vorhergehenden Untersuchungen wurde die Reibung der Platten vernachlässigt. Will man die Reibung nicht außer Acht lassen, so kann die Festigkeit einer Nietverbindung in folgender Art berechnet werden. Es seien die übereinander geblatteten Bleche A und B, Fig. 465, durch n Nieten neben einander verbunden, es bezeichne b die ganze Breite eines Bleches (ohne Abzug der Nietlöcher), ferner sei K_I der Festigkeitsmodul für Zug, K_{III} derselbe für Abscheeren, und μ der Reibungscoefficient $= 0{,}2$ für Eisen auf Eisen. Wenn der Nietbolzen eine Längenspannung durch die Erkaltung annimmt, so kann dieselbe höchstens den Werth K_I erreichen, und es §. 263.

Fig. 465.

hätte die Reibung, welche durch diese Spannung hervorgerufen wird, alsdann ihren größten Werth $\mu \frac{d^2 \pi}{4} K_I$. In dieser Größe tritt die Reibung natürlich zwischen je zwei Flächen auf, welche bei erfolgender Trennung der Verbindung sich auf einander verschieben. Es kann nun eine Trennung der

Verbindung erfolgen, entweder dadurch, daß die Nietbolzen jeder in einer Querschnittsfläche ce abgeschoben werden, oder dadurch, daß ein Blech A oder B an der schwächsten Stelle d. i. im Querschnitt ab abreißt.

Dem Abscheeren der Nietbolzen widerstehen dieselben mit ihrem gesammten Querschnitte $n\frac{d^2\pi}{4}$, also mit einer Kraft $n\frac{d^2\pi}{4}K_{III}$. Außerdem widersetzt sich dem Abscheeren der Nieten auch die Reibung, welche an der Fläche kl auftritt, und welche sich nach Vorstehendem berechnet zu $n\mu\frac{d^2\pi}{4}K_I$, so daß die ganze Festigkeit der Nieten sich bestimmt zu:

$$P_1 = n\frac{d^2\pi}{4}(\mu K_I + K_{III}).$$

Wenn andererseits das Blech B in dem Querschnitte gi abreißt, so ist zunächst die absolute Festigkeit dieses Bleches an dieser Stelle zu überwinden mit $(b - nd)\,\delta\,.\,K_I$. Außerdem setzen sich dem Abreißen des Bleches B aber noch die beiden Reibungen entgegen, welche zwischen A und B in ki und zwischen B und dem Nietkopfe längs hg auftreten. Jede dieser Reibungen ist nur durch die halbe Pressung aller Nieten erzeugt, weil bei dem Abreißen der Platte B nur das Stück ik sich verschiebt, die andere Hälfte il aber seine Stelle beibehält. Daher bestimmt sich die Festigkeit des Bleches gegen Abreißen zu:

$$P_2 = (b - nd)\,\delta K_I + 2\mu\frac{n}{2}\frac{d^2\pi}{4}K_I.$$

Setzt man $P_1 = P_2 = P$, so folgt

$$(b - nd)\,\delta K_I = n\frac{d^2\pi}{4}K_{III},$$

woraus die Anzahl der Niete folgt:

$$n = \frac{b\,\delta K_I}{d\,\delta K_I + \frac{d^2\pi}{4}K_{III}}.$$

Die Festigkeit des vernieteten Bleches beträgt:

$$P_2 = (b - nd)\,\delta\,K_I + \mu\,.\,n\frac{d^2\pi}{4}K_I,$$

während die Festigkeit des ungeschwächten vollen Bleches zu

$P_3 = b\,\delta\,K_I$ sich ergiebt.

Setzt man $P_2 = P_3$, so folgt

$$d\,\delta K_I = \mu\frac{d^2\pi}{4}K_I;\text{ oder}$$

$$\delta = \mu\frac{\pi}{4}d;\quad d = \frac{4}{\mu\pi}\delta = 1{,}28\frac{\delta}{\mu}.$$

Nimmt man $\mu = 0{,}2$ an, so folgt

$$d = \frac{1{,}28}{0{,}2}\,\delta = 6{,}4\,\delta.$$

Könnte man dem Nietbolzen also einen Durchmesser gleich 6,4 mal der Blechdicke geben, so würde wegen $P_2 = P_3$ das Blech durch die Nietlöcher eine Verminderung seiner Festigkeit gar nicht erleiden, es würde vielmehr das gestoßene Blech ebenso viel zu tragen vermögen, wie das volle. Die Annahme eines so bedeutenden Nietdurchmessers verbietet sich nach dem Früheren, abgesehen von der praktischen Ausführbarkeit, schon dadurch, daß die rückwirkende Pressung in dem Nietloche bestimmte Grenzen nicht überschreiten darf, und es war mit Rücksicht hierauf $d = 2\,\delta$ als brauchbar gefunden.

Bei Annahme dieses Verhältnisses $d = 2\,\delta$ ist die durch die Nietbolzen hervorgerufene Reibung $n\mu\,\frac{d^2\pi}{4}\,K_1$ nicht so groß, wie die durch die Nietlöcher in der Platte B erzeugte Verminderung der Festigkeit $n\,d\,\frac{d}{2}\,K_1$. Man kann aber die Frage aufwerfen: Wie hoch darf die absolute Spannung k in der Platte steigen, damit die erzeugte Reibung doch noch so viel beträgt, wie der Verlust durch die Nietlöcher. Für diesen Zustand hat man

$$n\mu\,\frac{d^2\pi}{4}\,K_1 = n\,d\,\frac{d}{2}\,k;\ \text{oder}\ k = \mu\,\frac{\pi}{2}\,K_1 = 1{,}57\,\mu\,K_1.$$

Setzt man K_1 nach §. 218 für Stabeisen gleich 40 Kilogramm, so wird

$$k = 1{,}57\,.\,0{,}2\,.\,40 = 12{,}56\ \text{Kilogramm}.$$

So lange also die Spannung in den Platten diesen Werth nicht überschreitet, ist durch die Lochung der Platten eine Verschwächung derselben nicht erzeugt, indem durch die Reibung ein Gewinn an Tragfähigkeit herbeigeführt wird, welcher erst dann von der Verschwächung durch das Lochen übertroffen wird, wenn k jenen berechneten Betrag von 12,56 Kilogramm übersteigt. In den Fällen der Praxis wird k meist nicht über 8 Kilogramm betragen, und man erkennt, daß alsdann die Spannung an der schwächsten Stelle nicht größer ist, als in der vollen Platte. Nur muß man bemerken, daß bei $k = 8$ die Platte eine $\frac{40}{8} = 5$ fache Bruchsicherheit gewährt, während die der Reibung entsprechende Sicherheit nur eine $\frac{12{,}56}{8} = 1{,}57$ fache ist. Bei obigen Rechnungen ist immer vorausgesetzt, daß der Nietbolzen bei seiner Erkaltung eine Zugspannung gleich der absoluten Festigkeit K_1 angenommen habe. Ob ein solcher Zustand, selbst wenn er anfänglich hervorgebracht sein sollte, auf die Dauer sich erhalten kann, muß sehr bezweifelt werden, da mit der Zeit, namentlich wenn die Construction Erschütterungen

Ist nun $F_1 + F_2 + \cdots$ der Theil des Querschnittes auf der einen Seite der neutralen Axe, so giebt auch Q die ganze Spannkraft auf dieser Seite der neutralen Axe an. Die Spannung auf der anderen Seite ist der Theorie des Schwerpunktes zufolge (vergl. §. 220) der ersteren der Größe nach zwar gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt.

Uebrigens hat man nach §. 224 $S = \frac{Pxe}{W}$, also $\frac{S}{e} = \frac{Px}{W}$, daher folgt auch $Q = \frac{Px}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots)$.

In einem Querschnitte, welcher um $AB = x_1$ vom ersteren absteht, ist die Spannung

$$Q_1 = \frac{P(x - x_1)}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots);$$

daher ergiebt sich die ganze Kraft, mit welcher das Stück ABE über AB fortzugleiten sucht aus der Gleichung:

$$Q - Q_1 = \frac{Px_1}{W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots).$$

Ist nun b_0 die Breite des Querschnittes in der neutralen Axe, so folgt daher die Schubkraft längs einer Flächeneinheit in dieser Axe:

$$X_0 = \frac{Q - Q_1}{b_0 x_1} = \frac{P}{b_0 W}(F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots) = \frac{P \Sigma (Fz)}{b_0 W}.$$

Wendet man die Bezeichnungsweise der Differenzialrechnung an, so schreibt sich dieser Ausdruck:

$$X_0 = \frac{P}{b_0 W}\int_0^e z \partial F.$$

Damit sich daher der Balken längs der neutralen Axe durch Abschieben nicht trenne, ist X_0 = dem Festigkeitsmodul K_{III} zu setzen, und damit er dieselbe Sicherheit gegen dieses Abschieben besitze wie gegen das Zerbrechen, ist nöthig, daß die Schubspannung X_0 höchstens den Werth $\frac{m}{m+1}T$ erreiche, wenn T den Tragmodul des Materials für Zug bedeutet, da nach §. 260 für die höchstens zulässige Schubspannung t und die höchstens zulässige Zugspannung k die Beziehung gilt:

$$t = \frac{m}{m+1}k.$$ Man hat daher:

$$\frac{P}{b_0 W}\Sigma(Fz) = \frac{m}{m+1}T \text{ oder } P = \frac{b_0 WT}{\Sigma(Fz)}\frac{m}{m+1}, \text{ sowie}$$

$$b_0 = \frac{m+1}{m}\frac{P}{WT}\Sigma(Fz).$$

Uebrigens ist $\Sigma\,(Fz)$ auch $= F_1 s_1 = F_2 s_2$, wenn F_1 und F_2 die Inhalte der zu beiden Seiten der neutralen Axe liegenden Theile des ganzen Querschnittes $F = F_1 + F_2$, und s_1, s_2 die Abstände der Schwerpunkte dieser Theile von der neutralen Axe bezeichnen.

Für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte $F = bh$ hat man $\Sigma\,(Fz) = F_1 s_1 = \frac{bh}{2}\,\frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$, $W = \frac{bh^3}{12}$ und $b_0 = b$, daher

$P = {}^2/_3\, bh X_0$ und $b_0 = b = {}^3/_2\, \frac{P}{X_0 h}$.

Für einen Träger mit kreisförmigem Querschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$ ist, da der Schwerpunkt des Halbkreises um $\frac{2}{3\pi}\,d$ vom Mittelpunkte absteht,

$$\Sigma\,(Fz) = F_1 s_1 = \frac{\pi d^2}{8}\,\frac{2}{3\pi}\,d = \frac{d^3}{12},$$ ferner nach §. 232

$$W = \frac{\pi d^4}{64}$$ und $b_0 = d$, daher

$$P = \frac{\pi d^5}{64\,.\,{}^1/_{12}\,d^3}\,X_0 = \frac{3\pi}{16}\,d^2 X_0$$ und

$$b_0 = d = 4\sqrt{\frac{P}{3\pi X_0}} = 1{,}303\sqrt{\frac{P}{X_0}}.$$

Ebenso ist für einen Träger mit elliptischem Querschnitte $F = \pi ab$, da hier $W = \frac{\pi a^3 b}{4}$, $F_1 s_1 = \frac{\pi ab}{2}\,\frac{2}{\pi}\,{}^2/_3\,a = {}^2/_3\,a^2 b$ und $b_0 = 2b$ ist, $P = {}^3/_4\,\pi ab X_0$, oder $b = \frac{4}{3\pi}\,\frac{P}{aX_0} = 0{,}4244\,\frac{P}{aX_0}$.

Endlich hat man für einen hohlen parallelepipedischen Träger mit dem Querschnitte $F = bh - b_1 h_1$ (Fig. 391, §. 228):

$F_1 s_1 = \frac{bh^2 - b_1 h_1^2}{8}$, $W = \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{12}$ und $b_0 = b - b_1$, daher

$$P = {}^2/_3\,\frac{(b - b_1)\,(bh^3 - b_1 h_1^3)\,X_0}{bh^2 - b_1 h_1^2}.$$

Die oben gefundene Formel $X = \frac{P}{b_0 W}\,\Sigma\,(Fz)$ gilt auch für die Schubkraft in einem beliebigen Abstande $OB = h_1$ von der neutralen Axe des Körpers MN, Fig. 468 a. f. S., vorausgesetzt, daß man unter $\Sigma\,(Fz)$ nur die Summe der Producte derjenigen Flächenelemente mit ihren Abständen von der neutralen Axe versteht, welche auf der einen Seite des Elementes $ABCD$ liegen, und daß man unter b_0 die Breite des Querschnittes in AB versteht. Es ist dabei übrigens gleichgültig, auf welcher Seite von $ABCD$ man die Productensumme $\Sigma\,(Fz)$ bildet, da die Summe $F_1 z_1 + F_2 z_2 + \cdots$

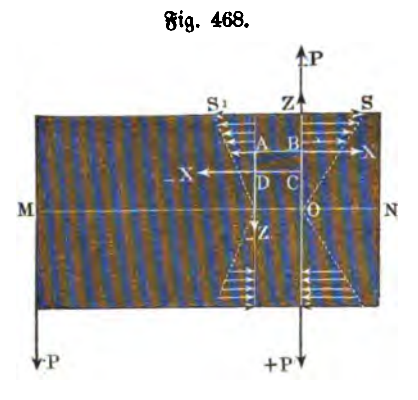
auf der einen Seite gleich ist der Summe $F_n z_n + F_{n+1} z_{n+1} + \cdots$ auf der anderen Seite von $ABCD$, weil die Producte derjenigen Flächentheile zu beiden Seiten der neutralen Axe, welche bis zu $\pm h_1$ reichen, sich gegenseitig aufheben.

Der allgemeine Ausdruck für die Schubspannung läßt sich daher schreiben:

$$X = \frac{P}{b\,W}\int_{h_1}^{e} z\,\partial F.$$

Man erkennt hieraus, daß für $h_1 = e$, also für die äußerste Faser die Schubspannung Null wird. Wenn ferner b constant ist, so ist die größte Schubspannung in der neutralen Axe vorhanden. Letzteres ist auch dann der Fall, wenn b_0 in der neutralen Axe einen kleineren Werth hat, als an einer anderen Stelle des Querschnittes. In allen diesen Fällen nimmt die Schubspannung von dem Werthe X_0 in der neutralen Axe allmälig zu 0 in der äußersten Faserschicht ab. Für einen Balken mit rechtwinkeligem Querschnitte von der Höhe h und Breite b ist

Fig. 468.



$$X = \frac{P}{b \,.\, {}^1/_{12}\, b h^3}\int_{z}^{e} z \,.\, b\,\partial z = \frac{6\,P}{b\,h^3}\,(e^2 - z^2).$$

Setzt man beispielsweise $z = \frac{e}{2} = \frac{h}{4}$, so findet man für die Mitte zwischen der neutralen und der äußersten Faser

$$X = \frac{6\,P}{b\,h^3}\,(e^2 - {}^1/_4\, e^2) = \frac{6\,P}{b\,h^3}\,{}^3/_{16}\, h^2 = {}^9/_8\,\frac{P}{b\,h},$$

während sie in der neutralen Axe die Größe

$$X_0 = \frac{6\,P}{b\,h^3}\,\frac{h^2}{4} = {}^3/_2\,\frac{P}{b\,h} \text{ hat.}$$

Denkt man sich, Fig 469, für den Querschnitt $ABDC$, den verschiedenen Größen z entsprechend, die zugehörigen Werthe von X als Ordinaten angetragen, so erhält man eine Parabel AGB mit dem Scheitel in G, und der schraffirte Theil $AGBF$ veranschaulicht die Vertheilung der horizontalen Schubspannungen in dem Querschnitte.

Aus der allgemeinen Gleichung

$$X = \frac{P}{b\,W}\int_z^e z\,\partial F$$

erkennt man, daß die Schubspannungen in demselben Querschnitte im umgekehrten Verhältnisse zu der Breite des Querschnittes b an der betrachteten Stelle stehen. Aus diesem Grunde ist es möglich, daß die Schubspannung in der neutralen Axe nicht den größten Werth hat, wenn nämlich die Breite daselbst größer ist, als an anderen Stellen. Es ist z. B. für einen Balken von quadratischem Querschnitte, dessen Diagonalebene vertical steht, wenn a die Querschnittseite bedeutet, die Größe $e = a\sqrt{1/2}$ und die Breite b im Abstande z von der neutralen Axe

Fig. 469.

$b = 2\,(e - z)$; folglich $\partial F = b\,\partial z = 2\,(e - z)\,\partial z$, daher

$$X = \frac{P}{2(e-z)\,{}^1\!/_{12}\,a^4}\int_z^e 2z(e-z)\,\partial z = \frac{12\,P}{a^4(e-z)}\left(\frac{e^3}{2} - \frac{e^3}{3} - \frac{e z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right)$$

$$= \frac{2\,P}{a^4}\,\frac{e^3 - 3\,e z^2 + 2\,z^3}{e - z} = \frac{2\,P}{a^4}\,(e^2 + e z - 2\,z^2).$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\frac{\partial\,(e^2 + e z - 2\,z^2)}{\partial z} = 0;\ \text{d. i. für } e = 4\,z, \text{ oder für } z = \frac{e}{4};$$

und zwar ist hierfür

$$X = \frac{2\,P}{a^4}\left(e^2 + e\,\frac{e}{4} - 2\,\frac{e^2}{16}\right) = \frac{2\,P}{a^4}\ {}^9\!/_8\,e^2 = {}^9\!/_8\,\frac{P}{a^2},$$

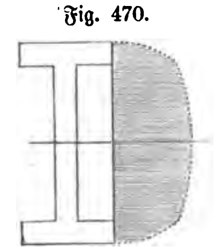
während für die neutrale Axe, oder für $z = 0$

$$X_0 = \frac{2\,P}{a^4}\,e^2 = \frac{P}{a^2}\ \text{ist.}$$

Hat der Querschnitt andererseits in der neutralen Axe eine sehr geringe Breite, so ist die Schubspannung daselbst beträchtlich größer, als bei dem rechtwinkeligen Querschnitte, und es bedarf alsdann immer einer speciellen Untersuchung, um sich zu vergewissern, daß die Schubspannung in der neutralen Axe den zulässigen Werth $\frac{m}{m+1}\,T_1$ resp. $\frac{m}{m+1}\,k_1$ nicht überschreitet. Namentlich ist dies der Fall bei den sogenannten Blechträgern, deren Querschnitt doppelt T förmig ist, und bei welchen die Mittelrippe meistens eine nur geringe Stärke hat. Da hier der Ausdruck $\Sigma\,(F z)$

oder $\int z \partial F$ wesentlich von den horizontalen Querrippen abhängt und von der Mittelrippe nur wenig beeinflußt wird, so ist die Schubspannung von der neutralen Axe bis zur innersten Faser der Querrippe nahezu von constanter Größe, und nimmt von da bis zur äußersten Faser der Gurtung schnell bis zu Null ab, wie die graphische Darstellung in Fig. 470 veranschaulicht. Die Stärke der mittleren Blechwand ist bei diesen Balken daher hauptsächlich mit Rücksicht auf die Schubspannung in der neutralen Axe zu bestimmen.

Fig. 470.



§. 265. **Die Schubkraft in der Querschnittsfläche.** So wie sich die Druck- oder Zugkräfte der Endflächen eines Balkenelementes $ABCD$, Fig. 468, das Gleichgewicht halten, ebenso sind die zwei Kräftepaare bildenden Schubkräfte desselben mit einander im Gleichgewichte. Ist nun ξ die Länge AB, sowie ζ die Höhe BC des Elementes, so hat man die Schubkräfte längs AB und CD, ξX und $-\xi X$, sowie das Moment des von diesen Kräften gebildeten Paares: $\xi X . \zeta = \xi \zeta X$; und ebenso die Schubkräfte längs BC und DA, ζZ und $-\zeta Z$, sowie das Moment des von denselben Kräften gebildeten Paares $= \zeta Z . \xi = \xi \zeta Z$; es ist folglich zur Erhaltung des Gleichgewichtes nöthig, daß $\xi \zeta X = \xi \zeta Z$, d. i. daß $X = Z$ sei.

Es ist also auch die Formel $X = \frac{P \Sigma (Fz)}{b W}$ auf die Bestimmung der Schubspannung Z längs der ganzen Querschnittsfläche anwendbar. Sie ist z. B. für einen Balken mit rectangulärem Querschnitte, bei einem Querschnittselemente in der neutralen Axe, $= {}^3/_2 \frac{P}{bh}$, und in einem solchen, welches $\pm {}^1/_4 h$ von der neutralen Axe absteht, $= {}^9/_8 \frac{P}{bh}$ u. s. w.

Die Summe der Schubkräfte längs des ganzen Querschnittes muß natürlich gleich sein der Kraft P, oder wenn mehrere Kräfte rechtwinkelig gegen die Balkenaxe wirken, gleich der Summe $\Sigma (P)$ dieser Kräfte. Dies läßt sich auch wie folgt nachweisen. Theilt man den größten Abstand e der Querschnittselemente von der neutralen Axe in n gleiche Theile, so kann man sich den Querschnitt auf der entsprechenden Seite der neutralen Axe aus den Streifen $b_1 \frac{h}{n}$, $b_2 \frac{h}{n}$, $b_3 \frac{h}{n}$ u. s. w. bestehend denken, welche in Hinsicht auf die neutrale Axe die Momente

$$b_1 \left(\frac{h}{n}\right)^2, \; 2\, b_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2, \; 3\, b_3 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

haben, deren Summe $= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (1\, b_1 + 2\, b_2 + 3\, b_3 + 4\, b_4 + \cdots)$ ist.

In Hinsicht auf die Gerade, welche um $\frac{h}{n}$ von der neutralen Axe absteht, ist diese Summe der Momente von den Flächenelementen außerhalb dieser Geraden

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (2\, b_2 + 3\, b_3 + 4\, b_4 + \cdots),$$

ferner in Hinsicht auf die Gerade im Abstande $2\, \frac{h}{n}$ ist sie

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (3\, b_3 + 4\, b_4 + \cdots) \text{ u. s. w.,}$$

und daher ist die Summe aller dieser Summen, bis zum Abstande e gegangen:

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 [b_1 + (2 + 2)\, b_2 + (3 + 3 + 3)\, b_3 + \cdots]$$

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^2 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n).$$

Es folgt nun die Summe aller Schubkräfte längs des Querschnittes auf einer Seite der neutralen Axe:

$$R_1 = X_1 b_1 \left(\frac{h}{n}\right) + X_2 b_2 \left(\frac{h}{n}\right) + X_3 b_3 \left(\frac{h}{n}\right) + \cdots$$

$$= \frac{P}{W} \frac{h}{n} \text{ mal die zuletzt gefundene Summe}$$

$$= \frac{P}{W} \left(\frac{h}{n}\right)^3 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n).$$

Aber es ist auch das Maß des Biegungsmomentes für diese Querschnittshälfte:

$$W_1 = \Sigma (F z^2) = \frac{h}{n} \left[b_1 \left(\frac{h}{n}\right)^2 + b_2 \left(\frac{2\,h}{n}\right)^2 + b_3 \left(\frac{3\,h}{n}\right)^2 + \cdots \right]$$

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^3 (1^2 . b_1 + 2^2 . b_2 + 3^2 . b_3 + \cdots + n^2 . b_n),$$

daher folgt die gesuchte Schubkraft längs dieser Fläche:

$$R_1 = \frac{P\, W_1}{W}.$$

Ebenso findet man auch für die Querschnittshälfte auf der anderen Seite von der neutralen Axe die Schubkraft $R_2 = \frac{P\, W_2}{W}$, und es folgt so schließlich die Schubkraft des ganzen Querschnittes $R = \frac{P(W_1 + W_2)}{W} = P$, weil das Biegungsmoment W des ganzen Querschnittes gleich ist der

Summe $W_1 + W_2$ von den Biegungsmomenten W_1 und W_2 der beiden Theile desselben.

Mit Hülfe der Differenzialrechnung bestimmt sich die verticale Schubkraft längs des ganzen Querschnitts folgendermaßen. Es ist die Schubkraft des Elementes ∂F im Abstande z von der neutralen Axe $R = Z \partial F = X \partial F$; also die Schubkraft aller Elemente von demjenigen im Abstande z bis zum äußersten im Abstande e:

$$R = \int_z^e X . \partial F = \int_z^e X . b \partial z,$$

oder wenn man für X seinen Werth

$$X = \frac{P}{b\,W} \int_z^e z \partial F \text{ einsetzt, folgt}$$

$$R = \int_z^e \frac{P}{b\,W} b \partial z \int_z^e z \partial F = \frac{P}{W} \int_z^e \partial z \int_z^e z \partial F.$$

Die erste Integration ausgeführt, giebt

$$R = \frac{P}{W} \left(e \int_z^e z \partial F - \int_z^e z^2 \partial F \right).$$

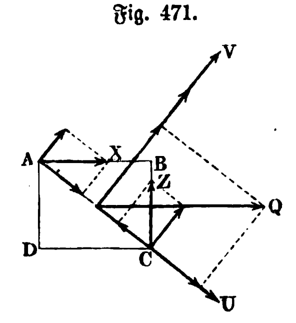
Wenn man die Integration nun für den ganzen Querschnitt von e bis e_1 erstreckt, unter e und e_1 die Abstände der äußersten Fasern auf beiden Seiten der neutralen Axe verstanden, so ist, weil die neutrale Axe durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht,

$$\int_{e_1}^e z \partial F = 0 \text{ und} \int_{e_1}^e z^2 \partial F = W, \text{ folglich}$$

$$R = -\frac{P}{W} \cdot W = -P.$$

§. 266. Maximal- und Minimalspannungen. Aus den verschiedenen Spannungen in einem Querschnitte des gebogenen Körpers lassen sich nun auch durch gewöhnliche Kraftzerlegung und Zusammensetzung die Spannungen in jedem andern Schnitte desselben bestimmen. Um die Spannungen eines Flächenelementes $A\,C$, Fig. 471, zu finden, dessen Ebene um den veränderlichen Winkel $B\,A\,C = \psi$ von der Längenaxe des Körpers abweicht, zerlegen wir die Spannungen in den Projectionen $A\,B$ und $B\,C$ dieses Flächenelementes in je zwei Seitenkräfte, wovon die eine in der Ebene von $A\,C$ und die andere rechtwinkelig

Fig. 471.



gegen $A\,C$ wirkt, und vereinigen dann die Seitenkräfte in $A\,C$ zu einer einzigen Schubkraft, sowie die Seitenkräfte, welche rechtwinkelig gegen $A\,C$ gerichtet sind, zu einer einzigen Zug- oder Druckkraft. Bei der Breite Eins der Flächenelemente AB, $B\,C$ und $A\,C$ ist die Schubkraft längs $A\,B$ $= \overline{AB} \,.\, X$ zu setzen, und in die Seitenkräfte $\overline{AB} \,.\, X \cos. \psi$ und $\overline{AB} \,.\, X \sin. \psi$ zu zerlegen; ebenso die Schubkraft längs $B\,C$

$$= \overline{BC} \,.\, Z = \overline{BC} \,.\, X$$

zu setzen, und in die Seitenkräfte

$$- \overline{BC} \,.\, X \sin. \psi \text{ und } \overline{BC} \,.\, X \cos. \psi \text{ zu zerlegen.}$$

Dagegen giebt die Zugkraft $\overline{BC} \,.\, Q = \overline{BC} \cdot \frac{S z}{e}$, welche rechtwinkelig gegen $\overline{BC}$ gerichtet ist, die Seitenkräfte $\overline{BC} \,.\, Q \cos. \psi$ und $\overline{BC} \,.\, Q \sin. \psi$.

Bezeichnet nun U die gesammte Spannung längs $A\,C$ pro Flächeneinheit, und ebenso V die gesammte Spannung rechtwinkelig gegen $A\,C$ ebenfalls pro Flächeneinheit, so hat man

$$\overline{AC} \,.\, U = \overline{AB} \,.\, X \cos. \psi - \overline{BC} \,.\, X \sin. \psi + \overline{BC} \,.\, Q \cos. \psi \text{ und}$$
$$\overline{AC} \,.\, V = \overline{AB} \,.\, X \sin. \psi + \overline{BC} \,.\, X \cos. \psi + \overline{BC} \,.\, Q \sin. \psi.$$

Nun ist aber $\frac{AB}{A\,C} = \cos. \psi$ und $\frac{B\,C}{A\,C} = \sin. \psi$, daher folgt auch

$$U = X (\cos. \psi)^2 - X (\sin. \psi)^2 + Q \sin. \psi \cos. \psi \text{ und}$$
$$V = 2\, X \sin. \psi \cos. \psi + Q (\sin. \psi)^2, \text{ oder, da}$$
$$(\cos. \psi)^2 - (\sin. \psi)^2 = \cos. 2\, \psi \text{ und } 2 \sin. \psi \cos. \psi = \sin. 2\, \psi \text{ ist,}$$
$$U = X \cos. 2\, \psi + \tfrac{1}{2}\, Q \sin. 2\, \psi = X \cos. 2\, \psi + \frac{S z}{2 e} \sin. 2\, \psi,$$

und

$$V = X \sin. 2\, \psi + Q (\sin. \psi)^2 = X \sin. 2\, \psi + \frac{S z}{2 e} (1 - \cos. 2\, \psi).$$

Natürlich geben die Spannungen der Flächen $A\,D$ und $C\,D$, welche in Vereinigung mit den Flächen $A\,B$ und $B\,C$ das Körperelement $A\,B\,C\,D$ völlig begrenzen, gleiche und entgegengesetzte Schub- und Zugkräfte. Dagegen ist für ein solches Körperelement auf der Druckseite von der neutralen Axe Q negativ, und daher

$$U = X \cos. 2\, \psi - \tfrac{1}{2}\, Q \sin. 2\, \psi = X \cos. 2\, \psi - \frac{S z}{2 e} \sin. 2\, \psi, \text{ und}$$

$$V = X \sin. 2\, \psi - \tfrac{1}{2}\, Q (1 - \cos. 2\, \psi) = X \sin. 2\, \psi - \frac{S z}{2 e} (1 - \cos. 2\, \psi).$$

Um nun diejenigen Werthe des Neigungswinkels ψ zu finden, bei welchem sowohl die Tangentialspannung U als auch die Normalspannung V zum Maximum oder Minimum wird, setzen wir statt $2\, \psi$, $2\, \psi + \mu$, wo μ einen

sehr kleinen Zuwachs von 2ψ bezeichnet, und machen dann die Bedingung, daß dadurch der entsprechende Werth von U oder V nicht geändert werde. Für $U = X\cos. 2\psi + \frac{1}{2} Q \sin. 2\psi$ erhält man so einen zweiten Werth

$$U_1 = X\cos.(2\psi + \mu) + \tfrac{1}{2} Q\sin.(2\psi + \mu)$$

$$= X(\cos. 2\psi\cos.\mu - \sin. 2\psi\sin.\mu) + \tfrac{1}{2} Q(\sin. 2\psi\cos.\mu + \cos. 2\psi\sin.\mu),$$

oder, da $\cos.\mu = 1$ gesetzt werden kann:

$$U_1 = X\cos. 2\psi + \tfrac{1}{2} Q\sin. 2\psi - (X\sin. 2\psi - \tfrac{1}{2} Q\cos. 2\psi)\sin.\mu,$$

wenn man nun $U_1 = U$ setzt, so muß $X\sin. 2\psi - \frac{1}{2} Q\cos. 2\psi = 0$ und daher

$$\sin. 2\psi = \frac{Q}{2X}\cos. 2\psi, \text{ d. i.:}$$

$$tang. 2\psi = \frac{Q}{2X} = \frac{Sz}{2Xe} \text{ sein.}$$

Auch folgt hiernach

$$\sin. 2\psi = \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} = \frac{Sz}{\sqrt{(Sz)^2 + (2Xe)^2}},$$

sowie

$$\cos. 2\psi = \frac{2X}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} = \frac{2Xe}{\sqrt{(Sz)^2 + (2Xe)^2}},$$

und endlich der gesuchte Maximalwerth der Schubkraft U:

$$U_m = \frac{2X^2 + \frac{1}{2}Q^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} = \sqrt{(\tfrac{1}{2}Q)^2 + X^2} = \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2}.$$

In der neutralen Axe ist $Q = 0$, daher $U_m = X_0$ und $tang. 2\psi = 0$, d. i. $2\psi = 0$ und 180^0, oder $\psi = 0$ und 90^0; für die entfernteste Faser ist dagegen $X = 0$ und $z = e$, daher $U_m = \frac{Q}{2} = \frac{S}{2}$ und $tang. 2\psi = \infty$, also $2\psi = 90^0$ und $\psi = 45$ Grad.

Von der neutralen Axe allmälig bis zur äußersten Faser gegangen, ändern sich folglich die Neigungswinkel für die Maximalspannungen von 0 und 90 Grad in solche von 45 Grad um, und geht die Maximalspannung allmälig aus X_0 in $\frac{S}{2}$ über.

Damit das Material in der neutralen Axe durch die Schubkraft nicht ungünstiger in Anspruch genommen werde, als in den äußersten Fasern durch die Zugspannung $S = \frac{Pxe}{W}$, darf X_0 höchstens den Werth $\frac{m}{m+1}T$ erreichen, wenn in der äußersten Faser eine Spannung S gleich T zugelassen wird. Man hat daher

$$X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{b_0 W} \overline{\gtrless} \frac{Pxe}{W}\cdot\frac{m}{m+1}; \text{ d. i. } \frac{\Sigma(Fz)}{b_0} \overline{\gtrless} \frac{m}{m+1} xe.$$

Setzt man ebenso in $V = X \sin. 2\psi + \frac{Q}{2}(1 - \cos. 2\psi)$, $\psi + \mu$ statt ψ ein und nimmt auch wieder $\cos. \mu = 1$ an, so erhält man:

$$V_1 = X(\sin. 2\psi \cos. \mu + \cos. 2\psi \sin. \mu) + \frac{Q}{2}(1 - \cos. 2\psi \cos. \mu$$
$$+ \sin. 2\psi \sin. \mu) = X \sin. 2\psi + \frac{Q}{2}(1 - \cos. 2\psi)$$
$$+ \left(X \cos. 2\psi + \frac{Q}{2} \sin. 2\psi\right) \sin. \mu,$$

und damit nun ψ auf ein Maximum oder Minimum von V führe, muß $V_1 = V$, also $X \cos. 2\psi + \frac{Q}{2} \sin. 2\psi = 0$, d. i.:

$$tang. 2\psi = -\frac{2X}{Q} = -\frac{2Xe}{Sz}, \text{ sowie}$$

$$\sin. 2\psi = \mp \frac{2X}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} \text{ und } \cos. 2\psi = \pm \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} \text{ sein.}$$

Das entsprechende Minimum von V ist

$$V_n = -\frac{2X^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} + \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}}\right) = \frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + X^2}$$
$$= \frac{Sz}{2e} - \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2},$$

und dagegen das Maximum:

$$V_m = \frac{2X^2}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}} + \frac{Q}{2}\left(1 + \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + 4X^2}}\right) = \frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + X^2}$$
$$= \frac{Sz}{2e} + \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2}.$$

Es ist zu fordern, daß V_m höchstens gleich $\frac{m}{m+1} T$ sei, also

$$\frac{Sz}{2e} + \sqrt{\left(\frac{Sz}{2e}\right)^2 + X^2} \overline{\gtrless} \frac{m}{m+1} T.$$

In der neutralen Axe ist $Q = 0$, daher $tang. 2\psi = -\infty$, also $2\psi = 270^0$ und $\psi = 135$ oder 45 Grad, und $V_n = -X_0$, dagegen $V_m = +X_0$; in der entferntesten Faser ist dagegen $X = 0$ und $Q = S$, daher $tang. 2\psi = 0$, also $2\psi = 0$ oder 180^0 und $\psi = 0$ oder 90^0; $V_n = 0$, dagegen $V_m = S$. Bei den gewöhnlichen Balken oder Trägern wächst also die Maximalspannung V_m allmälig von $X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{bW}$ bis

$S = \frac{Pxe}{W}$, während man von der neutralen Axe aus allmälig bis zur äußersten Faser fortschreitet.

Für einen parallelepipedischen Balken ist $\Sigma(Fz) = \frac{bh^2}{8}$, $W = \frac{bh^3}{12}$, $b_0 = b$ und $e = \frac{h}{2}$, daher sind die Grenzwerthe $X_0 = {}^3/_2 \, \frac{P}{bh}$ und $S = \frac{6Px}{bh^2}$; allgemein ist aber

$$X = \frac{P\left(\frac{h}{2} - z\right)\left(\frac{h}{2} + z\right)}{2W} = \frac{6P}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right] \text{ und } \frac{Sz}{e} = \frac{12Pxz}{bh^3},$$

daher:

$$V_m = \frac{6Pxz}{bh^3} + \sqrt{\left(\frac{6Pxz}{bh^3}\right)^2 + \left(\frac{6P}{bh^3}\right)^2\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]^2}$$

$$= \frac{6P}{bh^3}\left\{xz + \sqrt{(xz)^2 + \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]^2}\right\}, \text{ z. B. für } z = {}^1/_4\, h,$$

$$V_m = \frac{3P}{2bh^2}\left[x + \sqrt{x^2 + ({}^3/_4)^2 h^2}\right], \text{ und für } x = 0,$$

$$V_m = \frac{9P}{8bh}, \text{ u. s. w.}$$

Ist ein solcher Balken AB, Fig. 472, an einem Ende B eingemauert, so lassen sich die Richtungen der größten und kleinsten Normalkräfte V_m und V_n durch zwei Liniensysteme darstellen, welche die neutrale Axe unter 45 Grad und die Endfasern sowie auch sich selbst unter 90 Grad schneiden. Die Curven, welche unten concav sind, entsprechen den Zug-, dagegen diejenigen, welche oben concav sind, den Druckkräften. Die steileren Enden einer jeden Curve entsprechen den Minimal-, dagegen die flacheren Enden den Maximalkräften. An den Enden bei D und D_1 sind diese Spannkräfte zu Null geworden, wogegen sie an den Enden C und C_1 den allergrößten Werth haben.

Fig. 472.

§. 267. Einfluss der Schubfestigkeit auf die Tragkraft der Balken.

Die Tragfähigkeit eines Balkens fordert nicht allein, daß die Spannung $S = \frac{Pxe}{W}$ in der äußersten Faser den Werth T nicht erreiche, sondern auch,

daß die Schubkraft in der neutralen Faser $X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{b_0 W}$ kleiner als der Werth $\frac{m}{m+1} T$ bleibe. Welche Momente in den gewöhnlich vorkommenden Fällen statt Px in dem Ausdrucke für S einzusetzen sind, ist im vorigen Capitel vielfach gezeigt worden; es bleibt daher nur noch anzugeben übrig, welche Kraftwerthe man in den gewöhnlich vorkommenden Fällen statt P im Ausdrucke für X_0 einzuführen hat.

Wenn der Balken an einem Ende festgehalten und am anderen Ende von einer Kraft P ergriffen wird, so findet P in der Formel $X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{b_0 W}$ seine unmittelbare Anwendung; trägt aber der Balken außerdem eine gleichmäßig vertheilte Last, welche pro Längeneinheit die Größe q hat, so ist in diesem Ausdrucke statt P, $P + qx$, und insbesondere $P + ql$ einzusetzen, wenn es darauf ankommt, den größten Werth von X_0 zu bestimmen. Liegt dagegen der Balken an beiden Enden frei auf, und trägt in den Abständen l_1 und $l_2 = l - l_1$ von den Stützpunkten eine Last P, so ist für das eine Balkenstück $\frac{l_2}{l} P$, und für das andere $\frac{l_1}{l} P$ statt P in die Formel für X_0 zu setzen, um die Schubspannung in der neutralen Axe zu finden. Ist dagegen dieser Balken mit ql gleichmäßig belastet, so trägt jede Stütze $\frac{ql}{2}$ und es ist die Schubkraft P des ganzen Balkenquerschnittes an einer Stelle, welche um x von einem Stützpunkte abweicht, $P = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$. Dieselbe fällt in der Mitte, wo $x = \frac{l}{2}$ ist, Null aus, wird nach den Enden immer größer und größer, und ist an den Stützpunkten $P = \frac{ql}{2}$.

Trägt der an beiden Enden frei aufliegende Balken nur theilweise eine gleichmäßig vertheilte Last, welche den Theil c seiner Länge einnimmt, während der zweite Theil $l - c$ unbelastet bleibt, so trägt der Stützpunkt des ersten Theiles von der ganzen Last qc den Theil $qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right)$ und der des zweiten den Theil $\frac{qc^2}{2l}$, und es ist die verticale Schubkraft in dem Abstande x vom ersten Stützpunkte:

$$P = qc\left(1 - \frac{c}{2l}\right) - qx = q\left(c - \frac{c^2}{2l} - x\right).$$

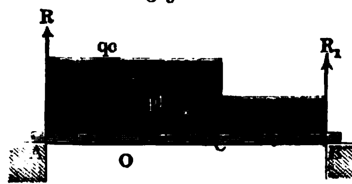
Dieselbe hat für $x = c$ die Größe $- \frac{qc^2}{2l}$, welche sie auch in den Abständen

$x > c$ behält. Bedeckt die Last gerade die eine Balkenhälfte, ist also $c = \frac{l}{2}$, so hat man

$$P = q\left(\frac{3l}{8} - x\right), \text{ also für } x = \frac{l}{2},\ P = -\frac{ql}{8}.$$

Wenn endlich der Balken AB, Fig. 473, eine auf die ganze Länge desselben gleichmäßig vertheilte Last pl und eine auf die Länge $AC = c$ gleichmäßig vertheilte Last qc gleichzeitig trägt, so sind die Drücke in den Stützpunkten:

Fig. 473.



$$R = \frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right)$$

und $R_1 = \frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l}$, und es folgt die verticale Schubkraft im Abstande $AO = x$ vom Stützpunkte A:

$$P = \frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right) - (p + q)\,x.$$

Dieselbe nimmt für $x = c$ den Werth $p\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{qc^2}{2l}$ an und fällt in Abständen $x > c$,

$$\frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l} - p\,(l - x) = -\frac{pl}{2} + \frac{qc^2}{2l} + px \text{ aus.}$$

Die verticale Schubkraft $P = p\left(\frac{l}{2} - c\right) - \frac{qc^2}{2l}$ in C ist $=$ Null für $c^2 + \frac{2p}{q}\,lc = \frac{p}{q}\,l^2$, d. i.

$$c = \left(-\frac{p}{q} + \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}}\right) l.$$

Ist überhaupt an einer Stelle des Balkens die Schubkraft $P = R - qx$, so hat man das Biegungsmoment daselbst:

$$M = Rx - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}\left(\frac{2R}{q} - x\right).$$

Dasselbe ist aber für $x = \frac{2R}{q} - x$, d. i. für $x = \frac{R}{q}$ ein Maximum, wobei $P = 0$ ausfällt; es nimmt also das Biegungsmoment eines Trägers an derselben Stelle den Maximalwerth an, wo die verticale Schubkraft $=$ Null ist (s. auch §. 220), und es giebt daher im vorstehenden Falle c diejenige Länge der Belastung qc an, bei welcher das Moment

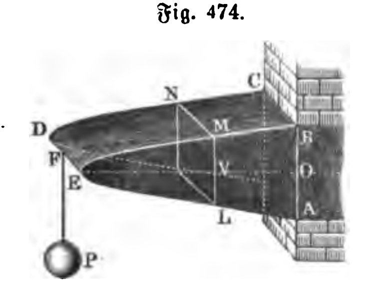
$$\left[\frac{pl}{2} + q\left(c - \frac{c^2}{2l}\right)\right] c - \frac{(p+q)\,c^2}{2}$$

zum Maximum, und zwar $= \frac{(p+q)\,c^2}{2}$ wird.

Diese Formeln finden ihre Anwendung bei Brückenträgern, wo dann qc die Größe der mobilen Last bezeichnet.

Die Schubspannung $X_0 = \frac{P\,\Sigma(Fz)}{b_0\,W}$ ist besonders noch bei Körpern von gleichem Widerstande zu berücksichtigen, welche nach dem Obigen (§. 257) ohne Rücksicht auf die Schubkraft an denjenigen Stellen einen Querschnitt gleich Null erhalten könnten, an denen das Moment der äußeren Kräfte zu Null wird. Da in diesen Punkten nun aber Schubkräfte wirksam sind, so wird daselbst eine jetzt näher zu berechnende Größe des Querschnittes erforderlich sein. Bezeichnet k die größte Spannung in dem Querschnitte, wo M ein Maximum (also bei C, Fig. 442 und 443) ist; t die größte Schubspannung an den Stellen, wo $M = 0$ ist (also bei F, Fig. 442, und bei A und B, Fig. 443), so hat man, wenn das Material in diesen Querschnitten in gleichem Maße in Anspruch genommen werden soll, nach dem Früheren

Fig. 474.



$$t = \frac{m}{m+1}\,k \text{ zu setzen.}$$

Betrachten wir den in Fig. 474 dargestellten Körper, welcher bei AC eingemauert, bei F durch die Last P angegriffen wird, und dessen Querschnitte überall gleiche Breite b haben, so ist, wenn h die Höhe im Abstande l vom Ende, ferner h_2 die erforderliche Höhe bei F bedeuten:

$$Pl = k\,\frac{W}{e} = k\,\frac{b h^2}{6}; \text{ oder } k = \frac{6\,Pl}{b h^2}.$$

In der neutralen Axe ist die Schubspannung

$$t = X_0 = \frac{P\,\Sigma(Fz)}{b\,W} = {}^3\!/_2\,\frac{P}{bh}.$$

Man hat daher zu setzen:

$${}^3\!/_2\,\frac{P}{bh} = \frac{m}{m+1}\,\frac{6\,Pl}{bh^2}; \text{ woraus}$$

$$\frac{l}{h} = \frac{m+1}{4\,m} \text{ oder für } m = 3,\ \frac{l}{h} = {}^1\!/_3.$$

Die Schubspannung erreicht daher in demjenigen Querschnitte, welcher von dem Balkenende um $^1/_3$ seiner Höhe absteht, einen Werth, welcher das Material in demselben Grade in Anspruch nimmt, wie die Zugkraft. Von diesem Punkte an bis zum freien Ende muß dem Balken die constante Höhe h_2 gegeben werden, welche sich aus

$$t = \frac{m}{m+1}\,k = {}^3/_4\,k = {}^3/_2\,\frac{P}{b\,h_2} \text{ bestimmt, also } h_2 = \frac{2\,P}{k\,b}.$$

In allen weiter von dem Balkenende abgelegenen Querschnitten ist die Schubspannung X_0 kleiner als $^3/_4\,k$, und sind daher für die Bestimmung dieser Querschnitte die Formeln der Biegungsfestigkeit maßgebend. Man ersieht aus dem obigen Resultat $l = \frac{h}{3}$, daß schon eine sehr geringe Länge des Armes der Kraft P hinreicht, um den Einfluß der Biegungsspannung überwiegen zu lassen; daß also die Wirkung der Schubkraft nur in einer kurzen Entfernung von dem Angriffspunkte der biegenden Kraft merklich ist gegen die durch die biegende Kraft hervorgerufenen Spannungen. Man darf daher die Wirkungen der Schubkraft in allen übrigen Querschnitten, für welche M größer ist, vernachlässigen, da dieselben zwar in allen Querschnitten vorhanden, aber gegen die Biegungsspannungen verschwindend sind, sobald l den oben ermittelten Grenzwerth überschreitet.

Hat der Balken gleichen Widerstandes einen rechteckigen Querschnitt mit constanter Höhe h, Fig. 445, und ist b_2 die Breite des Querschnittes am Ende, so hat man wieder für einen Querschnitt im Abstande l vom freien Ende:

$$k = \frac{6\,P\,l}{b\,h^2} \text{ und } t = X_0 = \frac{P\,\Sigma(F\,z)}{b\,W} = {}^3/_2\,\frac{P}{b\,h}.$$

Setzt man wieder $t = \frac{m}{m+1}\,k$, so folgt

$$^3/_2\,\frac{P}{b\,h} = \frac{m}{m+1}\,\frac{6\,P\,l}{b\,h^2}; \text{ woraus wie oben folgt:}$$

$$\frac{l}{h} = {}^1/_4\,\frac{m+1}{m} = {}^1/_3; \text{ für } m = 3.$$

Bei einem Balken gleichen Widerstandes mit kreisförmigem Querschnitte, Fig. 450, hat man ebenso:

$$k = \frac{P\,l}{^1/_{32}\,\pi\,d^3} = \frac{32\,P\,l}{\pi\,d^3} \text{ und}$$

$$t = X_0 = \frac{P\,\Sigma(F\,z)}{d_2\,.\,^1/_{64}\,\pi\,d_2^4} = \frac{16\,P}{3\,\pi\,d_2^2}.$$

Für $m = 3$ folgt aus $\frac{m}{m+1} k = {}^3/_4 k = \frac{16 P}{3 \pi d_2^2}$ der Durchmesser am Ende $d_2 = {}^8/_3 \sqrt{\frac{P}{\pi k}}$.

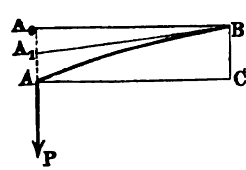
Derjenige Querschnitt, in welchem das Material durch die Schubspannung X_0 in demselben Grade in Anspruch genommen wird, wie durch die relative Spannung, ergiebt sich wieder durch

$$\frac{16 P}{3 \pi d^2} = \frac{m}{m+1} \frac{32 Pl}{\pi d^3}; \text{ woraus } l = \frac{m+1}{6m} d = \frac{2}{9} d,$$

für $m = 3$. Es ist daher schon von demjenigen Querschnitte an, dessen Abstand vom freien Ende $\frac{2}{9}$ des Durchmessers beträgt, die Wirkung der Biegungsspannung überwiegend.

§. 268. **Einfluss der Schub-Elasticität auf die Gestalt der elastischen Linie.** Es ist nun noch zu untersuchen, welchen Einfluß die Schub-Elasticität auf die elastische Linie oder die Gestalt der neutralen Faser eines belasteten Balkens AB, Fig. 475, hat. Nach der Formel $\frac{P}{F} = \tau C$, wo C den Modul der Schub-Elasticität und F den Querschnitt des Balkens bezeichnen, ist die durch die Schubkraft hervorgebrachte Neigung des Balkens $A_1 B$; $\tau = \frac{X_0}{C}$, und daher die entsprechende Senkung des Balkenendes A_1, bei der Länge $A_0 B = l$ des Balkens:

Fig. 475.



$$A_0 A_1 = s_1 = \tau l = \frac{X_0 l}{C} = \frac{P l \Sigma (Fz)}{b_0 W C}.$$

Hierzu kommt nun noch die Senkung $A_1 A = s_2$, welche aus der Biegung des Balkens hervorgeht, und welche nach §. 222 die Größe $s_2 = \frac{Pl^3}{3 WE}$ hat; es ist daher die ganze Senkung oder Durchbiegung des Balkens:

$$BC = A_0 A = s = s_1 + s_2 = \frac{Pl}{W} \left(\frac{\Sigma (Fz)}{b_0 C} + \frac{l^2}{3 E} \right).$$

Für den parallelepipedischen Balken ist $b_0 = b$, $\Sigma (Fz) = \frac{b h^2}{8}$ und $W = \frac{b h^3}{12}$, daher

$$s = \frac{4 P l^3}{b h^3 E} \left[1 + {}^3/_8 \frac{E}{C} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right],$$

Die Schubspannung erreicht daher in demjenigen Querschnitte, welcher von dem Balkenende um $^1/_3$ seiner Höhe absteht, einen Werth, welcher das Material in demselben Grade in Anspruch nimmt, wie die Zugkraft. Von diesem Punkte an bis zum freien Ende muß dem Balken die constante Höhe h_2 gegeben werden, welche sich aus

$$t = \frac{m}{m+1} k = {}^3/_4\, k = {}^3/_2 \frac{P}{b h_2} \text{ bestimmt, also } h_2 = \frac{2P}{kb}.$$

In allen weiter von dem Balkenende abgelegenen Querschnitten ist die Schubspannung X_0 kleiner als $^3/_4\, k$, und sind daher für die Bestimmung dieser Querschnitte die Formeln der Biegungsfestigkeit maßgebend. Man ersieht aus dem obigen Resultat $l = \frac{h}{3}$, daß schon eine sehr geringe Länge des Armes der Kraft P hinreicht, um den Einfluß der Biegungsspannung überwiegen zu lassen; daß also die Wirkung der Schubkraft nur in einer kurzen Entfernung von dem Angriffspunkte der biegenden Kraft merklich ist gegen die durch die biegende Kraft hervorgerufenen Spannungen. Man darf daher die Wirkungen der Schubkraft in allen übrigen Querschnitten, für welche M größer ist, vernachlässigen, da dieselben zwar in allen Querschnitten vorhanden, aber gegen die Biegungsspannungen verschwindend sind, sobald l den oben ermittelten Grenzwerth überschreitet.

Hat der Balken gleichen Widerstandes einen rechteckigen Querschnitt mit constanter Höhe h, Fig. 445, und ist b_2 die Breite des Querschnittes am Ende, so hat man wieder für einen Querschnitt im Abstande l vom freien Ende:

$$k = \frac{6Pl}{bh^2} \text{ und } t = X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{bW} = {}^3/_2 \frac{P}{bh}.$$

Setzt man wieder $t = \frac{m}{m+1} k$, so folgt

$$^3/_2 \frac{P}{bh} = \frac{m}{m+1} \frac{6Pl}{bh^2}; \text{ woraus wie oben folgt:}$$

$$\frac{l}{h} = {}^1/_4 \frac{m+1}{m} = {}^1/_3; \text{ für } m = 3.$$

Bei einem Balken gleichen Widerstandes mit kreisförmigem Querschnitte, Fig. 450, hat man ebenso:

$$k = \frac{Pl}{^1/_{32}\, \pi d^3} = \frac{32\, Pl}{\pi . d^3} \text{ und}$$

$$t = X_0 = \frac{P\Sigma(Fz)}{d_2\, {}^1/_{64}\, \pi d_2^4} = \frac{16P}{3\pi d_2^2}.$$

Für $m = 3$ folgt aus $\frac{m}{m+1} k = {}^3/_4 k = \frac{16 P}{3 \pi d_2^2}$ der Durchmesser am Ende $d_2 = {}^8/_3 \sqrt{\frac{P}{\pi k}}$.

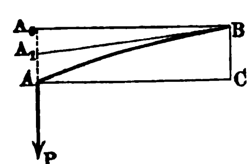
Derjenige Querschnitt, in welchem das Material durch die Schubspannung X_0 in demselben Grade in Anspruch genommen wird, wie durch die relative Spannung, ergiebt sich wieder durch

$$\frac{16 P}{3 \pi d^2} = \frac{m}{m+1} \frac{32 P l}{\pi d^3}; \text{ woraus } l = \frac{m+1}{6 m} d = \frac{2}{9} d,$$

für $m = 3$. Es ist daher schon von demjenigen Querschnitte an, dessen Abstand vom freien Ende $\frac{2}{9}$ des Durchmessers beträgt, die Wirkung der Biegungsspannung überwiegend.

Einfluss der Schub-Elasticität auf die Gestalt der elastischen Linie. Es ist nun noch zu untersuchen, welchen Einfluß die Schub-Elasticität auf die elastische Linie oder die Gestalt der neutralen Faser eines belasteten Balkens AB, Fig. 475, hat. Nach der Formel $\frac{P}{F} = \tau C$, wo C den Modul der Schub-Elasticität und F den Querschnitt des Balkens bezeichnen, ist die durch die Schubkraft hervorgebrachte Neigung des Balkens $A_1 B$; $\tau = \frac{X_0}{C}$, und daher die entsprechende Senkung des Balkenendes A_1, bei der Länge $A_0 B = l$ des Balkens: §. 268.

Fig. 475.



$$A_0 A_1 = s_1 = \tau l = \frac{X_0 l}{C} = \frac{P l \Sigma (F z)}{b_0 W C}.$$

Hierzu kommt nun noch die Senkung $A_1 A = s_2$, welche aus der Biegung des Balkens hervorgeht, und welche nach §. 222 die Größe $s_2 = \frac{P l^3}{3 W E}$ hat; es ist daher die ganze Senkung oder Durchbiegung des Balkens:

$$B C = A_0 A = s = s_1 + s_2 = \frac{P l}{W} \left(\frac{\Sigma (F z)}{b_0 C} + \frac{l^2}{3 E} \right).$$

Für den parallelepipedischen Balken ist $b_0 = b$, $\Sigma (F z) = \frac{b h^2}{8}$ und $W = \frac{b h^3}{12}$, daher

$$s = \frac{4 P l^3}{b h^3 E} \left[1 + {}^3/_8 \frac{E}{C} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \right],$$

oder $\frac{E}{C} = 3$ angenommen:

$$s = \frac{4 P l^3}{b h^3 E}\left[1 + {}^9/_8 \left(\frac{h}{l}\right)^2\right].$$

Z. B. für $l = 10 h$, folgt $s = 1{,}01125 \cdot \frac{4 P l^3}{b h^3 E}$, wenn also der Balken nur 10 mal so lang als dick ist, so ist seine Senkung am belasteten Ende in Folge der Schubkraft im Vergleich zur Senkung durch die Biegung so klein, daß sie in gewöhnlichen Fällen außer Acht gelassen werden kann.

Um die Elasticitätsmodel eines Balkens AB zu ermitteln, belastet man denselben ein Mal durch ein kleineres Gewicht P im größeren Abstande l, und ein anderes Mal durch ein größeres Gewicht P_1 im kleineren Abstande l_1 vom Stützpunkte B, und beobachtet die entsprechenden Bogenhöhen s und s_1 der Länge l des Balkens. Es ist dann

$$s = \frac{P l \Sigma (F z)}{b_0 W C} + \frac{P l^3}{3 W E} \text{ und}$$

$$s_1 = \frac{P_1 l \Sigma (F z)}{b_0 W C} + \frac{P_1 l_1^3}{3 W E} + \frac{P_1 l_1^2 (l - l_1)}{2 W E} \text{ (s. §. 238).}$$

Um C zu eliminiren, dividiren wir die erste Gleichung durch P und die zweite durch P_1, und subtrahiren dann beide Gleichungen von einander. Es folgt auf diese Weise:

$$\frac{s}{P} - \frac{s_1}{P_1} = \frac{1}{W E}\left(\frac{l^3 - l_1^3}{3} - \frac{l_1^2 (l - l_1)}{2}\right) = \frac{1}{W E}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{6}\right),$$

und daher der Elasticitätsmodul der Zug- und Druckkraft:

$$E = \frac{P P_1}{(s P_1 - s_1 P) W}\left(\frac{l^3}{3} - \frac{l l_1^2}{2} + \frac{l_1^3}{6}\right).$$

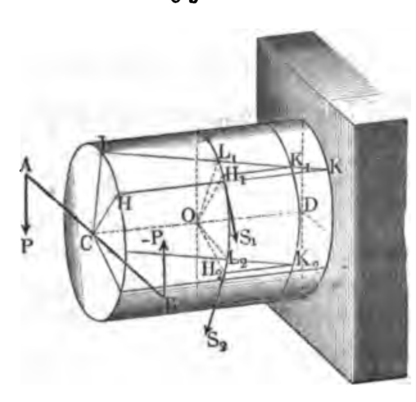
Mit Hülfe dieses Ausdruckes und der Formel für s bestimmt sich nun der Elasticitätsmodul der Schubkraft durch die Formel:

$$C = \frac{P l}{b_0} \cdot \frac{3 \Sigma (F z) E}{3 W E s - P l^3}.$$

§. 269. **Drehungselasticität.** Bei der Theorie der Drehung oder Torsion eines Körpers (s. §. 208), können wir wieder den Fall, daß ein Körper $HCDL$, Fig. 476, an einem Ende festgeklemmt ist, zu Grunde legen, müssen aber, um keine zusammengesetzte Formveränderung zu erhalten, annehmen, daß er am freien Ende von einem Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen werde, dessen Ebene AHB mit der Umdrehungsebene der Axe CD zusammenfällt. Denken wir uns den Körper wieder aus lauter Längenfasern, wie z. B. HK zusammengesetzt, und setzen voraus, daß in Folge der Torsion diese Fasern eine schraubenförmige Lage annehmen, wobei z. B. HK

in die Lage LK kommt, und die ganze Endfläche eine Drehung um den Winkel $HCL = \alpha$ erleidet. Wenn hierbei die Faserstücke $H_1 K_1$, $H_2 K_2$ u. s. w. von der Länge Eins und den Querschnitten F_1, F_2 u. s. w. die seitlichen Verschiebungen $H_1 L_1 = \sigma_1$, $H_2 L_2 = \sigma_2$ u. s. w. erleiden, so lassen sich bei dem Elasticitätsmodul C die entsprechenden Schubkräfte $S_1 = \sigma_1 F_1 C$, $S_2 = \sigma_2 F_2 C$ u. s. w. setzen. Ist nun noch der entsprechende Torsionswinkel $H_1 O L_1 = H_2 O L_2 = \varphi$, und sind die Entfernungen dieser Fasern von der Axe CD des Körpers, $OH_1 = z_1$, $OH_2 = z_2$, so hat man $\sigma_1 = \varphi z_1$, $\sigma_2 = \varphi z_2 \ldots$, daher die Kräfte $S_1 = \varphi C F_1 z_1$, $S_2 = \varphi C F_2 z_2 \ldots$, und deren Momente $S_1 z_1 = \varphi C F_1 z_1^2$, $S_2 z_2 = \varphi C F_2 z_2^2 \ldots$

Fig. 476.



Die sämmtlichen Kräfte S_1, $S_2 \ldots$ eines Querschnittes $H_1 O L_2$ halten jedenfalls dem Kräftepaare $(P, -P)$ das Gleichgewicht; ist folglich a der Hebelarm AB dieses Paares, also Pa das Moment desselben, so hat man zu setzen:

$$Pa = S_1 z_1 + S_2 z_2 + \cdots = \varphi C F_1 z_1^2 + \varphi C F_2 z_2^2 + \cdots$$
$$= \varphi C (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots).$$

Bezeichnet man noch das geometrische Maß $F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ des Torsionsmomentes durch W, so hat man folglich $Pa = \varphi C W$.

Nun ist aber der Torsionswinkel für die ganze Körperlänge $CD = l$, $\alpha = \varphi l$, daher läßt sich auch setzen:

$$1)\quad Pa = \frac{\alpha C W}{l}, \text{ oder } Pal = \alpha C W,$$

und der Torsionswinkel:

$$2)\quad \alpha = \frac{Pal}{CW}.$$

Man kann in Uebereinstimmung mit dem Früheren (§. 220), WC das Drehungsmoment, und folglich W das Maß des Drehungsmomentes nennen, und hiernach behaupten, daß das Kraftmoment Pa direct wie der Torsionswinkel und wie das Torsions- oder Drehungsmoment und umgekehrt wie die Länge des Körpers wächst.

Das Arbeitsquantum, welches die Torsion um den Winkel α erfordert, läßt sich, da der Weg der entsprechenden Kraft P, αa ist,

$$L = \frac{P}{2} \cdot \alpha a = \frac{\alpha^2 W C}{2 l} = \frac{P^2 a^2 l}{2 W C}$$

setzen. Diese Formeln gelten zunächst nur für prismatische Körper, bei Körpern von anderen Formen muß man statt $\frac{l}{W}$ einen mittleren Werth in die Rechnung einführen.

§. 270. **Torsionsmomente.** Das Maß $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ des Drehungsmomentes läßt sich nach einer in §. 226 entwickelten Regel aus dem Maße des Biegungsmomentes für denselben Querschnitt leicht ermitteln. Ist nämlich W_1 das Biegungsmaß einer Fläche ABD, Fig. 477, in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$, und W_2 das Biegungsmaß in Hinsicht auf eine Axe $\overline{Y}Y$, welche winkelrecht gegen die erste steht, so hat man das Maß des Drehungsmomentes in Hinsicht auf den Durchschnitt zwischen beiden Axen:

Fig. 477.

$$W = W_1 + W_2.$$

Für einen quadratischen Schaft oder eine Welle mit quadratischem Querschnitte $ABDE$, Fig. 478, ist, wenn b die Seite

$$AB = BD$$

desselben bezeichnet, nach §. 227, das Maß des Biegungsmomentes in Hinsicht auf jede der Axen $\overline{X}X$ und $\overline{Y}Y$:

$$W_1 = W_2 = \frac{b b^3}{12} = \frac{b^4}{12},$$

folglich das Maß des Torsionsmomentes:

$$W = W_1 + W_2 = 2\,\frac{b^4}{12} = \frac{b^4}{6},$$

und das Kraftmoment:

$$Pa = \frac{\alpha W C}{l} = \frac{\alpha b^4 C}{6 l} = 0{,}1667\,\frac{\alpha C b^4}{l}.$$

Für einen Schaft mit rectangulärem Querschnitte (bh) wäre dagegen

$$Pa = \frac{\alpha b h (b^2 + h^2)}{12 l}\,C = 0{,}0833\,\frac{\alpha b h (b^2 + h^2)\,C}{l}.$$

Für eine cylindrische Welle mit kreisförmigem Querschnitte AB, Fig. 479, ist, wenn der Halbmesser CA desselben $= r$ mißt, das Maß

Fig. 478.

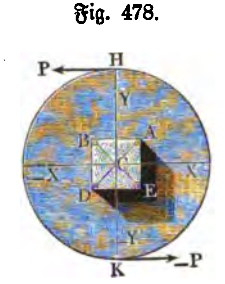
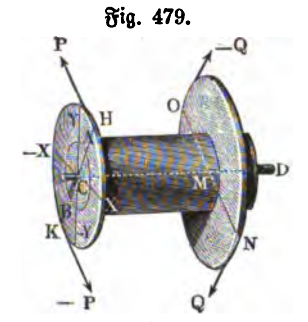


Fig. 479.



des Biegungsmomentes in Hinsicht auf eine Axe $\overline{X}X$ oder $\overline{Y}Y$ (nach §. 231):

$$W_1 = W_2 = \frac{\pi r^4}{4},$$

daher das Maß des Drehungsmomentes in Hinsicht auf den Axpunkt C:

$$W = 2\,W_1 = \frac{\pi r^4}{2}.$$

Wirkt folglich das Umdrehungskräftepaar $(P, -P)$ an einem Arme $HK = a$, oder jeder der beiden Componenten desselben an einem Arme $CH = CK = \frac{a}{2}$, so ist:

$$Pa = \frac{\alpha W C}{l} = \frac{\alpha \pi r^4 C}{2l} = 1{,}5708 \frac{\alpha r^4 C}{l}.$$

Ist die Welle hohl, und sind ihre Halbmesser r_1 und r_2, so gilt natürlich die Formel:

$$Pa = \frac{\alpha \pi (r_1^4 - r_2^4)\, C}{2l} = 1{,}5708\, \alpha\, \frac{(r_1^4 - r_2^4)\, C}{l}.$$

In der Regel wird die Torsion einer Welle ABM, Fig. 479, durch zwei sich das Gleichgewicht haltende Kräftepaare $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ hervorgebracht, und deshalb ist statt l nicht die ganze Länge der Welle, sondern nur der Abstand CM zwischen den Ebenen, in welchen beide Paare wirken, in die Formel einzuführen; es kann übrigens aber gleichgültig sein, ob man das Torsionsmoment dem Momente des Kräftepaares $(P, -P)$ oder dem Momente des Kräftepaares $(Q, -Q)$ gleichsetzt. Bezeichnet man den Hebelarm HK des Paares $(P, -P)$ durch a, und den Hebelarm NO des Paares $(Q, -Q)$ durch b, so hat man also

$$Pa = Qb = \frac{\alpha W C}{l} \text{ zu setzen.}$$

Die vorstehende Theorie giebt uns bei Körpern, welche von ebenen Flächen begrenzt werden, von der Wahrheit etwas abweichende Torsionsmomente, weil bei ihrer Entwickelung vorausgesetzt worden ist, daß die Endflächen des Prismas, welches eine Torsion erleidet, bei der Torsion eben bleiben, wogegen dieselben in Wirklichkeit windschief ausfallen. Nach den Untersuchungen von Saint-Venant, Wertheim u. s. w. (siehe Comptes rendus des séances de l'académie des sciences à Paris, T. 24 und T. 27, sowie l'Ingénieur, Nro. 1 und 2, 1858, deutsch im Civilingenieur, 4. Bd., 1858) ist für einen quadratischen Schaft:

$$Pa = 0{,}841\,\frac{\alpha b^4 C}{6l} = 0{,}1402\,\frac{\alpha b^4 C}{l},$$

wobei b die Seitenlänge des quadratischen Querschnittes bezeichnet.

Bei Körpern, deren Querschnittsdimensionen sehr von einander abweichen, z. B. für ein Parallelepiped, dessen Höhe h von seiner Breite b vielfach übertroffen wird, sind die Abweichungen noch weit größer.

Für einen prismatischen Körper mit rectangulärem Querschnitte von der Breite b und Höhe h hat man

$$W = W_1 + W_2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh(b^2+h^2)}{12}, \text{ daher}$$

$$Pa = \frac{\alpha WC}{l} = \frac{\alpha bh(b^2+h^2)C}{12l}.$$

Wenn nun diese Formel für $h = b$, wo $Pa = \frac{\alpha b^4 C}{6l}$ ausfällt, schon einen Correctionscoefficienten erfordert, so ist zu erwarten, daß dann, wenn h bedeutend von b abweicht, wo jedenfalls die Seitenflächen eine noch größere windschiefe Verdrehung erleiden, dieselbe nicht mehr die erforderliche Genauigkeit gewährt. In der That findet man durch die höhere Analysis bei Berücksichtigung der windschiefen Verdrehung:

$$Pa = \frac{\alpha h^3 b^3 C}{3(b^2+h^2)l},$$

und es ist nach den neueren Versuchen von Wertheim der erforderliche Correctionscoefficient im Mittel $= 0{,}903$, also

$$Pa = 0{,}903\,\frac{\alpha h^3 b^3 C}{3(b^2+h^2)l} = 0{,}301\,\frac{\alpha h^3 b^3 C}{(b^2+h^2)l}$$

zu setzen.

Ist b sehr klein gegen h, so folgt dann

$$Pa = 0{,}301\,\frac{\alpha h b^3 C}{l}.$$

Giebt man den Torsionswinkel in Graden an, setzt man also $\alpha = \frac{\alpha^0 \pi}{180^0}$ $= 0{,}017453\, \alpha^0$, so erhält man:

1) für cylindrische Balken oder Wellen mit kreisförmigem Querschnitte vom Durchmesser $d = 2r$,

$$Pal = \frac{\alpha \pi r^4}{2} C = \frac{\alpha \pi d^4}{32} C = \frac{\alpha^0 \pi^2 r^4}{180^0 . 2} C = \frac{\alpha^0 \pi^2}{180^0} \frac{d^4}{32} C$$
$$= 1{,}571\, \alpha r^4 C = 0{,}0982\, \alpha d^4 C = 0{,}02742\, \alpha^0 r^4 C$$
$$= 0{,}001714\, \alpha^0 d^4 C, \text{ und}$$

2) für prismatische Balken, Wellen oder Schäfte mit quadratischem Querschnitte von der Seitenlänge b, ohne Rücksicht auf den Correctionscoefficienten:

$$Pal = \frac{\alpha b^4 C}{6} = 0{,}1667\, \alpha b^4 C = \frac{\alpha^0 \pi b^4 C}{1080^0} = 0{,}00291\, \alpha^0 b^4 C.$$

Umgekehrt ist

$$\alpha = 0{,}637 \frac{Pal}{r^4 C} = 10{,}18 \frac{Pal}{d^4 C} = 6 \frac{Pal}{b^4 C}, \text{ sowie}$$

$$\alpha^0 = 36{,}4 \frac{Pal}{r^4 C} = 583 \frac{Pal}{d^4 C} = 344 \frac{Pal}{b^4 C}.$$

Die Werthe für C sind aus der Tabelle III. in §. 260 zu entnehmen.

Hiernach ist z. B.:

1) Für Gußeisen: $C = 2000$ Kilogramm $= 2'700000$ Pfund, daher für französisches Maß:

$$Pal = 55\, \alpha^0 r^4 = 3{,}4\, \alpha^0 d^4 = 5{,}8\, \alpha^0 b^4 \text{ und}$$

$$\alpha^0 = 0{,}0182^0 \frac{Pal}{r^4} = 0{,}2915^0 \frac{Pal}{d^4} = 0{,}172^0 \frac{Pal}{b^4},$$

oder für preußisches Maß:

$$Pal = 74000\, \alpha^0 r^4 = 4630\, \alpha^0 d^4 = 7860\, \alpha^0 b^4 \text{ und}$$

$$\alpha^0 = 0{,}000013480^0 \frac{Pal}{r^4} = 0{,}0002161^0 \frac{Pal}{d^4}$$
$$= 0{,}0001274^0 \frac{Pal}{b^4}.$$

2) Für Schmiedeeisen: $C = 6300$ Kilogramm $= 8'600000$ Pfund, woraus für französisches Maß:

$$Pal = 172\, \alpha^0 r^4 = 10{,}8\, \alpha^0 d^4 = 18{,}3\, \alpha^0 b^4 \text{ und}$$

$$\alpha^0 = 0{,}0058^0 \frac{Pal}{r^4} = 0{,}092^0 \frac{Pal}{d^4} = 0{,}055 \frac{Pal}{b^4},$$

oder für preußisches Maß:

$$Pal = 235800\, \alpha^0 r^4 = 14740\, \alpha^0 d^4 = 25000\, \alpha^0 b^4 \text{ und}$$

$$\alpha^0 = 0{,}00000424^0 \frac{Pal}{r^4} = 0{,}0000678 \frac{Pal}{d^4} = 0{,}00004 \frac{Pal}{b^4} \text{ folgt.}$$

3) Für Holz ist $C = 420$ Kilogramm $= 570000$ Pfund, daher für französisches Maß:

$$Pal = 11{,}5\,\alpha^0 r^4 = 0{,}72\,\alpha^0 d^4 = 1{,}22\,\alpha^0 b^4 \text{ und}$$

$$\alpha^0 = 0{,}087^0 \frac{Pal}{r^4} = 1{,}38^0 \frac{Pal}{d^4} = 0{,}82^0 \frac{Pal}{b^4},$$

oder für preußisches Maß:

$$Pal = 15630\,\alpha^0 r^4 = 977\,\alpha^0 d^4 = 1654\,\alpha^0 b^4 \text{ und}$$

$$\alpha^0 = 0{,}0000639^0 \frac{Pal}{r^4} = 0{,}001023^0 \frac{Pal}{d^4} = 0{,}000604^0 \frac{Pal}{b^4}.$$

Beispiele. 1) Welches Umdrehungsmoment kann ein quadratischer Schaft aus Schmiedeeisen von 5 Meter Länge und 0,100 Meter Stärke aufnehmen, ohne eine Torsion über $1/_4$ Grad zu erleiden? Es ist:

$$Pa = 18{,}3 \cdot 1/_4\, \frac{100^4}{5000} = 91{,}500 \text{ Meterkilogramm.}$$

2) Welche Torsion erleidet eine hohle gußeiserne Welle von der Länge $l = 5$ Meter, und den Halbmessern $r_1 = 0{,}150$ Meter und $r_2 = 0{,}100$ Meter durch ein Kraftmoment $Pa = 1000$ Meterkilogramm? Es ist hier:

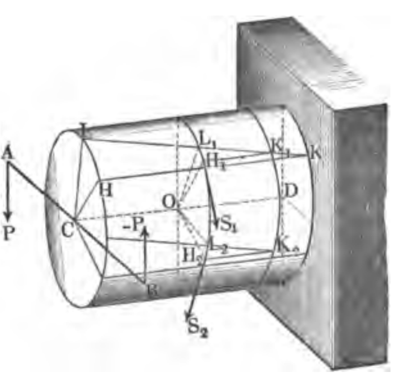
$$\alpha^0 = 0{,}0182^0 \frac{1000000\,.\,5000}{150^4 - 100^4} = 0{,}224 \text{ Grad} = 13 \text{ Min. } 26{,}4 \text{ Sec.}$$

§. 271. **Drehungsfestigkeit.** Ist bei einem durch ein Kräftepaar $(P, -P)$ verdrehten Prisma CKL, Fig. 480, die Schubkraft pro Flächeneinheit in einem bestimmten Abstande e von der Axe $CD = S$, so hat man die Schubkraft in einem anderen Abstande z_1, $\frac{z_1}{e}\,S$, sowie deren Moment $= \frac{z_1^2}{e}\,S$, und bei dem Querschnitte F_1,

$$\frac{F_1 z_1^2}{e}\,S = \frac{S}{e}\,F_1 z_1^2,$$

und ebenso sind die Momente der Schubkräfte für andere Querschnittselemente F_2, F_3 . . ., welche um z_2, z_3 . . . von der Axe CD abstehen, $\frac{S}{e}\,F_2 z_2^2$, $\frac{S}{e}\,F_3 z_3^2$ u. s. w., und es folgt das ganze Drehungsmoment des Körpers:

Fig. 480.



$$Pa = \frac{S}{e} F_1 z_1^2 + \frac{S}{e} F_2 z_2^2 + \frac{S}{e} F_3 z_3^2 + \cdots$$
$$= \frac{S}{e} (F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots), \text{ d. i.}$$

1) $Pa = \frac{SW}{e}$, oder $Pae = SW$, sowie $\frac{W}{e} = \frac{Pa}{S}$.

Führt man nun für S den Tragmodul T der Schubfestigkeit und für e den größten Abstand der Querschnittselemente von der neutralen Axe ein, so erhält man in der Formel

2) $Pae = TW$ eine Gleichung zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen, bei welchen der Körper nirgends bis über die Elasticitätsgrenze hinaus gespannt oder verschoben wird. Und ebenso erhält man durch diese Formel das Kraftmoment $P_1 a$, bei welchem der Körper abgewürgt wird, wenn man statt S den Festigkeitsmodul K der Schubkraft einsetzt; es ist

3) $P_1 a = \frac{KW}{e}$.

Für eine massive cylindrische Welle vom Durchmesser $d = 2r$ ist

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2}, \text{ daher}$$
$$Pa = \frac{\pi r^3 T}{2} = \frac{\pi d^3 T}{16} = 0{,}1963\, d^3 T, \text{ sowie}$$
$$P_1 a = \frac{\pi r^3 K}{2} = \frac{\pi d^3 K}{16} = 0{,}1963\, d^3 K.$$

Für eine hohle cylindrische Welle von den Durchmessern $d_1 = 2r_1$ und $d_2 = 2r_2$, wo

$$\frac{W}{e} = \frac{\pi (r_1^4 - r_2^4)}{2 r_1} \text{ ist, hat man dagegen}$$
$$Pa = \frac{\pi (r_1^4 - r_2^4)}{2 r_1} T = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{16 d_1} T = \frac{F(d_1^2 + d_2^2)}{4 d_1} T,$$

wobei $F = \frac{\pi (d_1^2 - d_2^2)}{4}$ den Querschnitt des Körpers bezeichnet.

Für einen prismatischen Körper mit quadratischem Querschnitte, dessen Seitenlänge $= b$ ist, hat man

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e = \tfrac{1}{2} b \sqrt{2} = b \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \text{ daher}$$
$$\frac{W}{e} = \frac{b^3}{6\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = \frac{b^3}{3\sqrt{2}} \text{ und } Pa = \frac{b^3 T}{3\sqrt{2}} = 0{,}2357\, b^3 T.$$

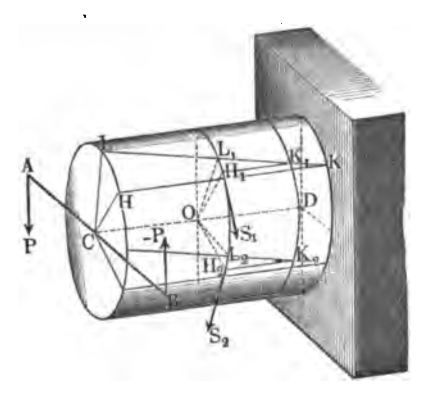
Wenn man in der Grundformel $Pa = \varphi C W$ aus §. 269, $\varphi = \frac{\sigma}{e}$

$= \frac{tang. \delta}{e}$ einsetzt, wobei e den Abstand der entferntesten Faser von der Umdrehungsaxe CD, sowie δ den Winkel HKL bezeichnet, um welchen diese Faser bei der Torsion aus ihrer ursprünglichen Lage verrückt wird, so erhält man

$Pae = C\, W\, tang.\, \delta$; nun ist aber auch
$Pae = S\, W$, daher folgt
$S = C\, tang\, \delta$, und es ergiebt sich
$T = C\, tang.\, \delta$, sowie $tang.\, \delta = \frac{T}{C}$,

wenn δ den Verschiebungswinkel bezeichnet, bei welchem die Spannung des Körpers die Grenze der Elasticität erreicht hat.

Fig. 480 a.



Die mechanische Arbeit, welche erfordert wird, um die Welle nach und nach bis um den Winkel α zu verdrehen, ist nach §. 269

$L = \frac{P^2 a^2 l}{2\, W C}$, und läßt sich daher, wenn man $Pa = \frac{S\, W}{e}$ einführt, auch $L = \frac{S^2}{C} \frac{W l}{2 e^2}$ setzen, wobei natürlich S die Maximalspannung bezeichnet.

Bei der Elasticitätsgrenze ist $S = T$, und es folgt daher auch die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um den Körper bis zur Grenze der Elasticität zu spannen:

$$L = \frac{T^2}{C} \cdot \frac{W l}{2 e^2}.$$

Für einen prismatischen Körper mit kreisrundem Querschnitte ist $W = \frac{\pi r^4}{2}$ und $e = r$, daher:

$$L = \frac{T^2}{2\, C} \cdot \frac{\pi r^2 l}{2} = \frac{T^2}{4\, C}\, V,$$

dagegen für einen solchen mit quadratischem Querschnitte:

$$W = \frac{b^4}{6} \text{ und } e^2 = \frac{b^2}{2}, \text{ daher:}$$

$$L = \frac{T^2}{C} \cdot \frac{b^4 l}{6 b^2} = \frac{T^2}{6C} \cdot b^2 l = \frac{T^2}{6C} V.$$

Nun ist aber $\frac{T^2}{2C} = \frac{\sigma C T}{2 C} = \frac{\sigma T}{2}$ der Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze für Schub, daher hat man für den Cylinder: $L = {}^1/_2\, A V$, und für das Parallelepiped: $L = {}^1/_3\, A V$.

Es ist also in beiden Fällen dieser Arbeitsaufwand nur dem Volumen V des Körpers proportional (vergl. §. 212 und §. 224).

Jedenfalls läßt sich auch die Arbeit zum Abdrehen oder Abwürgen $L = {}^1/_2\, B V$ und ${}^1/_3\, B V$ setzen, wenn B den Arbeitsmodul des Abwürgens bezeichnet.

Nimmt man mit Herrn General Morin für alle Stoffe

$$\frac{T}{C} = tang.\, \delta = 0{,}000667,$$

also den Verschiebungswinkel $\delta = 2$ Min. 18 Sec. an, so erhält man für Gußeisen:

$T = 2000\ .\ 0{,}000667 = 1{,}34$ Kilogr. $= 1833$ Pfund,

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$Pa = 0{,}263\, d^3 = 0{,}316\, b^3$ Millim. Kilogr.,

dagegen für preußisches Maß:

$Pa = 360\, d^3 = 432\, b^3$ Zollpfund.

Unter derselben Bedingung erhält man für Schmiedeeisen:

$T = 6300\ .\ 0{,}000667 = 4{,}2$ Kilogr. $= 5750$ Pfund,

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$Pa = 0{,}82\, d^3 = 1{,}0\, b^3$ Millim. Kilogr.,

und für preußisches Maß:

$Pa = 1128\, d^3 = 1357\, b^3$ Zollpfund.

Für Holz erhält man unter denselben Bedingungen im Mittel:

$T = 416\ .\ 0{,}000667 = 0{,}28$ Kilogr. $= 380$ Pfund,

daher bei Anwendung des französischen Maßes:

$Pa = 0{,}055\, d^3 = 0{,}066\, b^3$ Millim. Kilogr.,

und beim Gebrauche des preußischen Maßes:

$Pa = 74{,}6\, d^3 = 89{,}6\, b^3$ Zollpfund.

Die Coefficienten dieser Formeln gelten nur für ruhende Körper und ganz langsam und sanft umlaufende Wellen; bei gewöhnlichen Wellen giebt man doppelte Sicherheit, nimmt also die Coefficienten nur halb so groß an; für schnell umlaufende Wellen nimmt man wohl vierfache, und bei sehr raschen und mit Stößen verbundenen Bewegungen ist man sogar genöthigt, eine achtmal größere Sicherheit zu geben.

Beispiele. 1) Die gußeiserne Welle einer Turbine übt am Umfange eines auf ihr sitzenden Zahnrades von 0,150 Meter Halbmesser eine Kraft von 2000 Kilogramm aus, welche Dicke muß man derselben geben, wenn man eine vierfache Sicherheit zu Grunde legt? Es ist hier $Pa = 2000 \,.\, 150$ und bei vierfacher Sicherheit gilt die Formel $Pa = \frac{1}{4} \,.\, 0{,}263\, d^3 = 0{,}066\, d^3$; daher der erforderliche Durchmesser:

$$d = \sqrt[3]{\frac{2000 \,.\, 150}{0{,}066}} = 166 \text{ Millimeter.}$$

Ist der Abstand des gedachten Zahnrades von dem Wasserrade, $l = 2$ Meter, so hat man nach dem vorigen Paragraphen den Torsionswinkel:

$$\alpha^0 = 0{,}2915^0 \frac{Pa \,.\, l}{d^4} = 0{,}2915^0 \frac{2000 \,.\, 150 \,.\, 2000}{166^4} = 0{,}23 \text{ Grad}$$

$$= 13 \text{ Min. } 4{,}8 \text{ Sec.}$$

2) Bei einer vierkantigen Welle aus Fichtenholz wirkt die Kraft $P = 300$ Kilogramm an einem Hebelarme $a = 5$ Meter, während die Last Q an einem Hebelarme von 1 Meter in einer axialen Entfernung von P gleich 2 Meter zieht, wie dick ist die Welle zu machen, und wie groß ist die Verdrehung derselben?

Es ist bei vierfacher Sicherheit:

$$Pa = 300 \,.\, 5000 = \frac{1}{4} \,.\, 0{,}066\, b^3 = 0{,}016\, b^3,$$

daher

$$b = \sqrt[3]{\frac{300 \,.\, 5000}{0{,}016}} = 454 \text{ Millimeter,}$$

und die Verdrehung:

$$\alpha^0 = 0{,}82^0 \frac{300 \,.\, 5000 \,.\, 2000}{454^4} = 0{,}058 \text{ Grad} = 3{,}5 \text{ Min.}$$

Viertes Capitel.

Die Tragkraft langer Säulen oder die Festigkeit des Zerknickens.

Tragkraft einer an einem Ende festgehaltenen Säule. Wenn ein prismatischer Körper AB, Fig. 481, an einem Ende B festgehalten wird, während auf das andere freie Ende A eine in die Längenaxe AB hineinfallende Kraft P wirkt, so strebt diese Kraft den Körper zu zerdrücken, und ist die specifische rückwirkende Spannung in jedem Querschnitte F durch $k' = \frac{P}{F}$ gegeben. Wenn nun theoretisch auch kein Grund vorhanden ist, warum bei genau centraler Wirkung von P der Stab einer Biegung unterworfen sein solle, so zeigt doch die Erfahrung, daß eine seitliche Ausbiegung der Säule AB allerdings eintritt, sobald die Länge derselben die Querabmessungen derselben vielmals übertrifft. In Folge dieser Biegung werden, wie bei der Biegung überhaupt, einzelne Fasern gedrückt, andere gezogen, und es tritt die stärkste Anstrengung der Fasern an der concaven Seite ein, wo zu der rückwirkenden Spannung $k' = \frac{P}{F}$ noch die durch die Biegung erzeugte relative Spannung $k'' = \frac{Me}{W}$ sich gesellt; so daß die gesammte Spannung daselbst durch $k = k' + k''$ ausgedrückt ist. An der convexen Seite, wo die relative Spannung k'' als Zugkraft wirkt, beträgt die totale Spannung $k = k' - k''$, welche Zug bedeutet, sobald $k'' > k'$ ist. §. 272.

Die Vertheilung der Spannungen in einem Querschnitte der Säule ist aus Fig. 482 ersichtlich. Bezeichnet S den Schwerpunkt des Querschnittes

Fig. 481.

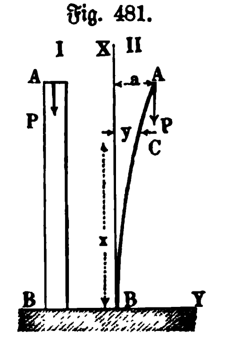
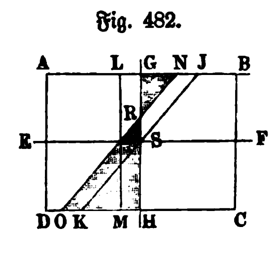


Fig. 482.



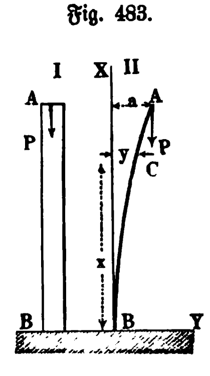
$ABCD$, so ist, wenn $AD < AB$, EF die Biegungsaxe. Macht man nun $GL = k'$ und $GJ = k''$, so stellt das Rechteck $GLMH$ die rückwirkenden Spannungen k' und das Viereck $GJKH$ die relativen Spannungen k'' (oberhalb S Zug-, unterhalb S Druckkräfte) vor, und wenn man $JN = KO = GL = k'$ macht, so erhält man in den Ordinaten der schraffirten Fläche $NGHON$ eine Darstellung der totalen Spannungen. Durch R, wo die Spannung Null ist, geht die neutrale Axe des Querschnitts, deren Abstand RS von der Schwerpunktsaxe gegeben ist durch:

$$\frac{RS}{GS} = \frac{NJ}{GJ} \text{ oder } \frac{RS}{e} = \frac{k'}{k'} = \frac{P}{F} : \frac{Me}{W},$$

woraus $RS = \frac{PW}{FM}$ folgt (vergl. §. 220).

Diese Biegung hat man sich dadurch zu erklären, daß die Kraft P niemals mathematisch genau mit der Axe der Säule zusammenfällt, daß die Schwerpunktsaxe der Säule selbst, wegen der nicht absoluten Homogenität des Materials nicht einmal eine genaue Gerade sein wird. Der Einfluß dieser Nebenumstände macht sich um so bemerklicher, je länger die Säule im Verhältnisse zu ihrer Dicke ist, und es tritt erfahrungsmäßig bei zunehmender Länge sehr bald ein Zustand ein, wo der Einfluß der Biegung denjenigen der Compression übertrifft, und wo die Säule einem Zerbrechen oder Zerknicken unterworfen ist, wenn auch die auf reines Zerdrücken der Fasern gerichtete Spannung k' noch sehr weit von dem Festigkeitsmodul K_{II} des Materials entfernt ist. Daher dürfen die Formeln der im ersten Capitel behandelten Druckfestigkeit nur für Körper angewendet werden, bei denen das Verhältniß der Länge zur kleinsten Querdimension gewisse, aus dem Späteren sich ergebende Werthe nicht überschreitet.

Fig. 483.



Der im Obigen angegebene Fall der Festigkeit belasteter säulenartiger Körper bedarf daher einer besonderen Untersuchung, und man pflegt den hierbei geäußerten Widerstand die Strebfestigkeit oder die Festigkeit des Zerknickens, auch wohl die zusammengesetzt rückwirkende Festigkeit zu nennen.

Um die Biegungsverhältnisse der Säule AB, Fig. 483 II., zu untersuchen, sei B der Coordinatenanfang, P wirke auch bei der Biegung des Balkens in A vertical abwärts, so ist das auf Biegung wirkende Moment M in einem beliebigen Punkte C gegeben durch: $M = P(a - y)$.

Setzt man nun unter Beibehaltung der früheren Bedeutung von M, W, E und r:

$$M = \frac{WE}{r} = WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

so hat man für die elastische Linie die Gleichung:

$$WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P(a - y)$$

oder

$$\frac{WE}{P} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y - a = 0.$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht der Werth

$$y = a \left[1 - cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]^{*)}.$$

Setzt man hierin $x = l$, so muß $y = a$ werden; folglich gilt:

$$a = a\left[1 - cos.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right],$$

oder

$$cos.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = 0.$$

In dieser für den Gleichgewichtszustand der gebogenen Säule geltenden Gleichung kommt die Ausbiegung a des freien Endes gar nicht mehr vor, und man muß daher schließen, daß, wenn P von solcher Größe genommen

---

*) Die Integration führt sich folgendermaßen aus: Setzt man $y - a = u$, so ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, daher wird nach Einsetzung dieser Werthe die Differenzialgleichung: $\frac{WE}{P} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0$. Dieser Gleichung genügen, wie man sich durch Differenziation leicht überzeugt, die beiden partikul. Integrale:

$$u_1 = c_1 cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) \text{ und } u_2 = c_2 sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right),$$

worin c_1 und c_2 beliebige Constanten sind; daher folgt:

$$u = y - a = c_1 cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) + c_2 sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right).$$

Die Constanten c_1 und c_2 ergeben sich mit Rücksicht darauf, daß für $x = 0$, $y = 0$ sein muß, aus $0 - a = c_1 cos. 0 + c_2 sin. 0$. Es folgt $c_1 = - a$ und c_2 ist Null, weil für $x = 0$ auch $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist; es ist nämlich:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = - c_1 sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) \cdot \sqrt{\frac{P}{WE}} + c_2 cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) \cdot \sqrt{\frac{P}{WE}};$$

also für $x = 0$:

$$0 = - c_1 . 0 + c_2 . 1 . \sqrt{\frac{P}{WE}}; \text{ d. h. } c_2 = 0.$$

wird, daß dieser Gleichung genügt wird, alsdann die erfolgende Ausweichung jeden beliebigen Werth annehmen kann, daß man daher, wenn einmal eine Biegung eingetreten ist, keine Gewähr dafür hat, daß diese Biegung sich nicht bis zum Bruche der Säule vergrößert. Das Moment $P(a - y)$ ist natürlich ein Maximum in dem Fußpunkte B, wo $y = 0$ ist, so daß der Punkt B als der Bruchpunkt bezeichnet werden kann. Es ist dieses eigenthümliche Verhalten dadurch zu erklären, daß das Moment der biegenden Kraft Pa bei zunehmender Biegung der Säule in demselben Maße wächst, in welchem die Widerstandskraft der Säule mit der Biegung zunimmt.

Wenn man daher P von solcher Größe annehmen wollte, daß die Bedingung $cos.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = 0$ erfüllt ist, d. h. wenn man

$$l\sqrt{\frac{P}{WE}} = \frac{\pi}{2}, \text{ oder } P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$$

setzt, so ist für diesen Grenzfall zwar noch Gleichgewicht vorhanden, es muß aber durch die geringste zufällige Steigerung von P, oder auch schon durch etwaige Erschütterungen die Säule eine fortwährend wachsende bis zum Bruche führende Durchbiegung annehmen. Man muß daher die Kraft

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE = \frac{\pi^2}{4l^2} WE = 2{,}4674 \frac{WE}{l^2}$$

als die den Bruch herbeiführende Kraft betrachten, und hat unter Einführung eines den Verhältnissen angemessenen Bruchsicherheitscoefficienten die zulässige Belastung entsprechend kleiner anzuordnen.

Wenn man in der Gleichung

$$y = a\left[1 - cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)\right]$$

für P die ermittelte Bruchkraft $P = \frac{\pi^2}{4}\frac{WE}{l^2}$ einsetzt, so erhält man für die elastische Linie die Gleichung:

$$y = a\left(1 - cos.\frac{\pi x}{2l}\right).$$

Setzt man hierin für x nach einander die Werthe:

$$x = 0 \quad l \quad 2l \quad 3l \quad 4l \quad 5l \quad 6l \cdots,$$

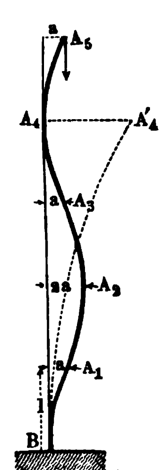
so folgt:

$$y = 0 \quad a \quad 2a \quad a \quad 0 \quad a \quad 2a \cdots$$

Diese Resultate lehren, daß bei einer Verlängerung der Säule BA_1 eine Biegung derselben nach einer Rankenlinie $BA_1A_2A_3A_4A_5\ldots$, Fig. 484, eintreten kann, und die Kraft $P = \frac{\pi^2}{4}\frac{WE}{l^2}$ ist in jedem Punkte derselben

genügend, um diesen Biegungszustand zu erhalten. Denkt man sich beispielsweise die Kraft $P = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{l^2}$ in A_4, also in einem Abstande $4l$ von B vertical abwärts wirkend angebracht, so wird zwar die Säule ohne Weiteres nicht nach der Linie $BA_1 A_2 A_3 A_4$ sich biegen, denn es würde schon bei der Kraft

Fig. 484.



$$P_1 = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{(BA_4)^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{(4l)^2} = \frac{1}{16} P$$

die Säule eine Biegung annehmen, analog der in Fig. 483 dargestellten, indem das Ende A_4 nach der Seite ausweichen würde, wie die punktirte Linie BA'_4 andeutet; wenn man jedoch das Ende A_4 durch irgend welchen äußeren Zwang, etwa durch Führungen veranlaßt, stets der Verticalen durch B sich tangential anzuschmiegen, so tritt in der That eine Biegung nach $BA_1 A_2 A_3 A_4$ ein, und es ist die Bruchkraft:

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{(BA_1)^2}.$$

Wenn man aber allgemein die ganze Säulenlänge BA_4 mit l bezeichnet, so ergiebt sich die Bruchkraft durch

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{(\frac{1}{4} BA_4)^2} = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = 4\pi^2 \frac{WE}{l^2}.$$

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich der vortheilhafte Einfluß der Führungen, welche man bei sehr langen gedrückten Stangen (Schachtgestängen) anwendet, und es läßt sich bei hinreichender Anzahl solcher Führungen, (z. B. wenn gedrückte Anker in dichtschließende Röhren eingeschlossen werden), der Einfluß der Biegung gänzlich beseitigen, so daß der betreffende Stab nicht mehr auf Zerknicken, sondern auf Zerdrücken zu berechnen ist.

Einfluss der Befestigung. Im vorigen Paragraphen ist für den einfachsten Fall der Befestigung der Säule an einem Ende, und wenn das andere Ende ganz frei, die Festigkeit der Säule zu §. 273.

$$\text{I.} \quad P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$$

ermittelt worden. Es wächst daher die Festigkeit einer prismatischen Säule gegen Zerknicken direct wie das Maß des Biegungsmomentes des Querschnittes, und umgekehrt wie das Quadrat der Länge.

Das Biegungsmoment ist natürlich in Hinsicht auf diejenige Axe zu nehmen, für welche der Ausdruck W den kleinsten Werth annimmt, da von den unendlich vielen Biegungen in beliebigen Ebenen, welche die Säule annehmen kann, jedenfalls diejenige eintritt, welcher der geringste Widerstand sich entgegenstellt.

Insbesondere ist für eine parallelepipedische Säule $W = \frac{b h^3}{12}$ zu setzen, worin unter h die kleinere Querschnittsdimension zu verstehen ist, daher gilt hierfür:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{b h^3}{12} = 0{,}2056 \frac{b h^3}{l^2} E.$$

Für eine cylindrische Säule vom Halbmesser r oder Durchmesser d hat man:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{\pi r^4}{4} E = \frac{\pi^3}{16} \frac{r^4 E}{l^2} = 1{,}9381 \frac{r^4}{l^2} E = 0{,}1211 \frac{d^4}{l^2} E.$$

Ebenso hat man für eine hohle Säule mit den Halbmessern r und $r_1 = \mu r$ oder den Durchmessern d und $d_1 = \mu d$:

$$P = \frac{\pi^3}{16} \cdot \frac{r^4 - r_1^4}{l^2} E = 1{,}9381 \frac{(1 - \mu^4) r^4}{l^2} E$$

$$= 0{,}1211 \frac{(1 - \mu^4) d^4}{l^2} E.$$

Hierbei kann von vornherein gar nicht angegeben werden, in welcher Ebene die Ausbiegung erfolgen wird, da bei dem Kreise wie auch bei allen regulären Polygonen das Maß des Biegungsmomentes für alle durch den Schwerpunkt gehende Axen denselben Werth hat (§. 230). Die Unbestimmtheit gilt jedoch nur so lange, als nicht durch Nebenumstände die Biegungsebene bestimmt ist, z. B. wird eine in schräger Richtung angebrachte Strebe (Krahnausleger) wegen des Eigengewichtes jedenfalls eine Biegung in der verticalen Ebene annehmen, auch wenn der Querschnitt ein regelmäßiges Polygon ist.

Wird die Säule ABA_1, Fig. 485, am unteren Ende A_1 nicht festgehalten, sondern nur gestützt, und zwar mit abgerundeter Stützfläche (I.) oder um Bolzen drehbar (III.), und ist das obere Ende A genöthigt, in der Richtungslinie von P zu bleiben, so jedoch, daß auch bei A die elastische Linie wie bei A_1 ihre Neigung ändern kann, so biegt sich die Axe nach einer gegen die Mitte B symmetrischen Curve ABA_1, Fig. 485 II. In A und A_1, wo das Moment Null ist, wird der Krümmungshalbmesser unendlich groß, und es entspricht die Curve ABA_1 der Strecke $A_5 A_4 A_3$ in Fig. 484, so daß die Grundformel

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{W E}{(B A_1)^2}$$

auch für diesen Fall Anwendung findet. Die Größe BA_1, Fig. 484, entspricht der Größe $AB = A_1B = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{l}{2}$ in Fig. 485, folglich gilt hier für die Festigkeit der Säule

$$\text{II.} \quad P = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{(\frac{1}{2}l)^2} = \pi^2 \frac{WE}{l^2}.$$

Die Festigkeit und daher auch die Tragkraft der Säule ist demnach in diesem Falle viermal so groß, als wenn die Säule an einem Ende befestigt ist und am anderen frei ausweichen kann. In diesem Zustande der Biegung befindet sich z. B. die Kurbelstange einer Dampfmaschine u. s. w.

Wird ferner eine Säule BB_1, Fig. 486 I., an beiden Enden eingeklemmt, oder sind beide Enden, Fig. 486 III., rechtwinkelig zur Axe begrenzt, so daß

Fig. 485.

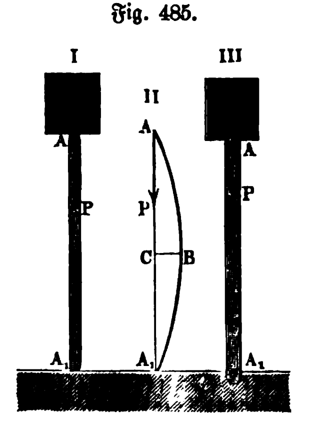
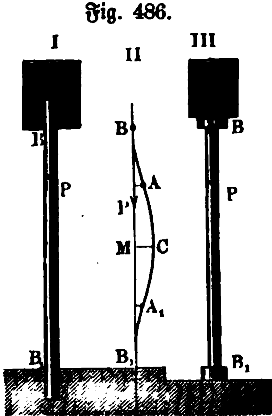


Fig. 486.



die Säule gezwungen ist, bei der Biegung in B und B_1 sich tangential an die Kraftrichtung anzuschließen, so wird die Axe derselben nach einer Curve $BACA_1B_1$, Fig. 486 II., gebogen, worin A und A_1 Wendepunkte sind. Eine Vergleichung mit Fig. 484 führt dahin, daß die Biegung mit der Strecke BA_4, Fig. 484, übereinstimmt, und man hat für diesen Fall $\frac{l}{4}$ anstatt BA_1 in der Grundformel

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{(BA_1)^2}$$

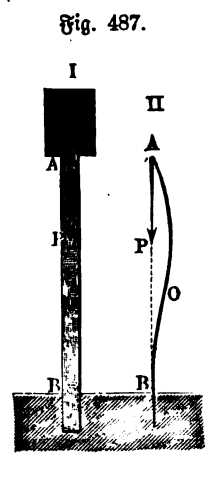
einzuführen, wenn l wieder die ganze Länge BB_1 der Säule bedeutet.

Es ist folglich hier die Festigkeit

$$\text{III.} \quad P = \frac{\pi^2}{4} \frac{WE}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = 4\pi^2 \frac{WE}{l^2},$$

d. i. sechzehnmal so groß, wie in dem Normalfalle, wo das obere Ende frei ist.

Fig. 487.



Versuchen von Hodgkinson zufolge (s. unten) ist die Festigkeit indessen nur zwölfmal so groß, wie im Normalfalle. Diese Art der Biegung kommt vorzüglich bei der Kolbenstange einer Dampfmaschine vor, welche einerseits in der Stopfbüchse, andererseits in dem Kreuzkopfe geführt wird.

Wenn die Säule AB, Fig. 487, an einem Ende B festgehalten und am anderen Ende zwar verhindert wird, seitlich auszuweichen aber an diesem Ende eine beliebige Neigung annehmen kann, so stellt sich bei 0 ein Wendepunkt ein, und die Festigkeit ist achtmal so groß wie im Normalfalle, nämlich

$$\text{IV.} \quad P = 2\pi^2 \frac{WE}{l^2}.$$

Anmerkung 1. Das zuletzt für den in Fig. 487 dargestellten Fall angegebene Resultat ist nur annähernd genau. Die Untersuchung dieses Falles kann in folgender Art vorgenommen werden.

Den Bedingungen der Säulenaufstellung gemäß soll das obere Ende A durch eine Führung oder einen seitlich gegen A ausgeübten Zwang verhindert werden, aus der Richtungslinie der Kraft P auszuweichen. Man kann diese Führung durch eine horizontale auf das obere Ende wirkende Kraft A von solcher Größe ersetzt denken, daß analog dem Früheren (s. §. 272) für $x = l$, $y = 0$ wird. Mit Rücksicht hierauf lautet die Differenzialgleichung der elastischen Linie hier:

$$WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = P(a - y) + A(l - x),$$

oder da $a = 0$ ist:

$$WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Py - A(l - x) = 0.$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht (s. §. 272) das Integral:

$$y = c_1 \cos.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) + c_2 \sin.\left(x\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) + \frac{A}{P}(l - x).$$

Für die drei Unbekannten c_1, c_2 und A hat man die drei Bedingungen, daß:

$$x = 0,\ y = 0;\ \text{ferner}\ x = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0\ \text{und}\ x = l,\ y = 0$$

zusammengehörige Werthe sind. Nach Einsetzung dieser Größen erhält man:

$$1)\quad 0 = c_1 + \frac{A}{P} l,$$

$$2)\quad 0 = c_2 \sqrt{\frac{P}{WE}} - \frac{A}{P},$$

$$3) \quad 0 = c_1 \cos.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) + c_2 \sin.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right).$$

Aus 1) und 2) folgt:

$$c_1 = -\,l c_2 \sqrt{\frac{P}{WE}}$$

und daraus und aus 3):

$$l c_2 \sqrt{\frac{P}{WE}} \cos.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right) = c_2 \sin.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)$$

oder:

$$l\sqrt{\frac{P}{WE}} = tang.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right).$$

Diese Gleichung enthält wiederum die Durchbiegung nicht, und man muß daraus ebenso wie in §. 272 schließen, daß, wenn P einen solchen Werth annimmt, daß diese Bedingung erfüllt ist, eine Biegung bis zu jeder beliebigen Größe, also bis zum Bruche eintreten kann. Man wird daher wiederum P so klein nehmen müssen, daß überhaupt eine Biegung nicht eintritt, also kleiner als den Werth, welcher der Gleichung

$$l\sqrt{\frac{P}{WE}} = tang.\left(l\sqrt{\frac{P}{WE}}\right)$$

genügt. Dieser Gleichung, welche sich schreiben läßt $n = tang.\, n$, genügen unendlich viele Bögen n; der kleinste darunter ist der Bogen von 257° 27′, es ist nämlich:

$$arc.\, 257^0\, 27' = 2\pi \cdot \frac{257^0\, 27'}{360^0} = 4{,}494$$

und

$$tang.\, 257^0\, 27' = tang.\, 77^0\, 27' = 4{,}494.$$

Es geht sonach obige Bedingungsgleichung über in:

$$l\sqrt{\frac{P}{WE}} = 4{,}494 \text{ oder } P = 20{,}19\,\frac{WE}{l^2} = 2{,}046\,\pi^2\,\frac{WE}{l^2}.$$

Anmerkung 2. Wenn in den Entwickelungen dieses und des vorigen Paragraphen in dem Ausdrucke für P die Durchbiegung a nicht vorkommt, die letztere daher ganz unbestimmt, weil von P nicht abhängig erscheint, so liegt der Grund hiervon darin, daß in der Gleichung $M = \frac{WE}{r}$ für $\frac{1}{r}$ der angenäherte Werth

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

gesetzt worden ist. Führt man für r den genauen Werth

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

ein (vergl. §. 223), so ergiebt die Ausführung der Rechnung für P allerdings einen von a abhängigen Werth:

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE.\left[1 + (1/2)^2 \cdot \frac{P}{WE}\,\frac{a^2}{4} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{P}{WE}\,\frac{a^2}{4}\right)^2 + \cdots\right]^2$$

Läßt man hierin die Durchbiegung a bis zum Verschwinden abnehmen, so geht dieser Ausdruck in die oben gefundene Formel

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$$

über. Ueberhaupt sind die mit $\frac{P}{WE}\,\frac{a^2}{4}$ behafteten Glieder in der Parenthese, da a in der Praxis in den meisten Fällen nur klein ist, gegen 1 verschwindend klein. Die oben gemachte Voraussetzung erscheint daher gerechtfertigt, daß man die Belastung P jedenfalls kleiner nehmen muß als $\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$, bei welcher Belastung überhaupt erst eine Biegung möglich wird, denn der schärfere Ausdruck für P zeigt, wie wenig die Belastung nur zu wachsen braucht, um sofort beträchtliche und gefährliche Durchbiegungen hervorzurufen.

Beispiel. Der Kolben einer Dampfmaschine hat 0,5 Meter Durchmesser, und es beträgt der größte Dampfdruck 0,04 Kilogr. auf jeden Quadratmillimeter. Wie stark muß die schmiedeeiserne Kolbenstange gemacht werden, wenn deren größte freie Länge 1,2 Meter beträgt, und welche Stärke hat man der schmiedeeisernen Kurbelstange von 3 Meter Länge in der Mitte zu geben, wenn man eine sechsfache Sicherheit voraussetzt.

Der Kolbendruck beträgt $\frac{500^2}{4}\cdot\pi\, 0{,}04 = 196350 \,.\, 0{,}04 = 7854$ Kilogr. Man hat daher für die Kolbenstange (Fall III.):

$$6P = 6 \,.\, 7854 = 4\pi^2 \frac{WE}{l^2} = 4\pi^2 \frac{\pi d^4}{64 \,.\, 1200^2}\, 19700,$$

woraus $d = 36{,}6$ Millimeter sich berechnet. Die Kolbenstange würde man mit Rücksicht auf Abnutzung in der Stopfbüchse etwas stärker, und wohl auch von Stahl herstellen.

Für die Kurbelstange gilt (Fall II.):

$$6 \,.\, 7854 = \frac{\pi^2}{l^2}\, WE = \frac{\pi^2}{3000^2}\,\frac{\pi d_1^4}{64}\, 19700,$$

woraus $d_1 = 81{,}6$ Millimeter als Stärke in der Mitte folgt.

§. 274. **Grenze zwischen Zerdrücken und Zerknicken.** Die Formel $P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE$ für den Fall I., §. 273, ergiebt für die Festigkeit P der Säule um so größere Werthe, je kleiner die Länge l ist, so daß in der Grenze, wo l sich dem Werthe Null nähert, die Festigkeit unendlich groß werden würde. Es ist der Werth von P aber jedenfalls dadurch beschränkt, daß er höchstens gleich FK_{II} werden kann, wenn F den Querschnitt und K_{II} den Festigkeitsmodul des Zerdrückens bedeuten. Setzt man diese beiden Werthe für die Festigkeit des Zerdrückens und des Zerknickens einander gleich, so folgt aus:

$$FK_{II} = \frac{\pi^2}{4l^2}\, WE;\quad l^2 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{W}{F}\,\frac{E}{K_{II}}$$

für diejenige Grenze der Länge l, bei welcher die Rechnung für Zerknicken und Zerdrücken gleiche Resultate liefert.

Bezeichnet man das Verhältniß $\frac{W}{F}$ mit u, so ist für den rechteckigen Querschnitt mit den Seiten b und h, (h die kleinere Seite):

$$\frac{W}{F} = u = \frac{b h^3}{12 b h} = \frac{h^2}{12};$$

für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d:

$$u = \frac{{}^1/_{64}\,\pi d^4}{{}^1/_4\,\pi d^2} = \frac{d^2}{16};$$

für den ringförmigen Querschnitt (hohle Säule) mit den Durchmessern d und $d_1 = \mu d$:

$$u = \frac{{}^1/_{64}\,\pi (d^4 - d_1^4)}{{}^1/_4\,\pi (d^2 - d_1^2)} = \frac{d^2 + d_1^2}{16} = \frac{(1 + \mu^2) d^2}{16}.$$

Ferner ist das Verhältniß $\frac{E}{K_{\text{II}}} = v$

bei Gußeisen: $\frac{10000}{75} = 133{,}3$,

„ Schmiedeeisen: $\frac{20000}{22} = 910$,

„ Holz: $\frac{1100}{4{,}8} = 229{,}2$.

Durch Einsetzung dieser Werthe für $\frac{W}{F}$ und $\frac{E}{K_{\text{II}}}$ in die Formel

$$l = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{W}{F}\,\frac{E}{K_{\text{II}}}} \text{ folgt:}$$

Für	Gußeisen.	Schmiedeeisen.	Holz.
1) Rechteck . . . . $\frac{l}{h} =$	5,23	13,66	6,86
2) Kreis . . . . . $\frac{l}{d} =$	4,53	11,85	5,94
3) Ring . . . . . $\frac{l}{d} =$	$4{,}53\sqrt{1+\mu^2}$	$11{,}85\sqrt{1+\mu^2}$	—
für $\mu = 1$ . . $\frac{l}{d} =$	6,41	16,75	—

Der Werth $\sqrt{1 + \mu^2}$ liegt zwischen 1 und $\sqrt{2} = 1{,}414$, daher sind in der letzten Columne obiger Tabelle, entsprechend einer verhältnißmäßig

geringen Wandstärke, wobei $\mu^2 = 1$ genommen werden kann, die Werthe $\frac{l}{d}$ angegeben. Ist z. B. bei einer schmiedeeisernen Röhre die Wandstärke 0,010ᵐ, der äußere Durchmesser 0,300ᵐ, so ist $\mu = \frac{280}{300} = 0,933$ und

$$\sqrt{1 + \mu^2} = \sqrt{1,87} = 1,367.$$

Die in obiger Tabelle enthaltenen Werthe für das Grenzverhältniß $\frac{l}{h}$ resp. $\frac{l}{d}$ gelten für den in §. 273 mit I. bezeichneten Fall, d. i. für einen Stab, welcher an einem Ende befestigt, am anderen frei ist. Für die übrigen mit II., III. und IV. bezeichneten Befestigungsweisen sind die Werthe der Tabelle mit resp. $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{8}$, also mit 2, 4 und 2,8 zu multipliciren. Wenn allgemein $P = \alpha \frac{WE}{l^2}$ gesetzt wird, worin α die Werthe $\frac{\pi^2}{4}$, π^2, $4\pi^2$ oder $2\pi^2$ annehmen kann, so ergiebt sich diejenige Länge l, bei welcher die Formeln für Zerdrücken und Zerknicken gleiche Werthe für P ergeben, durch:

$$l_0 = \sqrt{\alpha \frac{W}{F} \frac{E}{K_{II}}} = \sqrt{\alpha u v}.$$

Nach dem Vorhergehenden müßte man daher die Festigkeit einer Säule entweder nach der Zerdrückungsformel $P_1 = FK_{II}$, oder nach der Zerknickungsformel $P_2 = \alpha \frac{WE}{l^2}$ berechnen, je nachdem ihre Länge kleiner oder größer als $l_0 = \sqrt{\alpha u v}$ ist. Es muß jedenfalls auffällig erscheinen, daß die Festigkeit des Stabes von der Länge desselben erst von dem Augenblicke an abhängig sein soll, in welchem diese Länge die bestimmte Größe l_0 überschreitet, während geringere Längen einen Einfluß darauf nicht ausüben sollen. Die Erfahrung stimmt damit nicht überein, indem sie zeigt, daß zwar ein Stab von außerordentlich geringer Länge die Festigkeit $P_1 = FK_{II}$ hat, daß aber mit der Längenzunahme die Festigkeit stetig abnimmt. Um diesem Verhalten gehörig Rechnung zu tragen, hat Grashof*) eine empirische Formel angegeben, welche mit der Erfahrung gut übereinstimmende Resultate liefert. Danach ist nämlich die Bruchkraft P ausgedrückt durch:

$$P = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = \frac{FK_{II} \cdot \alpha \frac{WE}{l^2}}{FK_{II} + \alpha \frac{WE}{l^2}}.$$

*) Grashof, Die Festigkeitslehre Seite 117.

Dieser Ausdruck geht für ein sehr kleines l in $P_1 = F K_{\text{II}}$ und für ein großes l in $P_2 = \alpha \frac{W E}{l^2}$ über. Um die Formel für die Rechnung bequemer zu machen, kann man setzen:

$$P = \frac{F K_{\text{II}}}{\frac{F}{W} \frac{K_{\text{II}}}{E} \frac{l^2}{\alpha} + 1} = \frac{F K_{\text{II}}}{\frac{l^2}{\alpha u v} + 1} = F \frac{K_{\text{II}}}{\frac{l^2}{\alpha u v} + 1}.$$

Es ergiebt sich hieraus, daß die Säule berechnet werden kann wie ein auf Zerdrücken beanspruchter Körper, nur hat man als Festigkeitsmodul nicht K_{II}, sondern $\frac{K_{\text{II}}}{\frac{l^2}{\alpha u v} + 1}$ einzuführen. Dieser Werth $k = \frac{1}{1 + \frac{l^2}{\alpha u v}} K_{\text{II}}$ ist außer von dem Materiale $\left(v = \frac{E}{K_{\text{II}}}\right)$ noch von der Länge l, dem Querschnitte $\left(u = \frac{W}{F}\right)$ und der Befestigungsart der Säule (α) abhängig. Die folgenden Tabellen enthalten für die in der Praxis häufigsten Fälle die Werthe von $\frac{1}{1 + \frac{l^2}{\alpha u v}}$. Da diese Werthe den Bruchbelastungen entsprechen, so muß man hierin, um die Tragkraft der Säule zu erhalten, einen gewissen Bruchsicherheitscoefficienten n einführen, welcher passend

für Gußeisen zu . . . $n = 6$,
„ Schmiedeeisen zu . . $n = 4$ bis 5,
„ Holz zu . . . . $n = 10$ bis 12

angenommen werden kann.

Der Querschnitt ist ein Rechteck.

$\frac{l}{h} =$	5	10	15	20	25	30	40	50
Gußeisen.								
I.	0,53	0,22	0,11	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02
II.	0,81	0,53	0,33	0,22	0,15	0,11	0,06	0,04
III.	0,94	0,82	0,66	0,53	0,42	0,33	0,22	0,15
IV.	0,88	0,69	0,50	0,36	0,27	0,20	0,12	0,08
Schmiedeeisen.								
I.	0,88	0,65	0,45	0,32	0,23	0,17	0,11	0,07
II.	0,97	0,88	0,77	0,65	0,54	0,45	0,32	0,23
III.	0,99	0,97	0,93	0,88	0,83	0,77	0,65	0,54
IV.	0,98	0,94	0,87	0,79	0,70	0,62	0,48	0,38
Holz.								
I.	0,65	0,32	0,18	0,10	0,07	0,05	0,03	0,02
II.	0,89	0,65	0,46	0,32	0,23	0,18	0,10	0,07
III.	0,97	0,89	0,77	0,65	0,55	0,46	0,32	0,23
IV.	0,93	0,80	0,63	0,50	0,38	0,30	0,19	0,13

Der Querschnitt ist ein Kreis.

$\frac{l}{d} =$	5	10	15	20	25	30	40	50
Gußeisen.								
I.	0,45	0,17	0,08	0,05	0,03	0,02	0,013	0,008
II.	0,77	0,45	0,27	0,17	0,12	0,08	0,05	0,03
III.	0,93	0,77	0,60	0,45	0,34	0,27	0,17	0,12
IV.	0,87	0,62	0,41	0,30	0,21	0,16	0,09	0,06
Schmiedeeisen.								
I.	0,85	0,58	0,38	0,27	0,18	0,14	0,08	0,05
II.	0,95	0,85	0,71	0,58	0,47	0,38	0,27	0,18
III.	0,99	0,95	0,90	0,85	0,78	0,71	0,58	0,47
IV.	0,98	0,92	0,83	0,74	0,64	0,53	0,41	0,31
Holz.								
I.	0,59	0,27	0,14	0,08	0,06	0,04	0,03	0,015
II.	0,85	0,59	0,38	0,27	0,19	0,14	0,08	0,06
III.	0,96	0,85	0,72	0,59	0,48	0,38	0,27	0,19
IV.	0,92	0,70	0,56	0,42	0,31	0,24	0,15	0,11

Anmerkung. I., II., III., IV. zeigen an, daß die Befestigung der Säule den gleichbezeichneten Fällen in §. 273 entsprechend angeordnet ist.

Beispiel. Der Ausleger eines Krahns ist 10 Meter lang und hat einem in seiner Axe wirksamen Drucke von 30000 Kilogramm zu widerstehen. Wenn derselbe als schmiedeeiserne Säule construirt werden soll, deren innerer Durchmesser 0,95 von dem äußeren beträgt, wie groß sind die Stärken in der Mitte bei fünffacher Sicherheit zu wählen?

Es ist hier $\alpha = \pi^2 = 9,87$ (II. Fall), $K_{II} = 22$; $v = \frac{E}{K_{II}} = \frac{20000}{22} = 910$ und $u = \frac{(1 + \mu^2)}{16} d^2 = \frac{1 + 0,95^2}{16} d^2 = 0,119 d^2$. Setzt man diese Werthe und für F denjenigen: $F = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4} d^2 (1 - \mu^2) = 0,0765\, d^2$ in die obige Formel, so erhält man:

$$5 \,.\, 30000 = 0,0765\, d^2 \frac{22}{\frac{10000^2}{9,87 \,.\, 910 \,.\, 0,119\, d^2} + 1}$$

oder

$$150000 = \frac{1,683\, d^2}{\frac{93563}{d^2} + 1}.$$

Diese Gleichung formt sich um in:

$$\frac{14034'450000}{d^2} + 150000 = 1,683\, d^2$$

oder

$$d^4 - 89127\, d^2 = 8319769300,$$

woraus

$$d^2 = 44563 + \sqrt{10305'630269} = 146079$$

und

$$d = 382,2 \text{ Millimeter, also}$$
$$d_1 = 0,95 \,.\, 382,2 = 363 \text{ Millimeter folgt,}$$

daher ist die Wandstärke:

$$\delta = \frac{d - d_1}{2} = \frac{382,2 - 363}{2} = 9,6 \text{ Millimeter.}$$

Der Querschnitt des Auslegers beträgt:

$$F = 0,0765\, d^2 = 0,0765 \,.\, 146079 \doteq 11175 \text{ Quadratmillimeter,}$$

daher kommt auf jeden Quadratmillimeter eine Anstrengung von $\frac{30000}{11175} = 2,685$ Kilogramm.

Hodgkinson's Versuche. — Ueber die Festigkeit des Zerknickens §. 275. hat vorzugsweise Hodgkinson Versuche angestellt, deren Ergebnisse um so schätzbarer sind, als die Theorie der Festigkeit gegen Zerknicken sehr unsicher ist. Diese Versuche (s. Barlow's Bericht in den Philosophical Transactions, 1840) bestätigen wenigstens eine angenäherte Richtigkeit der im Vorstehenden entwickelten Formeln. Nach diesem Experimentator ist die Formel

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 WE = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{\pi d^4}{64} E = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 \frac{b^4}{12} E$$

für prismatische Säulen mit kreisförmigen und quadratischen Querschnitten,

wenn man darin für E einen besonderen Erfahrungswerth setzt, für Holz unbedingt richtig. Für Schmiedeeisen ist dagegen diese Formel nur dann genügend, wenn man anstatt d^4 die Potenz $d^{3,76}$ resp. $d^{3,55}$, und für Gußeisen ausreichend genau, wenn man für d^4 und l^2 die Potenzen $d^{3,76}$ resp. $d^{3,55}$ und $l^{1,7}$ einführt.

Die Hauptergebnisse dieser Versuche an prismatischen Säulen mit kreisförmigen und quadratischen Querschnitten sind von Hodgkinson in den folgenden empirischen Formeln dargestellt. Dabei beziehen sich die unter II. angegebenen Formeln auf den mit II. bezeichneten Fall, daß die Säulen beiderseits mit abgerundeten oder zugeschärften Enden versehen sind, und daß $\frac{l}{b}$ resp. $\frac{l}{d}$ größer als 15 ist. Die unter III. angeführten Formeln hingegen gelten für die mit III. (im §. 273) bezeichnete Stützungsart der Säule, bei welcher die Enden rechtwinkelig zur Axe abgeschnitten sind, die elastische Linie sich daher an beiden Enden an die ursprüngliche gerade Säulenaxe tangential anschließen muß, und unter der Bedingung, daß $\frac{l}{b}$ oder $\frac{l}{d}$ größer als 30 ist.

Für den Fall I. (ein Ende eingespannt, das andere abgerundet und frei) beträgt die Festigkeit nur ein Zehntel von der im Falle III.

Für den Fall IV. endlich (ein Ende eingespannt, das andere abgerundet und in der Axe geführt) ist die Bruchbelastung gleich dem arithmetischen Mittel aus den Resultaten unter II. und III. zu setzen.

Die Kraft P ist in Kilogrammen, die Dimensionen sind in Millimetern zu nehmen.

Tabelle der Kräfte P zum Zerknicken langer Säulen.

	II. $\frac{l}{b}$ oder $\frac{l}{d} > 15$.	III. $\frac{l}{b}$ oder $\frac{l}{d} > 30$.
1) Massive gußeiserne Säule mit kreisförm. Querschnitt.	$P = 1320 \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 7720 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$
2) Hohle gußeiserne Säule mit ringförmigem Querschnitt.	$P = 1152 \frac{d^{3,76} - d_1^{\,3,76}}{l^{1,7}}$	$P = 7752 \frac{d^{3,55} - d_1^{\,3,55}}{l^{1,7}}$
3) Massive schmiedeeiserne Säule mit kreisförmig. Querschnitt.	$P = 21098 \frac{d^{3,76}}{l^2}$	$P = 130045 \frac{d^{3,55}}{l^2}$
4) Quadratische Säule aus trockenem Danziger Eichenholz.	—	$P = 2483 \frac{b^4}{l^2}$
5) Quadratische Säule aus trockenem Fichtenholz.	—	$P = 1771 \frac{b^4}{l^2}$

Nach Hodgkinson soll das trockene Holz doppelt so große Festigkeit besitzen, wie das frisch gefällte.

Bei sechsfacher Sicherheit ist hiernach die Tragkraft für gußeiserne Säulen:

$$P = \frac{1320}{6} \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}} = 220 \frac{d^{3,76}}{l^{1,7}}$$

im zweiten, und

$$P = \frac{7720}{6} \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}} = 1287 \frac{d^{3,55}}{l^{1,7}}$$

im dritten Falle, und

$$d = \left[\frac{P \,.\, l^{1,7}}{220}\right]^{0,266}$$

im zweiten und

$$d = \left[\frac{P \,.\, l^{1,7}}{1287}\right]^{0,2817}$$

im dritten Falle, u. s. w.

Beispiel. Wie groß ergeben sich nach den Resultaten der Hodgkinson'schen Versuche die Dimensionen der in §. 273 berechneten Kolbenstange und Kurbelstange? Man hat für die Kolbenstange (Fall III.):

$$d = \sqrt[3,55]{\frac{P l^2}{130045}},$$

also bei 6facher Sicherheit und $l = 1,200$ Meter

$$d = \sqrt[3,55]{\frac{7854 \,.\, 6 \,.\, 1200^2}{130045}} = 40,8 \text{ Millimeter}$$

(in §. 273 war $d = 36,6$ gefunden).

Ebenso ist für die Kurbelstange:

$$d_1 = \sqrt[3,76]{\frac{P l^2}{21098}} = \sqrt[3,76]{\frac{7854 \,.\, 6 \,.\, 3000^2}{21098}} = 87,6 \text{ Millimeter}$$

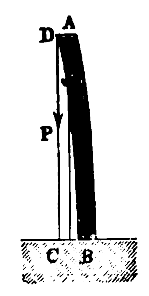
(in §. 273 fand sich 81,6 Millimeter).

Einfachere Bestimmung der Tragkraft der Säulen. Die vorstehenden Formeln für das Biegen und Zerknicken der Säulen sind unter der Voraussetzung entwickelt worden, daß die Kraft P genau im Endpunkte A der Längenaxe der Säule angreift; da aber dieser Forderung in der Praxis nie genau Genüge geschehen kann, und dieses centrische Angreifen auch aufhört, sowie die Biegung des Körpers eintritt, so ist es rathsam, bei Bestimmung der Tragkraft einer Säule gleich von vornherein mit auf den excentrischen Angriff Rücksicht zu nehmen. §. 276.

Setzen wir bei dieser Bestimmung voraus, daß der Angriffspunkt D der

Kraft P um $DA = c$ von dem Ende A der Axe der Säule AB, Fig. 488, abstehe, und nehmen wir an, daß die Durchbiegung a der Säule klein sei gegen c. Dann können wir die von der Säulenaxe gebildete elastische Linie als einen Kreis vom Halbmesser $r = \frac{l^2}{2a}$ ansehen. Nun ist aber

Fig. 488.



$P(a + c) r = WE$, daher folgt

$P(a + c) l^2 = 2 WEa$, sowie

$$a = \frac{Pl^2c}{2WE - Pl^2}, \text{ und}$$

$$a + c = \frac{2WEc}{2WE - Pl^2}.$$

Bezeichnet nun F den Querschnitt der Säule, und e die halbe Dicke derselben, gemessen in der Ebene ABD, so ist die durch den Druck P hervorgebrachte gleichmäßige Spannung in jedem Querschnitte der Säule:

$$S_1 = \frac{P}{F},$$

und die durch das Kraftmoment $P(a + c)$ hervorgebrachte Spannung am äußeren Umfange derselben:

$$S_2 = \frac{P(a + c)e}{W} = \frac{2PEce}{2WE - Pl^2},$$

und es folgt daher die Maximalspannung der Säule:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P}{F} + \frac{2PEce}{2WE - Pl^2} = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{2EFce}{2WE - Pl^2}\right).$$

Setzt man nun S = dem Tragmodul T, so folgt

$$P\left(1 + \frac{2EFce}{2WE - Pl^2}\right) = FT, \text{ oder}$$

$$P(2WE - Pl^2 + 2EFce) = (2WE - Pl^2)FT.$$

Ist nun Pl^2 gegen $(W + Fce)E$ klein, so läßt sich setzen

$$P = \frac{2WEFT}{2E(W + Fce) + FTl^2} = \frac{FT}{1 + \frac{Fce}{W} + \frac{FT}{2WE}l^2}, \text{ oder}$$

$$P = \frac{FT}{\varphi + \psi\frac{l^2}{d^2}},$$ wenn φ und ψ besondere Erfahrungszahlen bezeichnen.

Der Civilingenieur Love (s. Mémoire sur la Résistance du fer et de la fonte etc., Paris 1852) folgert aus den Versuchen von Hodgkinson die Werthe $\varphi = 0{,}45$ und $\psi = 0{,}00337$; es ist also hiernach:

$$P = \chi F T = \frac{F T}{1{,}45 + 0{,}00337 \left(\frac{l}{d}\right)^2},$$

woraus sich dann folgende Tabelle für den Coefficienten

$$\chi = \frac{1}{1{,}45 + 0{,}00337 \left(\frac{l}{d}\right)^2} \text{ berechnen läßt.}$$

$\frac{l}{d} =$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\chi =$	0,559	0,357	0,223	0,146	0,101	0,0735	0,0556	0,0435	0,0347	0,0285

Diese Werthe für χ sind also mit dem oben (§. 217 und 218) angegebenen Tragmodul T des Zerdrückens zu multipliciren, um bei einem gegebenen Längenverhältnisse die Tragmodel langer Säulen zu bestimmen.

Der General Morin theilt nach Rondelet folgende Tabelle mit, welche jedoch für Säulen von mittlerer Länge zu große Werthe für χ giebt.

$\frac{l}{d} =$	1	12	24	36	48	60	72
$\chi =$	1	$^5/_6$	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_6$	$^1/_{12}$	$^1/_{24}$

Beispiele. 1) Welche Last kann eine 5 Meter lange Säule von Fichtenholz tragen, deren Querschnitt ein Kreis von 0,3 Meter Durchmesser ist? Für eine kurze Säule wäre nach Tabelle auf Seite 417, der Tragmodul $T = 1{,}8$ Kilogramm, da aber hier das Verhältniß der Länge zur Stärke, $\frac{l}{d} = \frac{5}{0{,}3} = 16{,}67$ ist, so hat man:

$$\chi = \frac{1}{1{,}45 + 0{,}00337 \,.\, 16{,}67^2} = \frac{1}{2{,}338} = 0{,}420,$$

daher den Tragmodul nur $\chi T = 0{,}420 \,.\, 1{,}8 = 0{,}76$ Kilogramm, und daraus die gesuchte Tragkraft:

$$P = 0{,}76 \,.\, 3{,}14 \frac{300^2}{4} = 53721 \text{ Kilogramm.}$$

Der Sicherheit wegen ist jedoch nur etwa $^1/_3$ dieses Werthes als Belastung anzunehmen, also:

$$P = \frac{53721}{3} = 17907 \text{ Kilogramm.}$$

2) Wie stark ist eine frei aufstehende hohle cylindrische Säule aus Gußeisen zu machen, welche bei einer Länge von 8 Meter eine Last von 50000 Kilogramm zu tragen vermag?

Nehmen wir den Durchmesser der Höhlung d_1 gleich $^3/_5$ des äußeren Durchmessers d der Säule an, so haben wir nach §. 273 (II. Fall):

$$P = \frac{\pi^2}{l^2}\; WE = \frac{\pi^3}{l^2}\,\frac{d^4 - d_1^{\,4}}{64}\; E = \frac{\pi^3}{l^2}\,\frac{d^4}{64}\,[1 - (^3/_5)^4]\; E.$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $P = 50000$, $l^2 = 8000^2$, $\pi^3 = 31$ und für E nur $\frac{E}{10} = \frac{10000}{10} = 1000$, so folgt

$$d = \sqrt[4]{\frac{50000\;.\;64\;.\;8000^2}{1000\,(1 - 0{,}13)\,.\,31}} = 293{,}5 \text{ Millimeter oder rund } 0{,}3 \text{ Meter}$$

und also der Durchmesser der Höhlung

$$d_1 = {^3/_5}\;.\;0{,}300 = 0{,}18 \text{ Meter.}$$

Unsere letzte Formel giebt, wenn wir

$$\frac{l}{d} = \frac{8}{0{,}3} = 26{,}67$$

annehmen, den gesuchten Querschnitt der Säule:

$$F = (1{,}45 + 0{,}00337\;.\;26{,}67^2)\,\frac{P}{T} = \frac{3{,}85\;.\;50000}{T} = \frac{192500}{T},$$

und setzen wir nun noch

$$T = {^1/_3}\;13{,}13 = 4{,}4 \text{ Kilogramm, so erhalten wir:}$$

$$F = \frac{192500}{4{,}4} = 43750 \text{ Quadratmillimeter.}$$

Nun ist $F = \frac{\pi}{4}\,(d^2 - d_1^{\,2}) = \pi\, d^2\;.\;0{,}16$, folglich ist die gesuchte Stärke:

$$d = \sqrt{\frac{F}{0{,}16\;.\;\pi}} = \sqrt{\frac{43750}{0{,}16\;.\;\pi}} = 294{,}67 \text{ Millimeter,}$$

wofür rund 0,3 Meter wie oben zu setzen ist.

§. 277. **Körper von gleicher Zerknickungsfestigkeit.** Nach dem Vorhergehenden soll die Belastung eines säulenartigen Körpers immer unter demjenigen Betrage bleiben, bei welchem überhaupt eine Biegung erst möglich wird. Man kann sich aber nun die Aufgabe stellen, die Querschnittsverhältnisse des Körpers so zu bestimmen, daß für den Fall, daß durch eine übermäßige Belastung doch eine Biegung des Körpers eintreten sollte, die Maximalspannung und also auch die Wahrscheinlichkeit eines Bruches in allen Querschnitten dieselbe sein soll. Man erhält dadurch einen Körper von gleicher Zerknickungsfestigkeit. Setzt man hierbei einen an einem Ende befestigten Stab voraus, dessen anderes gedrücktes Ende ganz frei ist, so setzt sich, im Falle einer eintretenden Biegung um a, die maximale Spannung in irgend einem Querschnitte aus zwei Theilen S_1 und S_2 zusammen. Der erste Theil S_1 ist für alle Querschnitte gleich groß, nämlich

$$S_1 = \frac{P}{F},$$

und allein vorhanden, so lange eine Biegung nicht eintritt. Der durch die Biegung hervorgerufene zweite Theil S_2 ergiebt sich durch die Beziehung (vergl. Fig. 481):

$$M = P(a - y) = S_2 \frac{W}{e} \text{ zu } S_2 = P\frac{a - y}{W} e,$$

so daß man, wenn k die höchstens zulässige für alle Querschnitte gleiche Maximalspannung bedeutet, die Bedingungsgleichung aufstellen kann:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{P}{F} + P\frac{a - y}{W} e = k.$$

Aus dieser Gleichung könnte man die Dimensionen irgend eines Querschnittes (also W und F) aus y bestimmen, und wenn man aus der Gleichung der elastischen Linie y durch x ausdrückte, so ließen sich die Dimensionen auch für jedes x ermitteln. Es ist natürlich, daß man hierbei, um die Gleichung der elastischen Linie zu ermitteln, für den Krümmungshalbmesser r seinen genauen Werth

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}}$$

setzen müßte, weil nur diese Substitution eine Beziehung zwischen P und der Durchbiegung ergiebt (vergl. §. 273). Abgesehen von der schwierigen Durchführung einer derartigen Rechnung würde das erhaltene Resultat aus dem Grunde von sehr zweifelhaftem Werthe sein, weil, wie im §. 273 auch angegeben worden, sobald P einen gewissen Werth erreicht hat, eine sehr geringe Vergrößerung von P die Durchbiegung mithin Spannung erheblich steigern muß.

Wenn man für r den angenäherten Werth

$$r = \frac{1}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

setzen wollte, so würde, wie im Vorhergehenden, die Durchbiegung a ganz aus der Rechnung herausfallen, und die Dimensionen der Säule würden sich dann gar nicht bestimmen lassen. Um wenigstens das Verhältniß der Dimensionen von zwei verschiedenen Querschnitten im Abstande x und x_1 zu ermitteln, hat man wohl versucht, von der Spannung

$$S = P\frac{a - y}{W} e + \frac{P}{F}$$

den ersten, von der Biegung herrührenden Theil $P\frac{a - y}{W} e$ für sich allein für alle Querschnitte constant zu machen. Hierdurch gelangt man allerdings zu einem Ausdrucke für das Dimensionenverhältniß zweier beliebigen Querschnitte. Da aber diese Rechnung auf der Vernachlässigung von $\frac{P}{F}$ gegen

$P\,\frac{a-y}{W}\,e$, d. i. von $\frac{W}{F}$ gegen $(a - y)\,e$ beruht, so dürfte dieser Ausdruck dem wahren Körper gleichen Widerstandes nur annähernd entsprechen.

Anmerkung. Die angedeutete Rechnung läßt sich für eine Säule mit kreisförmigem Querschnitte folgendermaßen ausführen. Sei z der Halbmesser irgend eines Querschnittes der Säule AB, Fig. 489, z_0 derjenige bei B, so ist, wenn nur die Biegungsspannung berücksichtigt wird:

Fig. 489.

$$M = P\,(a - y) = \frac{W}{z}\,S = \frac{\pi z^3}{4}\,S;$$

woraus durch Differenziation

$$\partial y = -\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{S}{P}\,z^2\,\partial z \text{ folgt.}$$

Ferner ist:

$$S = \frac{Ez}{r} = Ez\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Ez\,\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x}$$

und

$$S\,\partial y = Ez\,\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nun ist aber nach Obigem auch

$$S\,\partial y = -\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{S^2}{P}\,z^2\,\partial z,$$

folglich hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\,\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{S^2}{EP}\,z\,\partial z;$$

woraus man erhält:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = -\,\frac{3\pi \cdot S^2}{4\;EP}\,z^2 + Const.$$

Im Fußpunkte B ist $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ und $z = z_0$; daher folgt:

$$Const. = \frac{3\pi}{4}\,\frac{S^2}{EP}\,z_0^2,$$

und es ist:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S\sqrt{\frac{3\pi}{4EP}}\,\sqrt{z_0^2 - z^2} = -\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{S}{P}\,z^2\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Hieraus findet sich:

$$\partial x = -\sqrt{\frac{3\pi E}{4P}}\,\frac{z^2\,\partial z}{\sqrt{z_0^2 - z^2}}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt, mit Rücksicht darauf, daß in A, d. i. für $x = l$, $y = a$, also $S = 0$ und daher $z = 0$ sein muß:

$$l - x = \sqrt{\frac{3\pi E}{16P}}\left(z_0^2\,arc.\,sin.\,\frac{z}{z_0} - z\sqrt{z_0^2 - z^2}\right),$$

und es folgt für das Verhältniß der Halbmesser eines beliebigen Querschnittes im Abstande x zu dem Querschnitte in B die Gleichung:

$$\frac{l - x}{l} = \frac{2}{\pi}\left[arc.\,sin.\,\frac{z}{z_0} - \frac{z}{z_0}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}\right].$$

Die Bruchkraft folgt, wenn man $x = 0$ setzt, aus

$$l = \sqrt{\frac{3\pi E}{16 P}} \cdot z_0^2 \frac{\pi}{2} \text{ zu } P = {}^3/_4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\pi z_0^4 E}{4 l^2} = {}^3/_4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{W E}{l^2}.$$

Es wäre sonach der Basishalbmesser z_0 einer Säule von gleichem Widerstande $= \sqrt[4]{4/3} = 1{,}075$ mal so groß zu machen, als derjenige einer cylindrischen Säule von gleicher Länge und gleicher Tragkraft.

Die hier gefundenen Resultate beruhen, wie schon bemerkt, auf der Vernachlässigung der durch P erzeugten directen Pressung. Sie können daher nur so lange gelten, als $\frac{W}{F}$ gegen $(a - y)\, e$, d. i. $\frac{z}{4}$ gegen $a - y$ verschwindend klein ist. Der Werth $a - y$ liegt zwischen den Grenzen a im Fußpunkte B und Null im Punkte A, und man erkennt daraus, daß die Vernachlässigung von $\frac{P}{F}$ gegen $P \frac{a - y}{W} e$ um so größere Unrichtigkeiten herbeiführt, je näher der betreffende Querschnitt an A gelegen ist. In A selbst würde die angeführte Rechnung sogar zu einem Halbmesser $z = 0$ führen, während der Querschnitt F daselbst doch mit Rücksicht auf die rückwirkende Spannung mindestens gleich $\frac{P}{k}$ sein muß.

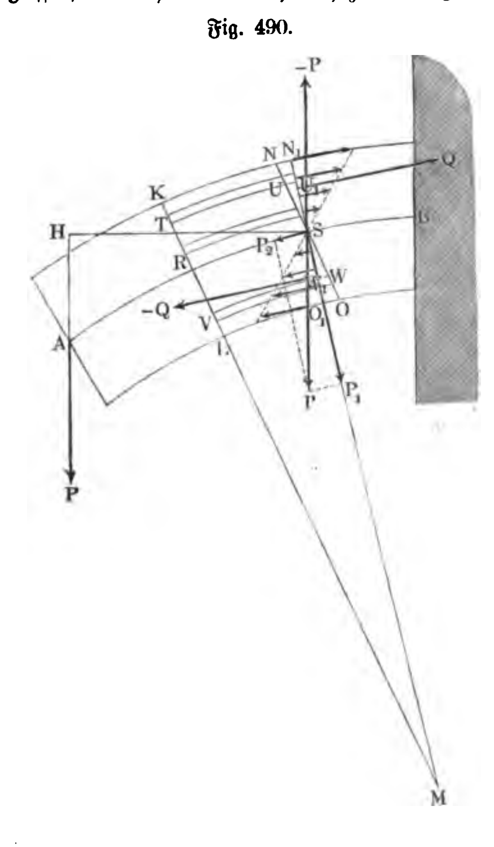
Man wird daher in den Fällen der Praxis am besten thun, von einer strengen Form gleicher Widerstandsfähigkeit abzusehen, und der Säule am Befestigungspunkte (für die Befestigungsart II. in §. 273 in der Mitte) eine Stärke geben, welche genügende Festigkeit gegen Zerknicken gewährt, während man die Stärke am Ende nach der Formel für Zerdrücken bestimmt. Läßt man dann diese beiden Dimensionen durch eine entsprechende möglichst einfache Curve, die im Fußpunkte tangential zur geraden Axe der Säule gerichtet ist, in einander übergehen, so wird man eine für die Praxis hinreichend angenäherte Form für die Säule erhalten. Diese Bemerkungen gelten hauptsächlich für die Form, welche man den Kurbelstangen zu geben pflegt, und ist hierbei zu berücksichtigen, daß die Dimensionen an den Enden meist schon durch die constructiven Rücksichten bestimmt sind, welche man auf die Anbringung der Zapfenlager und die Stärke der Zapfen zu nehmen hat.

Fünftes Capitel.

Die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit.

§. 278. **Zusammengesetzte Festigkeit.** Nicht selten wird ein Körper von zwei Kräften, z. B. von einer Zug- und einer Biegungskraft u. s. w., zugleich ergriffen, wodurch er natürlich auch zweierlei Formveränderungen, z. B. eine Ausdehnung und eine Biegung, zugleich erleidet. Man nennt die Kraft, mit welcher der Körper dieser mehrfachen Gestaltsveränderung widersteht, die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit, und es sollen im Folgenden die vorzüglichsten Fälle dieser Art näher untersucht werden.

Fig. 490.



Streng genommen hatten wir es schon in dem bei der Biegung eines Körpers $AKBO$, Fig. 490, zu Grunde gelegten Falle (§. 219) mit der zusammengesetzten Festigkeit zu thun, da sich eine am Ende A dieses Körpers angreifende Kraft $\overline{AP} = P$ auf ein Kräftepaar $(P, -P)$ und auf eine Kraft $\overline{SP} = P$ zurückführen läßt, wovon das erstere, welches wir zeither nur in Betracht gezogen haben, das Körperstück AS biegt, und die andere ein Abreißen dieses Stückes

von dem übrigen Theile SB zu bewirken sucht. Die letztere Kraft besteht wieder aus zwei Seitenkräften:

$$P_1 = P\, cos.\, \alpha$$

und

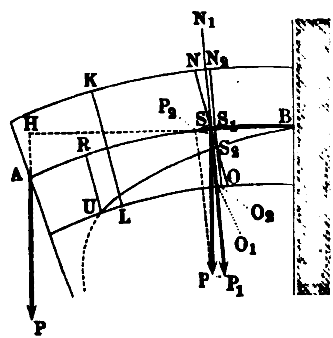
$$P_2 = P\, sin.\, \alpha$$

(§. 220), wovon die eine winkelrecht gegen die Fasern und die andere in der Axenrichtung der Fasern wirkt. Die Kraft P_2 vereinigt sich mit den Spannungen der Fasern in Folge der Biegung, vergrößert folglich die Ausdehnungen auf der Zugseite der neutralen Axe und vermindert dagegen die Zusammendrückungen auf der Druckseite. Die Größe der Ausdehnung, welche jede Faser $RS = KN$ u. s. w. von der Länge = Eins durch die Zugkraft $P\, sin.\, \alpha$ erleidet, ist (nach §. 210)

$$\sigma_1 = \frac{P\, sin.\, \alpha}{FE},$$

wenn F den Querschnitt NO des Körpers bezeichnet. Denkt man sich in diesem Abstande $\sigma_1 = SS_1$, Fig. 491, von der Ebene $N_1 O_1$, welche die Enden der durch die Biegung ausgedehnten Fasern KN_1, RS, LO_1 bestimmt, eine Parallelebene $N_2 O_2$ mit $N_1 O_1$, so bildet dieselbe die Begrenzung der den beiden Längenänderungen unterworfenen Fasern. Die Ebene $N_2 O_2$ schneidet die ursprüngliche Begrenzungsebene NO in S_2, und es entspricht daher dieser Durchschnitt S_2 der Lage der neutralen Axe. Der Abstand $SS_2 = e_1$ dieser neutralen Axe von der ursprünglichen, welche nur dem Biegungsmomente entspricht, bestimmt sich durch die Proportion:

Fig. 491.



$$\frac{SS_2}{SS_1} = \frac{SN}{NN_1}, \text{ d. i. } \frac{e_1}{\sigma_1} = \frac{e}{\sigma},$$

wonach also $e_1 = \frac{e}{\sigma}\sigma_1$ folgt.

Nun ist aber noch $\frac{e}{\sigma} = r$ (§. 224), daher ergiebt sich einfach:

$$e_1 = r\sigma_1 = \frac{P\, r\, sin.\, \alpha}{FE}.$$

Um diese Größe (e_1) ist auch der Krümmungshalbmesser r_1 der elastischen Linie AB größer, als der Werth, welcher sich für r bisher bei Vernachlässigung der Zugkraft $P\, sin.\, \alpha$ herausstellte; es ist also:

$$r_1 = r + e_1 = r\,(1 + \sigma_1) = r\left(1 + \frac{P\,sin.\,\alpha}{FE}\right).$$

Für den Winkel α hat man nach §. 235, wenn B den Coordinatenanfang bezeichnet:

$$sin.\,\alpha = \alpha = \frac{P}{WE}\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right) \text{ und da } r = \frac{WE}{P\,(l - x)} \text{ ist,}$$

so folgt

$$r\,sin.\,\alpha = \frac{2\,l\,x - x^2}{2\,(l - x)}, \text{ woraus}$$

$$e_1 = \frac{P}{2\,EF}\,\frac{2\,l\,x - x^2}{l - x} \text{ sich ergiebt.}$$

Hiernach fällt z. B. in B, wo $x = 0$ ist, $e_1 = 0$ und in A, oder für $x = l$, $e_1 = \infty$ aus. Setzt man $e_1 = e$, so ergiebt sich aus

$$e = \frac{P}{2\,EF}\,\frac{2\,l\,x - x^2}{l - x}$$

derjenige Werth von x, für welchen die neutrale Faserschicht die concave Seite des Körpers (bei U, Fig. 491) schneidet. Die neutrale Faserschicht geht daher durch B, S_2 und U und würde, auch außerhalb des Körpers fortgesetzt, den Querschnitt A erst in unendlich großer Entfernung erreichen.

Die Ausdehnung resp. Zusammendrückung der äußersten Faser beträgt in Folge der Biegung:

$$NN_1 = \sigma' = \pm\,P\,(l - x)\,\frac{e}{WE}$$

und die in Folge der Zugkraft $P\,sin.\,\alpha$:

$$N_1N_2 = \sigma'' = \frac{P\,sin.\,\alpha}{FE}.$$

Man hat daher die Gesammtausdehnung der äußersten Faser im Abstande x von B gegeben durch:

$$NN_2 = \sigma = \frac{P}{E}\left(\frac{(l - x)\,e}{W} + \frac{sin.\,\alpha}{F}\right).$$

Setzt man voraus, daß bei dieser Ausdehnung die Elasticitätsgrenze $\sigma = \frac{T}{E}$ erreicht wird, so hat man:

$$T = P\left(\frac{(l - x)\,e}{W} + \frac{sin.\,\alpha}{F}\right),$$

woraus für die Tragkraft folgt:

$$P = \frac{W\,T}{(l - x)\,e + \frac{W}{F}\,sin.\,\alpha} = \frac{W\,T}{(l - x)\,e + \frac{P}{FE}\left(l\,x - \frac{x^2}{2}\right)}.$$

Bei den mäßigen Biegungen, welchen die Balken gewöhnlich ausgesetzt sind, ist dieser Werth ein Minimum für $x = 0$, und zwar wie früher gefunden

$$P = \frac{WT}{el}.$$

Anmerkung. Wird der Balken AA_1B, Fig. 492, I., II. und III., von zwei Kräften P und $\pm P_1$, welche in den Abständen l und l_1 von B wirken, angegriffen, so findet in A_1 jedenfalls eine Continuitätsunterbrechung im Laufe der neutralen Schicht statt. Es ist nämlich für die Strecke AA_1:

Fig. 492.

$$e_1 = A_1 V_1 = \frac{Pr \sin. \alpha}{FE}$$

und für die Strecke A_1B:

$$e_2 = A_1 V_2 = \frac{P \pm P_1}{FE} r \sin. \alpha.$$

Der Sprung der neutralen Faser in dem Angriffsquerschnitte von P_1 beträgt daher:

$$e_2 - e_1 = V_1 V_2 = \pm \frac{P_1 r \sin. \alpha}{FE}.$$

Es sind hier drei Fälle zu unterscheiden, welche durch die Figuren I., II. und III. dargestellt sind.

1) P und P_1 sind gleich gerichtet; d. h. P_1 ist ebenfalls positiv. Der Balken ist dann durchweg concav nach unten gekrümmt, d. i. α ist überall positiv. Die neutrale Faserschicht bleibt dann stets unterhalb der elastischen Linie AA_1B, Fig. I., und besteht aus den beiden Zweigen BV_2 und V_1U.

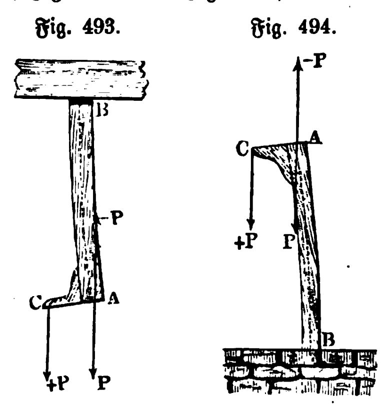
2) P und P_1 sind entgegengesetzt gerichtet, d. i. P_1 ist negativ. Hierbei kann auch α negativ werden, sobald $P_1 l_1 > Pl$. Dann findet nämlich, Fig. II., eine Biegung nach entgegengesetzten Richtungen statt, und es liegt in F ein Wendepunkt, für welchen $r = \infty$ ist, während außer in B auch noch in S, dem Punkte größter Durchbiegung, $\alpha =$ Null ist. Demzufolge muß die neutrale Faser der Strecke AA_1 die elastische Linie in S schneiden, weil $e_1 = 0$, wenn $\alpha = 0$ ist. Die neutrale Faser der Strecke A_1B besteht hier aus zwei Curvenzweigen BW_1 und V_2W_2, für welche die durch F gehende Normale der elastischen Linie eine Asymptote ist.

3) P und P_1 sind entgegengesetzt, aber es ist $P_1 l_1 \leqq Pl$. In diesem Falle ist α immer positiv, die Krümmung des Balkens ist in allen Punkten nach unten concav. Die neutrale Faser bleibt daher durchweg unterhalb der elastischen Linie, und zwar ist sie für die Strecke AA_1, Fig. III., durch UV_1 und für die Strecke A_1B durch V_2B dargestellt. Für den speciellen Fall, daß $P = -P_1$ ist, fällt V_2 in A_1, weil $e_2 = 0$ ist, und es fällt für diesen Fall (Angriff durch ein Kräftepaar) die neutrale Faser der Strecke A_1B mit der elastischen Linie derselben zu-

sammen. Wenn ferner $P_1 > P$; dabei aber immer noch $P_1 l_1 \leqq Pl$, so kommt V_2 oberhalb A_1 zu liegen, ohne daß jedoch α negativ werden kann.

§. 279. **Excentrischer Zug und Druck.** Wenn ein Balken oder eine Säule AB, Fig. 493 und Fig. 494, von einer Zug- oder Druckkraft ergriffen wird, welche zwar parallel zur Axe dieses Körpers, nicht aber in dieser Axe selbst wirkt, so wird ebenfalls die zusammengesetzte Elasticität und Festigkeit in Anspruch genommen. Diese excentrische Kraft P läßt sich, wie bekannt, durch eine Axenkraft P und ein Kräftepaar $(P, -P)$ ersetzen, dessen Armlänge c der Abstand CA des Angriffspunktes C der Kraft P von der Axe des Körpers, und dessen Moment folglich $= Pc$ zu setzen ist. Die resultirende Axenkraft $\overline{AP} = P$ erzeugt eine Faserspannung $S_1 = \frac{P}{F}$, welche für alle Querschnitte constant ist. Das Kräftepaar hingegen biegt den Körper nach einem Kreisbogen (§. 239) vom Halbmesser $r = \frac{WE}{M} = \frac{WE}{Pc}$.

Fig. 493. Fig. 494.



Ist wieder e der größte Abstand der Fasern von der durch den Schwerpunkt eines Querschnittes senkrecht zur Ebene des Kräftepaars gehenden Axe, so hat man die Maximalspannung, welche durch das Kräftepaar hervorgebracht wird:

$$S_2 = \frac{Pce}{W},$$

daher die Gesammtspannung:

$$S = S_1 + S_2 = -\frac{P}{F} + \frac{Pce}{W}$$

und folglich, wenn man dieselbe dem Tragmodul T gleichsetzt, also einen bis zur Elasticitätsgrenze gehenden Zug der äußersten Fasern annimmt:

$$T = \frac{P}{F} + \frac{Pce}{W} = \left(1 + \frac{Fce}{W}\right)\frac{P}{F}.$$

Es ist also hiernach die Tragkraft der Säule:

$$P = \frac{FT}{1 + \frac{Fce}{W}},$$

z. B. für einen rectangulären Querschnitt mit den Dimensionen b und h:

$$P = \frac{F T}{1 + \frac{6 c}{h}},$$

und für einen kreisrunden Querschnitt mit dem Halbmesser r:

$$P = \frac{F T}{1 + \frac{4 c}{r}}.$$

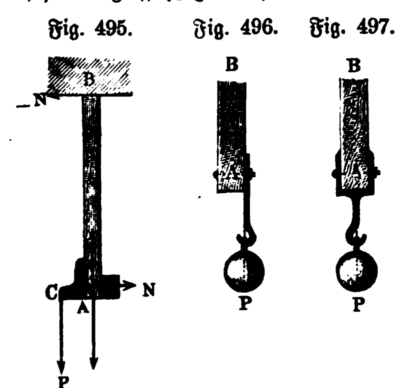
Wird die Biegung der Säule durch eine Stütze zur Seite verhindert, wie z. B. $B A C$, Fig. 495, darstellt, so bleibt natürlich $P = F T$, indem durch die Stützung ein Kräftepaar $N, - N$ hervorgerufen wird, welches dem Kräftepaare $P, - P$ das Gleichgewicht hält.

Wirkt die Kraft am Umfange einer parallelepipedischen Säule $A B$, Fig. 496, also im Abstande $c = \frac{h}{2}$ von der Axe, so hat man:

$$P = \frac{F T}{1 + 3} = \frac{1}{4} F T;$$

es ist also dann die Tragkraft nur ein Viertel von der Tragkraft beim centrischen Angriff (Fig. 497).

Fig. 495. Fig. 496. Fig. 497.



Für eine cylindrische Säule mit einer am Umfang angreifenden Kraft ist $c = r$ und daher:

$$P = \frac{F T}{1 + 4} = \frac{1}{5} F T,$$

d. i. ein Fünftel von der Tragkraft, welche ihren Angriffspunkt in der Axe des Körpers hat.

Diese Formeln lassen sich auch auf das Zerreißen, Zerdrücken und Abbrechen der Körper anwenden; es ist jedoch dann nöthig, für jede Art der Zertheilung ihren besonderen Festigkeitscoefficienten einzuführen, also

$$P = \frac{F}{\frac{1}{K_{I}} + \frac{F c e}{W K_{II}}}$$

zu setzen, wobei K_{I} den Festigkeitscoefficienten für das Zerreißen (oder Zerdrücken) und K_{II} den für das Zerbrechen bezeichnet.

Anmerkung. Bei der Entwickelung obiger Formeln ist die Durchbiegung des Balkens im Verhältniß zu der Armlänge c verschwindend klein angenommen. Wäre dies nicht der Fall, so würde das Moment M der biegenden Kraft nicht für alle Querschnitte constant sein. Es würde dann, wenn P ziehend wirkt, Fig. 493, das Moment M von A nach B allmälig abnehmen. Da nun der Maximalwerth von M in A unverändert $P \,.\, c$ beträgt, so gelten die ermittelten Formeln für die Tragkraft des Balkens in diesem Falle auch noch, wenn die Biegung des Balkens beträchtlich ist. Wenn jedoch P drückend wirkt, Fig. 494, so liegt der Maximalwerth von M in B, und ist derselbe von der Durchbiegung y selbst abhängig. Die weitere Betrachtung dieses Falles hätte alsdann in ähnlicher Weise zu geschehen, wie in dem vorhergehenden Capitel über die Festigkeit des Zerknickens gezeigt worden.

Die oben berechnete Maximalspannung $S = \frac{P}{F} + \frac{Pce}{W}$ findet an der convexen Seite des gebogenen Körpers als Zugspannung oder an der concaven Seite als Druckspannung statt, je nachdem P ziehend oder drückend wirkt. Die Spannung an der entgegengesetzten Seite ist dann durch $\frac{P}{F} - \frac{Pce}{W}$ ausgedrückt. Diese Verschiedenheit der Anstrengungen der auf entgegengesetzten Seiten gelegenen äußersten Fasern ist besonders bei gußeisernen Körpern zu berücksichtigen. Bezeichnen wieder k_{I} und k_{II} die höchstens zulässigen Spannungen für Zug und Druck, so hat man bei einer gedrückten gußeisernen Säule für die zulässige Belastung jedenfalls den kleineren der beiden Werthe:

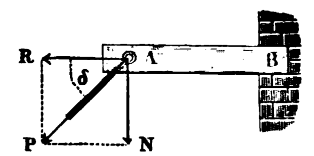
$$P_1 = \frac{F k_{\text{I}}}{1 - \frac{Fce}{W}} \text{ und } P_2 = \frac{F k_{\text{II}}}{1 + \frac{Fce}{W}}$$

zu nehmen. Ueberhaupt sind die in §. 247 gemachten Bemerkungen hinsichtlich der vortheilhaftesten Querschnittsformen u. s. w. auch auf diesen Fall auszudehnen.

Aus den Beispielen dieses Paragraphen, zu welchen auch das in §. 262 bei Gelegenheit der einschnittigen Nietung angeführte gerechnet werden muß, ergiebt sich die bedeutende Verminderung der Tragkraft, welche jede auch nur unbedeutende Excentricität einer Zug- oder Druckkraft im Gefolge hat, und man hat eine solche aus diesem Grunde möglichst zu vermeiden. Daher ist die Anordnung, Fig. 497, wenn möglich immer der in Fig. 496 vorzuziehen, und man soll den Augen von Kettenhaken u. s. w. deshalb auch immer eine centrale Lage gegen die Längenaxe der betreffenden Zugstangen geben.

§. 280. **Schiefe Zug- und Druckkraft.** Die Theorie der zusammengesetzten Elasticität und Festigkeit kommt vorzüglich auch dann zur Anwendung, wenn eine Kraft P unter einem schiefen Winkel $RAP = \delta$ gegen die Axe eines Balkens AB, Fig. 498, wirkt. Von den beiden Componenten

Fig. 498.



$R = P \cos. \delta$ und $N = P \sin. \delta$

wirkt der eine ziehend und der andere biegend auf den Körper, und es vereinigt

sich auch hier die durch die erstere Seitenkraft bewirkte Spannung über den ganzen Querschnitt F:

$$S_1 = \frac{P \cos.\delta}{F}$$

mit der durch das Moment $Pl \sin.\delta$ des zweiten Componenten bewirkten Spannung:

$$S_2 = \frac{P \sin.\delta . le}{W}$$

der äußersten Fasern, so daß sich auch wieder

$$T = S = S_1 + S_2 = P\left(\frac{\cos.\delta}{F} + \frac{le \sin.\delta}{W}\right) \text{ setzen läßt.}$$

Hiernach ist das gesuchte Tragvermögen:

$$P = \frac{FT}{\cos.\delta + \frac{Fle}{W}\sin.\delta}$$

und umgekehrt, der entsprechende Querschnitt:

$$F = \frac{P}{T}\left(\cos.\delta + \frac{Fle}{W}\sin.\delta\right),$$

oder wenn man die höchstens zulässige Spannung k_1 für die Biegung und k für den Zug einführt:

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{k} + \frac{Fle}{Wk_1}\sin.\delta\right).$$

Für einen parallelepipedischen Balken ist

$$\frac{Fe}{W} = \frac{6}{h} \text{ und folglich:}$$

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{k} + \frac{6l}{hk_1}\sin.\delta\right)$$

und für einen cylindrischen Balken hat man

$$\frac{Fe}{W} = \frac{4}{r}, \text{ daher:}$$

$$F = P\left(\frac{\cos.\delta}{k} + \frac{4l}{rk_1}\sin.\delta\right).$$

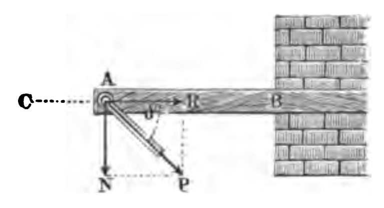
Dieselben Formeln gelten auch für den in Fig. 499 (a. f. S.) abgebildeten Fall, wo der erste Component R durch Druck auf den Balken wirkt, nur hat man in der Formel für die Tragkraft des Balkens

$$F = \frac{P}{T}\left(\cos.\delta + \frac{Fle}{W}\sin.\delta\right)$$

für T nicht den Tragmodul des Zerreißens, sondern den des Zerdrückens zu substituiren.

In jedem der im Vorstehenden behandelten Fälle wird natürlich die neutrale Fasernschicht aus dem Schwerpunkte verrückt, und zwar um die Größe:

Fig. 499.



$$e_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\, e = \frac{S_1}{S_2}\, e = \frac{W\, cotg.\, \delta}{F(l-x)},$$

unter x den Abstand vom festen Punkte B verstanden, z. B. für den parallelepipedischen Balken um

$$e_1 = \frac{h^2\, cotg.\, \delta}{12\,(l-x)}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß aus der Vereinigung der durch die Biegung bewirkten größten Ausdehnung und Compression mit der über den ganzen Querschnitt des Körpers gleichmäßig verbreiteten Ausdehnung oder Compression der Fasern die Ausdehnung und Compression aus

$$\sigma_1 \pm \sigma_2 = \frac{S_1 \pm S_2}{E} = \frac{P}{E}\left(\frac{cos.\, \delta}{F} \pm \frac{l\, e\, sin.\, \delta}{W}\right)$$

hervorgehen.

Nimmt man der Sicherheit wegen die höchstens zulässige Spannung nur etwa gleich der Hälfte des Tragmoduls an, also für Holz $k = 1$ Kilogramm, für Schmiedeeisen $k = 6$ Kilogramm und für Gußeisen $k_{\text{I}} = 3,5$ Kilogramm für Zug und $k_{\text{II}} = 7$ Kilogramm für Druck, so hat man die zulässige Belastung:

1) bei Holz in beiden Fällen:

$$P = \frac{F}{cos.\, \delta + \frac{6\, l}{h}\, sin.\, \delta} = \frac{F}{cos.\, \delta + \frac{4\, l}{r}\, sin.\, \delta},$$

2) bei Schmiedeeisen in beiden Fällen:

$$P = \frac{6\, F}{cos.\, \delta + \frac{6\, l}{h}\, sin.\, \delta} = \frac{6\, F}{cos.\, \delta + \frac{4\, l}{r}\, sin.\, \delta},$$

3) bei Gußeisen im ersten Falle (Fig. 498):

$$P = \frac{3,5\, F}{cos.\, \delta + \frac{6\, l}{h}\, sin.\, \delta} = \frac{3,5\, F}{cos.\, \delta + \frac{4\, l}{r}\, sin.\, \delta}$$

und im zweiten Falle, Fig. 499, gleich dem kleineren der beiden Werthe von:

$$P_1 = \frac{7\, F}{cos.\, \delta + \frac{6\, l}{h}\, sin.\, \delta} = \frac{7\, F}{cos.\, \delta + \frac{4\, l}{r}\, sin.\, \delta} \text{ und}$$

$$P_2 = \frac{3{,}5\,F}{\frac{6\,l}{h}\,sin.\,\delta - cos.\,\delta} = \frac{3{,}5\,F}{\frac{4\,l}{r}\,sin.\,\delta - cos.\,\delta}.$$

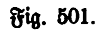
Der im Vorstehenden behandelte Fall kommt oft zur Anwendung. Hängt §. 281.
z. B. ein Gewicht P an einer gegen den Horizont geneigten Säule AB, Fig. 500, so ist, wenn deren Axe um den Winkel $PAR = \delta$ von der Verticalen abweicht, die Zugkraft $R = P\,cos.\,\delta$ und die Biegungskraft $N = P\,sin.\,\delta$, daher die zulässige Belastung

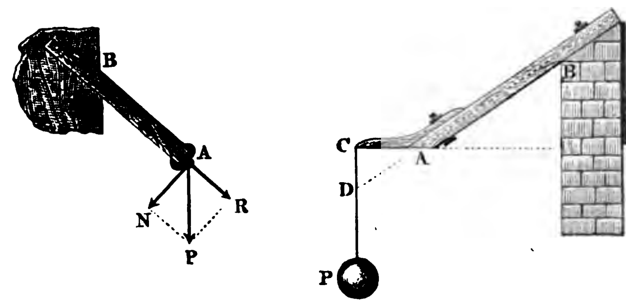
$$P = \frac{F k_1}{cos.\,\delta + \frac{6\,l}{h}\,sin.\,\delta}$$

zu setzen.

Wenn, wie Fig. 501 vor Augen führt, bei der schiefen Wirkung der Kraft P auch noch der Angriffspunkt C derselben excentrisch liegt, so muß man

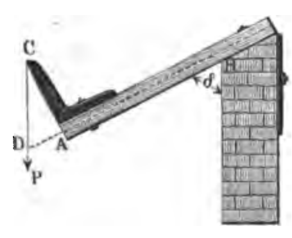
Fig. 500. Fig. 501.





zur Beurtheilung der Tragkraft des Balkens diesen Angriffspunkt erst nach D in die Verlängerung der Axe AB des Balkens legen, also statt der Länge $BA = l$, die Länge $BD = BA + AD = l + \frac{c}{sin.\,\delta}$ in Rechnung bringen, so daß sich ergiebt:

Fig. 502.



$$P = \frac{F k_1}{cos.\,\delta + \frac{6}{h}\left(l + \frac{c}{sin.\,\delta}\right) sin.\,\delta}$$

$$= \frac{F k_1}{cos.\,\delta + \frac{6\,l}{h}\left(sin.\,\delta + \frac{c}{l}\right)}.$$

Steht, Fig. 502, der Hebelarm AC senkrecht auf der Balkenaxe AB, so hat man in gleicher Weise:

$$P = \frac{F k_{I}}{\cos.\delta + \frac{6}{h}\left(l + \frac{c}{tang.\delta}\right)\sin.\delta} = \frac{F k_{I}}{\cos.\delta + \frac{6\,l}{h}\left(\sin.\delta + \frac{c}{l}\cos.\delta\right)}.$$

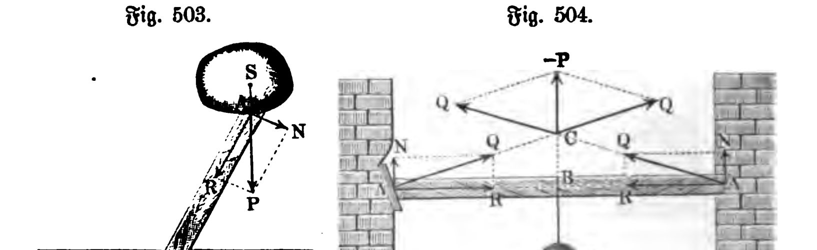
Ebenso ist für die schiefe Säule AB, Fig. 503, wenn dieselbe um den Winkel δ von der Verticalen abweicht, die mit Sicherheit zu tragende Last:

$$P = \frac{F k_{II}}{\cos.\delta + \frac{6\,l}{h}\sin.\delta} = \frac{F k_{II}}{\cos.\delta + \frac{4\,l}{r}\sin.\delta},$$

worin k_{II} den Spannungscoefficienten für Druck bedeutet.

Wenn ein belasteter Balken AA, Fig. 504, nicht frei aufliegt, sondern zwischen zwei Wänden eingezwängt ist, so kommt ebenfalls eine Kraftzerlegung vor, aus welcher eine Compression und eine Biegung des Balkens hervorgeht.

Fig. 503. Fig. 504.



Weichen die Endflächen A, A dieses Balkens um den Winkel δ von dem Querschnitte desselben ab, und wirkt die Last P in der Mitte B des Balkens, so reagiren die Seitenwände auf die Enden des Balkens mit zwei Kräften Q und Q, welche unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt sind und eine Mittelkraft $\overline{CP} = -P$ geben, wodurch die Kraft P aufgehoben wird.

Es ist hiernach:

$$P = 2\,Q\cos.QCP = 2\,Q\sin.\delta,$$

folglich umgekehrt:

$$Q = \frac{P}{2\sin.\delta}.$$

Ferner resultirt aus der Reaction Q die Axen oder Druckkraft:

$$R = Q\cos.\delta = \frac{P}{2}\frac{\cos.\delta}{\sin.\delta} = \frac{1}{2}P\,cotg.\delta$$

und die Normal- oder Biegungskraft:

$$N = Q\sin.\delta = \frac{P}{2}.$$

Es ist folglich:

$$k = S = S_1 + S_2 = \frac{R}{F} + \frac{N \cdot {}^1/_2\, l e}{W},$$

d. i.:

$$k = \frac{P\, cotg.\, \delta}{2 F} + \frac{P l e}{4 W}$$

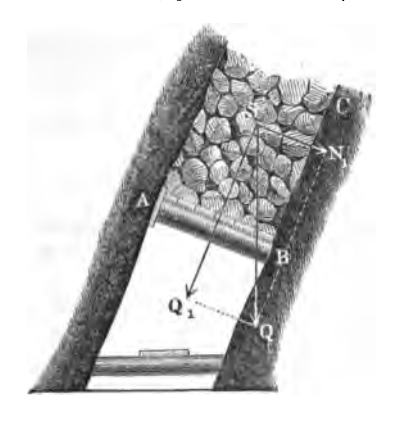
und daher die Tragkraft:

$$P = \frac{2 F k}{cotg.\, \delta + {}^1/_2 \frac{F l e}{W}}$$

zu setzen. Da die Tragkraft des bei A, A einfach auf Stützen ruhenden Balkens $P = \frac{4 W k}{l e}$ ist, so erkennt man leicht, daß durch die Spreizung die Tragkraft vermindert wird, und um so mehr, je größer $cotg.\, \delta$, d. i. je kleiner δ ist.

Derselbe Fall tritt auch ein, wenn ein geneigt liegender Stempel $A B$, Fig. 505, eine über ihm aufgeschüttete Last Q trägt. Nur ist hier Q erst in eine Normalkraft Q_1 rechtwinkelig zur Axe des Stempels und in eine Seitenkraft N_1 rechtwinkelig gegen die Seitenwand (in der bergmännischen Sprache: das Liegende) zu zerlegen. Sehen wir der Sicherheit wegen von der Reibung der lockeren Masse (Gesteinsstücke) auf dem Liegenden ab, bezeichnen die Abweichung der Endfläche des Stempels von dem Querschnitte desselben durch δ und die Neigung des Liegenden $B C$ gegen den Horizont durch β, so erhalten wir:

Fig. 505.



$$Q_1 = Q \sin \beta$$

und wegen der gleichmäßigen Vertheilung der Last nach §. 241:

$$Q_1 = \frac{2 F k}{cotg.\, \delta + {}^1/_4 \frac{F l e}{W}}$$

und daher:

$$Q = \frac{2 F k}{\left(cotg.\, \delta + {}^1/_4 \frac{F l e}{W}\right) sin.\, \beta}.$$

Beispiele. 1) Welche Querdimensionen muß man einem schiefliegenden Balken AB, Fig. 500, aus Fichtenholz geben, welcher eine Länge von 4 Meter, eine Neigung von 60 Grad gegen den Horizont hat und am Ende eine Last $P = 3000$ Kilogramm trägt? Die Formel

$$P = \frac{Fk}{cos.\,\delta + \frac{6l}{h}\,sin.\,\delta}$$

giebt, wenn man $P = 3000$, $k = 1$ Kilogramm, $\delta = 90^0 - 60^0 = 30^0$, $l = 4000$ Millimeter einführt und $\frac{b}{h} = {}^5/_7$ annimmt:

$$F = bh = {}^5/_7\, h^2 = 3000\left(cos.\,30^0 + \frac{6\,.\,4000}{h}\,sin.\,30^0\right), \text{ d. i.:}$$

$$h^2 = 4200\left(0{,}866 + \frac{24000\,.\,0{,}5}{h}\right) = 3637{,}2 + \frac{50400000}{h}.$$

Es ist annähernd:

$$h = \sqrt[3]{50400000} = 369,$$

hiernach schärfer:

$$h = \sqrt[3]{50400000 + 3637{,}2\,.\,369} = \sqrt[3]{51742127} = 373 \text{ Millimeter}$$

und folglich:

$$b = {}^5/_7\, h = 266 \text{ Millimeter.}$$

2) In welcher Entfernung von einander sind die 0,3 Meter starken Tragstempel AB eines sogenannten Förstenbaues ABC, Fig. 505, zu legen, wenn derselbe 1,2 Meter weit ist und sich 20 Meter hoch auf einem 70 Grad fallenden Gange in die Höhe zieht, und vorausgesetzt wird, daß das Gewicht eines Cubikmeters Berge (Gesteinsstücke) 1200 Kilogramm beträgt?

Wird die gesuchte Entfernung zu x Meter angenommen, so beträgt das auf je einem Stempel ruhende Gewicht:

$$Q = 1{,}2\,.\,20\,.\,1200\,.\,x = 28800\,x \text{ Kilogramm}$$

und folglich der zum Stempel normale Druck:

$$Q_1 = Q\,sin.\,70^0 = 28800\,.\,x\,.\,0{,}9397 = 27063\,x \text{ Kilogramm.}$$

Sind die Endflächen A, B der Stempel unter einem Winkel von $\delta = 20$ Grad abgeschrägt, so hat man:

$$27063\,x = \frac{2Fk}{cotg.\,20^0 + {}^1/_4\,\frac{4l}{r}} = \frac{2\,.\,70686\,.\,1}{2{,}747 + 8} = 13155$$

und daher:

$$x = \frac{13155}{27063} = 0{,}486 \text{ Meter.}$$

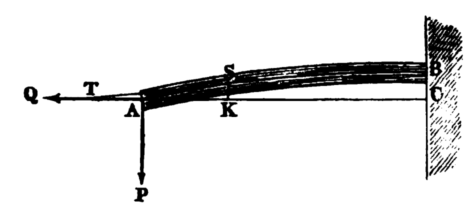
Es beträgt also der Zwischenraum zwischen je zwei Stempeln:

$$0{,}486 - 0{,}300 = 0{,}186 \text{ Meter.}$$

§. 282. **Biegung der gespannten Balken.** Wenn ein Balken AB, Fig. 506, durch eine biegende Kraft P und eine Axenkraft Q angegriffen wird, so wird die Tragkraft durch die Zugkraft Q nach dem vorigen Paragraphen vermindert, da durch Q eine Vergrößerung der absoluten Biegungsspannung in der äußersten Faser an der converen Seite um $\frac{Q}{F}$ herbeigeführt wird, an

dieser Stelle daher die Spannung den höchstens zulässigen Werth k früher erreicht, als wenn Q nicht vorhanden wäre. Es wurde hierbei jedoch die Biegung als sehr klein außer Betracht gelassen, welche der Balken unter dem Einflusse von P erleidet. Ist die Biegung aber, etwa bei größerer Balkenlänge, nicht so klein, daß sie vernachlässigt werden darf, so hat man auch die biegende Wirkung der Kraft Q in Betracht zu ziehen, deren Moment im Punkte B durch Qa gegeben ist, wenn a die Senkung des Endpunktes A unter B bedeutet. In Folge dieser von Q angestrebten Biegung nach oben werden die äußersten Fasern an der convexen Seite in gewissem Grade entlastet, und man erkennt von vornherein, daß unter bestimmten Verhältnissen die biegende Wirkung von Q der ziehenden Einwirkung überlegen sein kann. In diesem Falle wird die Tragkraft des Balkens durch die Spannkraft nicht nur nicht vermindert, sondern vergrößert.

Fig. 506.



Sei wie früher B der Coordinatenanfang, die X Axe horizontal und die Y Axe vertical, so ist für den beliebigen Punkt S, dessen Abscisse x ist,

$$M = P(l - x) - Q(a - y) = WE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

oder wenn man der Kürze halber

$$\frac{P}{WE} = p^2, \frac{Q}{WE} = q^2 \text{ setzt, so hat man}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - q^2 y = p^2 (l - x) - q^2 a.$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht das Integral:

$$y = -\frac{p^2}{q^2}(l - x) + a + C_1 \varepsilon^{qx} + C_2 \varepsilon^{-qx} \text{*}),$$

---

*) Von der Richtigkeit überzeugt man sich durch zweimalige Differenziation, dadurch erhält man nämlich:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q^2 (C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx}).$$

Addirt man hierzu

$$-q^2 y = p^2 (l - x) - q^2 a - q^2 (C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx}),$$

so erhält man die Ausgangsgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - q^2 y = p^2 (l - x) - q^2 a.$$

worin ε die Grundzahl der natürlichen Logarithmen und C_1 und C_2 zwei noch unbekannte Constanten sind. Zu deren Bestimmung hat man die Bedingungen, daß

1) $x = l$, $y = a$ im Endpunkte A,

2) $x = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ im Anfangspunkte B

zusammengehörige Werthe sind.

Setzt man in dem Ausdrucke für y die Werthe $x = l$, $y = a$ gleich der Durchsenkung am Ende, so folgt:

$$a = -\frac{p^2}{q^2}(l - l) + a + C_1 \varepsilon^{ql} + C_2 \varepsilon^{-ql},$$

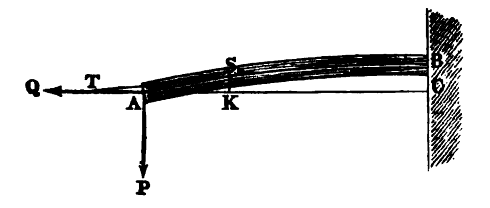
woraus

$$C_1 \varepsilon^{ql} + C_2 \varepsilon^{-ql} = 0 \text{ oder } C_2 = -C_1 \varepsilon^{2ql} \text{ sich ergiebt.}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p^2}{q^2} + q\,(C_1 \varepsilon^{qx} - C_2 \varepsilon^{-qx}).$$

Fig. 507.



Hierin $x = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gesetzt, liefert:

$$0 = \frac{p^2}{q^2} + q\,(C_1 - C_2) = \frac{p^2}{q^2} + q\,(C_1 + C_1 \varepsilon^{2ql}),$$

so daß daraus

$$C_1 = -\frac{p^2}{q^3(1 + \varepsilon^{2ql})}$$

und

$$C_2 = -C_1 \varepsilon^{2ql} = \frac{p^2 \varepsilon^{2ql}}{q^3(1 + \varepsilon^{2ql})} \text{ sich ergiebt.}$$

Nachdem C_1 und C_2 bestimmt sind, hat man auch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q^2 (C_1 \varepsilon^{qx} + C_2 \varepsilon^{-qx}) = \frac{p^2}{q} \cdot \frac{-\varepsilon^{qx} + \varepsilon^{2ql-qx}}{1 + \varepsilon^{2ql}}$$

und das auf Biegung wirkende Moment:

$$M = P(l - x) - Q(a - y) = WE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = WE\frac{p^2}{q} \cdot \frac{-\varepsilon^{qx} + \varepsilon^{2ql-qx}}{1 + \varepsilon^{2ql}}.$$

Dieses Moment ist jedenfalls ein Maximum für den Punkt B, also für $x = 0$ und $y = 0$, wofür es den Werth annimmt:

$$M = Pl - Qa = WE\frac{p^2}{q}\frac{\varepsilon^{2ql} - 1}{1 + \varepsilon^{2ql}} = \frac{P}{q}\frac{\varepsilon^{2ql} - 1}{\varepsilon^{2ql} + 1}.$$

Ist ql ein ächter Bruch, hat man es also mit einem kurzen Balken und mit einer kleinen Axenkraft Q zu thun, so darf man unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von $2ql$ setzen:

$$\frac{\varepsilon^{2ql} - 1}{\varepsilon^{2ql} + 1} = \frac{1 + 2ql + \frac{4q^2l^2}{2} + \frac{8q^3l^3}{2 \cdot 3} - 1}{1 + 2ql + \frac{4q^2l^2}{2} + \frac{8q^3l^3}{2 \cdot 3} + 1} = ql\frac{1 + ql + {}^2/_3\, q^2l^2}{1 + ql + q^2l^2}$$

$$= ql\,(1 - {}^1/_3\, q^2l^2).$$

Es wird unter dieser Voraussetzung:

$$M = Pl - Qa = Pl\,(1 - {}^1/_3\, q^2l^2) = Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right).$$

Ist dagegen die Axenkraft Q so groß, daß ql mindestens die Zahl 2 erreicht, so darf man 1 gegen ε^{2ql} vernachlässigen, und man erhält:

$$M = Pl - Qa = \frac{P}{q}\frac{\varepsilon^{2ql}}{\varepsilon^{2ql}} = P\sqrt{\frac{WE}{Q}}.$$

Es bestimmt sich nun die Tragkraft des Balkens in derselben Art, wie in den vorhergehenden Fällen. Die Kraft Q erzeugt in dem Körper die absolute Spannung

$$S_1 = \frac{Q}{F},$$

und durch das Moment $M = Pl - Qa$ erleiden die Fasern in B im größten Abstande e von der neutralen Axe die Spannung

$$S_2 = \frac{(Pl - Qa)\,e}{W}.$$

Bezeichnen nun wieder k_{I} und k_{II} die höchstens zulässige absolute oder rückwirkende Spannung, so hat man für die äußersten Fasern an der convexen resp. concaven Seite des Balkens im Punkte B:

$$k_{\text{I}} = \frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W} = \frac{Q}{F} + \frac{P}{q}\frac{\varepsilon^{2ql} - 1}{\varepsilon^{2ql} + 1}\cdot\frac{e_{\text{I}}}{W},$$

$$k_{\text{II}} = -\frac{Q}{F} + \frac{(Pl - Qa)\,e}{W} = -\frac{Q}{F} + \frac{P}{q}\frac{\varepsilon^{2ql} - 1}{\varepsilon^{2ql} + 1}\cdot\frac{e_{\text{II}}}{W},$$

woraus für das Tragvermögen des Balkens der kleinere der beiden Werthe

$$P_{\text{I}} = \left(k_{\text{I}} - \frac{Q}{F}\right)\cdot\frac{\varepsilon^{2ql} + 1}{\varepsilon^{2ql} - 1}\cdot\frac{Wq}{e_{\text{I}}} \text{ und}$$

$$P_{II} = \left(k_{II} + \frac{Q}{F}\right) \frac{\varepsilon^{2ql} + 1}{\varepsilon^{2ql} - 1} \cdot \frac{Wq}{e_{II}} \text{ folgt.}$$

Wenn in dem Falle, wo ql ein ächter Bruch ist, $Pl - Qa$ speciell gleich $Pl\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)$ gesetzt wird, so folgt, sobald nur die Ausdehnung in Betracht gezogen wird:

$$P_I = \left(k - \frac{Q}{F}\right) \cdot \frac{W}{le\left(1 - \frac{Ql^2}{3WE}\right)} = \left(k - \frac{Q}{F}\right)\left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right)\frac{W}{le}.$$

Ohne die Spannung Q wäre die Tragkraft

$$P = k\frac{W}{le};$$

es verhält sich daher:

$$P : P_I = k : \left(k - \frac{Q}{F}\right)\left(1 + \frac{Ql^2}{3WE}\right),$$

welcher Ausdruck erkennen läßt, unter welchen Verhältnissen die Tragkraft des Balkens durch die Spannung vergrößert oder verkleinert wird.

In dem Falle, wo ql groß ist, hat man

$$Pl - Qa = P\sqrt{\frac{WE}{Q}},$$

und es folgt die Tragkraft

$$P_I = \left(k - \frac{Q}{F}\right)\frac{W}{e}\sqrt{\frac{Q}{WE}} = \frac{1}{e}\left(k - \frac{Q}{F}\right)\sqrt{\frac{QW}{E}}.$$

Fragt man wie groß Q sein müsse, damit P_I ein Maximum werde, so hat man den Differenzialquotienten nach Q gleich Null zu setzen:

$$\frac{\partial\, \frac{1}{e}\sqrt{\frac{W}{E}}\left(kQ^{1/2} - \frac{Q^{3/2}}{F}\right)}{\partial Q} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{W}{E}}\left({}^1/_2\, kQ^{-1/2} - \frac{3}{2F}Q^{1/2}\right) = 0;$$

woraus

$$Q = \frac{kF}{3} \text{ sich ergiebt,}$$

und es folgt durch Einsetzung dieses Werthes:

$$P_I = \frac{1}{e}\left(k - \frac{kF}{3F}\right)\sqrt{\frac{kFW}{3E}} = {}^2/_3\, \frac{k}{e}\sqrt{\frac{kFW}{3E}}.$$

Die Tragkraft des Balkens wird daher durch Spannen zu einem Maximum, sobald die Axenkraft Q für sich allein in den Fasern eine Spannung erzeugt, welche den dritten Theil der höchstens zulässigen Spannung k beträgt. Das Verhältniß dieser maximalen Tragfähigkeit zu der des ungespannten Balkens P ist:

$$P_1 : P = {}^2/_3 \frac{k}{e} \sqrt{\frac{k F W}{3 E}} : \frac{k W}{l e},$$

oder

$$\frac{P_1}{P} = {}^2/_3\, l \sqrt{\frac{k}{3 E} \frac{F}{W}}.$$

Für den rectangulären Querschnitt von der Breite b und der Höhe h ist:

$$\frac{F}{W} = \frac{b h}{{}^1/_{12}\, b h^3} = \frac{12}{h^2},$$

daher

$$\frac{P_1}{P} = \frac{4 l}{3 h} \sqrt{\frac{k}{E}} = 1{,}33\, \frac{l}{h} \sqrt{\frac{k}{E}},$$

und für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser d ist:

$$\frac{F}{W} = \frac{\pi \frac{d^2}{4}}{\pi \frac{d^4}{64}} = \frac{16}{d^2},$$

also

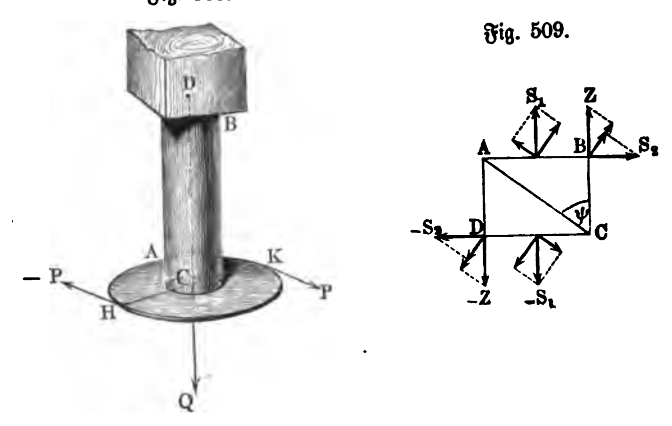
$$\frac{P_1}{P} = \frac{8 l}{5{,}202\, d} \sqrt{\frac{k}{E}} = 1{,}54\, \frac{l}{d} \sqrt{\frac{k}{E}}.$$

Setzt man beispielsweise für Holz $k = 1$, $E = 1100$, so hat man für einen parallelepipedischen Balken $\frac{P_1}{P} = 0{,}040\, \frac{l}{h}$, für einen cylindrischen Balken $\frac{P_1}{P} = 0{,}046\, \frac{l}{d}$. Sobald daher $\frac{l}{h} = \frac{1}{0{,}040} = 25$, resp. $\frac{l}{d} = \frac{1}{0{,}046} = 22$ ist, beträgt die Tragkraft des gespannten Balkens ebenso viel, wie die des nicht gespannten, vorausgesetzt, daß die spannende Kraft die Fasern bis zum dritten Theile der höchstens zulässigen Spannung anstrengt. Bei größerer Balkenlänge erst wirkt die Spannung günstig auf das Tragvermögen ein.

Torsion in Verbindung mit Zug- oder Druckkraft. Wird eine Säule AB, Fig. 508 (a. f. S.), von einer Axenkraft Q und einem Umdrehungskräftepaare (P, $-P$) zugleich ergriffen, so findet eine Zusammensetzung von Torsions- und Zug- oder Druck-Elasticität statt, deren Resultat sich wie folgt beurtheilen läßt. Es ist $S_1 = \frac{Q}{F}$ die von der Kraft Q hervorgebrachte specifische Axenspannung und $S_2 = \frac{P a e}{W}$ die dem Tor- §. 283.

sionsmomente entsprechende Spannung pro Flächeneinheit, im Abstande e von der Längenaxe des Körpers, unter W das Maß des Torsionsmomentes

Fig. 508. Fig. 509.



verstanden. Nun können wir annehmen, daß ein parallelepipedisches Körperelement $ABCD$, Fig. 509, von den Normalkräften $\overline{AB}\,.\,S_1$ und $-\overline{CD}\,.\,S_1$ auf AB und CD, sowie von dem Kräftepaare $(\overline{AB}\,.\,S_2,\ -\overline{CD}\,.\,S_2)$ längs AB und CD, und von dem Gegenkräftepaare $(\overline{BC}\,.\,Z,\ -\overline{AD}\,.\,Z)$ längs CB und AD ergriffen wird. Wenn nun die Diagonalebene AC den Winkel ψ mit der Axe des Körpers oder der Richtung der Kraft S_1 einschließt, so sind die zu AC normalen Componenten der Kräfte S_1, S_2 und Z auf der einen Seite von AC:

$$\overline{AB}\,.\,S_1 \sin.\psi,\ \overline{AB}\,.\,S_2 \cos.\psi \text{ und } \overline{BC}\,.\,Z \sin.\psi,$$

und es folgt daher die ganze Normalkraft auf AC:

$$\overline{AC}\,.\,S = \overline{AB}\,.\,S_1 \sin.\psi + \overline{AB}\,.\,S_2 \cos.\psi + \overline{BC}\,.\,Z \sin.\psi,$$

oder da das Moment von $(\overline{BC}\,.\,Z,\ -\overline{AD}\,.\,Z)$ gleich ist dem Momente von $(\overline{AB}\,.\,S_2,\ -\overline{CD}\,.\,S_2)$, d. i.:

$$AB\,.\,BC\,.\,Z = BC\,.\,AB\,.\,S_2, \text{ also } Z = S_2 \text{ ist},$$

$$\overline{AC}\,.\,S = \overline{AB}\,.\,S_1 \sin.\psi + (\overline{AB} \cos.\psi + \overline{BC} \sin.\psi)\, S_2,$$

so daß schließlich die Normalspannung in AC pro Flächeneinheit:

$$S = \frac{AB}{AC} \cdot S_1 \sin.\psi + \left(\frac{AB}{AC} \cos.\psi + \frac{BC}{AC} \sin.\psi\right) S_2 \text{ folgt.}$$

Nun ist aber $\frac{AB}{AC} = \sin.\psi$ und $\frac{BC}{AC} = \cos.\psi$, daher folgt:

$$S = S_1 (\sin.\psi)^2 + 2\, S_2 \sin.\psi \cos.\psi = S_1 (\sin.\psi)^2 + S_2 \sin.2\psi$$

$$= S_1 \left(\frac{1 - \cos.2\psi}{2}\right) + S_2 \sin.2\psi. \text{ (Vergl. §. 266.)}$$

Dieser Werth ist ein Maximum von S für $tang.\, 2\psi = -\frac{2 S_2}{S_1}$ oder $sin.\, 2\psi = \frac{2 S_2}{\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}}$ und $cos.\, 2\psi = -\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}}$, und zwar

$$S_m = \frac{S_1}{2}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}}\right) + \frac{2 S_2^2}{\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}}$$

$$= \frac{1}{2} S_1 + \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}\ *).$$

Setzt man die obigen Werthe für S_1 und S_2 ein, so folgt:

$$S_m = \frac{Q}{2F} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Q}{F}\right)^2 + 4\left(\frac{Pae}{W}\right)^2}.$$

Diese größte Anstrengung der Faser darf höchstens den Werth k erreichen, und es folgt daher aus

$$\frac{Q}{2F} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Q}{F}\right)^2 + 4\left(\frac{Pae}{W}\right)^2} = k,$$

wenn das verdrehende Moment Pa mit M bezeichnet wird, die Bedingungsgleichung:

$$M\frac{e}{W} = \sqrt{k\left(k - \frac{Q}{F}\right)},$$

welche Gleichung man auch schreiben kann:

$$M = Pa = \frac{W}{e} k \sqrt{1 - \frac{Q}{kF}}$$

und

$$Q = Fk\left[1 - \left(\frac{Me}{kW}\right)^2\right].$$

Diese beiden Ausdrücke empfehlen sich zur Bestimmung der erforderlichen Querdimensionen, je nachdem die Torsions- oder Axenkraft überwiegend ist.

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Höhe h und der Breite $b = \nu h$ hat man:

---

*) Eine ganz allgemeine Behandlung des vorliegenden Falles ist von de Saint Venant gegeben worden, siehe auch Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper und Grashof, Festigkeitslehre. Danach ergiebt sich schärfer

$$S_m = \frac{m-1}{2m} S_1 + \frac{m+1}{2m}\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}.$$

Hierin bedeutet m die Constante, von welcher bei Gelegenheit der Schub-Elasticität §. 260 die Rede war, und welche nach den dort gemachten Angaben theoretisch gleich 4 ist, nach darüber angestellten Versuchen zwischen 3 und 4 zu liegen scheint. Setzt man $m = 4$, so wird:

$$S_m = \frac{3}{8} S_1 + \frac{5}{8}\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}.$$

$$F = bh,\ \frac{W}{e} = \frac{{}^1\!/_{12}\, bh(b^2 + h^2)}{{}^1\!/_2 \sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{h^3 v \sqrt{1 + v^2}}{6},$$

daher:

$$M = Pa = {}^1\!/_6\, h^3 v \sqrt{1 + v^2} . k \sqrt{1 - \frac{Q}{k v h^2}}.$$

Für den quadratischen Querschnitt ist $v = 1$, daher:

$$M = Pa = \frac{\sqrt{2}}{6} h^3 . k \sqrt{1 - \frac{Q}{k h^2}} = 0{,}2357\, h^3 k \sqrt{1 - \frac{Q}{k h^2}}.$$

Für eine cylindrische Welle vom Halbmesser r ist:

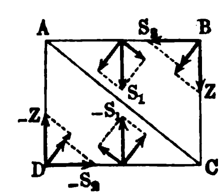
$$F = \pi r^2,\ \frac{W}{e} = \frac{{}^1\!/_2\, \pi r^4}{r} = \frac{\pi r^3}{2},$$

daher:

$$M = Pa = \frac{\pi r^3}{2} k \sqrt{1 - \frac{Q}{k \pi r^2}} = 1{,}5708\, r^3 k \sqrt{1 - \frac{Q}{k \pi r^2}}.$$

Wirkt die Axenkraft Q zusammendrückend, so behalten die im Vorstehenden gefundenen Formeln ihre Gültigkeit, da hier nicht bloß die Richtung der Kraft S_1 (Fig. 510) die entgegengesetzte wird, sondern auch die Kräfte S_2 und Z entgegengesetzt angenommen werden müssen, wenn es darauf ankommt, die maximale Spannung S_m zu erhalten.

Fig. 510.



Beispiel. Eine stehende Holzwelle von quadratischem Querschnitte und von 5000 Kilogramm Gewicht hat das Umdrehungsmoment $Pa = 800$ Meterkilogramm aufzunehmen. Wie groß ist die Stärke zu nehmen, wenn die größte Spannung $k = \frac{1{,}8}{6} = 0{,}3$ Kilogramm zulässig ist? Man hat hier:

$$Pa = 800 . 1000 = 0{,}2357\, h^3 . 0{,}3 \sqrt{1 - \frac{5000}{0{,}3 h^2}},$$

woraus

$$h = \sqrt[3]{\frac{800\,000}{0{,}3 . 0{,}2357}} \sqrt[6]{\frac{1}{1 - \frac{5000}{h^2}}} \text{ folgt.}$$

Annähernd ist $h = \sqrt[3]{\frac{800\,000}{0{,}3 . 0{,}2357}} = 224{,}5$ Millimeter, dafür

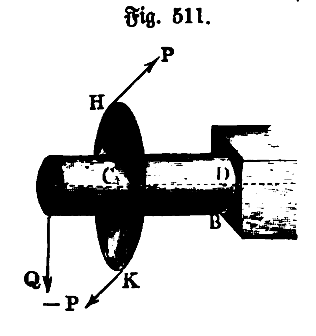
$$\sqrt[6]{\frac{1}{1 - \frac{5000}{224{,}5^2}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{0{,}9008}} = 1{,}018,$$

so daß nun schärfer die gesuchte Wellenstärke:

$$h = 224{,}5 . 1{,}018 = 228{,}5 \text{ Millimeter folgt.}$$

Torsion in Verbindung mit Biegung. Nicht selten kommen auch Fälle vor, daß ein Balken oder eine Welle von einer Torsions- und einer Biegungskraft zugleich ergriffen wird, namentlich sind die liegenden Radwellen in der Regel einer Torsion und Biegung zugleich ausgesetzt. Denken wir uns, um die Verhältnisse des Zusammenwirkens dieser zwei Kräfte zu erforschen, wieder einen prismatischen Körper $ABCD$, Fig. 511, welcher an einem Ende BD festgehalten und am anderen Ende A von einer Normal- oder Biegungskraft Q, zugleich aber noch an einer Stelle C von einem Umdrehungs-Kräftepaare $(P, -P)$ ergriffen wird. Ist l die Länge AD der Welle, W_1 das Maß des Biegungsmomentes derselben und e_1 die größte Entfernung eines Querschnittselementes von der neutralen Axe, so hat man die von der Kraft Q erzeugte größte Axenspannung §. 284.

Fig. 511.



$$S_1 = \frac{Q l e_1}{W_1} \text{ (vergl. §. 224);}$$

bezeichnet dagegen a die Armlänge HK des Kräftepaares $(P, -P)$, W das Maß des Torsionsmomentes und e den größten Abstand eines Querschnittselementes von der Axe CD dieses Körpers, so läßt sich die von dem Paare $(P, -P)$ erzeugte größte Schubspannung

$$S_2 = \frac{P a e}{W} \text{ setzen.}$$

Nun vertritt aber, wie leicht zu erkennen ist, die Spannung $S_1 = \frac{Q l e_1}{W_1}$ die Stelle der absoluten Spannung $S_1 = \frac{Q}{F}$ im vorigen Paragraphen, daher läßt sich auch hier die Maximalspannung im ganzen Körper $ABCD$, Fig. 511,

$$S_m = \frac{1}{2} S_1 + \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 + 4 S_2^2}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{Q l e_1}{W_1} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{Q l e_1}{W_1}\right)^2 + 4\left(\frac{P a e}{W}\right)^2} \text{ setzen.}$$

Bei der Drehung der Welle muß die neutrale Axe, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und senkrecht zur Ebene QAD der Last steht, fortwährend ihre relative Lage zum Querschnitte verändern, und damit wird auch e_1 im Allgemeinen verschiedene Werthe annehmen. Es ist z. B. bei einem quadratischen Querschnitte von der Seite h der Abstand e_1 zwischen der halben Seitenlänge und der halben Diagonale veränderlich. Die Größe

e jedoch ändert sich während der Umdrehung nicht, da hierunter der Abstand des am meisten von der Axe abstehenden Punktes von der Drehaxe verstanden ist. Es möge nun, wie dies in der Praxis fast immer vorkommt, angenommen werden, daß die Drehungsaxe der Welle mit der Schwerpunktsaxe derselben zusammenfällt. In diesem Falle wird der größte mögliche Werth von e_1 gleich e sein. Da diesem größten Werthe von e_1 der größte von S_1 entspricht, so hat man denselben in dem Ausdrucke für S_m einzuführen. Nimmt man ferner an, der Querschnitt sei entweder ein reguläres Polygon, oder doch eine solche Figur, welche für zwei zu einander senkrechte Axen gleiches Maß des Biegungsmomentes $W_1 = W_2$ besitzt, so hat man $W = W_1 + W_2 = 2\,W_1$ zu setzen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man:

$$S_m = {}^1/_2\,\frac{Qle}{W_1} + {}^1/_2\sqrt{\left(\frac{Qle}{W_1}\right)^2 + 4\left(\frac{Pae}{2\,W_1}\right)^2}.$$

Setzt man diese größte Spannung $S_m = k$, so folgt:

$$k = {}^1/_2\,\frac{e}{W_1}\left[Ql + \sqrt{(Ql)^2 + (Pa)^2}\right]$$

$$= {}^1/_2\,\frac{e}{W_1}\left(M_1 + \sqrt{M_1^2 + M^2}\right)\text{*)},$$

wenn das verdrehende Moment $Pa = M$ und das biegende Moment $Ql = M_1$ gesetzt wird. Aus dieser Gleichung entwickelt sich:

$$\left(\frac{2\,W_1 k}{e} - M_1\right)^2 = M_1^2 + M^2,$$

und hieraus folgt:

$$M\,\frac{e}{2\,W_1} = k\sqrt{1 - \frac{M_1 e}{k\,W_1}} \text{ und } M = \frac{2\,W_1}{e}\,k\sqrt{1 - \frac{M_1 e}{k\,W_1}}.$$

Für den quadratischen Querschnitt von der Seite h hat man:

$$\frac{W_1}{e} = \frac{{}^1/_{12}\,h^4}{{}^1/_2\,h\sqrt{2}} = \frac{h^3}{6\sqrt{2}},$$

daher:

$$M = Pa = \frac{h^3}{3\sqrt{2}}\,k\sqrt{1 - \frac{Ql}{k}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{h^3}}.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist:

---

*) Die schärfere Untersuchung (vergl. Anmerkung zum vorigen Paragraphen) liefert auch hier:

$$S_m = k = \frac{e}{W_1}\left(\frac{m-1}{2\,m}\,M_1 + \frac{m+1}{2\,m}\sqrt{M_1^2 + M^2}\right)$$

$$= \frac{e}{W_1}\left({}^3/_8\,M_1 + {}^5/_8\sqrt{M_1^2 + M^2}\right).$$

$$\frac{W_1}{e} = \frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{r} = \frac{\pi r^3}{4},$$

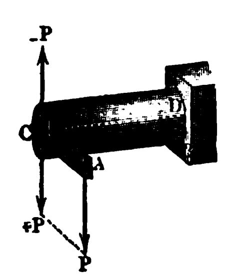
daher:

$$M = Pa = \frac{\pi r^3}{2} k \sqrt{1 - \frac{Ql}{k} \frac{4}{\pi r^3}}.$$

Da der von der Drehaxe entfernteste Punkt bei der Drehung der Welle durch die Ebene QAD der belastenden Kraft und der Axe abwechselnd oberhalb und unterhalb der Axe AD hindurchgeht, so ist die diesem Punkte entsprechende maximale Spannung S_1 abwechselnd Zug- und Druckspannung, und man hat daher in obigen Formeln für k den kleineren der Werthe von k_{I} und k_{II} zu setzen, sofern die zulässige Anstrengung des Materials für Zug und Druck verschieden ist.

Sehr gewöhnlich ist es nicht ein Kräftepaar $(P, -P)$, sondern eine excentrisch wirkende Kraft P, welche die Torsion eines Körpers BCD, Fig. 512, hervorbringt. Da sich eine solche Kraft in eine gleiche Centralkraft $\overline{CP} = +P$ und in ein Kräftepaar $(P, -P)$ zerlegen läßt, dessen Armlänge a der Normalabstand CA zwischen der Axe CD des Körpers und der Kraftrichtung P ist, so hat man es in diesem Falle, selbst ohne Hinzutritt einer anderen Kraft Q, mit der zusammengesetzten Festigkeit zu thun, indem sich die aus $(P, -P)$ hervorgehende Torsion mit der durch die Axenkraft $+P$ bewirkten Biegung vereinigt. Man hat daher in den vorstehenden Formeln nur P anstatt Q einzuführen und es folgt:

Fig. 512.



$$k = \frac{e}{2W_1}\left[Pl + \sqrt{(Pl)^2 + (Pa)^2}\right] = \frac{P}{2}\frac{e}{W_1}\left(l + \sqrt{l^2 + a^2}\right)^{*)}.$$

Tritt zu der excentrischen Kraft P noch eine besondere Biegungskraft Q mit dem Momente Ql_1 hinzu, so hat man natürlich in den obigen Formeln

$Pl + Ql_1$ für M_1 einzuführen.

Beispiel. Die schmiedeeiserne Königswelle einer Mahlmühle ist 1,6 Meter zwischen den Lagern lang, und trägt in ihrer Mitte ein Stirnrad von 0,75 Meter Halbmesser, an dessen Umfang eine Kraft P von 1000 Kilogramm wirksam ist. Wie groß ist die größte Faserspannung, wenn die Welle in der Mitte eine Stärke

*) Schärfer eigentlich:

$$k = P\frac{e}{W_1}\left[\frac{m-1}{2m}l + \frac{m+1}{2m}\sqrt{l^2+a^2}\right]$$
$$= P\frac{e}{W_1}\left(\frac{3}{8}l + \frac{5}{8}\sqrt{l^2+a^2}\right).$$

von 0,160 Meter hat? Da die Kraft P hier in der Mitte zwischen den Stützpunkten angreift, so ist das biegende Moment

$$M_1 = \frac{1}{4}\,Pl = \frac{1}{4}\,1000\,.\,1600 = 400000 \text{ Millimeterkilogramm,}$$

daher

$$S_1 = M_1\,\frac{e}{W_1} = 400000\,\frac{32}{\pi d^3} = 400000\,\frac{32}{3{,}14\,.\,160^3} = 0{,}995 \text{ Kilogramm.}$$

Aus dem verdrehenden Momente $M = Pa = 1000\,.\,750 = 750000$ ergiebt sich:

$$S_2 = M\,\frac{e}{W} = 750000\,\frac{16}{\pi d^3} = 750000\,\frac{16}{3{,}14\,.\,160^3} = 0{,}933 \text{ Kilogramm.}$$

Daraus folgt die maximale Anstrengung der äußersten Faser in der Mitte:

$$S_m = \frac{1}{2}\,0{,}995 + \frac{1}{2}\sqrt{0{,}995^2 + 4\,.\,0{,}933^2} = 0{,}498 + 1{,}057 = 1{,}56 \text{ Kilogramm,}$$

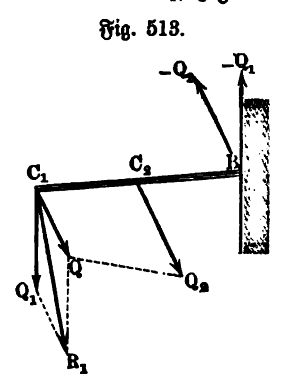
oder nach der schärferen Formel:

$$S_m = \frac{3}{8}\,0{,}995 + \frac{5}{8}\sqrt{0{,}995^2 + 4\,.\,0{,}933^2} = 0{,}373 + 1{,}321 = 1{,}69 \text{ Kilogramm.}$$

Da nach §. 271 die zulässige Spannung für Schmiedeeisen gleich 4,2 angenommen werden darf, so gewährt die Welle etwa $2\frac{1}{2}$ fache Sicherheit.

§. 285. **Biegungskräfte in verschiedenen Ebenen.** Wenn ein Balken oder eine Welle BC_1, Fig. 513, von zwei Biegungskräften Q_1 und Q_2 ergriffen wird, deren Richtungen C_1Q_1 und C_2Q_2 zwar rechtwinkelig auf der Axe BC_1 des Körpers stehen, aber unter sich selbst nicht parallel sind, so wird das Stück BC_2 desselben von zwei Kräftepaaren $(Q_1, -Q_1)$ und $(Q_2, -Q_2)$ gebogen, welche daher zu einem einzigen Kräftepaare zu vereinigen sind, um die Art und Größe der Biegung beurtheilen zu können. Bezeichnen l_1 und l_2 die Hebelarme der Kräfte Q_1 und Q_2 in Hinsicht auf den festen Punkt B, sind also $Q_1 l_1$ und $Q_2 l_2$ die Momente derselben, und ist α der Winkel, welchen die Kraftrichtungen zwischen sich einschließen, wenn man sie durch einen einzigen Punkt legt, so hat man nach §. 97 das Moment des resultirenden Kräftepaares:

Fig. 513.



$$Rc = \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2\,(Q_1 l_1)\,(Q_2 l_2)\cos.\alpha},$$

und es ist für den Winkel β, welchen die Ebene dieses Kräftepaares mit der des Paares $(Q_1, -Q_1)$ einschließt,

$$\sin.\beta = \frac{Q_2 l_2}{Rc}\,\sin.\alpha.$$

Um die Größe dieses Kräftepaares $(R, -R)$ und die Ebene desselben zu finden, kann man die Kraft Q_2 von C_2 nach C_1 reduciren und die reducirte

Kraft $Q = \frac{Q_2 l_2}{l_1}$ mit der Kraft Q_1 durch das Kräfteparallelogramm zu einer Mittelkraft R_1 vereinigen; das Product $R_1 l_1 = Rc$ ist dann die Größe des resultirenden Kräftepaares, und der Winkel $Q_1 C_1 R_1$ der Winkel β, welchen die Ebene dieses Paares mit der des Paares $(Q_1, - Q_1)$ einschließt. Diese Ebene ist natürlich auch diejenige, nach welcher der Körper gebogen wird, auch ergiebt sich mit Hülfe des gefundenen Momentes $Rc = R_1 l_1$ die größte Spannung des Körpers:

$$S = \frac{Rce}{W},$$

also wenn man diese der zulässigen Spannung k gleichsetzt:

$$\frac{kW}{e} = \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2 (Q_1 l_1)(Q_2 l_2) \cos.\alpha}.$$

Wirkt nun auf diesen Körper AB noch ein Umdrehungskräftepaar $(P, - P)$ mit dem Momente Pa, so ist die Maximalspannung

$$S_m = k = \frac{Rce_1}{2 W_1} + \sqrt{\left(\frac{Rce_1}{2 W_1}\right)^2 + \left(\frac{Pae}{W}\right)^2}$$

zu setzen, wobei natürlich W_1 das Maß des Biegungsmomentes, W das des Drehungsmomentes und e_1 den größten Abstand des Körperumfanges von der neutralen Axe, dagegen e den von der Längenaxe des Körpers in B bezeichnet.

Hiernach ist

$$\left(\frac{Pae}{W}\right)^2 = k^2 - k \frac{Rce_1}{W_1}$$

$$= k^2 - k \frac{e_1}{W_1} \sqrt{(Q_1 l_1)^2 + (Q_2 l_2)^2 + 2 (Q_1 l_1)(Q_2 l_2) \cos.\alpha}.$$

Mit Hülfe der Formeln des vorigen Paragraphen lassen sich auch die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Körpers finden, wenn man in denselben statt Ql die Größe Rc einsetzt.

Wenn nur eine Biegungskraft Q_1 auf den Körper wirkt, und derselbe anstatt des Kräftepaares $(P, - P)$ von einer einzigen Umdrehungskraft P ergriffen wird, welche sich in eine Axenkraft P und in ein Umdrehungskräftepaar $(P, - P)$ zerlegen läßt, so hat man statt $Q_2 l_2$ das Moment Pl in den letzten Formeln einzusetzen.

Sechstes Capitel.

Von den Federwerken*).

§. 286. **Federn.** Unter Federn versteht man gewisse aus sehr elastischen Materialien gebildete Constructionstheile, von solcher Form, daß sie unter Einwirkung äußerer Kräfte möglichst große Formänderungen annehmen. Man benutzt sie in der angewandten Mechanik außer zu dynamometrischen Zwecken sehr häufig als Organe zur Aufnahme von Stößen (Wagenfedern), um deren schädliche Einwirkungen zu mildern, sowie als Magazine zur Aufspeicherung mechanischer Arbeit, welche nachher zur Hervorbringung selbständiger Bewegungen gebraucht werden soll (Uhren). Hierhin gehört auch die Anwendung sogenannter Prellfedern zur Verstärkung gewisser Wirkungen (Federhämmer).

Je nach der Inanspruchnahme der Federn bestehen die hervorgebrachten Formänderungen derselben in einer Ausdehnung, Zusammendrückung, Biegung oder Verdrehung der Fasern. Zur Herstellung von Federn, bei welchen das Material durch directen Zug oder Druck einer einfachen Ausdehnung oder Zusammendrückung unterworfen ist, eignen sich nur solche Stoffe, welche innerhalb der Elasticitätsgrenze bedeutende Formänderungen zulassen, und man verwendet zu diesen Federn fast ausschließlich das Federharz (Kautschuk). Zu den Biegungs- und Verdrehungsfedern verwendet man nur sehr elastische Metalle, zu den ersteren öfter auch elastische Hölzer, Fischbein u. s. w.

Da das Verhalten des Kautschuks sich jeder theoretischen Behandlung entzieht, und die Construction der daraus hergestellten Federn lediglich auf Versuche**) sich stützen muß, sollen hier nur die Biegungs- und Torsionsfedern betrachtet werden.

Nach dem Vorstehenden muß eine Feder ihren Zweck, mechanische Arbeit in sich aufzunehmen, um so vollkommener erfüllen, je größer bei einer be-

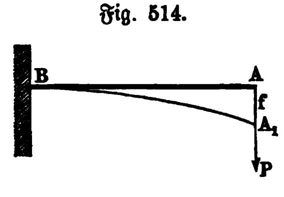
*) Bei Abfassung dieses Capitels ist besonders das Werk von F. Reuleaux, Construction und Berechnung der für den Maschinenbau wichtigsten Federarten, 1857, benutzt. Siehe ferner: Redtenbacher, Die Gesetze des Locomotivenbaues, 1855, und Philips, Mémoire sur les ressorts en acier etc. in den Annales des Mines, Tome I, 1852.

**) Näheres über die Versuche von Werder, an Kautschukbuffern angestellt, siehe in Reuleaux, Der Constructeur, 1869, S. 66.

stimmten Belastung ihre Formänderung ist. Gleichzeitig muß aber der Constructeur sowohl aus Gründen der Oeconomie wie der thunlichsten Raumbeschränkung die Bedingung eines möglichst geringen Materialbedarfs stellen, und es ergiebt sich hieraus, daß diejenige Feder theoretisch die vorzüglichste sein muß, welche für eine bestimmte Belastung und eine Formänderung von bestimmter Größe am wenigsten Material erfordert. Man erkennt nach dem Früheren daher sehr leicht, daß man bei der Federconstruction womöglich die Bildung von Körpern gleichen Widerstandes wird anstreben müssen.

Einfache Blattfedern. Als einfachste Feder kann ein an einem Ende B eingespannter elastischer Stab AB (Fig. 514) dienen, welcher am freien Ende A von der Kraft P ergriffen wird. Ist dieser Stab prismatisch und der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h, so hat man unter Beibehaltung der bisherigen Bedeutung von W, E, k u. s. w.: §. 287.

Fig. 514.



$$Pl = k\,\frac{W}{e} = k\,\frac{bh^2}{6} \text{ oder } P = {}^1/_6\,\frac{kbh^2}{l}.$$

Bezeichnet man mit f die Federung oder Durchbiegung AA_1 des freien Endes A, d. h. die Bewegung des Kraftangriffspunktes, so hat man nach §. 235:

$$f = \frac{Pl^3}{3\,WE} = 4\,\frac{Pl^3}{bh^3 . E}.$$

Setzt man hierin für P den obigen Werth, so findet man:

$$f = {}^2/_3\,\frac{k}{E}\,\frac{l^2}{h} \text{ oder } \frac{h}{l} = {}^2/_3\,\frac{k}{E}\,\frac{l}{f}.$$

Diesen Werth endlich in den Ausdruck für $P = {}^1/_6\,k\,\frac{bh^2}{l}$ für $\frac{h}{l}$ eingeführt, erhält man:

$$P = {}^1/_6\,kbh . {}^2/_3\,\frac{k}{E}\,\frac{l}{f} = \frac{1}{9}\,\frac{k^2}{E} \cdot \frac{bhl}{f},$$

oder wenn man das Volumen der Feder bhl mit V bezeichnet,

$$V = 9\,Pf\,\frac{E}{k^2}.$$

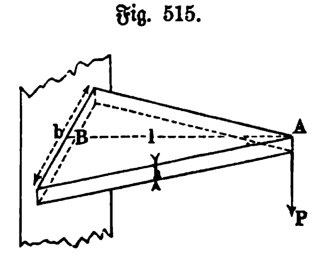
Diese Formel enthält das merkwürdige Resultat, daß das Volumen der Feder außer von E und k nur von dem Producte Pf, der sogenannten Federungsarbeit*), abhängt, von den einzelnen Dimensionen b, h und l

*) Das mit dem Namen Federungsarbeit bezeichnete Product aus der biegenden Kraft P und der Durchbiegung f ist nicht gleich dem von der Feder bei dieser

aber ganz unabhängig ist; d. h. es müssen alle Rechteckfedern aus demselben Materiale, bei welchen man dieselbe äußerste Spannung k zuläßt, und welche für dieselbe Federungsarbeit Pf construirt sind, gleiches Gewicht erhalten, wie groß man auch das Verhältniß zwischen den Längen- und Querdimensionen wählen möge. Dieses Gesetz behält, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, auch für andere Federarten seine Gültigkeit.

Wenn der Stab AB als Körper gleichen Widerstandes construirt wird, indem man die Höhe h des Querschnittes constant annimmt, so muß nach §. 257 die Breite von b am Befestigungspunkte B bis auf Null bei A verjüngt werden, und die Grundrißform der Feder wird ein Dreieck, Fig. 515. Die elastische Linie wird hier ein Kreisbogen, und die Durchbiegung des freien Endes wird nach dem Früheren $1^1/_2$mal so groß wie bei der Rechteckfeder, nämlich:

Fig. 515.



$$f = \frac{Pl^3}{2\,WE} = 6\,\frac{Pl^3}{bh^3E}.$$

Setzt man auch hier wieder für P den Werth $P = {}^1/_6\,k\,\frac{bh^2}{l}$ ein, so findet man für die Dreieckfeder:

$$f = \frac{k}{E}\,\frac{l^2}{h} \text{ oder } \frac{h}{l} = \frac{k}{E}\,\frac{l}{f}.$$

Wird dieser Werth wieder wie bei der Rechteckfeder in den Ausdruck $P = {}^1/_6\,k\,\frac{bh^2}{l}$ für $\frac{h}{l}$ eingeführt, so folgt:

$$P = {}^1/_6\,kbh\cdot\frac{k}{E}\,\frac{l}{f} = {}^1/_6\,\frac{k^2}{E}\cdot\frac{bhl}{f},$$

oder, da hier $bhl = 2\,V$ ist,

$$V = 3\,Pf\cdot\frac{E}{k^2}.$$

Auch hier ist also das Volumen resp. das Gewicht der Feder unabhängig von den Verhältnissen der einzelnen Dimensionen b, h, l zu einander, und es bedarf eine Dreieckfeder nur den dritten Theil des Materials, welches eine Rechteckfeder aus demselben Materiale, bei Annahme derselben äußersten Spannung k und derselben Federungsarbeit erfordert.

Biegung erforderten Aufwand an mechanischer Arbeit, sondern doppelt so groß, da die zum Biegen der Feder nöthige Kraft von Null bis P gleichmäßig steigt (vergl. §. 222).

Diese Federform ist wegen ihrer einfachen Herstellung in der Praxis sehr gebräuchlich. Man könnte zwar auch die Form gleichen Widerstandes in anderer Art hervorbringen, s. §. 257 u. f., z. B. dadurch, daß man bei gleicher Querschnittsbreite die Höhe z desselben nach dem Verhältnisse

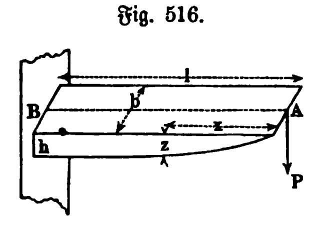
$$\frac{b h^2}{b z^2} = \frac{P l}{P x}$$

verändert, oder

$$z = h \sqrt{\frac{x}{l}}$$

macht, doch ist diese Form, Fig. 516, wegen ihrer schwierigeren Herstellung weniger gebräuchlich. Die Berechnung einer solchen Feder soll deswegen und wegen der Weitläufigkeit, mit welcher die Ermittelung ihrer Durchbiegung und ihres Volumens verbunden ist, unterbleiben. Die Krümmung der elastischen Linie ist hier nicht mehr constant, und deswegen eignet sich, wie aus dem nächsten Paragraphen sich ergeben wird, diese Construction auch nicht zur Herstellung zusammengesetzter Blattfederwerke. Will man sich die Aufgabe stellen, eine Blattfeder so zu formen, daß ihre Krümmung eine constante ist, so hat man nach §. 259 die Bedingung zu erfüllen:

Fig. 516.



$$r = \frac{WE}{M} = \frac{WE}{Px} = Const.$$

Bei der Dreieckfeder ist diese Bedingung erfüllt, soll aber die Breite aller Querschnitte gleich b sein, so hat man die Höhe z irgend eines Querschnittes im Abstande x von B nach dem Früheren durch

$$\frac{h^3}{z^3} = \frac{l}{x}, \text{ also } z = h \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$$

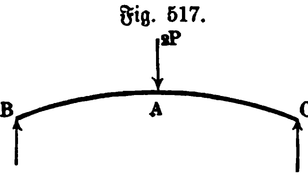
zu ermitteln. Die Feder ist aber dann kein Körper gleichen Widerstandes mehr und erfordert aus diesem Grunde einen größeren Materialaufwand ($^3/_2$), als die Dreieckfeder. Man wählt diese Construction zuweilen für die Zuschärfung der Enden der einzelnen Lamellen bei zusammengesetzten Blattfederwerken (s. dort).

Obige Rechnungen behalten ihre Gültigkeit natürlich auch in dem Falle, wenn man die Feder an beiden Enden unterstützt oder aufhängt und in der Mitte belastet. Die Form ist dabei eine symmetrische und die Belastung in der Mitte gleich 2 P anzunehmen, wenn P die Reaction eines Stützpunktes bedeutet. Die Federung f ist hier ebenso groß wie bei der einschenkeligen

Feder und berechnet sich nach denselben Formeln, vorausgesetzt, daß man unter l die halbe Länge der Feder, also wieder den Abstand der Belastung von dem Stützpunkte versteht.

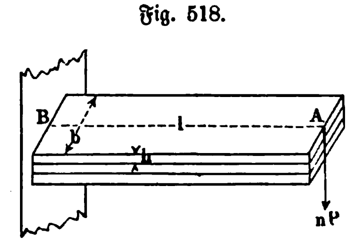
Bei den vorstehenden Untersuchungen ist immer eine gerade Mittellinie der Feder vorausgesetzt worden. In den Fällen der Ausführung pflegt man jedoch den Federn meist eine gewisse Sprengung zu geben (Fig. 517), d. h. man biegt die Feder in geringem Grade nach einer Richtung, welche der durch die Belastung angestrebten entgegengesetzt ist. Da diese Biegung immer nur gering ist, so kann sie bei der Berechnung außer Acht gelassen werden, um so mehr, als die Feder im belasteten Zustande sich der der Rechnung zu Grunde gelegten geraden Form nähert.

Fig. 517.



§. 288. **Zusammengesetzte Blattfedern.** Wenn die Tragkraft einer Feder eine sehr bedeutende sein soll, so würde ihre Construction als einfache Blattfeder meist zu großen und daher unbequemen Abmessungen führen. Man vermeidet diesen Uebelstand in der Regel dadurch, daß man eine größere Anzahl (n) einfacher Blattfedern derartig auf einander legt, daß bei eintretender Biegung jede einzelne Feder frei auf der darunter liegenden sich verschieben kann. Wenn man, wie in Fig. 518, n einfache Rechteckfedern über einander anordnet, so ersieht man ohne Weiteres, daß jede derselben die Last

Fig. 518.



$$P = \frac{1}{6}\, k\, \frac{b h^2}{l}$$

zu tragen vermag, unter deren Einfluß ihr freies Ende sich um

$$f = 4 \frac{P l^3}{b h^3 E}$$

durchbiegt. Es muß daher das ganze Federwerk eine Tragkraft

$$nP = \frac{n}{6}\, k\, \frac{b h^2}{l} = \frac{1}{6}\, k\, \frac{n b h^2}{l}$$

besitzen, d. h. eine eben so große, wie eine einfache Rechteckfeder, deren Breite gleich der Summe der Breiten aller einzelnen Blätter ist. Ueberhaupt wird sich diese Feder auch hinsichtlich der Durchbiegung, Federungsarbeit und des Materialbedarfs genau wie eine einfache Rechteckfeder verhalten.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich hinsichtlich einer Combination von n gleichen Dreieckfedern, Fig. 519, anstellen; auch diese Feder stimmt in Bezug ihrer Tragkraft, Durchbiegung und ihres Volumens vollkommen mit einer einfachen Dreieckfeder überein, deren Breite am befestigten Ende gleich ist der Summe der Breiten der einzelnen Blätter ebendaselbst. Die auf einander liegenden Blätter werden auch bei erfolgender Biegung sich hinreichend genau an einander schließen, weil bei der Gleichheit der einzelnen Blätter jedes derselben die gleiche Krümmung annimmt. Zwar ist jedes Blatt um seine Dicke gegen das vorhergehende versetzt, doch ist diese Größe gegen den Krümmungshalbmesser bei mäßiger Biegung sehr klein.

Man kann sich daher denken, die zusammengesetzten Federn, Fig. 518 und Fig. 519, seien dadurch entstanden, daß man ein breites rechteckiges oder dreieckiges Blatt durch entsprechende Schnitte, bei ersterem parallel, bei letzterem von der Spitze auslaufend in n gleiche Theile getheilt habe. Bei der Dreieckfeder kann man diese Theilung des Blattes, Fig. 520, noch in anderer Weise

Fig. 519.

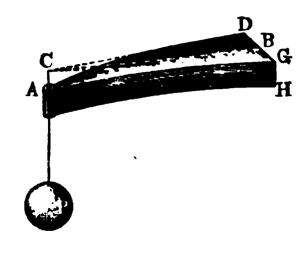
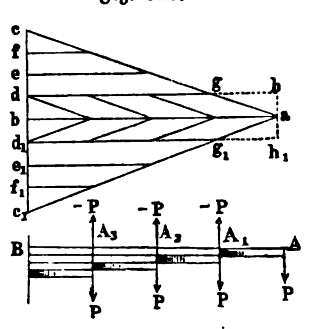


Fig. 520.



und zwar gleichfalls durch parallele Schnitte vornehmen, und dadurch ebenfalls ein zusammengesetztes Blattfederwerk erhalten. Denkt man sich nämlich das dreieckige Blatt $a c c_1$ durch mit der Mittellinie ab parallele Schnitte in $2n$ gleich breite Streifen getheilt, und die symmetrisch zu ab gelegenen Streifen zu je zwei und zwei wieder vereinigt, so erhält man durch Aufeinanderlegen dieser Doppelstreifen das Blattfederwerk $d g a g_1 d_1$, dessen Seitenansicht in $A A_1 A_2 A_3 B$ dargestellt ist. Wenn an dem äußersten Punkte A die Kraft P angreift, so verhält sich das Stück $A A_1$ wie eine einfache Dreieckfeder, und da die Breite $g g_1 = \frac{1}{n} c c_1 = \frac{1}{n} b$ und die Länge $A A_1 = \frac{1}{n} ab = \frac{1}{n} l$ ist, so hat man die Gleichung:

$$P \frac{l}{n} = \frac{1}{6} k \frac{b h^2}{n}.$$

Dieses Stück AA_1 nimmt nach §. 259 eine kreisförmige Krümmung an, deren Halbmesser sich berechnet zu

$$r = \frac{WE}{P\frac{l}{n}} = \frac{bh^3E}{12Pl}.$$

Das oberste Blatt drückt auf das darunter liegende bei A_1 mit der Kraft P, und man hat sich zu denken, daß das untere Blatt in A_1 mit einer Reaction $-P$ gegen das obere wirkt, so daß das obere Blatt AB in A und A_1 durch ein Kräftepaar $P, -P$ ergriffen wird. In Folge dessen ist das Kraftmoment für alle Punkte zwischen A_1 und B constant gleich $P . AA_1 = P\frac{l}{n}$, woraus für alle Punkte von A_1B sich der Krümmungshalbmesser ebenfalls zu

$$r = \frac{WP}{P\frac{l}{n}} = \frac{bh^3E}{12Pl} \text{ ergiebt (s. §. 239).}$$

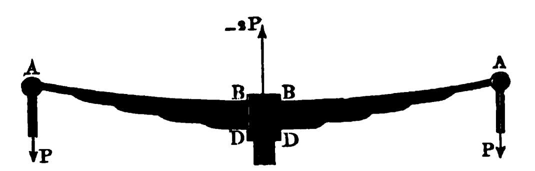
In derselben Weise kann die Rechnung für alle übrigen Blätter geführt werden, indem die Kraft P von Blatt zu Blatt sich fortpflanzt, und jedes Blatt mit seinem dreieckigen Ende einer Dreieckfeder entspricht, während der gerade Theil, unter der Einwirkung eines Kräftepaares stehend, überall denselben Querschnitt bedarf. Es geht hieraus hervor, daß die erhaltene Feder ein Körper gleichen Widerstandes sein muß, und daß wegen der überall gleichen Krümmung die einzelnen Blätter sich stets berühren müssen, ein Klaffen zwischen denselben also nicht eintritt. Man erkennt auch leicht, daß hinsichtlich der Federung und des Materialbedarfs diese zusammengesetzte Blattfeder vollkommen mit der einfachen Blattfeder acc_1 übereinstimmt, aus welcher sie entstanden gedacht ist. Bei der Ausführung findet meist darin eine kleine Abweichung statt, daß das oberste Blatt $dgag_1d_1$ keine Zuspitzung gag_1 am Ende erhält, sondern daselbst gerade nach der Punktirung ghh_1g_1 begrenzt wird, um dort das Federgehänge besser anbringen zu können. Diese Abweichung veranlaßt zwar in dem Stücke AA_1 eine etwas andere Krümmung, als oben berechnet worden, was jedoch deswegen unbedenklich ist, weil das Stück AA_1 eine Unterlage, an die es sich anschmiegen müßte, nicht hat.

Um die Zuspitzungen der einzelnen Blattenden zu vermeiden, giebt man, Fig. 521, den Enden zuweilen dieselbe Breite $\frac{b}{n}$ wie den geraden Stücken, und verjüngt dafür ihre Dicke nach den Enden hin. Es muß alsdann, um das Auseinanderklaffen der Blätter zu vermeiden, die Verjüngung so gewählt werden, daß diese Endstücke der einzelnen Blätter Balken gleicher Krümmung werden, d. h. es muß die Bedingung erfüllt werden:

$$\frac{h^3}{z^3} = \frac{\frac{1}{n} l}{x} \text{ oder } z = h \sqrt[3]{\frac{n x}{l}} \text{ (s. §. 287).}$$

Hierbei weicht die Form der Feder von der genauen Form gleichen Widerstandes in geringem Maße ab, und das Gewicht wird dadurch unbedeutend größer ausfallen. Bei der in Fig. 521 dargestellten zweischenkeligen Feder

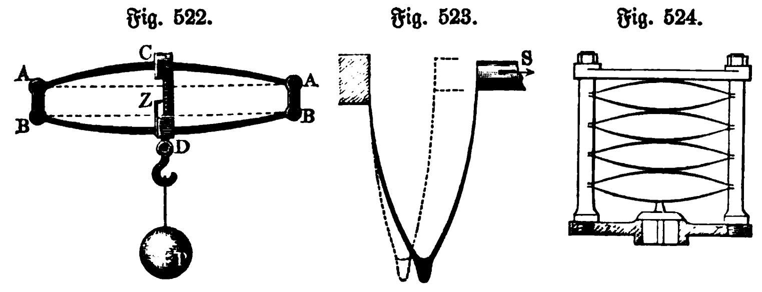
Fig. 521.



muß übrigens bemerkt werden, daß als freie Länge l jedes Armes nicht der Abstand des Stützpunktes A von der Mitte, sondern von den Enden BD, BD der Federbüchse in Rechnung zu stellen ist.

Zuweilen handelt es sich darum, Federwerke herzustellen, bei denen nicht sowohl die Belastung, als vielmehr die Federung beträchtlich sein soll. Um in diesem Falle eine unbequeme Länge zu vermeiden, pflegt man wohl zwei oder mehrere einfache oder zusammengesetzte, ein- oder zweischenkelige Federn zu combiniren, wobei man denn eine Federung des gesammten Federwerkes erhält, welche gleich der Summe der Federungen der einzelnen Theile ist. Die Figuren 522 bis 524 stellen derartige Combinationen dar. Die in Fig. 522 dargestellte Anordnung findet besonders für Dynamometer Anwendung, die Feder Fig. 523 benutzt man u. A. häufig bei gewissen Prägmaschinen (zum Fuhren der Nähnadeln u. s. w.), um den durch einen Daumen zurückgeschobenen Prägstempel S behufs des Prägens vorzuschnellen. Die Feder Fig. 524 besteht aus einer größeren Anzahl zweischenkeliger Blattfedern,

Fig. 522. Fig. 523. Fig. 524.



und wird häufig in solchen Fällen benutzt, wo der Druck auch bei eintretender Federung möglichst constant bleiben soll, z. B. bei Sicherheitsventilen für

Dampfkessel. Da nämlich die Reaction einer Feder mit ihrer Durchbiegung wächst, vertheilt man die Durchbiegung, welche durch die Erhebung des Ventils veranlaßt wird, auf eine größere Anzahl von Federn, um für jede einzelne die Federung möglichst klein zu machen.

Beispiel. Eine zweischenkelige Feder, wie Fig. 521, hat eine Belastung von 4000 Kilogramm auf das Axlager eines Eisenbahnwagens zu übertragen, die Dimensionen sollen bestimmt werden? Die Länge jedes Schenkels der Feder von der Kante der Federbüchse B bis zum Federgehänge A betrage 0,35 Meter, so berechnet sich ein Schenkel AB, da in B die Hälfte der Last mit 2000 Kilogramm wirkt, durch:

$$Pl = \frac{1}{6}\, b h^2 k = 2000\,.\,350.$$

Nimmt man nun eine Stärke der Stahlschienen von $h = 12$ Millimeter und setzt voraus, daß im ruhenden Zustande die Fasern mit höchstens 45 Kilogramm pro Quadratmillimeter belastet werden sollen, so folgt:

$$b = \frac{6\,.\,2000\,.\,350}{12\,.\,12\,.\,45} = 648 \text{ Millimeter.}$$

Diese Breite kann man etwa auf 8 Lamellen von je $\frac{648}{8} = 81$ Millimeter vertheilen. Die Durchbiegung f berechnet sich zu

$$f = \frac{6\,P l^3}{b h^3 E} = \frac{6\,.\,2000\,.\,350^3}{648\,.\,12^3\,.\,29000} = 15{,}8 \text{ Millimeter.}$$

Die Federn dürfen durch die ruhende Belastung niemals bis zur Elasticitätsgrenze in Anspruch genommen werden (meist geht man nur bis zu $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{3}$ der Elasticitätsgrenze), denn während der Bewegung wird die Anstrengung der Feder durch Stöße und Erschütterungen, derentwegen sie angeordnet ist, noch vermehrt. Nimmt man an, daß durch diese Stöße die gesammte Spannung des Materials bis zu derjenigen der Elasticitätsgrenze gebracht werden solle, welche für Gußstahl 65 Kilogramm beträgt, so ist die Federung f_1 gegeben durch:

$$f_1 = \frac{65}{45} f = 22{,}8 \text{ Millimeter,}$$

so daß also das Spiel der belasteten Feder noch $22{,}8 - 15{,}8 = 7$ Millimeter beträgt.

Die mechanische Arbeit A, welche jeder Arm der Feder bei der Belastung P und der Durchbiegung f aufnimmt, ist $\frac{Pf}{2}$, also nach dem Obigen:

$$A = \frac{1}{2}\, Pf = \frac{1}{2} \cdot \frac{k^2}{E}\, \frac{bhl}{6} = \frac{1}{2}\, \frac{45^2}{29000}\, \frac{648\,.\,12\,.\,350}{6} = 15{,}837 \text{ Meterkilogramm,}$$

und ebenso ist die mechanische Arbeit A_1, welche einer Durchbiegung bis zur Elasticitätsgrenze entspricht:

$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 f_1 = \frac{1}{2}\, \frac{65^2}{29000}\, \frac{648\,.\,12\,.\,350}{6} = \left(\frac{65}{45}\right)^2 A = 33{,}042 \text{ Meterkilogramm.}$$

Die mechanische Arbeit, welche die mit 4000 Kilogramm belastete Feder daher noch aufzunehmen vermag, wenn sie durch Stöße bis zu der Elasticitätsgrenze beansprucht wird, beträgt daher, indem die oben berechneten Werthe nur für einen Arm gelten:

$$2\,(A_1 - A) = 2\,(33{,}04 - 15{,}84) = 34{,}4 \text{ Meterkilogramm.}$$

Drehschraubenfedern. Zu den Biegungsfedern gehört auch die §. 289.
schraubenförmig gewundene Feder Fig. 525, welche an dem einen Ende *B* befestigt ist, während das andere Ende *A* von einer Kraft ergriffen wird, die eine Verdrehung der Feder um ihre Axe *CD* anstrebt, und welcher Federgattung daher von Reuleaux die obige Bezeichnung beigelegt ist.

Die näherungsweise Berechnung dieser Feder läßt sich folgenderweise ausführen. Sei, Fig. 526, *SCS* eine Scheibe, mit welcher das eine Ende der

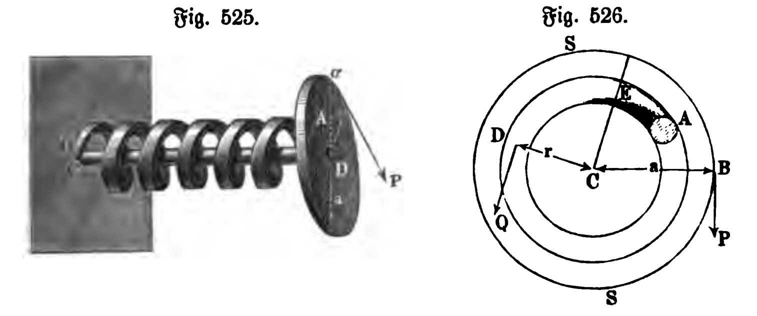


Fig. 525. Fig. 526.

Schraubenfeder bei *A* verbunden ist, und an welcher bei *B* im Abstande *a* von der Axe die Drehkraft *P* angreift, so wird unter Einfluß dieser Kraft *P* in irgend einem Querschnitte der Feder, z. B. in *D*, eine innere Kraft *Q* rege gemacht, welche mit *P* im Gleichgewichte ist, und wofür man hat:

$$Pa = Qr, \text{ oder } Q = \frac{Pa}{r}.$$

Diese Zugkraft *Q* (wenn *P* in entgegengesetzter Richtung wirkt, ist *Q* eine Druckkraft) sucht eine Verlängerung des gewundenen Federstabes herbeizuführen, und gleichzeitig den Stab zu biegen. Die ziehende Wirkung von *Q* ist aber im Vergleich zur biegenden unbeträchtlich und kann gegen letztere ganz vernachlässigt werden. Denkt man sich nun *CE* senkrecht auf *CD*, so sucht die Kraft *Q* den Stab in *E* abzubrechen, und man hat hierfür die Festigkeitsformel:

$$k\frac{W}{e} = Qr = Pa = M.$$

Da man zu demselben Ausdrucke gelangt, wo man auch den Querschnitt *D* wählt, so ergiebt sich, daß die Schraubenfeder ein Körper gleichen Widerstandes ist, sobald für alle Querschnitte $\frac{W}{e}$ constant, d. h. sobald die Feder aus einem prismatischen Stabe gewunden ist.

Der Querschnitt des Stabes, woraus die Feder besteht, pflegt meist ein Rechteck oder ein Kreis zu sein, und man hat dem entsprechend bei runddrähtigen Federn (Drahtstärke *d*):

$$P = k \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{a};$$

und bei flachdrähtigen Federn (Querschnitt bh):

$$P = k \frac{b h^2}{6 a}.$$

Von der Größe des Halbmessers r ist die Festigkeit der Feder ganz unabhängig, dieselbe hängt, wie aus den Formeln ersichtlich, außer von dem Materiale nur von dem Querschnitte ab.

Um die Größe der Federung zu bestimmen, bezeichne l die Länge des gewundenen Drahtes, und sei unter α der Winkel (Bogen im Abstande Eins) verstanden, um welchen der Draht gewunden ist, also $\alpha = n . 2\pi$, wenn n die Anzahl der Umwindungen bedeutet. Man hat dann:

$$l = n 2 r \pi = r \alpha.$$

Im belasteten Zustande wird die Krümmung der Feder sich ändern, und der Krümmungshalbmesser r gehe dabei in r_1 über, wo r_1 größer oder kleiner als r ist, je nachdem P die Feder auf- oder zuzudrehen bestrebt ist. Der Winkel α, um welchen die Feder gewunden ist, wird dabei in α_1 geändert, und zwar so, daß $l = r_1 \alpha_1$ ist, weil der Draht seine Länge l nach wie vor beibehält, sobald man die ziehende Wirkung der Kraft Q vernachlässigt. Der Verdrehungswinkel w, welchem die Feder unter dem Einflusse von P ausgesetzt ist, beträgt daher:

$$w = \alpha_1 - \alpha = l \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Wie nun für die Biegung gerader Stäbe die Formel gilt:

$$M = \frac{WE}{r} \text{ oder } \frac{M}{WE} = \frac{1}{r},$$

so findet man bei einer Untersuchung der Biegung eines an sich schon nach dem Halbmesser r gekrümmten Stabes annähernd die Beziehung

$$\frac{M}{WE} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r},$$

wo r_1 den Krümmungshalbmesser nach eingetretener Biegung bedeutet. Diesen Werth hier eingesetzt in den Ausdruck für w, erhält man:

$$w = l \frac{M}{WE} = l \frac{Pa}{WE}.$$

Setzt man hierin für Pa den Werth $Pa = k \frac{W}{e}$, so folgt:

$$w = \frac{k}{E} \frac{l}{e}.$$

Aus dem Verdrehungswinkel w folgt aber nun die Federung, d. h. die Versetzung des Angriffspunktes der Kraft P:

$$f = w . a = l \frac{Pa^2}{WE} = \frac{k}{E} \frac{al}{e}.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt geht dies über in:

$$f = \frac{64}{\pi} \frac{Pa^2 l}{Ed^4} = 2 \frac{k}{E} \frac{al}{d}$$

und für den rechteckigen Querschnitt von der Breite b (parallel zur Axe gemessen) und der Höhe h wird:

$$f = 12 \frac{Pa^2 l}{Ebh^3} = 2 \frac{k}{E} \frac{al}{h}.$$

Multiplicirt man in beiden Fällen P mit f, so erhält man für die runddrähtige Schraubenfeder:

$$Pf = \frac{\pi}{32} k \frac{d^3}{a} \cdot 2 \frac{k}{E} \frac{al}{d} = {}^1/_4 \frac{k^2}{E} \frac{\pi d^2}{4} l = {}^1/_4 \frac{k^2}{E} V$$

oder

$$V = 4 Pf \frac{E}{k^2}$$

und für die flachdrähtige Feder:

$$Pf = {}^1/_6 k \frac{bh^2}{a} \cdot 2 \frac{k}{E} \frac{al}{h} = {}^1/_3 \frac{k^2}{E} bhl = {}^1/_3 \frac{k^2}{E} V$$

oder

$$V = 3 Pf \frac{E}{k^2}.$$

Vergleicht man diese Werthe von V mit dem für die Dreieckfeder in §. 287 gefundenen, so ergiebt sich, daß die flachdrähtige Drehschraubenfeder genau ebensoviel Material zu ihrer Construction erfordert, wie eine aus demselben Materiale und für dieselbe Federungsarbeit Pf gebildete Dreieckfeder, und daß der Materialbedarf ebenfalls wie bei dieser von den einzelnen Dimensionen l, b und h ganz unabhängig ist. Alle aus demselben Materiale für dieselbe Federungsarbeit construirten Drehschraubenfedern fallen daher bei Voraussetzung derselben Sicherheit (k) gleich schwer aus.

Bei der runddrähtigen Schraubenfeder stellt sich der Materialverbrauch ${}^4/_3$mal so groß heraus, wie bei der gleichwerthigen flachdrähtigen Feder, oder bei der Dreieckfeder.

Einfache Torsionsfedern. Die einfachste Torsionsfeder wird durch einen an einem Ende B befestigten Draht AB, Fig. 527 (a. f. S.), gebildet, an dessen freiem Ende A die Kraft P an einem Hebelarm a verdrehend wirkt. Für die Festigkeit eines solchen Stabes hat man nach der Lehre von der Torsionsfestigkeit (§. 271): §. 291.

$$Pa = k\,\frac{W}{e},$$

worin k die höchstens zulässige Schubspannung $k_{III} = {}^4/_5\, k_I$ und W das Maß des Drehungsmomentes bezeichnen. Für den Kreis hat man

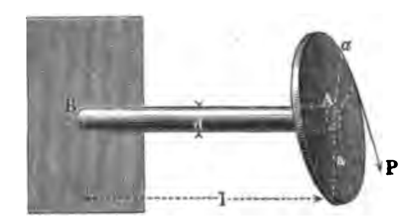
$$W = W_1 + W_2 = 2 \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

und $\frac{d}{2}$ für e zu setzen, daher gilt für die einfache runddrähtige Torsionsfeder die Gleichung:

$$P = \frac{\pi}{16}\,k\,\frac{d^3}{a}.$$

Wenn der Querschnitt des Stabes AB ein Rechteck bh ist, so ist die Bestimmung des Drehungsmomentes W wegen des Windschiefwerdens der

Fig. 527.



Querschnitte nur durch weitläufige Rechnungen zu bestimmen, und es ergiebt sich dann (vergl. §. 270):

$$W = \frac{b^3 h^3}{3\,(b^2 + h^2)} \text{ und } \frac{W}{e} = \frac{b^2 h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

Mit diesen Werthen folgt für die flachdrähtige einfache Torsionsfeder

$$P = \frac{k}{3a}\,\frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

Um die Federung zu finden, hat man nach §. 269 den Torsionswinkel:

$$\alpha = \frac{Pa\,.\,l}{CW}.$$

Wird hierin für Pa der Werth $Pa = k\,\frac{W}{e}$ eingesetzt, so erhält man:

$$\alpha = \frac{k}{C}\,\frac{l}{e},$$

und daher ist die Federung:

$$f = a\alpha = \frac{k}{C}\,\frac{al}{e}.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist $e = \frac{d}{2}$, daher

$$f = 2 \frac{k}{C} \frac{al}{d}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt hat man:

$$e = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + h^2}},$$

daher:

$$f = \frac{k}{C} al \frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{bh}.$$

Der Ausdruck für die Federungsarbeit Pf giebt nunmehr für die einfache runddrähtige Torsionsfeder:

$$Pf = \frac{\pi}{16} k \frac{d^3}{a} \cdot 2 \frac{k}{C} \frac{al}{d} = \frac{\pi}{8} \frac{k^2}{C} d^2 l = {}^1/_2 \frac{k^2}{C} V$$

oder

$$V = 2 \frac{C}{k^2} Pf.$$

Um dieses Volumen mit dem Materialverbrauche der Biegungsfedern zu vergleichen, hat man zu berücksichtigen, daß k hier die Schubspannung k_{III} bedeutet und hat daher

$$k_{III} = {}^4/_5 \, k_I \text{ und } C = {}^2/_5 \, E$$

einzuführen. Alsdann erhält man:

$$V = 2 \frac{{}^2/_5 \, E}{({}^4/_5 \, k_I)^2} Pf = {}^5/_4 \frac{E}{k_I^2} Pf.$$

Da das Volumen einer Dreieckfeder und einer flachdrähtigen Drehschraubenfeder für dieselbe Federungsarbeit $V = 3 \frac{E}{k^2} Pf$ beträgt, so folgt hieraus, daß eine runddrähtige Torsionsfeder nur ${}^5/_{12}$ desjenigen Gewichtes erfordert, welches eine gleichwerthige Dreieckfeder aus demselben Materiale und von gleicher Sicherheit erheischt.

Für die flachdrähtige Torsionsfeder ist:

$$Pf = \frac{k}{3a} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}} \cdot \frac{k}{C} al \frac{\sqrt{b^2 + h^2}}{bh} = {}^1/_3 \frac{k^2}{C} bhl = {}^1/_3 \frac{k^2}{C} V$$

oder

$$V = 3 \frac{C}{k_{III}^2} Pf = 3 \frac{{}^2/_5 \, E}{({}^4/_5 \, k_I)^2} Pf = {}^{15}/_8 \frac{E}{k_I^2} Pf,$$

d. i. die flachdrähtige einfache Torsionsfeder erfordert einen anderthalbmal so großen Materialaufwand wie die runddrähtige und daher ${}^5/_8$ von dem einer gleichwerthigen Dreieckfeder.

§. 291. **Schraubenfedern.** Die gewöhnlichen Schraubenfedern, welche nach §. 289 Biegungsfedern sind, sobald sie einer Verwindung unterworfen werden, gehören dagegen zur Classe der Torsionsfedern, sofern sie einen axialen Zug oder Druck auszuhalten haben. Denkt man sich nämlich die cylindrische Schraubenfeder AB, Fig. 528, an einem Ende B befestigt und das andere Ende A von einer nach der Axe BA gerichteten Kraft P gezogen oder gedrückt, so werden in irgend welchem Querschnitte, z. B. bei C, innere Spannungen hervorgerufen, welche mit P im Gleichgewicht sein müssen. Die Wirkung in C ist aber eine Torsion, indem die Kraft P bestrebt ist, das Stück CA in C um das Stück BC zu verdrehen. Man hat daher, da das Moment der Kraft P in Bezug auf C durch Pr dargestellt ist, für die Festigkeit der Feder:

Fig. 528.



$$Pr = k\,\frac{W}{e},$$

wie bei der einfachen Torsionsfeder (§. 290). Wie dort erhält man daher für die runddrähtige Feder:

$$P = k\,\frac{\pi}{16}\,\frac{d^3}{r}$$

und für die flachdrähtige Feder:

$$P = \frac{k}{3r}\,\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}.$$

Man erkennt hieraus, daß eine cylindrische Schraubenfeder, bei welcher also r constant ist, einen Körper gleicher Widerstandsfähigkeit abgiebt, vorausgesetzt, daß der Querschnitt des Federdrahtes überall derselbe ist.

Um die Federung der Schraubenfeder zu ermitteln, denke man sich ein sehr kleines Stück der Feder von der Länge ∂l, welches man als gerade betrachten kann. Unter Einfluß der verdrehenden Kraft P wird dasselbe einer Torsion $\partial\alpha$ ausgesetzt, welche sich nach §. 269 durch $\partial\alpha = \frac{Pr.\partial l}{CW}$ berechnet. Da diese Verdrehung in allen Querschnitten in gleicher Weise eintritt (wenn r und W constant ist), so folgt für den Verdrehungswinkel α der ganzen Feder von der Drahtlänge l:

$$\alpha = \frac{Prl}{CW},$$

und hierin für P seinen Werth $P = k\,\frac{W}{re}$ eingeführt:

$$\alpha = \frac{k}{C}\,\frac{l}{e}.$$

Den Weg f, um welchen bei dieser Verdrehung α der Angriffspunkt von P verschoben wird, hat man zu:

$$f = r\alpha = \frac{k}{C}\,\frac{rl}{e}.$$

Dieser Ausdruck für die Federung der Schraubenfeder stimmt ebenfalls mit demjenigen der einfachen Torsionsfeder (§. 290) vollständig überein, da a und r in beiden Fällen dasselbe, nämlich den Hebelarm der Kraft bedeuten. Man kann daher die in §. 290 entwickelten Ausdrücke für f, Pf und V der rund- und flachdrähtigen einfachen Torsionsfeder ohne Weiteres auch für die rund- und flachdrähtige Schraubenfeder anwenden.

Zuweilen bildet man die Schraubenfedern nicht cylindrisch, sondern kegelförmig, damit die einzelnen Windungen beim Zusammendrücken sich in einander, anstatt auf einander legen können und man hierdurch an Raum gewinne. Insbesondere geschieht dies bei Bufferfedern und Polsterfedern. Da r hierbei nicht constant ist, so geht alsdann die Eigenschaft gleicher Widerstandsfähigkeit verloren, sofern man nicht etwa, wie bei den flachdrähtigen Bufferfedern öfter geschieht, die Querschnittsverhältnisse ebenfalls so verändert, daß $\frac{W}{re}$ constant wird.

Federn im Allgemeinen. Aus den vorstehend entwickelten Resultaten lassen sich einige Schlüsse von allgemeiner Gültigkeit ziehen. Das für eine Biegungsfeder von bestimmter Tragkraft P und ebenfalls bestimmter Federung f erforderliche Volumen läßt sich allgemein ausdrücken durch §. 292.

$$V = c\,\frac{E}{k^2}\,Pf,$$

worin c eine Constante bedeutet, welche für verschiedene Federarten verschieden ist. Diese Constante ist z. B. für die Dreieckfeder gleich 3, für die runddrähtige Drehschraubenfeder gleich 4 u. s. w. In gleicher Weise ist das Volumen einer Torsionsfeder durch

$$V = c\,\frac{C}{k_{III}^{\,2}}\,Pf = c\,\frac{{}^2/_5\,E}{({}^4/_5\,k)^2}\,Pf = {}^5/_8\,c\,\frac{E}{k^2}\,Pf$$

ausgedrückt, wo c ebenfalls von der Federform abhängt und z. B. für die runddrähtige Torsions- und Schraubenfeder gleich 2, für dieselben flachdrähtigen Federn gleich 3 ist. Es folgt hieraus, daß alle Federn einer bestimmten Art, welche aus demselben Materiale, bei gleicher Sicher-

heit und für dieselbe Federungsarbeit Pf construirt sind, genau dasselbe Gewicht haben müssen. Um die Güte von Federn überhaupt zu beurtheilen, handelt es sich nun um die Prüfung der Güte 1) des Materials und 2) der Federgattung. Zu dem Ende schreiben wir obige Gleichung:

$$Pf = \frac{1}{c} \frac{k^2}{E} V$$

für Biegungsfedern und

$$Pf = {}^8/_5 \cdot \frac{1}{c} \frac{k^2}{E} V$$

für Torsionsfedern.

Das Product Pf, welches bisher immer als Federungsarbeit bezeichnet wurde, ist doppelt so groß, als die von der Feder bei ihrer Formänderung aufgenommene mechanische Arbeit, welche letztere nach §. 222 zu $^1/_2\, Pf$ sich berechnet; es sei diese Leistung mit $L = {}^1/_2\, Pf$ bezeichnet.

Nach §. 212 bedeutet $^1/_2 \frac{T^2}{E}$ den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze, sobald T die der Elasticitätsgrenze entsprechende Spannung bedeutet. Die Spannung k ist immer kleiner als T, meist nimmt man k nur gleich der Hälfte des Tragmoduls T an, und es möge die Größe $^1/_2 \frac{k^2}{E}$ der **Arbeitsmodul der zulässigen Spannung** genannt und mit A bezeichnet werden. Alsdann gehen obige Gleichungen über in:

$$L = \frac{1}{c} A V$$

für Biegungsfedern und

$$L = {}^8/_5 \frac{1}{c} A V$$

für Torsionsfedern.

Man erkennt hieraus zunächst, daß dasjenige Material für Federn das vorzüglichste sein wird, für welches die Größe $A = {}^1/_2 \frac{k^2}{E}$ möglichst groß ist, d. h. welches bei einem möglichst kleinen Elasticitätsmodul E eine möglichst große Spannung k verträgt, weil bei diesem Materiale jede Volumeneinheit eine möglichst große mechanische Arbeit zu leisten vermag. Da man für k einen gewissen aliquoten Theil des Tragmoduls T zu nehmen pflegt, so kann auch der aus Tabelle I. in §. 218 zu entnehmende Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze zur Vergleichung dienen. Derselbe beträgt für:

	Gußstahl fein, gehärtet und angelassen.	Deutsch. Stahl.	Messingdraht.	Holz.
$A_1 =$	0,072	0,015	0,009	0,0015

woraus man die Vorzüglichkeit des Gußstahls für Federn erkennt.

Was nun die Beurtheilung der Güte der einzelnen Federsysteme anbetrifft, so kann man zunächst bemerken, daß eine Biegungsfeder von dem Volumen V eine Leistung $L = A V$ aufnehmen würde, wenn sämmtliche Fasern mit der höchsten zulässigen Spannung k in Anspruch genommen würden. Für diesen idealen Zustand, in welchem sich etwa ein gleichmäßig starker Gummifaden befindet, welcher durch eine Kraft gezogen wird, würde die Constante $\frac{1}{c} = 1$ sein. In Wirklichkeit wird aber bei der Biegung der Körper immer nur ein kleiner Theil des Materials mit der zulässigen Spannung k beansprucht, und da der übrige Theil des Materials weniger stark in Mitleidenschaft gezogen wird, so ist die Constante $\frac{1}{c}$ immer wesentlich keiner als 1. Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Werthe von $\frac{1}{c}$ für die Biegungsfedern, sowie der Werthe $^8/_5 \cdot \frac{1}{c}$ für die Torsionsfedern.

Federart.	$Pf = \frac{1}{c} A V$; $\frac{1}{c} =$	$^8/_5 \cdot \frac{1}{c} =$	Verhältnißmäßiger Materialverbrauch.	Wirkungsgrad.
Rechteckfeder	$^1/_9$	—	3	0,11
Dreieckfeder (einfache und zusammengesetzte) . . .	$^1/_3$	—	1	0,33
Drehschraubenfeder, runddrähtig	$^1/_4$	—	$^4/_3$	0,25
Drehschraubenfeder, flachdrähtig	$^1/_3$	—	1	0,33
Runddrähtige Torsions- und Schraubenfeder . .	$^1/_2$	$^4/_5$	$^5/_{12}$	0,50
Flachdrähtige Torsions- und Schraubenfeder . .	$^1/_3$	$^8/_{15}$	$^5/_8$	0,33

Bei der Rechteckfeder wird das Material nur an einer Stelle mit der äußersten Spannung k beansprucht, nämlich an dem Befestigungspunkte und

im größten Abstande von der neutralen Faser. Daher ist dabei die Federarbeit nur $^1/_9$ oder 11,1 Proc. von derjenigen, welche eine Feder bei vollständiger Ausnutzung aufzunehmen im Stande sein würde. Bei der Dreieckfeder sowie bei allen Federn gleichen Widerstandes tritt die größte Spannung k zwar auch nur in dem größten Abstande von der neutralen Faser auf, aber dieses Verhältniß findet in allen Querschnitten statt, weswegen die Ausnutzung hier bedeutend größer ist, und zwar verhältnißmäßig um so größer, je größer der Querschnitt dieser äußersten Faserschicht im Vergleich zum ganzen Querschnitte ist. Daher steigt $\frac{1}{c}$ bei dem rechteckigen Querschnitte, wo die äußerste Faser eine Schicht von der ganzen Breite des Querschnittes ausmacht, auf $^1/_3$, während bei dem kreisförmigen Querschnitte, wo die größte Spannung k nur in einer Faser von unendlich geringer Breite auftritt, $\frac{1}{c}$ nur $^1/_4$ beträgt.

Was die Torsionsfedern anbetrifft, so erkennt man, daß dieselben sich weit besser zur Aufnahme einer großen Federungsarbeit eignen, als die Biegungsfedern. Da nämlich die Leistung der Torsionsfedern sich ausdrückt durch

$$L = \frac{1}{c} \frac{k_{III}^2}{C} Pf,$$

und da allgemein

$$\frac{k_{III}^2}{C} = {}^8/_5 \frac{k^2}{E} \text{ ist,}$$

so folgt, daß eine Torsionsfeder $^8/_5 = 1{,}8$mal so viel mechanische Arbeit aufzunehmen vermag, als eine gleich schwere Biegungsfeder aus demselben Materiale, und bei welcher die Constructionsconstante $\frac{1}{c}$ denselben Werth hat. So ist z. B. bei der flachdrähtigen Torsionsfeder $\frac{1}{c}$ ebenso groß ($^1/_3$), wie bei der Dreieckfeder, der Materialverbrauch bei ersterer aber nur $^5/_8$ von demjenigen der letzteren. Am günstigsten stellt sich hier die Wirkung bei dem kreisförmigen Querschnitte, weil hierbei die am meisten angestrengte Faserschicht den vollen Querschnittsumfang einnimmt, während bei dem rechteckigen Querschnitte nur die vier Eckfasern mit voller Kraft ausgenutzt werden.

Die vierte Spalte der vorstehenden Tabelle enthält die Angabe des Materialverbrauchs der verschiedenen Federn aus demselben Materiale, welche für die gleiche Federungsarbeit mit gleicher Sicherheit construirt sind, und ist dabei der Materialverbrauch der Dreieckfeder gleich Eins angenommen. Die Zahlen endlich in der letzten Spalte geben unter der Bezeichnung „Wirkungsgrad“ an, wie groß die von der Feder wirklich aufgenommene Arbeit

im Verhältniß zu derjenigen Arbeit ist, welche eine gleich schwere ideale Feder aufzunehmen vermöchte. Unter einer idealen Feder ist hier eine solche zu verstehen, bei welcher das gesammte Material der höchsten Spannung k ausgesetzt sein würde. Eine solche ideale Biegungsfeder würde man theoretisch z. B. haben, wenn man bei einer Dreieckfeder die gesammte Fläche jedes Querschnittes in zwei Streifen von unendlich geringer Dicke concentriren könnte, welche den constanten Abstand h überall von einander haben und behalten. Ebenso kann man sich eine ideale Torsionsfeder als eine solche vorstellen, bei welcher das gesammte Material in eine Röhre von geringer Wandstärke concentrirt ist.

Schließlich kann noch bemerkt werden, daß bei allen im Vorstehenden betrachteten Federn die Federung f proportional der Belastung P ist, was von besonderer Wichtigkeit für die Betrachtung der Schwingungen ist, in welche die Federn gerathen, sobald sie den Wirkungen von Stößen ausgesetzt werden.

Schlußanmerkung. Obgleich über keinen Gegenstand der Mechanik bis jetzt so viele Versuche angestellt worden sind, als über die Elasticität und Festigkeit der Körper, so bleibt doch noch vieles zu untersuchen und manche Unsicherheit zu beseitigen übrig. Wir haben Versuche hierüber von Ardant, Banks, Barlow, Bevan, Brix, Buffon, Burg, Duleau, Ebbels, Eytelwein, Finchan, Gerstner, Girard, Gauthey, Fairbairn und Hodgkinson, Lagerjhelm, Musschenbroek, Morveau, Navier, Rennie, Rondelet, Tredgold, Wertheim u. s. w. Die älteren Versuche werden sehr ausführlich abgehandelt in Eytelwein's Handbuch der Statik fester Körper, Bd. II., nächstdem in von Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. I. Eine umfänglichere Abhandlung über diesen Gegenstand liefert auch v. Burg im 19ten und 20sten Bande der Jahrbücher des polytechn. Instituts zu Wien. Man findet in diesen Schriften zum Theil auch abweichende Theorien abgehandelt. Der Versuche von Brix und Lagerjhelm ist schon oben (S. 406) gedacht worden. Neue und sehr umfängliche Versuche über die rückwirkende Festigkeit der Steinarten, von Brix, rapportirt der 32ste Jahrgang (1853) der Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen. Eine einfache Theorie der Biegung von Brix findet man in der Abhandlung „elementare Berechnung des Widerstandes prismatischer Körper gegen die Biegung", welche aus den Verhandlungen des preußischen Gewerbevereins besonders abgedruckt ist. Die neuesten Untersuchungen über die Elasticität von Wertheim sind ebenfalls schon oben (S. 408) besprochen worden. Ueber Hodgkinson's Versuche findet man einen Auszug in Moseley's Mechanical Principles of Engineering and Architecture. Das Hauptwerk von Hodgkinson ist unter dem Titel „Experimental Researches on the strength and other properties of cast iron etc., bei John Weale, 1846, erschienen. Eine französische Uebersetzung von Pirel enthält Tome IX, 1855, der Annales des ponts et chaussées, auch wird hiervon in einem Aufsatze von Couche, Tome XX, 1855, der Annales des mines gehandelt. Tredgold handelt in einer besonderen Abhandlung „über die Stärke des Gußeisens und anderer Metalle", welche in Leipzig 1826 auch deutsch erschienen ist. Uebrigens ist zum Studium zu empfehlen Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle, ferner Navier's Résumé des leçons sur

l'application de la Mécanique, Part. I., deutsch von Westphal, unter dem Titel „Mechanik der Baukunst", zu welcher Schrift Poncelet in seiner Theorie von dem Widerstande fester Körper (s. dessen Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, Band II., deutsch von Schnuse) Ergänzungen liefert. Vorzüglich und auch im vorliegenden Werke mehrfach benutzt ist: Résistance des matériaux (Leçons de Mécanique pratique) par A. Morin, ferner Theorie der Holz- und Eisenconstructionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen von Georg Rebhan. Wien 1856. Auch ist zu empfehlen: die schon oben (S. 508) citirte Schrift, die Festigkeit der Materialien, von Moll und Reuleaux, ferner Mémoire sur la Résistance du Fer et de la Fonte etc. par G. H. Love, Paris 1852; sowie Tate, die Festigkeit eiserner Balken und Träger, nach dem Englischen von von Weber, Dresden 1851. Die Theorie der zusammengesetzten Festigkeit ist zuerst von dem Verfasser in der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem Ingenieur) von Bornemann u. s. w. Bd. I. abgehandelt worden. In dem ersten Bande der neuen Folge dieser Zeitschrift („Civilingenieur" 1854) wird vom Herrn Kunstmeister Bornemann die graphische Darstellung der relativen Festigkeit abgehandelt; auch werden in demselben die Ergebnisse der Biegungsversuche von Bornemann sowie von Lamarle mitgetheilt.

Weitere Ausführungen der Lehre von der Elasticität und Festigkeit kommen in der Folge bei der Theorie der Schwingungen und der des Stoßes vor.

W. Fairbairn's Useful Information for Engineers I. and II. Series, berichten mehrfache Versuche über die Festigkeit des Schmiedeeisens in verschiedenen Formen, sowie auch über die von Steinen, Glas u. s. w. In theoretischer Beziehung ist, außer dem mehrfach erwähnten Werke von Grashof: Die Festigkeitslehre, Berlin, 1866, vorzüglich zu empfehlen: Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides par Lamé, sowie A Manual of applied Mechanics by W. J. M. Rankine, nächstdem auch Cours de Mécanique appliqué, I. Partie, par Bresse, sowie Théorie de la Résistance et de la flexion plane des solides par Belanger. Die Schrift von Laissle und Schübler: „Ueber den Bau der Brückenträger" ist dem dermaligen Stande der Wissenschaft entsprechend bearbeitet, und daher sehr zu empfehlen; auch enthalten Rühlmann's Grundzüge der Mechanik, 3. Auflage (1860), einen lesenswerthen Abriß der Festigkeit.

Der Civilingenieur und die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereins enthalten mehrere werthvolle Abhandlungen über Elasticitäts- und Festigkeitslehre, namentlich von Grashof, Schwedler, Winkler u. s. w., sowie auch mehrere gute Uebersetzungen von französischen und englischen Abhandlungen von Barlow, Bouniceau, Fairbairn, Love u. s. w.; auch findet man in diesen Zeitschriften die Ergebnisse vielfacher Versuche über die Festigkeit, z. B. von Fairbairn, Karmarsch, Schönemann, Völkers u. s. w. Einen ausführlichen Nachweis der Literatur über die Festigkeit des Eisens und Stahls enthält das Werk von A. v. Kaven: Collectaneen über einige zum Brücken- und Maschinenbau verwendete Materialien, Hannover, 1869.

Fünfter Abschnitt.

Dynamik fester Körper.

Erstes Capitel.

Allgemeine Lehren der Dynamik.

Materieller Punkt. Die Dynamik behandelt die Bewegungen der Körper mit Berücksichtigung der Ursachen, durch welche diese Bewegungen hervorgebracht oder abgeändert werden, und unterscheidet sich dadurch von der Phoronomie, welche diese Ursachen außer Betracht läßt. Im zweiten Abschnitte ist gezeigt worden, daß die Ursache einer solchen Erzeugung resp. Abänderung einer Bewegung stets in dem Vorhandensein einer Kraft gesucht werden muß, und man hat für die Größe einer solchen Kraft P, welche einem materiellen Punkte von der Masse M die Acceleration p ertheilt, nach §. 58 die Gleichung §. 293.

$$P = Mp,$$

woraus die Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} \text{ folgt.}$$

Bewegt sich nun der materielle Punkt M unter Einfluß der Kraft P in einer gewissen ebenen Curve, deren rechtwinkelige Coordinaten mit x und y bezeichnet werden, so hat man nach §. 21, unter v die Geschwindigkeit in einem gewissen Augenblicke verstanden:

$$\text{Geschwindigkeit } v = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

und

$$\text{Beschleunigung } p = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\text{Geschwindigkeitszunahme}}{\text{Zeit}}.$$

Wenn man nun die Geschwindigkeit v nach §. 35 in zwei Componenten v_x und v_y parallel den Coordinatenaxen zerlegt, so erhält man, unter α den Winkel der Geschwindigkeit mit der X-Axe verstanden:

$$v_x = v\,\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial s}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial t}$$

und

$$v_y = v\,\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}\,\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Ebenso kann man die Beschleunigung p in zwei Componenten p_x und p_y nach den Axen zerlegen und erhält:

$$p_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

und

$$p_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Die auf den Punkt M wirkenden beschleunigenden Kräfte nach den Richtungen der Axen sind nun aber offenbar die Seitenkräfte, in welche sich die bewegende Kraft P zerlegen läßt, also

die Componente nach der X-Axe $X = P\ cos.\ \alpha$

und nach der Y-Axe $Y = P\ sin.\ \alpha$.

Für diese Componenten der bewegenden Kraft gilt nun ebenso wie für die letztere selbst:

$$X = Mp_x = M\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2};\quad Y = Mp_y = M\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Diese Beziehungen gelten auch noch, wenn der materielle Punkt von mehreren Kräften angegriffen wird, welche ihrer Richtung und Größe nach veränderlich sein können, nur muß man in diesem Falle unter X und Y die Summe der Componenten aller äußeren Kräfte nach den Axenrichtungen genommen verstehen. Wenn der Weg des Punktes nicht in einer Ebene liegt, sondern eine räumliche Curve bildet, so wird man die hier angedeutete Zerlegung von P in drei Componenten X, Y, Z nach drei zu einander senkrechten Axen vorzunehmen haben.

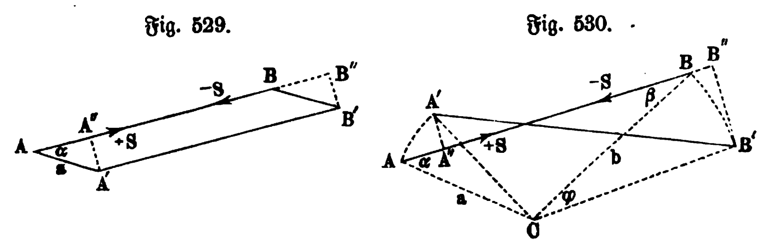
§. 294. **Innere Kräfte.** In dem vorigen Paragraphen ist die bewegte Masse als materieller Punkt aufgefaßt. In der Wirklichkeit hat man es aber mit materiellen Körpern zu thun, d. h. mit Systemen fest mit einander verbundener materieller Punkte, deren gegenseitige Entfernungen als unabänderliche angesehen werden sollen. Wenn auf einen Punkt eines derartigen Massensystems eine Kraft wirkt, so wird die Bewegung desselben im Allgemeinen eine andere sein, als diejenige, welche derselbe Punkt unter Einfluß derselben Kraft annehmen müßte, sobald er ganz frei wäre. Es wird nämlich jede auf

den Punkt einwirkende Kraft vermöge der Verbindungen desselben mit anderen Punkten auch auf diese letzteren wirken, so daß deren Bewegungen dadurch beeinflußt werden, wie auch andererseits die Bewegung des betrachteten Punktes von den Kräften abhängig sein muß, welche auf die übrigen Punkte des Systems wirken. Wären die Verbindungen der Punkte unter sich nicht vorhanden, so würden jene Einwirkungen der letzteren auf einander auch nicht stattfinden, und die einzelnen Punkte würden als ganz freie den auf sie wirkenden Kräften folgen, wobei ihre gegenseitigen Abstände sich ändern würden. Durch die vorhandenen Verbindungen, welche den Körper zu einem starren Systeme machen, werden die gegenseitigen Abstände der Punkte constant erhalten. Man kann sich daher die Verbindungen als Kräfte vorstellen, welche dem Bestreben der äußeren Kräfte, die gegenseitigen Abstände der einzelnen Punkte von einander zu verändern, Widerstand entgegensetzen. Man nennt diese Kräfte innere Kräfte im Gegensatze zu den an den einzelnen Punkten angreifenden äußeren oder bewegenden Kräften.

Wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung müssen diese inneren Kräfte zwischen zwei beliebigen Punkten immer paarweise von gleicher Größe und entgegengesetzt vorkommen, und zwar muß die Richtung derselben die gerade Verbindungslinie zwischen den beiden betrachteten Punkten sein.

Wenn das betrachtete System irgend eine Bewegung, fortschreitende oder drehende, annimmt, so muß dabei, wie leicht zu erkennen ist, die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte gleich Null sein. Denkt man sich nämlich zwei beliebige Punkte A und B, Fig. 529, von denen B auf A die

Fig. 529. Fig. 530.



Kraft S äußert, so daß A auf B mit $-S$ reagirt, um eine gewisse Größe $a = AA' = BB'$ unter einem Winkel α gegen AB verschoben, so ist die mechanische Arbeit der Kraft $+S$, wenn AA'' die Projection des Weges AA' auf AB bedeutet, gleich

$$+ S \,.\, AA'' = + S \,.\, AA' \cos.\alpha = + S a \cos.\alpha$$

und die Arbeit der Kraft $-S$ ebenso

$$- S \,.\, BB'' = - S \,.\, BB' \cos.\alpha = - S a \cos.\alpha;$$

daher die Summe beider Arbeiten gleich Null.

Man denke sich andererseits dem Systeme der Punkte AB eine geringe Drehung um einen beliebigen Mittelpunkt C, Fig. 530, ertheilt, welcher von

A und B die Abstände a und b haben mag. Die Radien CA und CB mögen ferner mit AB die Winkel α und β bilden, und die Drehung geschehe um den Winkel $ACA' = BCB' = \varphi$. Die Wege der Punkte A, B betragen dann $AA' = a\varphi$ und $BB' = b\varphi$, und ihre Projectionen auf die Richtung AB der Kräfte sind:

$$AA'' = AA' . sin. \, AA'A'' = a\varphi \, sin. \, AA'A'' \text{ und}$$
$$BB'' = BB' . sin. \, BB'B'' = b\varphi \, sin. \, BB'B''.$$

Als Winkel, deren Schenkel paarweise senkrecht zu einander stehen, ist nun $AA'A'' = \alpha$ und $BB'B'' = \beta$, und man hat daher die Arbeit der Kraft $+ S$ bei der Verdrehung:

$$+ S . AA'' = S . a\varphi \, sin. \alpha \text{ und die von } - S$$
$$- S . BB'' = - S . b\varphi \, sin. \beta.$$

Da nun stets $a \, sin. \alpha = b \, sin. \beta$, so folgt hieraus die Gleichheit der beiden entgegengesetzten Arbeiten, und deren Summe ist also Null.

Da nun jede Bewegung aus einer geradlinig fortschreitenden und einer drehenden zusammengesetzt gedacht werden kann, und obige Betrachtung für jede zwei Punkte sich anstellen läßt, so ergiebt sich, daß **bei jeder Bewegung des Systems die Summe der Arbeiten der inneren Kräfte gleich Null sein muß.**

Es gilt dieses Gesetz auch noch, wenn die Größe der Kräfte $+ S$ und $- S$ während der Bewegung veränderlich ist, da man sich die Bewegung immer in so kleine Elemente zerlegt denken kann, daß die Kräfte während dieser Elementarbewegungen als constant angesehen werden dürfen.

§. 295. d'Alembert'sches Princip. Wenn ein materielles System unter Einfluß beliebiger Kräfte in Bewegung ist, so sind nach dem vorigen Paragraphen die Bewegungen der einzelnen Punkte andere als diejenigen sein würden, welche sie als *freie* Punkte annehmen würden, sobald dieselben Kräfte auf sie einwirkten. Denkt man sich an jedem einzelnen Punkte eine Kraft angebracht, welche derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, die dem Punkte als freiem genau die Bewegung ertheilen würde, welche er wirklich hat, so würde dadurch das ganze System offenbar im Gleichgewichte sein.

Sei die an einem Punkte von der Masse M angreifende äußere Kraft gleich P, sei die an diesem Punkte angreifend zu denkende innere Kraft gleich S, so erfolgt die Bewegung des Punktes durch die Wirkung der Resultirenden R dieser beiden Kräfte. Sei nun p die Beschleunigung, welche dem Punkte M durch diese Resultirende R ertheilt wird, so ist die Größe der letzteren durch $R = pM$ gegeben, und es würde daher der Punkt M im Gleichgewichte sein, wenn an ihm eine Kraft $- pM$ angebracht würde. Denkt man dies an allen Systempunkten ausgeführt, so würde das ganze

System im Gleichgewichte sein unter der Einwirkung der Kräfte $\Sigma(P - pM)$, wobei das Summenzeichen auf alle Massenelemente sich zu beziehen hat, auch wenn keine äußere Kraft P darauf wirkt.

Die Größe $P - pM$ nennt man wohl die „verlorene Kraft“ des Punktes M, weil sie diejenige Componente der äußeren Kraft P ist, welche auf die Bewegung des Punktes M einen directen Einfluß nicht ausübt und scheinbar verloren geht*). Mit Rücksicht hierauf pflegt man obiges, von d'Alembert gefundene Princip meist in folgende Fassung zu kleiden:

„An einem von beliebigen Kräften bewegten Systeme von Massen stehen die verlorenen Kräfte aller materiellen Punkte fortwährend im Gleichgewichte“, d. h. es ist unter Einfluß der Verbindungen stets Gleichgewicht zwischen den äußeren Kräften und solchen Kräften vorhanden, welche denen gleich und entgegengesetzt sind, unter deren Wirkung die wirklich stattfindende Bewegung der einzelnen Punkte eintreten müßte, vorausgesetzt, daß diese Punkte frei wären.

Bezeichnen x, y, z die veränderlichen Coordinaten eines Punktes M, und X, Y, Z die Componenten der äußeren Kräfte, die auf M wirken, so sind die Componenten der verlorenen Kräfte nach §. 293 ausgedrückt durch:

$$X - M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2};\quad Y - M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2};\quad Z - M\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten drückt sich der Gleichgewichtszustand, in welchem diese Kräfte für alle Punkte des Systems stehen müssen, aus durch:

$$\Sigma\left[\left(X - M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\Delta x + \left(Y - M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\Delta y + \left(Z - M\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\right] = 0,$$

worin Δx, Δy, Δz die Aenderungen der Coordinaten bezeichnen, welche bei einer virtuellen Bewegung des Systems eintreten.

Das d'Alembert'sche Princip kann dazu dienen, mit Hülfe der Bedingungen des Gleichgewichtes die Beschleunigungen der einzelnen Punkte, daher auch ihre Geschwindigkeiten und Wege zu bestimmen.

Beispiel. Eine Kette, deren Masse pro Längeneinheit m betrage, sei über zwei gegen einander gelehnte schiefe Ebenen ABC, Fig. 531 (a. f. S.), gelegt. Die Bewegung, welche dieselbe vermöge ihres Gewichtes annehmen würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre, soll untersucht werden. Seien die Kettenlängen BD und BE durch x und y bezeichnet, l sei die ganze Länge der Kette, so ist

$$x + y = l, \text{ also auch}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

*) Es versteht sich von selbst, daß die gedachte Componente nicht eigentlich verloren gehen kann, sie wird nur durch die an M angreifende innere Kraft neutralisirt, und ihr Einfluß vermöge dieser inneren Kraft auf andere Systempunkte übertragen.

Die nach den Richtungen BA und BC genommenen Schwerkraftscomponenten sind:

$$gmx\,.\,sin.\,\alpha \text{ und } gmy\,.\,sin.\,\alpha',$$

und daher die Componenten der verlorenen Kräfte nach eben diesen Richtungen

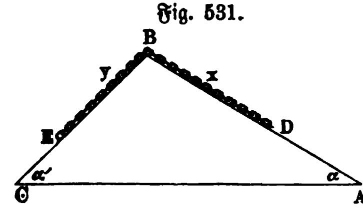


Fig. 531.

$$gmx\,.\,sin.\,\alpha - mx\,\frac{\partial^2 x}{\partial^2 t}$$

und

$$gmy\,.\,sin.\,\alpha' - my\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Man gebe der Kette nun eine virtuelle Bewegung, wobei das Ende D um Δx, das Ende E um Δy verschoben wird. Da die Kette nicht ausdehnbar angenommen wird, so muß $\Delta y = -\Delta x$ sein. Nach dem d'Alembert'schen Principe ergiebt sich zunächst die Gleichung

$$0 = gmx\,.\,sin.\alpha\,.\,\Delta x - mx\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\Delta x + gmy\,.\,sin.\,\alpha'\,.\,\Delta y - my\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\Delta y,$$

oder

$$0 = gx\,sin.\,\alpha - x\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - g\,(l - x)\,sin.\,\alpha' - (l - x)\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2};$$

woraus

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = g\,\frac{x\,sin.\,\alpha - (l - x)\,sin.\,\alpha'}{l} = \frac{g}{l}\,(sin.\alpha + sin.\,\alpha')\left(x - \frac{l\,sin.\,\alpha'}{sin.\alpha + sin.\alpha'}\right).$$

Um die Integration auszuführen, setze man

$$x - \frac{l\,sin.\,\alpha'}{sin.\,\alpha + sin.\,\alpha'} = u \text{ und } \frac{g}{l}\,(sin.\,\alpha + sin.\,\alpha') = a^2.$$

Dann hat man

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 u.$$

Hierzu gehört das Integral

$$u = C e^{+at} + C_1 e^{-at} \text{ (s. §. 282)}$$

und daher

$$x = C e^{+at} + C_1 e^{-at} + \frac{l\,sin.\,\alpha'}{sin.\,\alpha + sin.\,\alpha'},$$

sowie

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} = a\,(Ce^{at} - C_1 e^{-at}).$$

Hierin sind C und C_1 zwei Constante, welche sich bestimmen, wenn man x und v zu Anfang der Zeit kennt. Es ist nämlich für $t = 0$:

$$x_0 = C + C_1 + \frac{l\,sin.\,\alpha'}{sin.\,\alpha + sin.\,\alpha'} \text{ und } v_0 = a\,(C - C_1),$$

woraus man C und C_1 bestimmen kann, wenn x_0 und v_0 bekannt sind.

Aus $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{g}{l}\,[x\,sin.\,\alpha - (l - x)\,sin.\,\alpha']$ ergiebt sich ferner, daß die Beschleunigung Null ist, wenn $x\,sin.\,\alpha = (l - x)\,sin\,\alpha'$, d. h. wenn die unteren Kettenenden D und E in einer und derselben Horizontalen liegen.

§. 296. Princip der lebendigen Kräfte. Das in §. 77 für den materiellen Punkt als richtig nachgewiesene Princip der lebendigen Kräfte behält auch seine Gültigkeit für ein beliebiges Massensystem, welches unter der Einwirkung

verschiedener Kräfte steht, wie sich in folgender Art zeigen läßt. Nach den vorigen Paragraphen kann man einen jeden Punkt eines festen Systems als frei beweglich betrachten, wenn man nur zu den an ihm angreifenden äußeren Kräften gleichzeitig die durch die Verbindungen auf ihn ausgeübten inneren Kräfte hinzufügt. Man kann daher das Princip der lebendigen Kräfte auf ihn anwenden und findet:

$$M\,\frac{v_1^2 - v^2}{2} = P\,.\,s_1 + S\,.\,s_2,$$

wenn s_1 und s_2 die Projectionen des Weges von M auf die respectiven Richtungen von P und S und v_1 resp. v die Geschwindigkeiten zu Anfang und Ende der betrachteten Bewegung bedeuten. Da dies für alle Punkte M gilt, so hat man auch

$$\Sigma\left(M\,\frac{v_1^2 - v^2}{2}\right) = \Sigma\,(P.s_1) + \Sigma\,(S.s_2).$$

Hierin bedeutet $\Sigma\,(P\,.\,s_1)$ die Gesammtarbeit aller äußeren Kräfte und $\Sigma\,(S\,.\,s_2)$ diejenige aller inneren. Letztere ist nach §. 294 aber stets gleich Null, so daß man hat

$$\Sigma\left(M\,\frac{v_1^2 - v^2}{2}\right) = \Sigma\,(P.s_1),$$

d. h., wenn ein beliebiges System mit einander verbundener Massen unter Einfluß der darauf wirkenden Kräfte eine Bewegung macht, so ist die Arbeit der äußeren Kräfte gleich dem halben Zuwachs der lebendigen Kräfte aller Massentheile zusammen.

Man kann das Princip der lebendigen Kräfte auch aus dem d'Alembert'schen Principe direct herleiten. Denkt man sich nämlich dem Systeme eine solche unendlich kleine Bewegung gegeben, wie sie unter Einfluß der Kräfte wirklich eintritt, setzt man also ∂x, ∂y, ∂z anstatt Δx, Δy, Δz, so hat man

$$\Sigma\left[\left(X - M\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial x + \left(Y - M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial y + \left(Z - M\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial z\right] = 0,$$

oder

$$\Sigma\,M\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\partial z\right) = \Sigma\,(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

Nun ist aber

$$v^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$

und daraus

$\dfrac{\partial\,(v^2)}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial x}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial y}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\,\dfrac{\partial z}{\partial t}\,\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, deshalb kann man

$$\Sigma M \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \partial z\right) = \frac{1}{2} \partial \Sigma (M v^2)$$

setzen, d. h. man erhält die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \partial \Sigma (M v^2) = \Sigma (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z),$$

oder durch Integration zwischen dem Anfangs- und Endzustande der Bewegung, welchen die Geschwindigkeiten v und v_1 und die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 entsprechen, erhält man:

$$\Sigma \left(M \frac{v_1^2}{2}\right) - \Sigma \left(M \frac{v^2}{2}\right) = \int_{xyz}^{x_1 y_1 z_1} \Sigma (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z),$$

welche Gleichung offenbar mit der obigen wesentlich übereinstimmt.

Gesetzt, es seien X, Y, Z nur von den Coordinaten x, y, z, nicht aber direct von der Zeit t abhängig, und gesetzt, es existire eine Function $f(xyz)$ derart, daß

$$\Sigma (X) = \frac{\partial f}{\partial x};\ \Sigma (Y) = \frac{\partial f}{\partial y};\ \Sigma (Z) = \frac{\partial f}{\partial z};$$

so ist der Ausdruck $\Sigma (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z)$ offenbar das vollständige Differenzial von $f(x, y, z)$, und es läßt sich die oben angegebene Integration ausführen, wodurch man erhält:

$$\Sigma \left(M \frac{v_1^2}{2}\right) - \Sigma \left(M \frac{v^2}{2}\right) = f(x_1 y_1 z_1) - f(xyz).$$

In diesem Falle läßt sich also der Zuwachs an lebendiger Kraft eines Systems von Punkten aus den Werthen angeben, welche die Function $f(xyz)$ annimmt, d. h. aus den Coordinaten oder den Lagen der einzelnen Systempunkte.

In dem besonderen Falle, wo $\Sigma (X \partial x + Y \partial y + Z \partial z) = 0$ ist, wird das Integral, also $f(xyz)$ gleich einer Constanten C, und also $f(x_1 y_1 z_1) - f(xyz) = 0$; d. h. das System ändert seine lebendige Kraft nicht. Man spricht dann wohl von dem Principe der **Erhaltung der lebendigen Kraft**.

Dieser Fall ist dadurch gekennzeichnet, daß die äußeren Kräfte, deren Componenten X, Y, Z sind, unter sich im Gleichgewichte stehen würden, wenn nicht das System einmal in Bewegung wäre. Es befindet sich in diesem Falle z. B. eine Maschine während ihres gewöhnlichen gleichförmigen Ganges, wo die bewegenden Kräfte gerade so viel Arbeit verrichten, wie die nützlichen und schädlichen Widerstände für sich gebrauchen. Hätten die einzelnen Organe nicht schon eine gewisse Geschwindigkeit erlangt (während der Zeit des Anlaufens, wo die widerstehenden Kräfte gering waren), so würden die sämmtlichen Kräfte sich im Gleichgewichte halten, d. h. eine Bewegung nicht zu erzeugen vermögen. Man nennt diesen Zustand, welcher für die Arbeit der

Maschinen stets anzustreben ist, den **Beharrungszustand** oder das **Gleichgewicht in der Bewegung.**

Niveauflächen. Die im vorigen Paragraphen erwähnte Function $f(xyz)$ hat in dem Falle eine interessante geometrische Bedeutung, wo es sich um die Bewegung nur **eines** materiellen Punktes handelt. Es stellt nämlich diese Function eine gewisse Beziehung dar zwischen den Coordinaten des bewegten Punktes. Setzt man diese Function gleich einer gewissen Constanten C, was gleichbedeutend ist mit §. 297.

$$\partial\,[f(xyz)] = X\partial x + Y\partial y + Z d z = 0,$$

so stellt die Gleichung $f(xyz) = C$ nach den Lehren der analytischen Geometrie eine bestimmte Fläche dar, welche alle diejenigen Punkte enthält, deren Coordinaten die Gleichung $f(xyz) = C$ erfüllen. Denkt man den materiellen Punkt auf dieser Fläche sich bewegend, so werden seine Coordinaten in jeder Lage die Function $f(xyz) = C$ machen, und die lebendige Kraft des Punktes wird bei der Bewegung desselben nicht geändert. Man nennt diese Fläche eine **Niveaufläche** für den Punkt. Denkt man sich nun der Function $f(xyz)$ nach und nach alle möglichen Werthe beigelegt, so erhält man eine Schaar verschiedener Niveauflächen, welche sämmtlich die bemerkte Eigenschaft haben, daß der bewegte Punkt constant seine lebendige Kraft beibehält, so lange er bei seiner Bewegung auf derselben Niveaufläche verbleibt. Wenn hingegen der Punkt eine Bewegung annimmt, vermöge deren er aus einer Niveaufläche $f(xyz) = C_1$ in eine andere $f(xyz) = C_2$ übergeht, so ändert sich seine lebendige Kraft um die Größe $C_2 - C_1$, und diese Größe ist also gar nicht abhängig von dem Wege, weder von der Richtung noch der Länge desselben, auf welchem der Punkt M von der Niveaufläche C_1 zu derjenigen C_2 gelangt ist. Ebenso ist hieraus ersichtlich, daß der Punkt M auf seiner beliebigen Bewegung jedesmal denselben Betrag lebendiger Kraft enthält, so oft er eine und dieselbe Niveaufläche durchkreuzt.

So lange der Punkt bei seiner Bewegung in einer Niveaufläche verbleibt, ist nach dem Vorstehenden die Beschleunigung Null, weil die Geschwindigkeit constant bleibt. Es halten sich während dieser Bewegung sämmtliche auf den Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewichte, wie schon aus der Bedingung $X\partial x + Y\partial y + Z\partial z = 0$ nach dem Principe der virtuellen Momente folgt.

Es ist endlich auch leicht zu erkennen, daß die auf den Punkt M wirkende beschleunigende Kraft P in jedem Punkte der Bewegung von M normal ist zu derjenigen Niveaufläche, welche durch diesen Punkt hindurchgeht *).

*) Der Beweis ist folgender: Für die Niveaufläche ist $X\partial x + Y\partial y + Z\partial z = 0$. Dividirt man durch $P\partial s$, so folgt $\frac{X}{P}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{Y}{P}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{Z}{P}\frac{\partial z}{\partial s} = 0$, welches

Steht der Punkt M nur unter dem Einflusse der Schwerkraft g, so hat man, wenn die positive Z-Axe vertical aufwärts genommen wird:

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = -Mg;$$

daher für die Niveauflächen:

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z = 0 + 0 - Mg\partial z = 0,$$

woraus

$$M\frac{v^2}{2} = \int - Mg\partial z = - Mgz + C \text{ folgt.}$$

C bestimmt sich aus dem Anfangszustande, wenn man die Geschwindigkeit $v = v_0$ für $z = 0$ kennt, so folgt:

$$C = M\frac{v_0^2}{2}, \text{ daher}$$

$$M\frac{v^2 - v_0^2}{2} = - Mgz.$$

Die Niveauflächen sind daher horizontale Ebenen.

Ist ferner der Körper außer der Schwerkraft noch einer horizontalen Kraft unterworfen, welche proportional der x-Ordinate sein mag (z. B. der Centrifugalkraft, s. später), so hat man, Fig. 532,

Fig. 532.

$$X = M.ax;\ Y = 0;\ Z = - Mg;$$

daher für die Niveauflächen:

$$X\partial x + Z\partial z = M.ax\partial x - Mg.\partial z = 0.$$

Dies integrirt giebt:

$$\frac{Max^2}{2} - Mgz = C$$

die Gleichung einer Parabel, deren Hauptaxe mit der Z-Axe übereinstimmt, und deren Scheitel um $-\frac{C}{Mg}$ unter der X-Axe liegt.

§. 298. **Gesetz des Schwerpunktes.** Wenn x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Massentheilchens m eines Körpers, und x', y', z' die Coordinaten von dem Schwerpunkte des Körpers sind, so hat man nach §. 107:

$$\Sigma\, mx = Mx';\ \Sigma\, my = My';\ \Sigma\, mz = Mz';$$

wenn M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet.

---

auch $\cos.a \cos.\alpha + \cos.b \cos.\beta + \cos.c \cos.\gamma = 0$ sich schreiben läßt, unter a, b, c die Winkel der Axen mit P und unter α, β, γ die Winkel der Axen mit der Tangentialebene in M an die Niveaufläche verstanden. Jene Gleichung drückt aber die Bedingung des Senkrechtstehens von P auf der Niveaufläche aus.

Diese Gleichungen müssen in jedem Augenblicke auch dann erfüllt sein, wenn der Körper in Bewegung ist. Fassen wir eine sehr kleine Bewegung ins Auge, so daß x um Δx, y um Δy und z um Δz zugenommen hat, so hat x' um $\Delta x'$, y' um $\Delta y'$ und z' um $\Delta z'$ sich verändert. Dann muß ebenfalls $\Sigma\, m\, (x + \Delta x) = M\, (x' + \Delta x')$ und so fort sein.

Durch Subtraction findet sich

$$\Sigma\, m\,.\,\Delta x = M\,.\,\Delta x';\ \Sigma\, m\,.\,\Delta y = M\,.\,\Delta y';\ \Sigma\, m\,.\,\Delta z = M\,.\,\Delta z'.$$

Dividirt man diese Gleichungen durch die Zeit Δt, welche zur Bewegung gebraucht worden, und berücksichtigt, daß $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ gleich der nach der X-Axe genommenen Geschwindigkeitscomponente v_x ist, u. s. w., so folgt:

$$\Sigma\, m v_x = M v'_x;\ \Sigma\, m v_y = M v'_y;\ \Sigma\, m v_z = M v'_z.$$

Mit Hülfe der Differenzialrechnung bekommt man dieses Resultat einfacher durch Differenziren nach t, nämlich

$$\Sigma\, m\, \frac{\partial x}{\partial t} = M\, \frac{\partial x'}{\partial t};\ \Sigma\, m\, \frac{\partial y}{\partial t} = M\, \frac{\partial y'}{\partial t};\ \Sigma\, m\, \frac{\partial z}{\partial t} = M\, \frac{\partial z'}{\partial t}.$$

Es ist also bei einem beliebig bewegten freien Körper in jedem Augenblicke die Summe der Producte aus den einzelnen Massentheilchen in die nach einer beliebigen Richtung genommenen Geschwindigkeitscomponenten derselben gleich dem Producte aus der ganzen Masse des Körpers in die nach derselben Richtung genommene Geschwindigkeitscomponente des Schwerpunktes.

Durch ein abermaliges Differenziren erhält man die ganz analoge Beziehung:

$$\Sigma\, m\, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = M\, \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2};\ \Sigma\, m\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = M\, \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2};\ \Sigma\, m\, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = M\, \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}.$$

Bei einem beliebig bewegten freien Körper ist die Summe der Producte der einzelnen Massentheilchen in ihre nach einer beliebigen Richtung genommenen Beschleunigungen gleich dem Producte aus der ganzen Masse des Körpers in die nach derselben Richtung genommene Beschleunigung.

Bezeichnen nun wieder X, Y, Z die Componenten der äußeren Kräfte nach den Axen, so müssen, da die verlorenen Kräfte im Gleichgewichte stehen, die Gleichungen erfüllt sein:

$$\Sigma \left(X - m\, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = 0;\ \Sigma \left(Y - m\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = 0;\ \Sigma \left(Z - m\, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right) = 0,$$

und also folgt auch:

$$\Sigma\, X = M\, \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2};\ \Sigma\, Y = M\, \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2};\ \Sigma\, Z = M\, \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}.$$

Die vorstehenden Resultate besagen, daß der Schwerpunkt eines beliebigen frei beweglichen Massensystems, welches unter

Einwirkung beliebiger Kräfte steht, sich gerade so bewegt, als wären sämmtliche Massentheilchen in ihm vereinigt, und hätten sämmtliche äußere Kräfte in ihm ihren gemeinschaftlichen Angriffspunkt. Durch irgend welche innere Kräfte kann diese Bewegung nicht geändert werden, da die inneren Kräfte nach §. 294 stets paarweise gleich und entgegengesetzt auftreten und sich also gegenseitig vernichten.

§. 299. **Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.** Wenn ein starrer Körper, den man als materiellen Punkt betrachten mag, unter der Einwirkung äußerer Kräfte in Bewegung gelangt, so beschreibt er eine Bahn, deren Beschaffenheit im Allgemeinen durch die Entwickelungen des ersten Abschnittes festgestellt worden ist. Insbesondere ist in §. 46 gezeigt, daß bei einer krummlinigen Bewegung

die Tangentialgeschwindigkeit $v = \frac{\partial s}{\partial t}$,

die Tangentialbeschleunigung $p_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$,

die Normalacceleration $p_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ ist,

vorausgesetzt, daß hier unter ∂s das Wegelement, unter r der Krümmungshalbmesser der Bahn und unter ω die Winkelgeschwindigkeit verstanden ist, so daß $v = \omega r$ und $\frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ gesetzt werden kann. Soll der ganz frei gedachte Punkt eine gewisse Curve von bestimmten Krümmungsverhältnissen durchlaufen, so muß die Normalbeschleunigung in jedem Punkte obigen Werth $\frac{v^2}{r}$ haben, und ebenso muß der Werth der Tangentialacceleration überall gleich $\frac{\partial v}{\partial t}$ sein, wenn für die Geschwindigkeit v in der tangentialen Richtung der Bahn ebenfalls bestimmte Festsetzungen gemacht sind. Es muß z. B. die Normalacceleration $\frac{v^2}{r}$ constant sein, wenn die Bahn kreisförmig, d. h. wenn r constant ist, und es muß die Tangentialacceleration gleich Null sein, wenn die Bewegung eine gleichmäßige sein soll. Dabei ist zu bemerken, daß die Tangentialacceleration nur eine Veränderung der Geschwindigkeit und nicht der Richtung, hingegen die Normalacceleration nur eine Veränderung der Richtung, d. i. der Bahnkrümmung, aber nicht der Geschwindigkeit herbeiführen kann.

Wenn M die Masse des Körpers bezeichnet, so sind nach §. 58 die bewegenden Kräfte, welche zur Erzeugung jener Beschleunigung erforderlich sind:

in der Richtung der Tangente $P = M \frac{\partial v}{\partial t}$

und in der Richtung der Normale $N = M \frac{v^2}{r}$.

Man erkennt hieraus, daß es möglich sein muß, einen frei beweglichen Punkt in jeder beliebigen Bahn mit beliebiger Geschwindigkeit zu bewegen, vorausgesetzt, daß man den beschleunigenden Kräften in jedem Augenblicke diejenige Richtung und Intensität geben kann, welche, der Natur der Bahn und beabsichtigten Bewegung entsprechend, aus obigen Formeln sich ergeben.

In der Praxis ist dieses Mittel in vielen Fällen nicht möglich, und erreicht man den Zweck, den Körper in einer bestimmten Bahn zu bewegen, in der Weise, daß man den Körper durch Führungen, Leitflächen, Schnüre oder in sonstiger Weise zwingt, die gewünschte Bahn einzuschlagen. Die Anwendung derartiger Leitcurven und Führungen ist namentlich für den Maschinenbau von großer Bedeutung.

Da der Körper ohne solche Hülfsmittel nur unter Einfluß der ihn treibenden Kräfte eine ganz andere nach §. 58 zu bestimmende Bahn durchlaufen würde, so hat man den Einfluß einer solchen Führung in einer Abänderung dieser letztgedachten Bahn zu erkennen. Es kann diese Aenderung der Bahn, welche der frei gedachte Körper beschreiben würde, nur durch Kräfte geschehen, wie sie der wirklichen Bewegung entsprechen, und man muß daher annehmen, daß die Leitbahn selbst diese Kräfte in Form eines gewissen Zwanges auf den Körper ausübt, welcher seinerseits wieder in gleicher Stärke auf die Leitung zurückwirkt.

Man kann nun offenbar die Bewegung eines solchen nicht freien, durch Leitflächen geführten Körpers ebenso wie die eines vollkommen freien materiellen Punktes berechnen, sobald man die Führungen durch die Widerstandskräfte ersetzt denkt, welche sie auf den Körper ausüben. Diese Widerstandskräfte müssen in jedem Augenblicke der Bewegung mit den äußeren Kräften zusammen den Bedingungen der speciell vorliegenden Bewegung entsprechen.

Denkt man sich z. B. einen Körper in einem horizontalen kreisförmigen Ringe durch eine tangential wirkende Kraft herumbewegt, so wird der Ring den Körper in jedem Augenblicke an dem tangentialen Fortgeschleudertwerden verhindern durch Aeußerung einer radial nach innen wirkenden Kraft, deren Größe $M \frac{v^2}{r}$ beträgt. Wollte man anstatt des Ringes einen Faden anwenden, welcher im Mittelpunkte befestigt, am freien Ende mit dem Körper verbunden ist, so würde die Spannung desselben von der nämlichen Größe sein.

Was die Richtung anbetrifft, in welcher die zur Führung des Körpers angewandten Mittel ihre Widerstandskräfte äußern können, so hängt dieselbe natürlich von der Art dieser Mittel selbst ab. Wendet man dazu Schnüre, Fäden, Ketten u. s. w. an, so ist es klar, daß diese nur als Zugkraftorgane dienen, d. h. nur solche Kräfte auf den Körper ausüben können, welche von dem letzteren nach dem Befestigungspunkte hin gerichtet sind, während starre Körper, wie z. B. stangenförmige Lenkschienen, Kräfte auszuüben vermögen, welche in der geraden Verbindungslinie zwischen dem geführten Punkte und dem Festpunkte sowohl nach der einen wie nach der entgegengesetzten Richtung wirken. Andere als in diese Verbindungslinie fallende Kräfte können sie aber nicht äußern, sobald man von der Zapfenreibung absieht. Ebenso ist eine Leitcurve oder Führungsfläche, wenn man dieselbe als vollkommen glatt voraussetzt, nur im Stande in der Richtung ihrer Normalen auf den geführten Punkt zu wirken, und zwar auch nur nach derjenigen Seite hin, auf welcher der geführte Körper sich befindet. Da die Materialien der Führungsflächen aber immer mehr oder weniger rauh sind, so wird jede Leitfläche außer ihrem normalen Widerstande auch noch mit einem tangentialen Widerstande auf den geführten Körper einwirken können und zwar höchstens bis zu dem Betrage der Reibung. In §. 171 u. f. ist gezeigt worden, wie dieser Betrag aus dem Normaldrucke sich bestimmt, und daß derselbe immer der eintretenden Bewegung entgegengesetzt gerichtet ist.

Bezeichne P die Resultante aller auf den materiellen Punkt wirkenden äußeren Kräfte, sei α der Winkel, unter welchem dieselbe die Bahnrichtung schneidet und r der Krümmungshalbmesser der Bahn in dem betrachteten Punkte, so ist $P \sin. \alpha$ die von den äußeren Kräften ausgeübte normale beschleunigende Kraft, und es wird daher von der Leitfläche eine Normalkraft N gefordert, welche der Bedingung entspricht:

$$N \pm P \sin. \alpha = M \frac{v^2}{r},$$

worin das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Componente $P \sin. \alpha$ nach dem Krümmungsmittelpunkte hin oder entgegengesetzt gerichtet ist. Für den Fall, daß $P \sin. \alpha = M \frac{v^2}{r}$ und nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet ist, fällt N gleich Null aus, d. h. die Führungsfläche wäre für diesen Fall unnöthig, der Körper würde sich frei ebenso bewegen (Planetenbahnen).

Der Druck R, welchen der Körper gegen die Führungsfläche ausübt, ist natürlich der Normalkraft N stets gleich und entgegengesetzt, daher offenbar durch

$$R = -N = -\left(M \frac{v^2}{r} \mp P \sin. \alpha\right) \text{ gegeben.}$$

Hierin bedeutet das Minuszeichen vor dem Ausdrucke nur die N entgegengesetzte Richtung von R, d. h. von dem Krümmungsmittelpunkte heraus, und zwar gilt hier auch das obere Zeichen (—), wenn $P\,sin.\,\alpha$ nach dem Mittelpunkte hin gerichtet ist, das untere bei einer Richtung von $P\,sin.\,\alpha$ von dem Krümmungsmittelpunkte her. Wenn der Ausdruck in der Klammer negativ, also R positiv wird, so deutet dies auf eine Richtung des Normaldruckes R nach dem Krümmungsmittelpunkte hin, die Führungsfläche müßte dem entsprechend angeordnet werden.

Die in der Bahnrichtung wirkende Kraft ist durch $P\,cos.\,\alpha - \varphi N$ gegeben, unter φ den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden. Wenn man die Reibung nicht berücksichtigt, so ist die tangential bewegende Kraft durch $P\,cos.\,\alpha$ ausgedrückt, und man hat dann

$$P\,cos.\,\alpha = M\frac{\partial v}{\partial t} = M\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

Setzt man hierin $\alpha = 90^0$, so folgt

$$P\,cos.\,\alpha = 0 = M\frac{\partial v}{\partial t},$$

oder das Integral

$$Mv = Const.$$

Wenn daher die Resultirende der äußeren Kräfte stets normal zur Bahnrichtung wirkt, so behält der Körper seine Geschwindigkeit unverändert bei. Dasselbe gilt auch dann, wenn $P = 0$ ist, der Körper also äußeren Kräften gar nicht unterworfen ist, sondern nur eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit v besitzt. Man schließt daraus, daß, von der Reibung abgesehen, eine Leitfläche, auf welcher sich ein äußeren Kräften nicht unterworfener Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit bewegt, ohne Einfluß auf die Geschwindigkeit ist.

Relative Bewegung. In §. 47 wurde bereits die relative Bewegung zweier Punkte, d. i. die Bewegung eines Punktes gegen einen anderen selbst auch bewegten Punkt untersucht. Es handelt sich jetzt um die Untersuchung des Falles, wo ein Körper gegen ein System von Punkten eine Bewegung hat, und wo dieses System selbst wieder und mit ihm der Körper eine selbständige Bewegung im Raume, d. h. gegen ein festes Coordinatensystem hat. Da die Erde sich bewegt, so sind eigentlich alle gewöhnlich vorkommenden Bewegungen von dieser zusammengesetzten Art, doch beachten wir in der Regel nur die relative Bewegung der Körper gegen unseren Standpunkt, welche uns, da wir selbst die Bewegung der Erde mitmachen, ohne etwas davon zu merken, als eine absolute Bewegung im stillstehenden Raume erscheint. In der Maschinentechnik kommen nun vielfach derartige Fälle **§. 300.**

zusammengesetzter Bewegungen vor, so daß die Entwickelung der bestimmenden Elemente der relativen Bewegung von Wichtigkeit ist.

Wir denken uns ein absolut festliegendes Axensystem, auf welches wir die Bewegungen des bewegten Systems sowohl wie die des Punktes beziehen. Es ist aus dem Vorhergehenden deutlich, was man unter Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, beschleunigender Kraft u. s. w. irgend eines Systempunktes zu verstehen hat. Es soll die absolute Geschwindigkeit und Beschleunigung irgend eines Systempunktes, bezogen auf ein vollständig festliegendes Coordinatensystem im Raume, mit v_s und p_s bezeichnet werden. Ebenso sollen v_a und p_a die absolute Geschwindigkeit und Beschleunigung des ins Auge gefaßten materiellen Punktes gegen ebendasselbe feste Axensystem bezeichnen. Die Bedeutung dieser Größen und die Beziehungen von p und v sind aus den vorhergehenden Untersuchungen bekannt.

Mit dem bewegten Systeme wollen wir ein Axenkreuz fest verbunden denken, so daß dasselbe an der absoluten Bewegung des Systems Theil nimmt. Gesetzt, wir befänden uns mit diesem bewegten Systeme ebenfalls in Verbindung, so daß wir an der Bewegung des Systems in derselben Weise Theil hätten, ohne es zu merken, wie wir an der Bewegung der Erde Theil nehmen, so würde uns die Bewegung des Punktes innerhalb des Systems ebenso als eine absolute Bewegung vorkommen, wie uns die Bewegungen der Körper auf der Erde im gewöhnlichen Leben als absolute erscheinen. Es ist bei dieser Vorstellung offenbar nicht schwierig, die Begriffe Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, beschleunigende Kraft, lebendige Kraft ohne Weiteres auf die relative Bewegung des Punktes zu übertragen. Man meint damit dasselbe, was man hinsichtlich der absoluten Bewegung darunter versteht, und hat man dabei diejenige absolute Bewegung zu Grunde zu legen, welche der Punkt haben würde, wenn das ganze System als stillstehend vorausgesetzt würde. Auf diese Weise sind die Gesetze der relativen Bewegung auf die bekannten der absoluten Bewegung zurückgeführt. Es seien die relative Geschwindigkeit und Beschleunigung des bewegten Punktes M mit v_r und p_r bezeichnet.

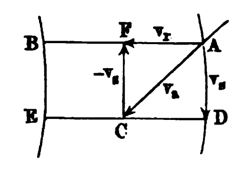
Um die Beziehungen zwischen relativen und absoluten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zu finden, kann man folgende Betrachtung anstellen. An der relativen Bewegung des Punktes M gegen das System wird offenbar Nichts geändert, wenn man dem Systeme noch eine neue beliebige Bewegung hinzufügt, vorausgesetzt nur, daß man dem Punkte M auch genau diejenige Bewegung ertheilt, welche demjenigen Systempunkte hinzugefügt wurde, der augenblicklich mit M zusammenfällt. Denkt man sich nun diese zusätzliche Bewegung so bemessen, daß sie gerade gleich und entgegengesetzt ist mit der absoluten Bewegung, welche das System hat, so wird die Bewegung des Systems dadurch aufgehoben, es wird das System ein ruhendes, daher ist die Bewegung des Punktes M in dem Systeme nunmehr eine absolute geworden.

Diese Bewegung des Punktes M besteht aber aus der absoluten Bewegung desselben und der hinzugefügten entgegengesetzten absoluten Bewegung des mit M zusammenfallenden Systempunktes. Man kann daher den Satz aufstellen:

Die relative Bewegung eines Punktes gegen ein bewegtes System ist die Resultante aus seiner absoluten Bewegung und der entgegengesetzt genommenen Bewegung des mit M zusammenfallenden Systempunktes. Dieser Satz gilt offenbar auch von den Geschwindigkeiten, denn man braucht als die betreffenden Wege nur die in der Zeiteinheit zurückgelegten anzunehmen; es ist also auch die relative Geschwindigkeit in jedem Augenblicke gleich der Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit des Punktes und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes.

Nimmt man als bewegtes System z. B. die Schaufel AB, Fig. 533, eines Wasserrades, welche mit der Geschwindigkeit $v_s = AD$ sich bewegt, so daß ihre Lage aus AB in die nahezu parallele ED übergeht. Ein Wassertropfen treffe die Schaufel in A mit der Geschwindigkeit $AC = v_a$. Wenn nun der Tropfen in der Zeiteinheit von A nach C sich bewegt hat, ist die Schaufel in die Lage DE geführt, und dieselbe wird jetzt, vorausgesetzt, daß in A ein Stoß nicht stattgefunden hat, in C von dem Tropfen berührt. Es ist folglich die Größe DC die Verschiebung, welche der Tropfen entlang der Schaufel in der Zeiteinheit erlitten hat, oder die relative Geschwindigkeit des Wassers v_r gegen die Schaufel. Zieht man CF parallel und gleich AD, so findet man die relative Geschwindigkeit $AF = DC = v_r$ als Resultante der absoluten Geschwindigkeit AC des Wassers und der entgegengesetzten Geschwindigkeit der Schaufel. Die Geschwindigkeit v_s der Schaufel ist hier geradlinig und in A so groß angenommen wie in F, was unbedenklich geschehen kann, wenn man die Zeiteinheit und folglich die Größen AD, AC und AF sehr klein und den Radhalbmesser groß gegen AB annimmt.

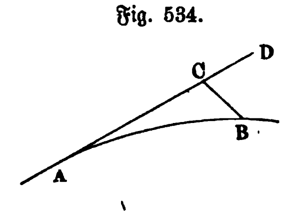
Fig. 533.



Beschleunigung der relativen Bewegung. Der hier gefundene Satz über die relative Geschwindigkeit eines Körpers gegen ein bewegtes System stimmt mit dem in §. 47 angeführten, welcher sich auf die relative Bewegung bezieht, vollständig überein. Nicht so einfach gestaltet sich die Beziehung hinsichtlich der relativen Beschleunigung, und es soll bei der Wichtigkeit dieses Gegenstandes für gewisse Zweige der Technik, namentlich für den Turbinenbau, das Maß für die relative Beschleunigung im Folgenden ermittelt werden. §. 301.

Zu dem Zwecke empfiehlt es sich, zunächst das Wesen der Beschleunigung selbst etwas näher ins Auge zu fassen. Sei AB, Fig. 534, die Bahn eines materiellen Punktes M, welche er unter Einfluß der auf ihn wirkenden Kräfte beschreibt. In einem gewissen Augenblicke, wo sich der Punkt M in A befindet, habe er eine tangentiale Geschwindigkeit v, vermöge deren er in der kleinen Zeit τ um die Größe $v\tau = AC$ in der Tangente AD an die Bahn sich bewegen würde, vorausgesetzt, daß alle Kräfte in diesem Augenblicke aufhörten zu wirken. Da dies nicht der Fall ist, so wird der Punkt nach Ablauf der Zeit τ nicht in C sein, und wenn es sich nun findet, daß er im Gegentheil nach Ablauf der Zeit τ in B ist, so muß man schließen, daß der Einfluß aller äußeren Kräfte auf den materiellen Punkt von solcher Beschaffenheit ist, daß dadurch der Punkt aus der Lage C, in die er ohne jene Kräfte gekommen wäre, nach seiner wirklichen Lage B geführt wird, und ist diese Wirkung in derselben Zeit τ vor sich gegangen. Da man die beschleunigenden Kräfte während der sehr kleinen Zeit τ constant voraussetzen darf, so muß man annehmen, daß die Bewegung von C nach B eine gleichförmig veränderliche ist, und man hat nach §. 11, III. die Beschleunigung

Fig. 534.

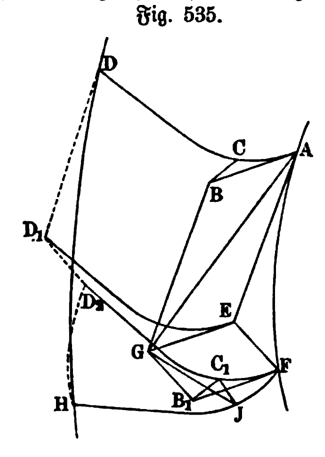


$$p = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\,CB}{\tau^2}.$$

Man hat der Größe CB wohl den Namen Abweichung oder Deviation gegeben.

Um nun die relative Beschleunigung des materiellen Punktes zu finden, sei vorausgesetzt, daß die Bewegungen des Punktes und des bewegten Systems in einer Ebene erfolgen, da diese Voraussetzung in den Fällen, welche uns interessiren, meistens zutrifft. Der materielle Punkt M sei in einem bestimmten Augenblicke in A, Fig. 535, und beschreibe die Bahn ACD relativ zu dem bewegten Systeme. (Man kann sich z. B. als System ein horizontales Turbinenrad und als relative Bahn eine Schaufel ACD denken, auf welcher ein Wassertropfen sich entlang schiebt, dann ist die Schaufel der relative Weg des Wassertropfens in Hinsicht auf das bewegte Rad.) In A habe der Punkt M eine relative

Fig. 535.



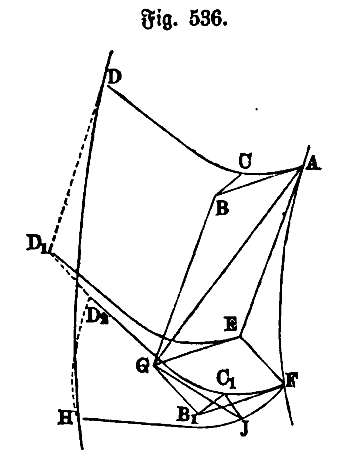
Geschwindigkeit v_r, vermöge deren er in der kleinen Zeit τ um $v\tau = AB$ sich bewegen würde, wenn er mit dieser Geschwindigkeit sich gleichförmig bewegte. Der materielle Punkt sei aber nach der Zeit τ in dem Punkte C der relativen Bahn angelangt, folglich ist BC nach dem Obigen die Abweichung der relativen Bewegung und gegeben durch $BC = \frac{1}{2} p_r \tau^2$, wenn p_r die relative Beschleunigung ist.

Der Punkt A des Systems soll in der Zeit τ die Bahn AF, der Systempunkt D die Bahn DH beschreiben, so daß die relative Bahn von M (Schaufel) nach der Zeit τ aus der Lage ACD in diejenige FH gelangt sein mag, und zwar soll diese Bewegung von A nach F und D nach H eine ganz beliebige sein, es ist nicht nöthig, wie dies bei Turbinenrädern der Fall ist, daß AF und DH zwei concentrische Kreisbögen um die Drehaxe seien. Die Geschwindigkeit v_s des Systempunktes A soll eine solche sein, daß A in der Zeit τ den Weg $v_s \tau = AE$ in der Tangente an die Bahn AF zurücklegen würde, wenn A in dem betrachteten Augenblicke sich gleichförmig weiter bewegen würde. Da aber nach der Zeit τ der Systempunkt A in F sich befindet, so ist EF die Abweichung der Bewegung des Systempunktes, und man hat wieder $EF = \frac{1}{2} p_s \tau^2$, unter p_s die betreffende Beschleunigung der Systembewegung verstanden. Die Diagonale AG aus AB und AE stellt offenbar die Richtung der absoluten Bewegung dar, welche der materielle Punkt M in dem Augenblicke hat, wo er sich in A befindet, und es würde M offenbar in der Zeit τ von A nach G geführt werden, wenn die beschleunigenden Kräfte in dem Augenblicke aufhörten, wo M in A sich befindet. In Wirklichkeit ist der materielle Punkt M nach der Zeit τ aber nicht in G, sondern irgendwo auf seiner relativen Bahn (Schaufel), welche nach Verlauf der Zeit τ die Lage FJH einnimmt. Würden wir diesen Ort kennen, so hätten wir nur G mit ihm zu verbinden, um in der Verbindungslinie analog dem Bisherigen die Größe der absoluten Abweichung und daraus die absolute Beschleunigung zu finden. Der wirkliche Ort des materiellen Punktes M findet sich aber leicht, wenn man die einzelnen Bewegungen desselben in dem Systeme und mit dem Systeme nicht gleichzeitig, sondern nach einander vorgenommen denkt. Stellen wir uns zunächst das System als stillstehend vor, so bewegt sich nach dem Vorigen der materielle Punkt M von A nach C. Jetzt wollen wir die Bewegung des Systems folgen lassen, d. h. die relative Bahn aus ihrer Anfangslage ACD in die Endlage FJH überführen.

Es läßt sich leicht einsehen, daß jede Bewegung eines festen Systems sich zerlegen läßt in eine Verschiebung, wobei alle Linien sich parallel versetzen, und eine Drehung um eine gewisse Axe. So können wir auch hier die Versetzung der Bahn ACD nach FJH so vornehmen, daß ACD zunächst parallel mit sich selbst nach FC_1D_2 verschoben und aus dieser Mittellage

durch eine Drehung um F in die Endlage FJH gedreht wird. Die parallele Verschiebung sei dabei so vorgenommen, daß A erst nach E und dann von E nach F geführt werde. Nach der ersten Verschiebung des Systems, bei welcher der in A befindliche Punkt nach E gelangt, fällt die Tangente AB offenbar nach EG. Bei der zweiten Verschiebung von E nach F erhält man die Lage, welche der ursprünglich in B gelegene Endpunkt der Tangente AB einnimmt, in B_1, wenn man GB_1 gleich und parallel EF aufträgt. Jetzt findet man die Lage, welche der materielle Punkt M nach diesen beiden Verschiebungen einnimmt, in C_1, wenn man $B_1 C_1$ parallel und gleich BC anträgt.

Fig. 536.



Die relative Bahn ist nunmehr in die Lage $F C_1 D_2$ gelangt. Durch eine Drehung um F bringt man sie nun in die Endlage FJH, wobei C_1 nach J fällt, und hat man daher in J den Ort gefunden, in welchem der materielle Punkt M nach Ablauf der Zeit τ sich wirklich befindet.

Da nun G derjenige Ort ist, welchen der materielle Punkt M eingenommen haben würde, wenn im Beginn der Zeit τ die beschleunigenden Kräfte aufgehört hätten zu wirken, so stellt offenbar die Verbindungslinie GJ die absolute Abweichung des Punktes M vor. Wendet man nun auf das Viereck GJC_1B_1 den Satz von dem Polygon der Geschwindigkeiten an (§. 36), so folgt ohne Weiteres, daß man die absolute Abweichung GJ betrachten kann als die Resultante der drei Bewegungen GB_1, B_1C_1 und C_1J. Von diesen drei Größen ist

$$GB_1 = EF = {}^1/_2\, p_s \tau^2 \text{ und } B_1 C_1 = BC = {}^1/_2\, p_r \tau^2$$

oben gefunden worden. Um auch C_1J zu finden, bedeute ω die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher bei der Bewegung des Systems die gedachte Drehung erfolgt. (Geschwindigkeit eines Punktes im Abstande Eins von der Drehaxe.) Es muß dann, da der absolute Werth des Winkels, um welchen das System während der Zeit τ gedreht worden ist, durch den Winkel C_1FJ dargestellt ist, die Gleichung stattfinden $\varphi = C_1FJ = \omega\tau$. Der als geradlinig zu betrachtende kleine Bogen C_1J hat nun die Größe

$$C_1J = FJ\,.\,\varphi = FJ\,.\,\omega\tau.$$

Nun ist ferner FJ nichts anderes als der Weg, welchen der materielle Punkt während der Zeit τ auf der relativen Bahn zurückgelegt hat, also

$FJ = v_r \tau$ und daraus folgt $C_1 J = v_r \tau \,.\, \omega \tau = v_r \omega \tau^2$. Die zur Erzeugung eines solchen Weges erforderliche Beschleunigung ist aber $\frac{2s}{t^2}$, also hier $\frac{2 v_r \omega \tau^2}{\tau^2} = 2 v_r \omega$.

Es ist hiermit gezeigt worden, daß die absolute Abweichung GJ die Resultante ist aus den drei Abweichungen GB_1, $B_1 C_1$ und $C_1 J$. Da diese Abweichungen sämmtlich für dieselbe Zeit τ gelten, so können wir dafür die Beschleunigungen nehmen, und haben daher den Satz:

$$p_a = Reslte.\ (p_s, p_r, 2\,\omega\, v_r),$$

oder in Worten: Bewegt sich ein materieller Punkt relativ gegen ein bewegtes System, so ist die absolute Beschleunigung des Punktes die Resultante aus:

1) der absoluten Beschleunigung des übereinstimmenden Systempunktes,

2) der relativen Beschleunigung des materiellen Punktes,

3) einer Beschleunigung, welche gleich dem doppelten Producte aus der Winkelgeschwindigkeit der Systembewegung in die relative Geschwindigkeit des Punktes ist, auf der relativen Bahn normal steht, und im Sinne der Drehung des Systems gerichtet ist.

Hat das System nur eine fortschreitende und keine drehende Bewegung, so fällt die Größe $C_1 J$ fort; $F C_1 D_2$ ist die Endlage und die absolute Abweichung $G C_1$ ist die Resultante von GB_1 und $B_1 C_1$, d. h. es ist:

$$p_a = Reslte.\ (p_s, p_r).$$

Hat das System nur eine rotirende Bewegung, so ist, wenn die Bewegung wie bei den Wasserrädern mit gleichförmiger Geschwindigkeit vor sich geht, $p_s = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$ die sogenannte Centripetalkraft (siehe §. 327).

Aus Fig 536 ist noch zu ersehen, daß die relative Abweichung $B_1 C_1$ als Resultirende zu betrachten ist aus $B_1 G$, GJ und $J C_1$. $B_1 G$ ist offenbar die entgegengesetzt genommene Abweichung der Systembewegung, und $J C_1$ hat den der Drehung des Systems entgegengesetzten Sinn, so daß man schreiben kann:

$$p_r = Reslte.\ [p_a, -p_s, 2\, v_r . (-\omega)].$$

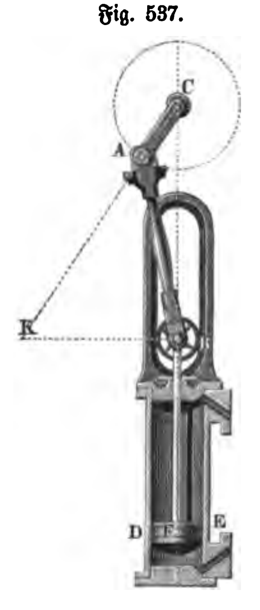
Bei gleichförmiger Rotationsbewegung wird $-p_s$ die Centrifugalkraft.

Zweites Capitel.

Die Lehre von den Trägheitsmomenten.

§. 302. **Bewegungsarten.** Die Bewegung eines festen Körpers ist entweder fortschreitend, oder drehend, oder beides zugleich. Bei der fortschreitenden oder progressiven Bewegung (franz. mouvement de translation; engl. motion of translation) sind die gleichzeitig zurückgelegten Wege der Körpertheile unter sich parallel und gleich, bei der drehenden oder rotirenden Bewegung (franz. mouvement de rotation; engl. motion of rotation) hingegen beschreiben die Theile des Körpers um eine gewisse gerade Linie, die man die Umdrehungsaxe (franz. axe de rotation; engl. axis of revolution) nennt, concentrische Kreisbögen. Jede zusammengesetzte Bewegung läßt sich als eine drehende Bewegung um eine bewegliche Axe ansehen. Letztere ist wieder entweder veränderlich oder unveränderlich.

Fig. 537.



In progressiver Bewegung befinden sich der Kolben DE und die Kolbenstange BF einer Pumpe oder Dampfmaschine, Fig. 537, in drehender Bewegung dagegen ist die Kurbel oder der Krummzapfen AC, in zusammengesetzter Bewegung endlich die Kurbelstange AB, denn das eine Ende B derselben hat eine fortschreitende, und das andere Ende A eine drehende Bewegung. Bei einem sich wälzenden Cylinder ist die Umdrehungsaxe unveränderlich, bei der Kurbelstange AB hingegen ist dieselbe veränderlich, denn sie ist der Durchschnitt K zwischen dem Perpendikel BK zur Axenrichtung CB der Kolbenstange und der Verlängerung des Kurbelarmes CA (s. §. 103).

§. 303. **Geradlinige Bewegung.** Bei der geradlinig fortschreitenden Bewegung eines Körpers finden die §. 84 und §. 100 gefundenen Bewegungsgesetze eines materiellen Punktes ihre unmittelbare Anwendung. Die Massentheile M_1, M_2, M_3 u. s. w. eines mit der Acceleration p fortschrei-

tenden Körpers widerstehen der Bewegung vermöge ihrer Trägheit mit den Kräften $M_1\,p,\ M_2\,p,\ M_3\,p$ u. s. w. (§. 58), und da die Bewegungen aller dieser Theile in parallelen Linien erfolgen, so sind auch die Richtungen dieser Kräfte unter sich parallel; es ist daher die Mittelkraft von allen diesen aus der Trägheit entspringenden Kräften gleich der Summe

$$M_1 p + M_2 p + M_3 p + \cdots = (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots)\, p = Mp,$$

wo M die Masse des ganzen Körpers bezeichnet, und es fällt auch der Angriffspunkt derselben mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen. Um also einen übrigens frei beweglichen Körper von der Masse M oder dem Gewichte $G = Mg$ in eine geradlinig fortschreitende Bewegung mit der Acceleration p zu versetzen, ist eine Kraft

$$P = Mp = \frac{Gp}{g}$$

nöthig, deren Richtung durch den Schwerpunkt S des Körpers geht.

Aendert sich in Folge der Einwirkung der Kraft P die Geschwindigkeit c während der Zurücklegung des Weges s in die Geschwindigkeit v um, so ist die von der Masse in sich aufgenommene mechanische Arbeit (§. 76):

$$Ps = \frac{v^2 - c^2}{2}\, M = \frac{v^2 - c^2}{2\,g}\, G = (h - k)\, G.$$

Beispiel. Der Kolben sammt Stange von einer Pumpe, Dampfmaschine, Gebläsemaschine u. s. w. hat eine ungleichförmige Bewegung, bei seinem höchsten und tiefsten Stande ist er ohne Geschwindigkeit, und nahe bei seinem mittleren Stande ist die Geschwindigkeit desselben am größten. Ist das Gewicht des Kolbens und seiner Stange $= G$ und seine größte Geschwindigkeit in der Mitte seines Auf- oder Niederganges $= v$, so beträgt hiernach das Arbeitsvermögen, welches er vermöge seiner Trägheit in der ersten Hälfte seines Weges in sich aufnimmt und in der zweiten Hälfte desselben wieder ausgiebt:

$$L = \frac{v^2}{2g}\, G.$$

Für $G = 500$ Kilogramm und $v = 1{,}5$ Meter ist diese Arbeit:

$L = 0{,}051\ .\ 1{,}5^2\ .\ 500 = 57{,}4$ Meterkilogramm.

Wäre nun noch der halbe Kolbenweg $s = 1{,}2$ Meter, so hätte man die mittlere Kraft, welche nöthig ist, um den Kolben in der ersten Hälfte dieses Weges zu beschleunigen, und welche derselbe in der zweiten Hälfte durch seine Verzögerung ausübt:

$$P = \frac{L}{s} = \frac{v^2}{2gs} \cdot G = \frac{57{,}4}{1{,}2} = 47{,}8 \text{ Kilogramm.}$$

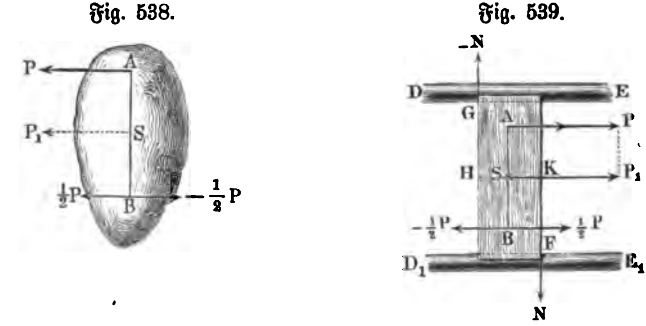
Drehende Bewegung. Geht die bewegende Kraft P eines Körpers AB, Fig. 538 (a. f. S.), nicht durch den Schwerpunkt S, so nimmt der Körper eine Drehung um diesen Punkt an, und es schreitet dieser fort, als wenn die Kraft unmittelbar in ihm angriffe, wie sich folgendergestalt beweisen läßt. §. 304.

Man fälle vom Schwerpunkte S ein Perpendikel $SA = a$ gegen die Kraftrichtung, mache die Verlängerung SB dem Perpendikel gleich und lasse zwei sich das Gleichgewicht haltende und parallel mit P wirkende Kräfte, die eine $+ \frac{1}{2} P$ und die andere $- \frac{1}{2} P$, in B angreifen. Die Kraft $+ \frac{1}{2} P$ giebt in Vereinigung mit der einen Hälfte der in A angreifenden Kraft P die im Schwerpunkte S angreifende Mittelkraft

$$P_1 = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P = P,$$

wogegen die Kraft $- \frac{1}{2} P$ mit der zweiten Hälfte ($\frac{1}{2} P$) von der in A angreifenden Kraft P ein Kräftepaar bildet; es resultirt also aus der excentrisch wirkenden Kraft P eine durch den Schwerpunkt gehende Kraft $P_1 = P$, welche diesen Punkt sammt dem ganzen Körper progressiv bewegt,

Fig. 538. Fig. 539.



und ein Kräftepaar ($\frac{1}{2} P$, $- \frac{1}{2} P$), welches den Körper um den Schwerpunkt dreht, ohne einen Druck in demselben zu erzeugen. Das statische Moment dieses Kräftepaares ist aber

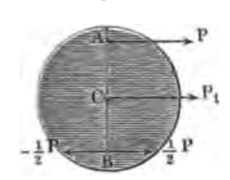
$$= \frac{1}{2} P \,.\, \overline{SA} + \frac{1}{2} P \,.\, \overline{SB} = P \,.\, \overline{SA} = Pa$$

gleich dem statischen Momente der in A angreifenden Kraft P in Hinsicht auf den Schwerpunkt S; es ist folglich auch die resultirende Umdrehung dieselbe, als wenn der Schwerpunkt S festgehalten würde und P allein wirkte.

Wird ein Körper AB, Fig. 539, durch eine Führung oder Leitung DE, $D_1 E_1$ gezwungen, eine progressive Bewegung anzunehmen, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$ dieselbe Wirkung auf die Bewegung des Körpers aus, wie eine gleiche im Schwerpunkte S desselben angreifende Kraft $\overline{SP_1} = P_1$, weil das übrig bleibende Kräftepaar ($\frac{1}{2} P$, $- \frac{1}{2} P$) in den diagonal gegenüberliegenden Eckpunkten F und G der Führung die normalen Pressungen N, $- N$ hervorruft, deren Gegenwirkungen zusammen ein Kräftepaar bilden, das dem Kräftepaare ($\frac{1}{2} P$, $- \frac{1}{2} P$) das Gleichgewicht hält. Ist a die Excentricität SA der Kraft P oder der Abstand ihrer Richtung von dem Schwerpunkte S des Körpers, und bezeichnet b den Abstand HK zwischen N und $- N$, so hat man $Nb = Pa$, woraus $N = \frac{a}{b} P$ folgt.

Wird endlich der Körper AB, Fig. 540, durch eine feste Axe C verhindert, fortzuschreiten, so übt die excentrische Kraft $\overline{AP} = P$, deren Richtung um $CA = a$ von der festen Axe C absteht, dieselbe Wirkung auf die Umdrehung des Körpers um diese Axe C aus als ein Kräftepaar ($^1/_2\, P$, $-\, ^1/_2\, P$) mit der Armlänge $AB = 2\, CA = 2\, CB = 2\, a$, oder dem Momente $^1/_2\, P\, .\, 2\, a = P\, a$, weil die übrig bleibende centrische Kraft $\overline{CP_1} = P_1 = P$ von den Axenlagern aufgenommen wird (vergl. §. 133).

Fig. 540.



In den Fällen der Fig. 539 und 540 ist die Reibung unbeachtet gelassen, welche im ersten Falle an den Führungsstangen, im zweiten in den Axlagern sich einstellt. In dem Falle Fig. 539 können die Reibungen aber unter Umständen so bedeutend werden, daß jede Verschiebung längs der Führung unmöglich ist. Ist φ der Reibungscoefficient zwischen G und DE sowie zwischen F und $D_1 E_1$, so beträgt die Gesammtreibung

$$F = 2\,\varphi\, N = 2\,\varphi\, \frac{a}{b}\, P.$$

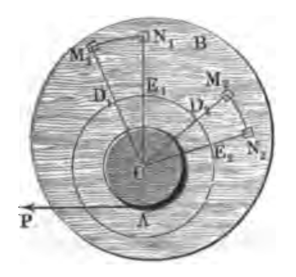
Sobald dieser Werth gleich P wird, hört jede Bewegung auf, welchen noch so großen Werth P auch annehme. Es wird daher bei gegebenem φ darauf ankommen, das Verhältniß $\frac{a}{b}$ möglichst klein, also bei gegebener Excentricität a die Führungslänge b recht groß zu machen. Jedenfalls muß $\frac{b}{a} > 2\,\varphi$ sein, wenn nicht ein Festklemmen eintreten soll. Von der letzteren Eigenschaft macht man in der Technik zuweilen Gebrauch, um Gegenstände zu befestigen, indem man b recht klein macht. In diesem Falle kann theoretisch keine auch noch so große Kraft P die Befestigung lösen.

Trägheitsmoment. Bei der Umdrehung eines Körpers AB, Fig. 541, um eine feste Axe C legen alle Punkte M_1, M_2 u. s. w. desselben in gleichen Zeiten gleiche Centriwinkel $M_1 C N_1 = M_2 C N_2$ u. s. w. $= \varphi^0$ zurück, welchen also auch bei gleichem Radius, z. B. $CD_1 = CD_2$ u. s. w. = Eins (1) ein und derselbe Bogen **§. 305.**

$$D_1 E_1 = D_2 E_2 \text{ u. s. w.} = \varphi = \frac{\varphi^0}{180^0}\, \pi$$

entspricht.

Fig. 541.



Da die Geschwindigkeit durch den Quotienten aus einem Wegtheilchen φ und dem entsprechenden Zeitelemente τ bestimmt wird, so ist folglich auch die Winkelgeschwin-

digkeit (franz. vitesse angulaire; engl. angular velocity), d. i. die Geschwindigkeit derjenigen Punkte des Körpers, welche um die Längeneinheit (z. B. einen Meter) von der Umdrehungsaxe abstehen, für den ganzen Körper eine und dieselbe, nämlich

$$\omega = \frac{\varphi}{\tau}.$$

Ebenso ist auch die Winkelacceleration, oder die Acceleration des umlaufenden Körpers im Abstande Eins (1) von der Drehungsaxe, für den ganzen Körper eine gemeinschaftliche Größe, und zwar

$$\varkappa = \frac{\Delta\omega}{\tau},$$

wenn hier $\Delta\omega$ den im Zeitelemente τ erfolgten Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet.

Um die Wege s_1, s_2 u. s. w., Geschwindigkeiten v_1, v_2 u. s. w. und Accelerationen p_1, p_2 u. s. w. der Punkte M_1, M_2 u. s. w. des Körpers zu finden, welche um $CM_1 = r_1$, $CM_2 = r_2$ u. s. w. von der Drehungsaxe C entfernt sind, hat man natürlich den Winkelweg φ, die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelacceleration $\varkappa$ mit r_1, r_2 u. s. w. zu multipliciren, also

$$s_1 = \varphi r_1,\ s_2 = \varphi r_2 \text{ u. s. w.}$$
$$v_1 = \omega r_1,\ v_2 = \omega r_2 \text{ u. s. w. und}$$
$$p_1 = \varkappa r_1,\ p_2 = \varkappa r_2 \text{ u. s. w.}$$

zu setzen.

Besteht folglich die ganze Masse M des Körpers aus den Theilen M_1, M_2 u. s. w., welche um die Halbmesser r_1, r_2 u. s. w. von der Drehungsaxe C entfernt sind, so sind die Kräfte, mit welchen diese Massentheile der Umdrehung widerstehen:

$$P_1 = M_1 p_1 = \varkappa M_1 r_1,\ P_2 = M_2 p_2 = \varkappa M_2 r_2 \text{ u. s. w.}$$

und ihre Momente:

$$P_1 r_1 = \varkappa M_1 r_1^2,\ P_2 r_2 = \varkappa M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.}$$

Daher ist das erforderliche Moment zur Umdrehung des Körpers mit der Winkelacceleration $\varkappa$:

$$Pa = \varkappa M_1 r_1^2 + \varkappa M_2 r_2^2 + \cdots$$
$$= \varkappa (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Ebenso sind (nach §. 86) die mechanischen Arbeiten, welche die Massentheilchen M_1, M_2 u. s. w. erfordern, um die Geschwindigkeiten v_1, v_2 u. s. w. anzunehmen:

$$A_1 = {}^1/_2\, M_1 v_1^2 = {}^1/_2\, \omega^2 M_1 r_1^2,$$
$$A_2 = {}^1/_2\, M_2 v_2^2 = {}^1/_2\, \omega^2 M_2 r_2^2 \text{ u. s. w.},$$

und es ist daher die mechanische Arbeit, welche der ganze Körper in Anspruch nimmt, während er die Winkelgeschwindigkeit ω erhält:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\,\omega^2\,(M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots).$$

Es hängt also die Kraft und Arbeit einer rotirenden Masse vorzüglich von der Summe der Producte $M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + M_3 r_3^2 + \cdots$ aus den einzelnen Massentheilen M_1, M_2 u. s. w. und den Quadraten ihrer Entfernungen r_1, r_2 u. s. w. von der Umdrehungsaxe ab. Man nennt diese Summe das **Trägheits-, Drehungs- oder Massenmoment** des Körpers in Bezug auf die betreffende Axe (franz. moment d'inertie; engl. momentum of inertia), und wir werden es in der Folge durch Mr^2 oder W bezeichnen. Um also einer Masse $M = M_1 + M_2 + \cdots$, deren Trägheitsmoment in Bezug auf eine bestimmte Axe $W = Mr^2 = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots$ ist, um diese Axe die Winkelacceleration $\varkappa$ zu ertheilen, ist ein Kraftmoment Pa erforderlich, welches sich bestimmt durch:

$$1)\quad Pa = \varkappa M r^2 = \varkappa W.$$

Dagegen ist die mechanische Arbeit, wodurch diese Masse M in eine Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω versetzt wird:

$$2)\quad Ps = \frac{1}{2}\,\omega^2 M r^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2 W.$$

Hat die Masse schon anfangs eine Winkelgeschwindigkeit ε, so ist die mechanische Arbeit, wodurch dieselbe auf ω gesteigert wird:

$$Ps = \frac{1}{2}\,\omega^2 W - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2 W = \frac{1}{2}\,(\omega^2 - \varepsilon^2)\,W.$$

Auch läßt sich hiernach umgekehrt aus der aufgewendeten Arbeit und Anfangsgeschwindigkeit ε die Endgeschwindigkeit ω bestimmen; es ist nämlich:

$$\omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{2\,Ps}{W}}.$$

Nach der Bezeichnungsweise der Differenzialrechnung kann man obige Beziehungen auch schreiben:

$$\text{Winkelgeschwindigkeit}\quad \omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$\text{Winkelacceleration}\quad \varkappa = \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

$$\text{Trägheitsmoment}\quad W = \int r^2\,\partial m,$$

worin ∂m irgend ein Massentheilchen bedeutet.

Beispiel. Wenn der um eine feste Axe C drehbare und anfänglich ruhende Körper AB, Fig. 541, ein Trägheitsmoment von 50 Meterkilogramm besitzt und mittels eines um eine Rolle liegenden Seiles mit einer Kraft $P = 20$ Kilogramm und bei Zurücklegung des Weges $s = 5$ Meter in Umdrehung gesetzt wird, so ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit dieses Körpers:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,Ps}{W}} = \sqrt{\frac{2.20.5}{50}} = \sqrt{4} = 2 \text{ Meter},$$

d. h. jeder Punkt in der Entfernung eines Meters von der Umdrehungsaxe legt nach Aufnahme dieser Arbeit in jeder Secunde 2 Meter zurück. Die Zeit einer Umdrehung ist:

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}1416 \text{ Secunden}$$

und die Zahl der Umdrehungen in der Minute:

$$u = \frac{60}{t} = \frac{60}{3{,}1416} = 19{,}1.$$

Geht die gefundene Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2$ Meter in die Geschwindigkeit $s = {}^3/_4$ Meter über, so verrichtet diese Masse die Arbeit:

$P_1 s_1 = [2^2 - ({}^3/_4)^2] \,.\, {}^{50}/_2 = (4 - {}^9/_{16}) \,.\, 25 = {}^{55}/_{16} \,.\, 25 = 85{,}93$ Meterkilogramm, hebt also z. B. ein Gewicht P_1 von 10 Kilogramm 8,593 Meter hoch.

§. 306. **Reduction träger Massen.** Sind die Winkelgeschwindigkeiten zweier Massen M_1 und M_2 unter sich gleich, gehören z. B. diese Massen einem und demselben rotirenden Körper an, so verhalten sich ihre lebendigen Kräfte wie ihre Trägheitsmomente $W_1 = M_1 r_1^2$ und $W_2 = M_2 r_2^2$, und sind nun auch diese unter sich gleich, so besitzen diese Massen gleiche lebendige Kräfte. Zwei Massen haben also hiernach gleichen Einfluß auf den Bewegungszustand eines sich umdrehenden Körpers, und es kann eine durch die andere ersetzt werden, ohne daß dadurch eine Aenderung im Bewegungszustande vor sich geht, wenn sie gleiche Trägheitsmomente $M_1 r_1^2$ und $M_2 r_2^2$ besitzen, sich also zu einander umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe verhalten. Mit Hülfe der Formel $M_1 r_1^2 = M_2 r_2^2$ läßt sich eine Masse von einer Entfernung auf eine andere reduciren, d. h. es läßt sich eine Masse M_2 angeben, welche in der Entfernung r_2 eben den Einfluß auf den Bewegungszustand des sich drehenden Körpers hat, als die gegebene Masse M_1 in der Entfernung r_1; es ist nämlich:

$$M_2 = \frac{M_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{W_1}{r_2^2},$$

d. i. die auf die Entfernung r_2 reducirte Masse ist der Quotient aus dem Trägheitsmomente der Masse und dem Quadrate jener Entfernung.

Setzt man $r_2 = 1$, so erhält man hierfür die reducirte Masse

$$M_2 = \frac{M_1 r_1^2}{1^2} = W_1,$$

woraus man schließen muß, daß das Trägheitsmoment W eines Körpers ein Maß abgiebt für die auf den Abstand gleich Eins von der Axe reducirte Masse des Körpers.

Zwei an einer Radwelle ACB, Fig. 542, festsitzende Gewichte Q und Q_1 in den Abständen $CB = b$ und $CB_1 = a$ von der Umdrehungsaxe XX

haben also vermöge ihrer Massen auf die Bewegung der Radwelle gleichen Einfluß, wenn $Q_1 a^2 = Q b^2$, also $Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$ ist. Wirkt daher eine Kraft

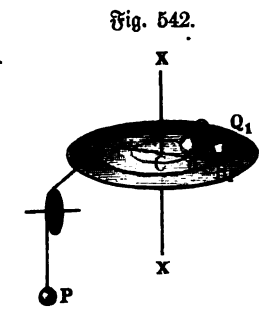


Fig. 542.

P am Hebelarme $CA = CB_1 = a$, um eine Masse vom Gewichte Q im Abstande $CB = b$ in Umdrehung zu setzen, so hat man die letztere auf den Hebelarm a der Kraft P zu reduciren, also statt Q

$$Q_1 = \frac{Q b^2}{a^2}$$

und die von P bewegte Masse:

$$M = \left(P + \frac{Q b^2}{a^2}\right) : g$$

zu setzen, weshalb nun die Acceleration des Gewichtes P:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P}{P + Q\,\frac{b^2}{a^2}} \cdot g = \frac{P a^2}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = \frac{P a}{P a^2 + Q b^2} \cdot g$$

sich ergiebt.

Beispiel. Ist das Gewicht der rotirenden Masse $Q = 360$ Kilogramm, ihr Abstand von der Drehaxe $b = 2,5$ Meter, das die bewegende Kraft ausmachende Gewicht $P = 24$ Kilogramm und dessen Hebelarm $a = 1,5$ Meter, so folgt die von P beschleunigte träge Masse:

$$M = \left[P + \left(\frac{2,5}{1,5}\right)^2 Q\right] : g = 0,102\left(24 + \frac{25}{9}\,360\right) = 104,45$$

und daher die Beschleunigung des Gewichtes:

$$p = \frac{24}{104,45} = 0,230 \text{ Meter},$$

dagegen die Acceleration der Masse Q:

$$q = \frac{b}{a}\,p = \frac{5}{3}\,p = \frac{5 \,.\, 0,23}{3} = 0,383 \text{ Meter}$$

und die Winkelacceleration:

$$\varkappa = \frac{p}{a} = 0,153 \text{ Meter}.$$

Nach 4 Secunden ist die erlangte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = 0,153 \,.\, 4 = 0,612 \text{ Meter}$$

und der entsprechende Weg:

$$\tfrac{1}{2}\,\omega t = \frac{0,612}{2} \cdot 4 = 1,224 \text{ Meter},$$

folglich der Umdrehungswinkel:

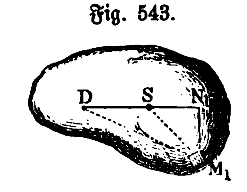
$$\varphi^0 = \frac{1,224}{\pi}\, 180^0 = 70^0 10',$$

endlich der von dem Gewichte P zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{p\,t^2}{2} = \frac{0,230\,.\,4^2}{2} = 1,84 \text{ Meter.}$$

§. 307. **Reduction der Trägheitsmomente.** Kennt man das Trägheitsmoment eines Körpers oder eines Systems von Körpern in Hinsicht auf eine durch den Schwerpunkt S des Körpers gehende Axe, so läßt sich daraus leicht das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine andere mit jener parallel laufende Axe finden. Es sei S, Fig. 543, die erste durch den Schwerpunkt gehende und D die zweite Drehungsaxe, für welche das Trägheitsmoment des Körpers bestimmt werden soll; ferner sei $SD = d$ die Entfernung beider Axen von einander, und es seien $SN_1 = x_1$ und $N_1 M_1 = y_1$ die rechtwinkeligen Coordinaten eines Massentheiles M_1 des ganzen Körpers. Das Trägheitsmoment dieses Theiles in Beziehung auf D ist nun:

Fig. 543.



$$= M_1\,.\,\overline{DM_1^2} = M_1\,(\overline{DN_1^2} + \overline{N_1 M_1^2}) = M_1\,[(d + x_1)^2 + y_1^2]$$

und in Beziehung auf S:

$$= M_1\,.\,\overline{SM_1^2} = M_1\,(\overline{SN_1^2} + \overline{N_1 M_1^2}) = M_1\,(x_1^2 + y_1^2),$$

daher die Differenz beider Momente:

$$= M_1\,(d^2 + 2\,d x_1 + x_1^2 + y_1^2) - M_1\,(x_1^2 + y_1^2) = M_1\,d^2 + 2\,M_1\,d x_1.$$

Für einen anderen Massentheil M_2 ist sie:

$$= M_2\,d^2 + 2\,M_2\,d x_2,$$

für einen dritten:

$$= M_3\,d^2 + 2\,M_3\,d x_3 \text{ u. s. w.,}$$

daher für alle Massentheile zusammen:

$$= (M_1 + M_2 + M_3 + \cdots)\,d^2 + 2\,d\,(M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3 + \cdots).$$

Nun ist aber $M_1 + M_2 + \cdots$ die Summe M aller Massen und $M_1 x_1 + M_2 x_2 \cdots$ die Summe Mx ihrer statischen Momente in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gelegte Ebene. Es folgt daher die Differenz zwischen dem Trägheitsmomente W_1 des ganzen Körpers in Beziehung auf die Axe D und dem Trägheitsmomente W in Beziehung auf S:

$$W_1 - W = Md^2 + 2\,d\,Mx.$$

Da aber endlich für jede Ebene durch den Schwerpunkt die Summe der statischen Momente der Theile auf der einen Seite so groß ist als die der Momente auf der anderen Seite, die algebraische Summe aller Momente also = Null ist, so hat man auch $Mx = 0$, und daher:

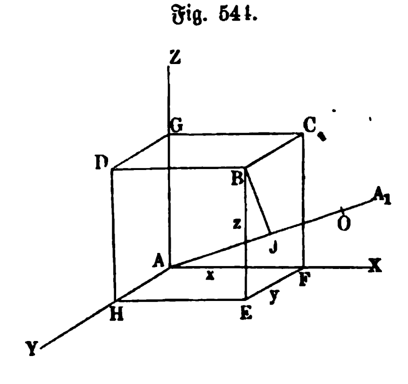
$$W_1 - W = Md^2,$$
d. i.
$$W_1 = W + Md^2.$$

Es ist also das Trägheitsmoment eines Körpers für eine excentrische Axe gleich dem Trägheitsmomente in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe, vergrößert um das Product aus der Masse des Körpers und dem Quadrate des Abstandes beider Axen von einander.

Man ersieht auch hieraus, daß von allen Trägheitsmomenten in Beziehung auf lauter parallele Axen dasjenige am kleinsten ausfällt, dessen Axe die Schwerlinie des Körpers ist. Denkt man sich ferner um eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe einen Kreiscylinder concentrisch gelegt, so ist das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf alle Seiten dieses Cylinders von derselben Größe.

Trägheitshauptaxen. Zwischen den Trägheitsmomenten eines Körpers in Bezug auf verschiedene Axen finden noch einige allgemeine Beziehungen von Wichtigkeit statt, welche sich wie folgt ergeben. Es sei Fig. 544 der Schwerpunkt A eines Körpers zum Mittelpunkte eines rechtwinkeligen räumlichen Coordinatensystems gewählt, dessen drei Axen AX, AY, AZ den Kanten eines Würfels entsprechen. Irgend ein Punkt B des Körpers habe die Coordinaten x, y, z, so kann dieser Punkt B aufgefaßt werden als Eckpunkt eines Parallelepipedums $ABDCE$, dessen drei Kanten $AF = x$, $FE = y$ und $EB = z$ sind. Bezeichnet man mit m die Masse des in dem materiell gedachten Punkte B enthaltenen Körperelementes, so ist aus der Figur ohne Weiteres zu erkennen, daß das Trägheitsmoment des Massentheilchens m sich berechnet durch §. 308.

Fig. 544.



$$m \cdot \overline{BF^2} = m\,(y^2 + z^2) \text{ für die Axe } AX,$$
$$m \cdot \overline{BH^2} = m\,(x^2 + z^2) \text{ für die Axe } AY,$$
$$m \cdot \overline{BG^2} = m\,(x^2 + y^2) \text{ für die Axe } AZ.$$

Wenn man daher die Trägheitsmomente des ganzen Körpers für die Coordinatenaxen bezüglich mit W_x, W_y und W_z bezeichnet, so hat man offenbar:

$$W_x = \Sigma\, m\,(y^2 + z^2);\quad W_y = \Sigma\, m\,(x^2 + z^2);\quad W_z = \Sigma\, m\,(x^2 + y^2).$$

Will man nun das Trägheitsmoment W_a desselben Körpers in Bezug auf eine beliebige Gerade AA_1 bestimmen, welche mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet, so hat man die Summe $\Sigma\, m\, \overline{BJ^2}$ zu bilden, unter BJ die Normale von B auf AA_1 verstanden. Nun ist

$$\overline{BJ^2} = \overline{AB^2} - \overline{AJ^2} = x^2 + y^2 + z^2 - \overline{AJ^2}.$$

Ferner ist AJ als Projection der drei Strecken AF, FE und EB auf AA_1 gegeben durch:

$$AJ = x \cos.\alpha + y \cos.\beta + z \cos.\gamma.$$

Dies eingeführt, ergiebt das Trägheitsmoment in Bezug auf AA_1:

$$\begin{aligned} W_a &= \Sigma\, m\, [x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos.\alpha + y \cos.\beta + z \cos.\gamma)^2] \\ &= \Sigma\, m\, x^2 \sin.\alpha^2 + \Sigma\, m\, y^2 \sin.\beta^2 + \Sigma\, m\, z^2 \sin.\gamma^2 \\ &\quad - \Sigma\, 2\, m\, x y \cos.\alpha \cos.\beta - \Sigma\, 2\, m\, x z \cos.\alpha \cos.\gamma \\ &\quad - \Sigma\, 2\, m\, y z \cos.\beta \cos.\gamma, \end{aligned}$$

wofür der Kürze halber geschrieben werden möge:

$$\begin{aligned} W_a = a \sin.\alpha^2 + b \sin.\beta^2 + c \sin.\gamma^2 - 2\, d \cos.\alpha \cos.\beta \\ - 2\, e \cos.\alpha \cos.\gamma - 2\, f \cos.\beta \cos.\gamma, \end{aligned}$$

indem man setzt:

$$a = \Sigma\, m x^2,\ \ b = \Sigma\, m y^2,\ \ c = \Sigma\, m z^2 \text{ und}$$
$$d = \Sigma\, m x y,\ e = \Sigma\, m x z,\ f = \Sigma\, m y z.$$

Wenn man sich nun für alle möglichen, durch A gehenden Geraden AA_1 die entsprechenden Trägheitsmomente W_a des Körpers berechnet denkt, und auf jeder dieser Linien AA_1 von A aus ein Stück AO aufträgt, welches dem Werthe $\sqrt{\frac{1}{W_a}}$ proportional ist, so liegen die Endpunkte O dieser aufgetragenen Strecken in einer gewissen Fläche, deren Kenntniß über das Verhältniß der verschiedenen Trägheitsmomente zu einander Aufklärung giebt.

Bezeichnen jetzt x, y, z die Coordinaten eines solchen Endpunktes O, welcher auf dem Strahle AA_1 gelegen ist, dessen Winkel mit den Axen α, β, γ sind, so hat man offenbar

$$\frac{x}{AO} = x \sqrt{W_a} = \cos.\alpha,\ \ y \sqrt{W_a} = \cos.\beta,\ z \sqrt{W_a} = \cos.\gamma$$

und daher

$$\sin.\alpha^2 = 1 - x^2 W_a,\ \sin.\beta^2 = 1 - y^2 W_a,\ \sin.\gamma^2 = 1 - z^2 W_a.$$

Diese Werthe in den oben gefundenen Ausdruck für W_a eingesetzt, liefert:

$$\begin{aligned} W_a &= a\,(1 - x^2 W_a) + b\,(1 - y^2 W_a) + c\,(1 - z^2 W_a) \\ &\quad - 2\, d x y\, W_a - 2\, e x z\, W_a - 2\, f y z\, W_a \text{ oder} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_a = a + b + c - W_a (a x^2 + b y^2 + c z^2) - W_a (2\, d x y + 2\, e x z \\ + 2\, f y z). \end{aligned}$$

Durch W_a dividirt, giebt diese Gleichung:

$$1 = (a + b + c)\frac{1}{W_a} - (ax^2 + by^2 + cz^2) - (2dxy + 2exz + 2fyz).$$

Setzt man nun für $\frac{1}{W_a} = \overline{AO^2}$ seinen Werth $\frac{1}{W_a} = x^2 + y^2 + z^2$ ein, so folgt nach einiger Reduction:

$$1 = x^2(b + c) + y^2(a + c) + z^2(a + b) - 2dxy - 2exz - 2fyz.$$

Diese Gleichung zweiten Grades entspricht einer überall geschlossenen Fläche, und zwar einem Ellipsoid, welchem von Poinsot der Name Centralellipsoid beigelegt worden ist.

Jedes Ellipsoid hat nun, wie die analytische Geometrie lehrt, drei zu einander im Mittelpunkte rechtwinkelige Axen, Hauptaxen genannt, welche die Eigenschaft haben, daß die eine von ihnen der größte und eine andere der kleinste Durchmesser ist. Bezieht man das Ellipsoid auf diese Hauptaxen als Coordinatenaxen, so fallen in der Gleichung die drei Glieder mit xy, xz und yz weg. Wenn man daher in dem vorliegenden Falle die Hauptaxen als Coordinatenaxen voraussetzt, so geht die Gleichung des Centralellipsoids über in:

$$x^2(b + c) + y^2(a + c) + z^2(a + b) = 1,$$

oder für a, b und c die betreffenden Werthe

$$a = \Sigma mx^2,\ b = \Sigma my^2,\ c = \Sigma mz^2 \text{ gesetzt:}$$

$$x^2 . \Sigma m(y^2 + z^2) + y^2 . \Sigma m(x^2 + z^2) + z^2 . \Sigma m(y^2 + z^2) = 1.$$

Nach dem Früheren läßt sich dies aber schreiben:

$$W_x x^2 + W_y y^2 + W_z z^2 = 1,$$

unter W_x, W_y, W_z die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf die drei Hauptaxen für den Punkt A verstanden.

Die Resultate der vorherigen Untersuchung lassen sich nunmehr wie folgt zusammenfassen: Für jeden beliebigen Punkt A eines Körpers*) giebt es ein Ellipsoid, Fig. 545 (a. f. S.), $ABCDEFG$, von solcher Beschaffenheit, daß jeder Strahl AO vom Mittelpunkte A nach einem beliebigen Punkte O der Oberfläche in seiner Länge AO proportional der Größe $\sqrt{\frac{1}{W_a}}$ ist, unter W_a das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf AO verstanden. Sind AB, AC, AD die halben Hauptaxen des Ellipsoids, so ist von allen Geraden, die durch A gehen, die eine Halbaxe (in der Figur AD) die größte, eine andere (in der Figur AC) die kleinste, es entspricht daher §. 309.

*) Der Punkt A kann auch außerhalb des Körpers gedacht werden, nur muß er fest mit dem Körper verbunden angenommen werden.

der Axe AD das kleinste, der Axe AC das größte unter allen den Trägheitsmomenten des Körpers in Bezug auf die durch denselben Punkt A gehenden Geraden. Wäre also A der Schwerpunkt, so würde (nach §. 307) der Hauptaxe AD das kleinste unter allen möglichen Trägheitsmomenten des Körpers entsprechen.

Fig. 545.

Die drei Axen AB, AC, AD führen den Namen Trägheitshauptaxen für den Punkt A. Seien die Trägheitsmomente für diese Hauptaxen mit W_x, W_y, W_z bezeichnet, so findet man aus ihnen das Trägheitsmoment für den beliebigen Strahl AO zu

$$W_a = W_x \cos.\alpha^2 + W_y \cos.\beta^2 + W_z \cos.\gamma^2,$$

welcher Werth sich ergiebt, wenn man die Werthe

$$x = AO.\cos.\alpha = \frac{\cos.\alpha}{\sqrt{W_a}},\quad y = \frac{\cos.\beta}{\sqrt{W_a}},\quad z = \frac{\cos.\gamma}{\sqrt{W_a}}$$

in die Gleichung des Ellipsoids

$$W_x x^2 + W_y y^2 + W_z z^2 = 1$$

einsetzt.

Aus dem Ausdrucke für W_a erkennt man leicht, da

$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1 \text{ ist, daß}$$
$$W_a = W_x \cos.\alpha^2 + W_y \cos.\beta^2 + W_z \cos.\gamma^2$$

jedenfalls größer als der kleinste Werth und jedenfalls kleiner als der größte Werth von W_x, W_y und W_z sein muß, wie schon oben angegeben wurde.

Hat man $W_x = W_y$, so folgt

$$W_a = W_x (\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2) + W_z \cos.\gamma^2 \text{ oder da}$$
$$\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1,$$

so hat man auch:

$$W_a = W_x + (W_z - W_x) \cos.\gamma^2,$$

d. h. es ist das Trägheitsmoment W für alle Strahlen AO, welche mit der Z-Axe denselben Winkel γ bilden, von derselben Größe, also auch für alle durch A gehenden Linien in der Ebene XY, für welche $\gamma = 90^0$ ist, folgt $W = W_x$. Das Ellipsoid ist in diesem Falle, weil $AB = AC$, ein Rotationsellipsoid geworden. Jedes Prisma mit regulär polygonalem Querschnitte entspricht offenbar diesem Falle.

Ist endlich $W_x = W_y = W_z$, d. h. $AB = AC = AD$, so wird aus dem Ellipsoid eine Kugel, das Trägheitsmoment ist für alle durch A gehenden Axen gleich groß. Diesem Falle entsprechen alle regulären Körper und die Prismen mit regulärem Querschnitte von einer bestimmten Höhe.

Um die Lage der Hauptaxen leicht zu bestimmen, kann man für gewisse Körperformen noch bestimmte Regeln anführen.

Hat nämlich ein Körper eine Symmetrieebene, so ist für jeden Punkt derselben die darin auf der Symmetrieebene senkrechte Gerade eine Trägheitshauptaxe. Denn denkt man sich z. B. die Symmetrieebene als XY-Ebene, so entspricht wegen der Symmetrie jedem $+z$ ein gleich großes $-z$ und es ist daher

$$e = \Sigma\, mxz = 0, \text{ und } f = \Sigma\, myz = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, daß die zur Z-Axe gewählte Normale in einem Punkte der Symmetrieebene eine Hauptaxe des diesem Punkte angehörigen Centralellipsoids sein muß. Eine Symmetrieebene haben beispielsweise alle normalen prismatischen und cylindrischen Körper in der die Axe halbirenden mit den Grundflächen parallelen Ebene. Daher ist jede der Axe eines normalen Prismas parallele Gerade eine Trägheitshauptaxe für ihren Mittelpunkt (zwischen den Grundflächen gemessen).

Hat ein Körper zwei Symmetrieebenen, so ist die Durchschnittslinie derselben eine Trägheitshauptaxe für jeden ihrer Punkte. Seien z. B. die Symmetrieebenen als ZX- und ZY-Ebene, also die Durchschnittslinie oder Symmetrieaxe als Z-Axe gewählt, so ist, da jedem $+x$ des Körpers ein gleich großes $-x$, und jedem $+y$ ein gleich großes $-y$ entspricht, $\Sigma\, mxy = 0$; $\Sigma\, mxz = 0$; $\Sigma\, myz = 0$, woraus folgt, daß die Symmetrieaxe eine Hauptaxe ist, wo man auch den Coordinatenanfang A wählt. Dieser Fall findet z. B. bei allen normalen Prismen und Cylindern statt, deren Grundfläche eine Symmetrieaxe hat, z. B. bei einem Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenkeliges Dreieck, ein Kreissector, Kreissegment u. s. w. ist.

Schließlich kann noch bemerkt werden, was leicht zu beweisen ist, daß die Schwerpunktshauptaxen, d. h. die dem Schwerpunkte eines Körpers zugehörigen Trägheitshauptaxen die Eigenschaft haben, daß eine solche zu jedem ihrer Punkte ebenfalls eine Hauptaxe bleibt, und die zugeordneten Hauptaxen parallele Lage zu den beiden anderen Schwerpunktshauptaxen haben.

Trägheitshalbmesser. Es ist nöthig, die Trägheitsmomente von den vorzüglichsten Körpern der Geometrie kennen zu lernen, weil dieselben bei den Untersuchungen der Mechanik sehr oft zur Anwendung kommen. Sind diese Körper homogen, wie wir im Folgenden stets voraussetzen wollen, so §. 310.

sind die Massentheile M_1, M_2 u. s. w. den entsprechenden Volumentheilen V_1, V_2 u. s. w. proportional, und es läßt sich daher das Maß des Trägheitsmomentes, welches man auch wohl Trägheitsmoment schlechtweg nennt, durch die Summe aus den Volumtheilen und den Quadraten ihrer Entfernungen von der Umdrehungsaxe ersetzen. Auch lassen sich in diesem Sinne die Trägheitsmomente von Linien und Flächen angeben.

Denkt man sich die ganze Masse eines Körpers in einen Punkt zusammengedrängt, so läßt sich die Entfernung desselben von der Axe unter der Voraussetzung bestimmen, daß die so concentrirte Masse mit der im Raume vertheilten Masse einerlei Trägheitsmoment besitze. Man nennt diese Entfernung den Drehungs- oder Trägheitshalbmesser (franz. rayon d'inertie; engl. radius of gyration). Ist W das Trägheitsmoment, M die Masse und k der Trägheitshalbmesser, so hat man $Mk^2 = W$ und daher:

$$k = \sqrt{\frac{W}{M}}.$$

Uebrigens ist zu erinnern, daß dieser Halbmesser keineswegs einen bestimmten Punkt, sondern nur einen Kreis angiebt, in dessen Umfang die Masse beliebig vertheilt angenommen werden kann.

Führt man in der Formel

$$W_1 = W + Md^2, \; W = Mk^2 \text{ und } W_1 = Mk_1^2$$

ein, so erhält man:

$$k_1^2 = k^2 + d^2,$$

d. h. es ist das Quadrat des Drehungshalbmessers in Beziehung auf eine Axe gleich dem Quadrate des Drehungshalbmessers in Beziehung auf die parallele Schwerlinie vermehrt um das Quadrat der Entfernung beider Axen von einander.

§. 311. **Trägheitsmoment einer Stange.** Von einer Stange AB, Fig. 546, welche sich um eine Axe $\overline{X}X$ durch ihre Mitte S dreht, bestimmt sich das Trägheitsmoment auf folgende Weise. Es sei der Querschnitt der Stange $= F$, die halbe Länge SA derselben $= l$ und der Winkel, welchen ihre Axe mit der Drehungsaxe einschließt, d. i. $AS\overline{N} = \alpha$. Theilen wir die halbe Länge in n gleiche Theile, so erhalten wir auch n Stücke, jedes von dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$; die Entfernungen dieser Stücke von der Mitte S sind $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n}$ u. s. w., daher die Abstände derselben von der Axe $\overline{X}X$, wie z. B. MN:

$$= \frac{l}{n} \sin.\alpha, \frac{2l}{n} \sin.\alpha, \frac{3l}{n} \sin.\alpha \text{ u. s. w.}$$

und ihre Quadrate:

$$= \left(\frac{l\,sin.\,\alpha}{n}\right)^2,\ 4\left(\frac{l\,sin.\,\alpha}{n}\right)^2,\ 9\left(\frac{l\,sin.\,\alpha}{n}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

Durch Multiplication dieser Quadrate mit dem Inhalte $\frac{Fl}{n}$ eines Elementes und durch Addition der dadurch erhaltenen Producte ergiebt sich nun das Trägheitsmoment der halben Stange:

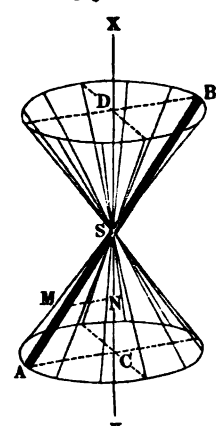
$$T = \frac{Fl}{n}\left[\left(\frac{l\,sin.\,\alpha}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{l\,sin.\,\alpha}{n}\right)^2 + 9\left(\frac{l\,sin.\,\alpha}{n}\right)^2 + \cdots\right]$$
$$= \frac{Fl^3\,sin.\,\alpha^2}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2),$$

oder, da $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3}$ ist,

$$W = \frac{Fl^3\,sin.\,\alpha^2}{3}.$$

Da ferner Fl das als Masse M zu behandelnde Volumen der halben Stange ist, so folgt endlich:

Fig. 516.



$$W = \frac{1}{3}\,Ml^2\,sin.\,\alpha^2.$$

Der Abstand eines Stangenendes von der Axe $\overline{X}X$ ist

$$AC = BD = a = l\,sin.\,\alpha,$$

daher folgt einfacher

$$W = \frac{1}{3}\,Ma^2,$$

welche Formel auch auf die ganze Stange AB anzuwenden ist, wenn man unter M die Masse der ganzen Stange versteht. Eine Masse M_1 am Endpunkte A der Stange hat das Trägheitsmoment $M_1\,a^2$, macht man daher $M_1 = \frac{1}{3}\,M$, so hat M_1 mit der Stange einerlei Trägheitsmoment. Ob also die Masse auf die Stange gleichförmig vertheilt, oder ihr dritter Theil im Endpunkte A concentrirt sei, dies kommt in Hinsicht auf die Trägheit auf eins hinaus.

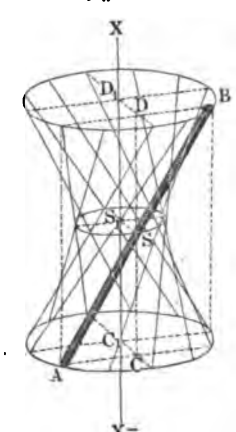
Mit Hülfe der Differenzialrechnung ergiebt sich ein Volumen- oder Massenelement der Stange $m = F\,.\,\partial l$. Der Abstand desselben von der Axe ist $l\,sin.\,\alpha$, unter l die veränderliche Länge SM verstanden, daher ist einfach:

$$W = \int_0^l m\,(l\,sin.\,\alpha)^2 = \int_0^l F\,.\,\partial l\,.\,l^2\,sin.\,\alpha^2 = F\,sin.\,\alpha^2 \int_0^l l^2\,\partial l$$
$$= F\,sin.\,\alpha^2\,\frac{l^3}{3} = \frac{1}{3}\,Ma^2.$$

Diese Formel ist nur so lange richtig, als die Querdimensionen der Stange klein genug sind, um letztere als eine materielle Linie auffassen zu dürfen.

Setzt man $W = Mk^2$, so bekommt man $k^2 = \frac{1}{3}\,a^2$, und daher den Trägheitshalbmesser der Stange:

Fig. 547.



$$k = a\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773\ .\ a.$$

Steht die Stange senkrecht auf der Drehungsaxe, so ist $a = l$, daher

$$W = \frac{1}{3}\,Ml^2.$$

Befindet sich endlich die Stange AB, Fig. 547, mit der Drehungsaxe C_1D_1 nicht in einerlei Ebene, und ist der kürzeste Abstand der Stangenaxe von der Drehaxe:

$$SS_1 = CC_1 = DD_1 = d,$$

sowie der Normalabstand $AC = BD$ der Stangenenden A und B von der mit C_1D_1 parallelen Axe CD durch den Schwerpunkt S der Stange $= a$, so hat man (nach §. 307) das Trägheitsmoment der Stange:

$$W_1 = W + Md^2 = M\left(d^2 + \frac{1}{3}\,a^2\right).$$

§. 312. **Rechteck und Parallelepiped.** Die Trägheitsmomente von ebenen Flächen bestimmen sich genau so wie die Biegungsmomente $W = F_1 z_1^2 + F_2 z_2^2 + \cdots$ derselben. Deshalb lassen sich auch die im vorigen Abschnitte für verschiedene Flächen gefundenen Werthe von W als Trägheitsmomente W hier benutzen.

Für das Rechteck $ABCD$, Fig. 548, ist das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe $\overline{XX}$, welche parallel mit einer Seite läuft, und durch die Mitte S dieser Figur geht, nach §. 227

Fig. 548.

$$W = \frac{b\,h^3}{12},$$

wo b die Breite $AB = CD$, parallel zur Umdrehungsaxe und h die Höhe $AD = BC$ der Fläche bezeichnet.

Nun ist aber der Inhalt bh dieses Rechteckes als Masse M desselben einzusetzen, daher folgt das Trägheitsmoment:

$$W = \frac{Mh^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

d. i. so groß als das des dritten Theiles dieser Masse, im Abstande $\overline{SF} = \overline{SG} = \frac{h}{2}$ von der Drehungsaxe angebracht.

Ebenso ist für die Axe $\overline{YY}$ das Trägheitsmoment

$$W = \frac{Mb^2}{12} = \frac{M}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

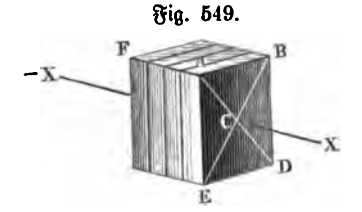
Dreht sich dieses Rechteck um eine Axe $\overline{ZZ}$, welche rechtwinkelig gegen die Ebene desselben steht und ebenfalls durch die Mitte S der Figur geht, so hat man nach §. 226:

$$W = \frac{Mh^2}{12} + \frac{Mb^2}{12} = \frac{M(h^2 + b^2)}{12} = \frac{M}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$
$$= \frac{M}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

wenn d die Diagonale $\overline{AC} = \overline{BD}$ des Rechteckes bezeichnet. Man kann sich also in diesem Falle den dritten Theil der Masse des Rechteckes in einem der Eckpunkte A, B ... angebracht denken.

Da sich ferner ein gerades Parallelepiped BEF, Fig. 549, durch Parallelebenen in lauter gleiche rectanguläre Blätter zerlegen läßt, so gilt diese Formel auch für dieses, wenn die Umdrehungsaxe durch die Mittelpunkte von zwei gegenüber liegenden Flächen geht. Uebrigens folgt auch aus dieser Formel, daß das Trägheitsmoment des Parallelepipeds gleich ist dem Trägheitsmomente des in einem der Eckpunkte A angebrachten dritten Theiles seiner Masse.

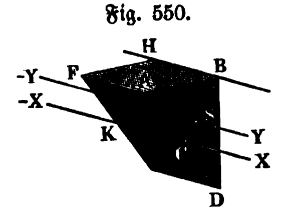
Fig. 549.



Die Trägheitshauptaxen für den Schwerpunkt sind bei dem geraden Parallelepiped mit den drei Kanten parallel. Bei einem Würfel sind jede drei im Schwerpunkte zu einander senkrechte gerade Linien Trägheitshauptaxen für den Schwerpunkt, und das Trägheitsmoment hat für alle möglichen durch den Schwerpunkt gehenden Axen denselben Werth. Das Centralellipsoid ist dafür eine Kugel.

Prisma und Cylinder. Mit Hülfe der Formel für das Trägheitsmoment eines Parallelepipedes läßt sich auch das eines dreiseitigen Prismas berechnen. Die Diagonalebene ADF theilt das Parallelepiped in zwei gleiche dreiseitige Prismen mit rechtwinkelig triangulären Grundflächen ABD, Fig. 550, es ist daher für eine Drehung um die durch die Mittelpunkte C und K der Hypotenusen gehende Axe $\overline{XX}$ das Trägheitsmoment §. 313.

Fig. 550.



$= \frac{1}{12} Md^2$. Nach §. 307 erhält man das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch die Schwerpunkte S und S_1 der Grundflächen gehende Axe $\overline{YY}$:

$$W = \frac{1}{12} Md^2 - M . \overline{CS}^2 = M \left(\frac{d^2}{12} - (\frac{1}{3} \overline{CB})^2\right)$$
$$= M \left[\frac{d^2}{12} - \left(\frac{d}{6}\right)^2\right] = \frac{1}{18} Md^2,$$

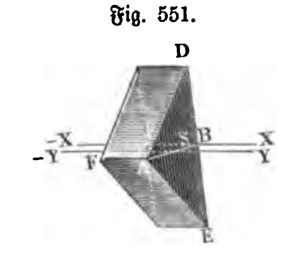
und es folgt auch das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Seitenkante BH:

$$W_1 = W + M . \overline{SB}^2 = \frac{1}{18} Md^2 + M (\frac{1}{3} d)^2 = \frac{1}{6} Md^2,$$

wobei d jedesmal die Hypotenuse AD der triangulären Grundfläche bezeichnet.

Für ein Prisma $ADFE$, Fig. 551, mit gleichschenkelig triangulären Grundflächen ist das Trägheitsmoment in Beziehung auf eine Axe $\overline{XX}$, welche die Mittelpunkte der Grundlinien verbindet, $W_1 = \frac{1}{6} Md^2$, wenn d die Seite $AD = AE$ einer Grundfläche bezeichnet, weil sich diese Fläche durch die Höhenlinie AB in zwei gleiche rechtwinkelige Dreiecke zerlegen läßt. Ist nun diese Höhe AB der gleichschenkelig triangulären Basis $= h$, so hat man das Trägheitsmoment dieses Prismas in Beziehung auf die Axe $\overline{YY}$ durch die Schwerpunkte der Grundflächen:

Fig. 551.



$$W = \frac{1}{6} Md^2 - M \left(\frac{h}{3}\right)^2 = M (\frac{1}{6} d^2 - \frac{1}{9} h^2)$$
$$= \frac{1}{3} M (\frac{1}{2} d^2 - \frac{1}{3} h^2),$$

und endlich das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Kante AF durch die Spitzen A und F der Grundflächen:

$$W_1 = W + M (\frac{2}{3} h)^2 = M \left(\frac{d^2}{6} - \frac{h^2}{9} + \frac{4 h^2}{9}\right)$$
$$= \frac{1}{3} M (\frac{1}{2} d^2 + h^2).$$

Hiernach läßt sich auch das Trägheitsmoment eines geraden regelmäßigen, sich um seine geometrische Axe drehenden Prismas $ADFK$, Fig. 552, finden. Ist $CA = CB = r$ der Halbmesser der Grundfläche oder eines Ergänzungsdreieckes der Basis, h die Höhe CN von einem der Ergänzungsdreiecke ACB und M die Masse des ganzen Prismas, so hat man nach der letzten Formel, wenn man darin r statt d setzt:

$$W = \frac{1}{3} M \left(\frac{r^2}{2} + h^2\right).$$

Das reguläre Prisma wird zu einem geraden Cylinder, wenn $h = r$ ausfällt, daher ist das Trägheitsmoment dieses Cylinders in Beziehung auf seine geometrische Axe:

$$W = \frac{1}{3} M \left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = \frac{1}{2} M r^2.$$

Das Trägheitsmoment eines Cylinders ist also gleich dem Trägheitsmomente der halben Cylindermasse concentrirt in dem Umfange desselben, oder gleich dem Trägheitsmomente der ganzen Masse befindlich im Abstande

$$k = r \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071\, r.$$

Hat man es mit einem hohlen Cylinder $ABDE$, Fig. 553, zu thun, so ist das Trägheitsmoment des leeren Raumes von dem des massiven

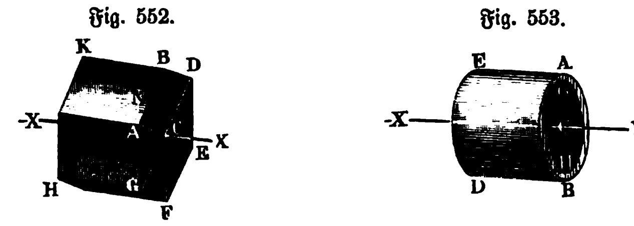


Fig. 552. Fig. 553.

Cylinders abzuziehen. Bezeichnet l die Länge, r_1 den äußeren Halbmesser CA und r_2 den inneren Halbmesser CG dieses Körpers, so hat man, nach dem Vorigen, das Trägheitsmoment des hohlen Cylinders:

$$W = \frac{1}{2}(M_1 r_1^2 - M_2 r_2^2) = \frac{1}{2}\pi(r_1^2 . r_1^2 - r_2^2 . r_2^2) l = \frac{1}{2}\pi(r_1^4 - r_2^4) l$$
$$= \frac{1}{2}\pi(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 + r_2^2) l = \frac{1}{2} M (r_1^2 + r_2^2),$$

weil das als Masse zu behandelnde Volumen des Körpers $= \pi(r_1^2 - r_2^2) l$ ist.

Bezeichnet ferner r den mittleren Halbmesser $\frac{r_1 + r_2}{2}$ und b die Breite $r_1 - r_2$ der Ringfläche, so hat man auch:

$$W = M\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right).$$

Kegel und Pyramide. Mit Hülfe der Formel für das Trägheits- §. 314. moment eines Cylinders läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines geraden Kegels, sowie das einer Pyramide berechnen. Es sei ACB, Fig. 554 (a. f. S.), ein sich um seine geometrische Axe drehender Kegel, $r = DA = DB$ der Halbmesser seiner Basis und $h = CD$ seine in die Axe fallende Höhe. Führen wir in gleichen Höhenabständen n Schnitte parallel zur Basis, so erhalten wir lauter dünne Scheiben von den Halbmessern

$$\frac{r}{n},\ 2\,\frac{r}{n},\ 3\,\frac{r}{n}\cdots n\,\frac{r}{n}$$

und der gemeinschaftlichen Höhe $\frac{h}{n}$. Die Volumina dieser Scheiben sind:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n},\ \pi\left(\frac{3r}{n}\right)^2\cdot\frac{h}{n}\ \text{u. s. w.}$$

und daher die Trägheitsmomente derselben:

$$\pi\left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n},\ \pi\left(\frac{2r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n},\ \pi\left(\frac{3r}{n}\right)^4\cdot\frac{h}{2n}\ \text{u. s. w.}$$

Die Summe dieser Werthe giebt endlich das Trägheitsmoment des ganzen Kegels:

$$W=\frac{\pi r^4 h}{2n^5}(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4),$$

d. i, da $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n^5}{5}$ und die Masse des Kegels $M=\frac{\pi r^2 h}{3}$ zu setzen ist,

$$W=\frac{\pi r^4 h}{10}=\frac{3}{10}\cdot\frac{\pi r^2 h}{3}\cdot r^2=\frac{3}{10}Mr^2.$$

Fig. 554.

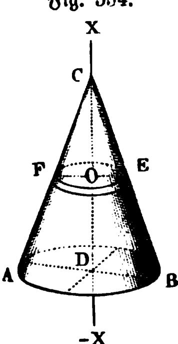
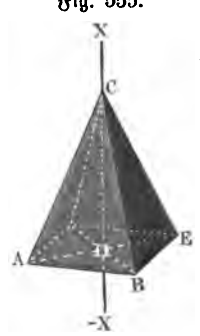


Fig. 555.



Bezeichnet $\varrho = OF$ einen Halbmesser im Abstande $x = CO$ von C, so hat man das Volumen oder die Masse m einer Scheibe EF

$$m=\pi\varrho^2\partial x$$

und das Trägheitsmoment derselben

$$\partial W = \tfrac{1}{2}m\varrho^2=\frac{\pi}{2}\varrho^4\partial x.$$

Da nun $\varrho=\frac{x}{h}r$, so folgt:

$$\partial W=\frac{\pi}{2}\frac{r^4}{h^4}x^4\partial x,\ \text{daher}$$

$$W=\frac{\pi}{2}\frac{r^4}{h^4}\int_0^h x^4\partial x=\frac{\pi}{10}\cdot r^4 h=\frac{3}{10}Mr^2.$$

Ebenso ist für die gerade Pyramide ACE, Fig. 555, mit rectangulärer Basis, unter denselben Verhältnissen:

$$W = \frac{1}{5} M d^2,$$

wenn d die halbe Diagonale DA der Basis bezeichnet.

Auch ergiebt sich durch Subtraction von zwei Trägheitsmomenten, das Trägheitsmoment eines geraden abgekürzten Kegels ($ABEF$, Fig. 554), dessen Halbmesser DA und OF, r_1 und r_2 und Höhen CD und CO, h_1 und h_2 sind, in Beziehung auf seine geometrische Axe $X\overline{X}$:

$$W = \frac{\pi}{10}(r_1^4 h_1 - r_2^4 h_2) = \frac{\pi h_1}{10 r_1}(r_1^5 - r_2^5),$$

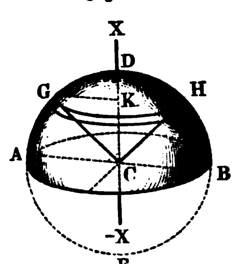
oder, da die Masse

$$M = \frac{\pi}{3}(r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2) = \frac{\pi h_1}{3 r_1}(r_1^3 - r_2^3) \text{ ist,}$$

$$W = \frac{3}{10} M \left(\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\right).$$

Kugel. Auf gleiche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment einer Kugel, welche sich um einen ihrer Durchmesser $DE = 2r$ dreht. Theilen wir die Halbkugel ADB, Fig. 556, durch Schnitte parallel zur Basis ACB in n gleichdicke Scheiben wie GKH u. s. w., und bestimmen wir die Momente derselben. Das Quadrat des Halbmessers GK einer solchen Scheibe ist: §. 315.

Fig. 556.



$$\overline{GK}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{CK}^2 = r^2 - \overline{CK}^2,$$

daher das Trägheitsmoment derselben:

$$= \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{r}{n}(r^2 - \overline{CK}^2)^2$$

$$= \frac{\pi r}{2n}(r^4 - 2r^2 \cdot \overline{CK}^2 + \overline{CK}^4).$$

Setzen wir nun für CK nach und nach $\frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \frac{3r}{n}$ u. s. w. bis $\frac{nr}{n}$ ein, und addiren wir die Ergebnisse, so folgt das Trägheitsmoment der Halbkugel:

$$W = \frac{\pi r}{2n}\left[n.r^4 - 2r^2\left(\frac{r}{n}\right)^2(1^2+2^2+\cdots+n^2) + \left(\frac{r}{n}\right)^4(1^4+2^4+\cdots+n^4)\right]$$

$$= \frac{\pi r}{2n}\left[nr^4 - \frac{2r^4}{n^2}\cdot\frac{n^3}{3} + \left(\frac{r}{n}\right)^4\cdot\frac{n^5}{5}\right], \text{ d. i.:}$$

$$W = \frac{\pi r^5}{2}(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{4\pi r^5}{15}.$$

Nun ist der Inhalt einer Halbkugel $M = \frac{2}{3} \pi r^3$, es läßt sich daher setzen:

$$W = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot r^2 = \frac{2}{5} M r^2,$$

und nimmt man M für die ganze Kugel an, so gilt die Formel auch für diese.

Bezeichnet ϱ den Halbmesser GK der Scheibe im Abstande $x = CK$ vom Mittelpunkte, so hat man mit Hülfe der Differenzialrechnung:

$$\partial W = \frac{1}{2} m \varrho^2 = \frac{1}{2} \pi \varrho^2 \partial x \varrho^2 = \frac{\pi}{2} \varrho^4 \partial x,$$

und da $\varrho^2 = r^2 - x^2$, also $\varrho^4 = r^4 - 2 r^2 x^2 + x^4$ ist, so folgt:

$$W = \frac{\pi}{2} \int_{x=0}^{x=r} \varrho^4 \partial x = \frac{\pi}{2} \int_0^r (r^4 \partial x - 2 r^2 x^2 \partial x + x^4 \partial x),$$

oder

$$W = \frac{\pi}{2} \left(r^5 - \frac{2 r^5}{3} + \frac{r^5}{5} \right) = \frac{4 \pi r^5}{15} = \frac{2}{5} M r^2.$$

Der Drehungshalbmesser ist:

$$k = r \sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}6324 \, . \, r.$$

Zwei Fünftel der Kugelmasse um den Kugelhalbmesser von der Drehungsaxe abstehend, haben dasselbe Trägheitsmoment wie die ganze Kugel.

Die Formel

$$W = \frac{2}{5} M r^2$$

gilt auch für ein Sphäroid, dessen Aequatorhalbmesser $= r$ ist (s. §. 126).

Dreht sich die Kugel um eine andere, von ihrem Mittelpunkte um d abstehende Axe, so hat man das Trägheitsmoment derselben zu setzen:

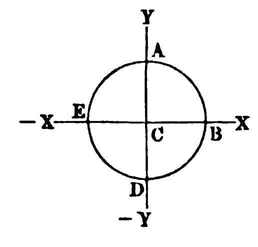
$$W = M (d^2 + \frac{2}{5} r^2).$$

§. 316. **Cylinder und Kegel.** Das Trägheitsmoment einer materiellen Kreislinie $ABDE$, Fig. 557, in Hinsicht auf eine Axe durch den Mittelpunkt C und rechtwinkelig zur Ebene des Kreises ist, da alle Punkte um $CA = r$ von der Axe abstehen,

$$W = M r^2.$$

Diese Formel gilt nicht nur für einen Ring aus dünnem Draht, sondern auch für einen Cylindermantel aus dünnem Blech und von beliebiger Höhe, welcher sich um seine Axe dreht, und kann annäherungsweise auch für Schwungringe gebraucht werden, sobald die radiale Dimension des Kranzquerschnittes hinreichend klein gegen den Halbmesser ist. Eine genauere Bestimmung ist im §. 313 gegeben.

Fig. 557.



Das Trägheitsmoment einer materiellen Kreislinie in Hinsicht auf einen Durchmesser $\overline{X}X$ oder $\overline{Y}Y$ ist für alle Durchmesser gleich groß. Es ist

dasselbe für $\overline{XX}$ gegeben durch $\Sigma m y^2$ und für $\overline{YY}$ durch $\Sigma m x^2$. Da nun das Trägheitsmoment hinsichtlich der in C senkrecht stehenden Axe

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

ist, so folgt

$$\Sigma m x^2 = \Sigma m y^2 = \frac{1}{2} \Sigma m r^2,$$

d. h. man hat für die Durchmesser $\overline{XX}$ und $\overline{YY}$ sowie für jeden anderen Durchmesser:

$$W_1 = \frac{1}{2} W = \frac{1}{2} M r^2.$$

Dagegen das Trägheitsmoment von einem kreisrunden Blatte $ABDE$, Fig. 557, welches sich um seinen Durchmesser BE dreht, ergiebt sich wie das Biegungsmoment eines Cylinders:

$$W_1 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{M r^2}{4},$$

es ist folglich der Halbmesser der Trägheit dieser Fläche:

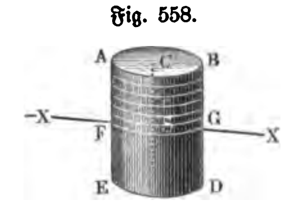
$$k = r \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} r,$$

d. i. die Hälfte vom Halbmesser des Kreises.

Auch hier ist für die in C senkrechte Axe $W = 2 W_1 = \frac{M r^2}{2}$, welche Formel für beliebige Dicke der Scheibe, daher auch für einen Cylinder hinsichtlich seiner geometrischen Axe gilt, wie auch schon in §. 313 gefunden wurde.

Es läßt sich nun auch das Trägheitsmoment eines Cylinders $ABDE$, Fig. 558, finden, der sich um einen durch seinen Schwerpunkt S gehenden Durchmesser FG dreht. Ist l die halbe Höhe AF und r der Halbmesser $CA = CB$ des Cylinders, so hat man das Volumen einer Hälfte desselben $= \pi r^2 l$, und führt man Schnitte parallel zur Basis und in gleichen Abständen, so zerlegt man diesen Körper in n gleiche Theile, wovon jeder $= \frac{\pi r^2 l}{n}$ ist, und der erste um $\frac{l}{n}$, der zweite um $\frac{2l}{n}$, der dritte um $\frac{3l}{n}$ u. s. w. vom Schwerpunkte S absteht. Mittels der Formel in §. 307 folgen nun die Trägheitsmomente dieser Blätter oder Scheiben:

Fig. 558.



$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{1}{4} r^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2\right], \quad \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{1}{4} r^2 + \left(\frac{2l}{n}\right)^2\right],$$

$$\frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{1}{4} r^2 + \left(\frac{3l}{n}\right)^2\right] \text{ u. s. w.,}$$

deren Summe das Trägheitsmoment des halben Cylinders:

$$W = \frac{\pi r^2 l}{n}\left[\frac{n r^2}{4} + \left(\frac{l}{n}\right)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right]$$
$$= \pi r^2 l \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right)$$

liefert, und welches auch für den ganzen Cylinder gilt, wenn M die Masse desselben bezeichnet.

Mit Hülfe der Differenzialrechnung schreibt sich das Trägheitsmoment einer Scheibe im Abstande z von XX in Bezug auf XX:

$$\partial W = \frac{1}{4} m r^2 + m z^2 = \pi r^2 \partial z \left(\frac{r^2}{4} + z^2\right),$$

daher folgt:

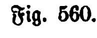
$$W = \pi r^2 \int_{-l}^{l} \left(\frac{r^2}{4} \partial z + z^2 \partial z\right) = \pi r^4 \frac{l}{2} + \frac{2 \pi r^2 l^3}{3}$$
$$= \pi r^2 . 2l \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

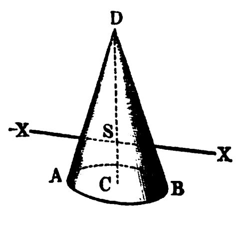
Auf ähnliche Weise bestimmt sich das Trägheitsmoment eines geraden Prismas ABD, Fig. 559, in Hinsicht auf eine Queraxe $\overline{XX}$ durch den Schwerpunkt S. Ist k der Trägheitshalbmesser der Grundfläche AB des Prismas in Hinsicht auf eine Axe $\overline{NN}$, welche durch den Schwerpunkt C der Basis geht und parallel $\overline{XX}$ läuft, und bezeichnet l die halbe Länge oder Höhe $CS = DS$ des Prismas, so hat man das gesuchte Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe $\overline{XX}$:

$$W = M\left(k^2 + \frac{1}{3} l^2\right).$$

Fig. 559.




Fig. 560.



Ebenso findet man für den geraden Kegel ABD, Fig. 560, dessen Umdrehungsaxe $\overline{XX}$ durch den Schwerpunkt desselben geht und auf der geometrischen Axe CD winkelrecht steht:

$$W = \frac{3}{20} M \left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

Bezeichnet ϱ den Halbmesser einer Scheibe im Abstande z von der Spitze des Kegels, so ist $\varrho = r\,\frac{z}{h}$, und das Trägheitsmoment einer solchen Scheibe für eine Axe durch die Kegelspitze D senkrecht zu CD folgt zu:

$$\partial W = m\,\frac{\varrho^2}{4} + m z^2 = \pi \varrho^2 \partial z \left(\frac{\varrho^2}{4} + z^2\right), \text{ oder}$$

$$\partial W = \frac{\pi}{4}\,\frac{r^4}{h^4}\,z^4 \partial z + \pi\,\frac{r^2}{h^2}\,z^4 \partial z, \text{ daher}$$

$$W_1 = \frac{\pi}{4}\,\frac{r^4}{h^4}\int_0^h z^4 \partial z + \pi\,\frac{r^2}{h^2}\int_0^h z^4 \partial z = \frac{\pi}{4}\,r^4\,\frac{h}{5} + \pi r^2 h\,\frac{h^2}{5}$$

$$= \pi r^2 h \left(\frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5}\right) = 3\,M\left(\frac{r^2}{20} + \frac{h^2}{5}\right).$$

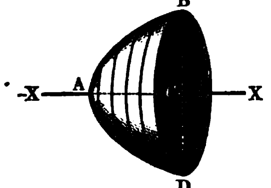
Da der Schwerpunkt S um $\frac{3}{4}\,h$ von der Spitze D abliegt, so ist endlich das Trägheitsmoment in Hinsicht auf XX:

$$W = W_1 - M\,(\tfrac{3}{4}\,h)^2 = M\,(\tfrac{3}{20}\,r^2 + \tfrac{3}{5}\,h^2 - \tfrac{9}{16}\,h^2) = \tfrac{3}{20}\,M\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right).$$

Für alle geraden Prismen und Cylinder ist die geometrische Axe eine Schwerpunktshauptaxe. Die beiden zugeordneten liegen in dem Querschnitte durch den Schwerpunkt. Hat der Querschnitt eine Symmetrieaxe, so ist diese eine Hauptaxe (z. B. Prisma mit gleichschenkelig dreiseitiger Basis). Lassen sich in dem Querschnitte durch dessen Schwerpunkt zwei zu einander Senkrechte legen, für welche die Trägheitsmomente der Querschnittsfläche, also auch des Prismas gleich groß sind, so sind jede zwei in der Querschnittsebene im Schwerpunkte zu einander Senkrechte zwei Schwerpunktshauptaxen. Das Trägheitsmoment ist dann für alle durch den Schwerpunkt gehenden zur Axe senkrechten Geraden gleich groß. Dies ist der Fall, wenn der Querschnitt ein Kreis, ein reguläres Polygon, oder auch eine Figur von solcher Regelmäßigkeit ist (Stern, Kreuz u. s. w.), daß die angegebene Bedingung gleicher Trägheitsmomente für zwei senkrechte Axen erfüllt ist.

Segmente. Das Trägheitsmoment eines Rotationsparaboloides BAD, Fig. 561, welches sich um seine Rotationsaxe AC dreht, wird ähnlich wie das einer Kugel bestimmt. Ist der Halbmesser der Basis, §. 317.

Fig. 561.



$$\overline{CB} = \overline{CD} = a,$$

die Höhe $CA = h$, und denkt man den Körper aus n Scheiben, jede von der Höhe $\frac{h}{n}$ bestehend, so hat man die Inhalte derselben:

$$= \frac{h}{n}\,\pi\,\frac{1}{n}\,a^2,\ \frac{h}{n}\,\pi\,\frac{2}{n}\,a^2,\ \frac{h}{n}\,\pi\,\frac{3}{n}\,a^2 \text{ u. s. w.,}$$

weil sich die Quadrate der Halbmesser wie die Höhen oder Abstände vom Scheitel A verhalten. Hieraus ergeben sich die Trägheitsmomente der auf einander folgenden scheibenförmigen Elemente des Körpers:

$$= \frac{h}{n}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{a^4}{n^2},\ \frac{h}{n}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{4\,a^4}{n^2},\ \frac{h}{n}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{9\,a^4}{n^2} \text{ u. s. w.,}$$

und daher folgt endlich das **Trägheitsmoment des ganzen Paraboloides**:

$$W = \frac{\pi a^4 h}{2 n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{\pi a^4 h}{2 n^3}\cdot\frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^4 h}{6}$$

$$= \frac{\pi a^2 h}{2}\cdot\frac{a^2}{3} = {}^1/_3\, M a^2,$$

weil das Volumen dieses Körpers nach der Guldini'schen Regel

$$M = {}^2/_3\, a h \,.\, 2\pi \,.\, {}^3/_8\, a = \frac{\pi a^2 h}{2} \text{ ist.}$$

Diese Formel läßt sich auch auf ein **niedriges Kugelsegment** anwenden. Ist die Höhe h eines solchen Segmentes gegen a nicht sehr klein, so hat man für das Trägheitsmoment einer Scheibe desselben:

$$W_1 = \frac{\pi h}{2 n}\cdot a^4 = \frac{\pi h}{2 n}\cdot h^2 (2 r - h)^2 = \frac{\pi h}{2 n}\cdot(4\, r^2 h^2 - 4\, r h^3 + h^4)$$

zu setzen, wobei r den Kugelhalbmesser bezeichnet.

Nimmt man nun successiv statt h die Werthe $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w. an, so erhält man das Trägheitsmoment des Kugelabschnittes:

$$W = \frac{\pi h}{2 n}\left[4\, r^2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 \cdot \frac{n^3}{3} - 4\, r \left(\frac{h}{n}\right)^3 \cdot \frac{n^4}{4} + \left(\frac{h}{n}\right)^4 \cdot \frac{n^5}{5}\right]$$

$$= \frac{\pi h^3}{30}(20\, r^2 - 15\, r h + 3\, h^2).$$

Der Inhalt oder die Masse des Kugelsegmentes ist:

$$M = \pi h^2 (r - {}^1/_3\, h),$$

daher:

$$W = \pi h^2 (r - {}^1/_3\, h)\cdot\frac{2 h}{3}\left(r - {}^5/_{12}\, h + {}^1/_{90}\cdot\frac{h^2}{r - {}^1/_3\, h}\right)$$

$$= {}^2/_3\, M h \left(r - {}^5/_{12}\, h + {}^1/_{90}\cdot\frac{h^2}{r - {}^1/_3\, h}\right).$$

Meist ist genügend genau

$$W = {}^2/_3\, M h\,(r - {}^5/_{12}\, h) = {}^1/_3\, M\,(a^2 + {}^1/_6\, h^2).$$

Diese Formel findet ihre Anwendung bei den **Pendellinsen**.

§. 318. **Parabel und Ellipse.** Für eine **Parabelfläche** ABD, Fig. 562, ist (nach §. 233), wenn man statt der Fläche F die Masse M einführt, also F mit M vertauscht, und die Sehne AB wieder mit s, sowie die Bogenhöhe CD mit h bezeichnet, das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die geometrische Axe $\overline{X}X$ dieser Fläche:

$$W_1 = \frac{Ms^2}{20}$$

und das in Hinsicht auf die Axe $\overline{Y}Y$, welche durch den Schwerpunkt S der Fläche geht und rechtwinkelig gegen $\overline{X}X$ steht:

$$W_2 = {}^{12}/_{175}\, Mh^2.$$

Hieraus folgt das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine durch S rechtwinkelig zur Parabelfläche gehende Axe:

$$W = W_1 + W_2 = M\left(\frac{s^2}{20} + {}^{12}/_{175}\, h^2\right) = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{12}/_{35}\, h^2\right].$$

Für eine solche Axe durch den Parabelscheitel D wäre hingegen, da $DS = {}^3/_5\, h$ ist (§. 117), dieses Moment:

$$W_3 = W + M\,({}^3/_5\, h)^2 = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^{15}/_7\, h^2\right]$$

und dagegen für eine Axe durch den Mittelpunkt C der Sehne:

$$W_4 = W + M\,({}^2/_5\, h)^2 = {}^1/_5\, M\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + {}^8/_7\, h^2\right].$$

Fig. 562.

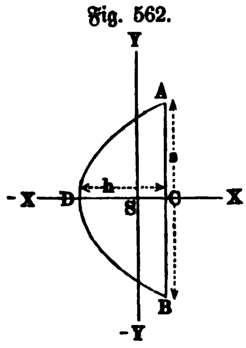
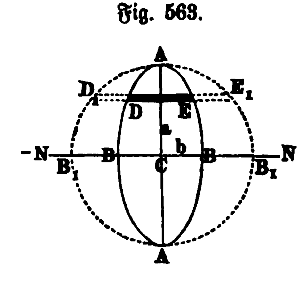


Fig. 563.



Diese Formel gilt natürlich auch für ein Prisma mit parabolischen Grundflächen, namentlich auch für Balanciers, welche aus zwei solchen Prismen bestehen und um eine durch ihre Mitte C gehende Axe schwingen.

Für eine Ellipse $ABAB$, Fig. 563, mit den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ ist (nach §. 231) das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe BB:

$$W_1 = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

und das in Hinsicht auf die Axe AA:

$$W_2 = \frac{\pi a b^3}{4} = \frac{Mb^2}{4},$$

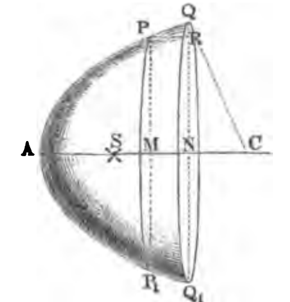
folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht auf eine Axe durch die Mitte C und rechtwinkelig zur Ebene der Figur:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{4} M (a^2 + b^2).$$

§. 319. Rotationsflächen und Rotationskörper. Mit Hülfe des höheren Calculs lassen sich die Trägheitsmomente von Rotationsflächen und Rotationskörpern (s. §. 128) durch die im Folgenden entwickelten Formeln ermitteln.

1) Dreht sich ein Gürtel oder eine Zone PQQ_1P_1, Fig. 564, vom Halbmesser $MP = y$ und der Breite $PQ = \partial s$ um seine geometrische Axe AC, so fällt, da der Inhalt desselben (nach §. 128)

Fig. 564.



$$\partial O = 2\pi y \partial s$$

ist, das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Axe AC

$$y^2 \partial O = 2\pi y^3 \partial s$$

aus, und es ist folglich das Trägheitsmoment der ganzen Rotationsfläche APP_1 in Hinsicht auf ihre Axe AC:

$$W = 2\pi \int y^3 \partial s.$$

2) Eine Scheibe PQQ_1P_1, deren Volumen $\partial V = \pi y^2 \partial x$ zu setzen ist, hat nach §. 316 das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe AC:

$$\frac{\partial V . y^2}{2} = \frac{\pi y^4 \partial x}{2},$$

folglich ist das Trägheitsmoment des ganzen Rotationskörpers APP_1:

$$W = \frac{\pi}{2} \int y^4 \partial x.$$

Wäre AP ein Kreisbogen, und folglich die von ihm durch Umdrehung erzeugte Fläche eine Kugelcalotte, so hätte man:

$$y^2 = 2rx - x^2 \text{ und } y \partial s = r \partial x,$$

folglich das Trägheitsmoment dieser Calotte:

$$W = 2\pi \int (2rx - x^2)\, r \partial x = 2\pi r \left(2r \int x \partial x - \int x^2 \partial x\right)$$
$$= 2\pi r \left(r x^2 - \frac{x^3}{3}\right),$$

oder, wenn man die Höhe $AM = x$ durch h ersetzt:

$$W = 2\pi r h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = Mh \left(r - \frac{h}{3}\right),$$

da der Inhalt oder die Masse der Calotte $M = 2\pi r h$ ist.

Für die ganze Kugeloberfläche ist $h = 2r$ und daher

$$W = {}^2/_3 Mr^2.$$

Wäre hingegen AP ein Ellipsenbogen und folglich der mittels der ebenen Fläche APM durch Umdrehung erzeugte Rotationskörper APP_1 das Segment eines Rotationsellipsoides, so hätte man

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

und daher das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Axe AC:

$$W = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b^4}{a^4}\int (2ax - x^2)^2 \partial x$$

$$= \frac{\pi b^4}{2a^4}\int (4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)\partial x$$

$$= \frac{\pi b^4}{2a^4}\left({}^4/_3 a^2x^3 - ax^4 + \frac{x^5}{5}\right);$$

z. B. für das ganze Ellipsoid, für welches $x = 2a$ ist:

$$W = {}^8/_{15}\pi b^4 a = {}^2/_5 . {}^4/_3 \pi a b^2 . b^2 = {}^2/_5 Mb^2,$$

da sich der Inhalt dieses Körpers durch $\frac{b^2}{a^2} \cdot {}^4/_3 \pi a^3 = {}^4/_3 \pi a b^2$ ausdrücken läßt (vergl. §. 125).

3) Dreht sich ferner der Gürtel $P\,Q\,Q_1\,P_1$ um eine Axe durch A, welche rechtwinkelig auf der geometrischen Axe $A\,C$ steht, so hat man (nach §. 307 und §. 316) das Trägheitsmoment desselben

$$= \partial O\,(x^2 + {}^1/_2 y^2) = 2\pi\,(x^2 + {}^1/_2 y^2)\,y\,\partial s$$

und daher das Trägheitsmoment der ganzen Calotte APP_1:

$$W = \pi\int (2x^2 + y^2)\,y\,\partial s.$$

4) Dreht sich endlich die ganze Scheibe $P\,Q\,Q_1\,P_1$ um eben diese Axe durch A, so ist deren Trägheitsmoment

$$\partial V\,(x^2 + {}^1/_4 y^2) = \pi y^2\,(x^2 + {}^1/_4 y^2)\,\partial x$$

und daher das des ganzen Körpers APP_1:

$$W = \pi\int (x^2 + {}^1/_4 y^2)\,y^2\,\partial x.$$

Für ein Rotationsparaboloid (s. §. 317) ist, wenn man dessen Höhe AM durch h und den Halbmesser MP seiner Basis durch a bezeichnet:

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{h},$$

folglich das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Ordinatenaxe durch A:

$$W = \frac{\pi a^2}{h}\int \left(x^2 + {}^1/_4\,\frac{a^2 x}{h}\right) x\,\partial x = \frac{\pi a^2}{h}\left({}^1/_4 x^4 + {}^1/_{12}\,\frac{a^2 x^3}{h}\right),$$

also, wenn man $x = h$ einführt:

$$W = \frac{1}{4}\pi a^2 h \left(h^2 + \frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{2} M \left(h^2 + \frac{1}{3}a^2\right),$$

da das Volumen dieses Körpers $= \frac{1}{2}\pi a^2 h$ ist (vergl. §. 127).

Hieraus folgt endlich wieder das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf eine Axe durch den Schwerpunkt S und rechtwinkelig zu AC:

$$W_1 = \frac{1}{2} M \left(h^2 + \frac{1}{3}a^2\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 M h^2 = \frac{1}{6} M \left(a^2 + \frac{1}{3}h^2\right).$$

Für alle Rotationskörper ist die geometrische Axe eine Schwerpunktshauptaxe, und als die zugeordneten Hauptaxen können je zwei durch den Schwerpunkt gehende unter sich und auf der ersten Axe senkrecht stehende Geraden gelten. Das Centralellipsoid ist hier ein Rotationsellipsoid; bei der Kugel ist es ebenfalls eine Kugel und je drei Senkrechte zu einander sind dabei Hauptaxen. Auch ein Cylinder von der Länge l und dem Halbmesser r kann eine Kugel zum Centralellipsoid haben, wenn die verschiedenen Trägheitsmomente (§. 313 und §. 316) einander gleich sind, d. h. wenn man

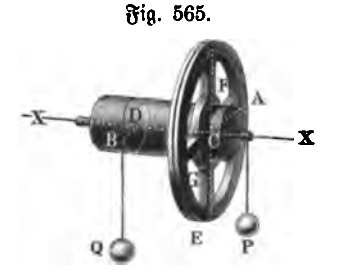
$$\frac{1}{2} M r^2 = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right), \text{ also}$$

$$l = \frac{r}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\, r \text{ hat.}$$

§. 320. Beschleunigte Umdrehung einer Radwelle. Die Theorie der Trägheitsmomente findet bei Maschinen und Instrumenten die häufigsten Anwendungen, weil an diesen meist rotirende Bewegungen um eine feste Axe vorkommen. Es werden deshalb in der Folge noch vielfache Anwendungen dieser Lehre vorkommen, und möge daher genügen, zunächst nur einige einfache Fälle derselben abzuhandeln.

Wirken an einer Radwelle $ACDB$, Fig. 565, mit den Hebelarmen $CA = a$ und $DB = b$ zwei Gewichte P und Q mittelst vollkommen biegsamer Schnüre, und sind die Zapfen hinreichend dünn, um die Zapfenreibung vernachlässigen zu können, so bleibt diese Maschine im Gleichgewichte, wenn die statischen Momente $P.\overline{CA}$ und $Q.\overline{DB}$ einander gleich sind, also $Pa = Qb$ ist. Ist hingegen das Moment vom Gewichte P größer als von Q, also $Pa > Qb$, so sinkt P und steigt Q, ist dagegen $Pa < Qb$, so steigt P und sinkt Q. Untersuchen wir nun die Bewegungsverhältnisse in einem der letzteren Fälle, setzen wir z. B. voraus, daß $Pa > Qb$ sei. Die dem Gewichte Q entsprechende und am Arme b wirkende Kraft erzeugt am Hebelarme a eine Kraft:

Fig. 565.



$\frac{Qb}{a}$, welche der dem Gewichte P entsprechenden Kraft entgegenwirkt, so daß die bewegende und in A angreifende Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ übrig bleibt. Die Masse $\frac{Q}{g}$ reducirt sich beim Versetzen aus dem Abstande b in den Abstand a auf $\frac{Qb^2}{ga^2}$, es ist daher die von der Kraft $P - \frac{Qb}{a}$ bewegte Masse:

$$M = \frac{1}{g}\left(P + \frac{Qb^2}{a^2}\right),$$

oder, wenn das Trägheitsmoment der Radwelle $W = \frac{Gk^2}{g}$ und daher die auf A reducirte träge Masse derselben $= \frac{Gk^2}{ga^2}$ ist, schärfer:

$$M = \left(P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{Gk^2}{a^2}\right) : g = (Pa^2 + Qb^2 + Gk^2) : ga^2.$$

Hieraus folgt nun die Acceleration des Gewichtes P oder Radumfanges:

$$p = \frac{\text{Bewegende Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P - \frac{Qb}{a}}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot ga^2$$
$$= \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot ga;$$

dagegen die Acceleration des steigendes Gewichtes Q oder des Wellenumfanges:

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot gb.$$

Die Spannung des Seiles von P ist:

$$S = P - \frac{Pp}{g} = P\left(1 - \frac{p}{g}\right) \text{ (s. §. 78)},$$

die des Seiles von Q:

$$S_1 = Q + \frac{Qq}{g} = Q\left(1 + \frac{q}{g}\right),$$

daher der Zapfendruck:

$$G + S + S_1 = G + P + Q - \frac{Pp}{g} + \frac{Qq}{g}$$
$$= G + P + Q - \frac{(Pa - Qb)^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Es ist folglich der Druck im Zapfen bei einer umlaufenden Radwelle kleiner als bei einer im Gleichgewichte stehenden Radwelle.

Aus den Accelerationen p und q lassen sich endlich die übrigen Bewegungsverhältnisse finden; es ist nach t Secunden die Geschwindigkeit von P:

$$v = pt,$$

von Q:

$$v_1 = qt$$

und der durchlaufene Weg von P:

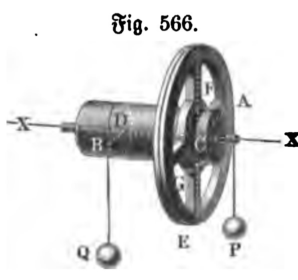
$$s = \frac{1}{2} pt^2,$$

sowie der Weg von Q:

$$s_1 = \frac{1}{2} qt^2.$$

Beispiel. Es sei das Gewicht am Rade Fig. 566, $P = 40$ Kilogramm, das an der Welle $Q = 100$ Kilogramm, $CA = a = 0,5$ Meter, $DB = b = 0,15$ Meter. Es bestehe ferner die Welle aus einem massiven Cylinder von 40 Kilogramm Gewicht und $r_1 = 0,15$ Meter Halbmesser, das eiserne Rad aber aus einer Nabe von $r_2 = 0,18$ Meter äußerem Halbmesser und 20 Kilogramm Gewicht, einem Kranze von $r_3 = 0,5$ Meter äußerem, $r_4 = 0,48$ Meter innerem Halbmesser und 35 Kilogramm Gewicht und vier Armen von zusammen 18 Kilogramm Gewicht. Man soll die Bewegungsverhältnisse dieser Maschine angeben. Die bewegende Kraft am Umfange ist:

Fig. 566.



$$P - \frac{b}{a} Q = 40 - {}^{15}/_{50} \,.\, 100 = 10 \text{ Kilogramm.}$$

Das Trägheitsmoment der zu bewegenden Welle sammt Rad berechnet sich, wenn man Zapfen und Seilmassen unberücksichtigt läßt, als die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Theile. Man hat für:

1) die Welle $W_1 = \frac{G_1}{g} \frac{b^2}{2} = 40 \frac{0.15^2}{2g} = \frac{0,45}{g}$,

2) die Nabe $W_2 = \frac{G_2}{g} \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{20}{g} \frac{0,15^2 + 0,18^2}{2} = \frac{0,55}{g}$,

3) den Kranz $W_3 = \frac{G_3}{g} \frac{r_3^2 + r_4^2}{2} = \frac{35}{g} \frac{0,50^2 + 0,48^2}{2} = \frac{8,41}{g}$,

4) die Arme $W_4 = \frac{G_4}{g} \frac{(r_4 - r_2)^2}{3} + \frac{G_4}{g} \left(\frac{r_4 + r_2}{2}\right)^2$

$$= \frac{18}{g} \frac{(0,48 - 0,18)^2}{3} + \frac{18}{g} \cdot \left(\frac{0,48 + 0,18}{2}\right)^2 = \frac{2,50}{g}.$$

Es ist daher das Trägheitsmoment der vollständigen Radwelle

$$W = \frac{G}{g} k^2 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = \frac{11,91}{g} \text{ oder } Gk^2 = 11,91.$$

Die gesammte auf den Radumfang reducirte Masse ist nun:

$$M = \left(P + \frac{Qb^2 + Gk^2}{a^2}\right) \frac{1}{g} = \left[40 + 100 \left(\frac{0,15}{0,50}\right)^2 + \frac{11,91}{0,50^2}\right] \frac{1}{g}$$
$$= (40 + 9 + 47,6) \,.\, 0,102 = 9,853.$$

Hiernach folgt die Acceleration des Gewichtes P sowie des Radumfanges:

$$p = \frac{P - \frac{b}{a} Q}{\frac{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}{a^2}} \cdot g = \frac{10}{9,853} = 1,015 \text{ Meter},$$

dagegen die von Q:

$$q = \frac{b}{a} p = \frac{15}{50} \cdot 1,015 = 0,305 \text{ Meter}.$$

Ferner ist die Seilspannung von P:

$$S = \left(1 - \frac{p}{g}\right) P = \left(1 - \frac{1,015}{9,81}\right) 40 = 0,896 \,.\, 40 = 35,8 \text{ Kilogramm}$$

und die von Q:

$$S_1 = \left(1 + \frac{q}{g}\right) Q = \left(1 + \frac{0,305}{9,81}\right) 100 = 103,1 \text{ Kilogramm}$$

und folglich der Zapfendruck (auf beide Zapfen zusammen):

$$G + S + S_1 = 113 + 35,8 + 103,1 = 251,9 \text{ Kilogramm},$$

während derselbe im Zustande der Ruhe 253 Kilogramm beträgt.

Nach 10 Secunden hat P die Geschwindigkeit $v = pt = 1,015 \,.\, 10 = 10,15$ Meter erlangt, und den Weg $s = \frac{vt}{2} = 10,15 \,.\, 5 = 50,75$ Meter zurückgelegt, während Q um $s_1 = \frac{b}{a} s = 0,3 \,.\, 50,75 = 15,23$ Meter gestiegen ist.

§. 321. Das Gewicht P, welches dem Gewichte Q die Acceleration

$$q = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot gb$$

ertheilt, kann auch durch ein anderes Gewicht P_1 ersetzt werden, ohne die Acceleration von Q zu verändern, wenn dasselbe an einem Hebelarme a_1 wirkt, für welchen ist:

$$\frac{P_1 a_1 - Qb}{P_1 a_1^2 + Qb^2 + Gk^2} = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}.$$

Die Größe $\frac{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2}{Pa - Qb}$ durch c bezeichnet, erhält man:

$$a_1^2 - c a_1 = - \frac{Qb(b + c) + Gk^2}{P_1},$$

und den in Frage stehenden Hebelarm:

$$a_1 = \frac{1}{2} c \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{Qb(b + c) + Gk^2}{P_1}}.$$

Auch läßt sich mit Hülfe der Differenzialrechnung finden, daß Q vom Gewichte P dann am stärksten accelerirt wird, wenn der Hebelarm des letzten der Gleichung $Pa^2 - 2\,Qab = Qb^2 + Gk^2$ entspricht, also

$$a = \frac{bQ}{P} + \sqrt{\left(\frac{bQ}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gk^2}{P}}.$$

ist *).

Die im Vorstehenden gefundenen Formeln nehmen eine complicirtere Gestalt an, wenn auf die Reibung der Zapfen und Steifigkeit der Seile Rücksicht genommen wird. Bezeichnen wir den Inbegriff beider Widerstände, reducirt auf den Umfang der Zapfen, deren Halbmesser $= r$ sein möge, durch F, so ist statt der bewegenden Kraft $P - \frac{b}{a}Q$, der Werth $P - \frac{Qb + Fr}{a}$ zu substituiren, weshalb z. B. die Beschleunigung von Q:

$$q = \frac{(Pa - Fr)\,b - Qb^2}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot g$$

und der der stärksten Acceleration von Q entsprechende Arm

$$a = \frac{Qb + Fr}{P} + \sqrt{\left(\frac{Qb + Fr}{P}\right)^2 + \frac{Qb^2 + Gk^2}{P}}$$

ausfällt.

Beispiele. 1) Wenn die Gewichte $P = 30$ Kilogramm, $Q = 100$ Kilogramm an den Hebelarmen $a = 0{,}5$ Meter und $b = 0{,}1$ Meter einer Radwelle wirken, und es ist für diese Maschine $Gk^2 = 6$; so ist die Beschleunigung des steigenden Gewichtes Q:

$$q = \frac{30 \,.\, 0{,}5 \,.\, 0{,}1 - 100 \,.\, 0{,}1^2}{30 \,.\, 0{,}5^2 + 100 \,.\, 0{,}1^2 + 6} 9{,}81 = \frac{0{,}5}{7{,}5 + 1 + 6} 9{,}81 = 0{,}035 \,.\, 9{,}81 = 0{,}34 \text{ Meter}.$$

Soll aber ein Gewicht $P_1 = 45$ Kilogramm dieselbe Beschleunigung von Q hervorbringen, so ist der Hebelarm von P_1

$$a_1 = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{100 \,.\, 0{,}1\,(0{,}1 + c) + 6}{45}},$$

oder da

$$c = \frac{30 \,.\, 0{,}5^2 + 100 \,.\, 0{,}1^2 + 6}{30 \,.\, 0{,}5 - 100 \,.\, 0{,}1} = 2{,}9 \text{ Meter ist,}$$

$$a_1 = 1{,}45 \pm \sqrt{2{,}10 - \frac{36}{45}} = 1{,}45 \pm \sqrt{1{,}3} = 2{,}59 \text{ oder } 0{,}31 \text{ Meter}.$$

---

*) Dem Maximum von q entspricht bekanntlich (s. analyt. Hülfslehren §. 13) die Gleichung $\frac{\partial q}{\partial a} = 0$. Bildet man aus $q = \frac{Pa - Qb}{Pa^2 + Qb^2 + Gk^2} \cdot gb$ nach der Formel $\partial \frac{u}{v} = \frac{v \partial u - u \partial v}{v^2}$ (s. analyt. Hülfsl. §. 8. V.) den Ausdruck $\frac{\partial q}{\partial a}$, so folgt

$$\frac{\partial q}{\partial a} = \frac{(Pa^2 + Qb^2 + Gk^2)\,P - (Pa - Qb)\,2Pa}{(Pa^2 + Qb^2 + Gk^2)^2}\, gb.$$

Dieser Ausdruck wird mit dem Zähler zu Null, also wenn

$$Pa^2 + Qb^2 + Gk^2 = 2Pa^2 - 2Qab$$

oder wenn

$$Pa^2 - 2Qab = Qb^2 + Gk^2 \text{ ist.}$$

2) Die Beschleunigung von Q fällt am größten aus, wenn der Hebelarm der Kraft oder der Halbmesser des Rades

$$a = \frac{0,1 \,.\, 100}{30} + \sqrt{\left(\frac{0,1 \,.\, 100}{30}\right)^2 + \frac{100 \,.\, (0,1)^2 + 6}{30}} = 0,333 + \sqrt{0,3444}$$

$= 0,92$ Meter beträgt.

Es ist diese Maximalbeschleunigung:

$$q = \frac{30 \,.\, 0,92 \,.\, 0,1 - 100 \,.\, 0,1^2}{30 \,.\, 0,92^2 + 100 \,.\, 0,1^2 + 6}\, 9,81 = \frac{1,76}{32,39}\, 9,81 = 0,54 \text{ Meter}.$$

3) Ist das Moment der Reibung sammt Seilsteifigkeit $Fr = 2$, so hat man statt Qb, $Qb + Fr = 100 \,.\, 0,1 + 2, = 12$ zu setzen, weshalb folgt:

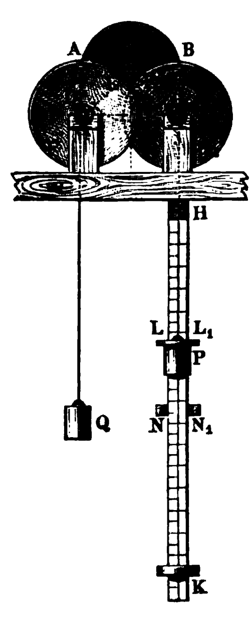
$$a = \frac{12}{30} + \sqrt{\left(\frac{12}{30}\right)^2 + \frac{7}{30}} = 0,40 + 0,63 = 1,03 \text{ Meter},$$

und die entsprechende Maximalbeschleunigung:

$$q = \frac{30 \,.\, 1,03 \,.\, 0,1 - 2 \,.\, 0,1 - 100 \,.\, 0,1^2}{30 \,.\, 1,03^2 + 100 \,.\, 0,1^2 + 6}\, 9,81 = \frac{1,89}{38,8}\, 9,81 = 0,48 \text{ Meter}.$$

Fallmaschine. Die §. 320 gefundenen Formeln für die Radwelle gelten auch für die einfache feste Rolle, denn setzt man $b = a$, so geht die Radwelle in eine Rolle oder Welle über. Behält man die übrige Bezeichnung des angeführten Paragraphen bei, so hat man für die Beschleunigung, mit welcher P sinkt und Q steigt: §. 322.

Fig. 567.



$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2}{(P + Q)\, a^2 + Gk^2} \cdot g,$$

oder, mit Berücksichtigung der Reibung:

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - Far}{(P + Q)\, a^2 + Gk^2} \cdot g.$$

Um die Zapfenreibung herabzuziehen, legt man die Zapfen C der Rolle AB, Fig. 567, auf Frictionsräder DEF und $D_1E_1F_1$. Sind nun die Trägheitsmomente dieser Räder $\frac{G_1 k_1^2}{g}$ und die Halbmesser derselben,

$$DE = D_1E_1 = a_1,$$

so hat man, wenn F wieder die auf den Umfang des Zapfens C reducirten Reibungen bezeichnet, zu setzen:

$$p = q = \frac{(P - Q)\, a^2 - Far}{(P + Q)\, a^2 + Gk^2 + G_1 \frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}} \cdot g,$$

weil die auf den Umfang der Frictionsräder oder der Radzapfen reducirte träge Masse die-

ser Räder $\frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2}$ beträgt. Durch Umkehrung erhält man die Beschleunigung der Schwere:

$$g = \frac{(P + Q)\, a^2 + G k^2 + G_1 \frac{k_1^2 r^2}{a_1^2}}{(P - Q)\, a^2 - F a r} \cdot p.$$

Bei einer kleinen Differenz $P - Q$ beider Gewichte fällt die Beschleunigung p klein aus, es geht daher die Bewegung langsam vor sich und es ist der Widerstand, welchen die Luft den Gewichten entgegensetzt, unbedeutend, weshalb sich mit Hülfe von Versuchen über das Sinken von Gewichten an einer solchen Vorrichtung die Beschleunigung der Schwere mit ziemlicher Sicherheit ermitteln läßt, was bei einem frei fallenden Körper geradezu unmöglich ist. Versuche der Art hat zuerst der Engländer Atwood (s. Atwood's Treatise on Rectilinear and Rotary Motion) angestellt, weshalb der Apparat unter dem Namen der Atwood'schen Fallmaschine bekannt ist. Zur Bestimmung der Fallräume dient eine Scala HK, an der das Gewicht P niedersinkt. Aus dem Fallraume s und der entsprechenden Zeit t folgt allerdings schon

$$p = \frac{2 \,.\, s}{t^2};$$

hebt man aber die bewegende Kraft während des Fallens auf, indem man ein ihr gleiches und einen hohlen Ring bildendes Gewicht $L L_1$ von einem festen engeren Ringe $N N_1$ auffangen läßt, so wird der übrige Theil s_1 des Fallraumes gleichförmig durchlaufen und es ergiebt sich nun mit Hülfe der an einer guten Uhr beobachteten Zeit t_1 die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s_1}{t_1},$$

sowie die Acceleration:

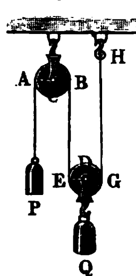
$$p = \frac{v}{t} = \frac{s_1}{t t_1}.$$

Macht man endlich $t_1 = t = 1$, so giebt der Versuch unmittelbar $p = s_1$. Setzt man den so gefundenen Werth von p in die obige Formel, so bestimmt sich dadurch die Beschleunigung g der Schwere.

§. 323. **Beschleunigte Bewegung der Rollenzüge.** Die Accelerationen der Gewichte P und Q, welche an einer Verbindung aus einer festen Rolle AB und einer losen Rolle EG, Fig. 568, hängen, ergeben sich auf folgende Weise. Es seien die Gewichte der Rollen AB und $EG = G$ und G_1, die Trägheitsmomente derselben $\frac{G k^2}{g}$ und $\frac{G_1 k_1^2}{g}$ und die Halbmesser

$CA = a$ und $DE = a_1$, also die auf die Umfänge reducirten Massen $M = \frac{G}{g} \cdot \frac{k^2}{a^2}$ und $M_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{k_1^2}{a_1^2}$. Sinkt das Gewicht P um einen gewissen Weg s, so steigt $Q + G_1$ auf $\frac{1}{2}s$ (§. 168), es wird daher die Arbeit $Ps - (Q + G_1)\frac{s}{2}$ verrichtet; hat bei diesem Sinken das Gewicht P die Geschwindigkeit v angenommen, so ist $Q + G_1$ in die Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ versetzt worden, und es hat die Rolle AB die Umfangsgeschwindigkeit v und die Rolle EG, da bei der rollenden Bewegung progressive Bewegung und drehende einander gleich sind, die Umfangsgeschwindigkeit $\frac{v}{2}$ erlangt.

Fig. 568.



Die Summe der diesen Massen und Geschwindigkeiten entsprechenden lebendigen Kräfte ist:

$$\frac{P}{g} \cdot v^2 + \frac{Q + G_1}{g} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{Gk^2}{ga^2} \cdot v^2 + \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} \cdot \left(\frac{v}{2}\right)^2,$$

und setzt man nun ihre Hälfte der aufgewendeten Arbeit gleich, so bekommt man die Gleichung:

$$\left(P - \frac{Q + G_1}{2}\right) s = \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach ist die Geschwindigkeit, welche P angenommen hat, nachdem es den Raum s durchlaufen:

$$v = \sqrt{\frac{2gs\left(P - \frac{Q + G_1}{2}\right)}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}}}.$$

Für die Acceleration p ist $ps = \frac{v^2}{2}$, daher hier

$$p = \left(\frac{P - \frac{Q + G_1}{2}}{P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{Gk^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}}\right) g.$$

Die Acceleration von $Q + G_1$ ist $p_1 = \frac{p}{2}$, und ebenso groß ist auch die Rotationsbeschleunigung am Umfange von G_1.

Die Spannung des beide Rollen verbindenden Seiles BE ist

$$S = P - \left(P + \frac{Gk^2}{a^2}\right) \frac{p}{g},$$

weil die Kraft $\left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) \frac{p}{g}$ auf die Beschleunigung von P und G verwendet wird; die Spannung des befestigten Seiles GH hingegen:

$$S_1 = S - \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{p}{2g},$$

weil die Rolle EG durch die Differenz $S - S_1$ der Seilspannungen in Umdrehung gesetzt wird.

Beispiel. An der Rollenverbindung in Fig. 568 hängen die Gewichte $P = 40$ Kilogramm und $Q = 66$ Kilogramm, und es wiegt jede der massiven Rollen 6 Kilogramm; man sucht die Beschleunigung dieser Gewichte.

Die bewegende Kraft ist:

$$P - \frac{Q + G_1}{2} = 40 - \frac{66 + 6}{2} = 4 \text{ Kilogramm},$$

die Masse einer Rolle auf ihren Umfang reducirt:

$$\frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G_1 k_1^2}{g a_1^2} = \frac{G}{2g} = \frac{6}{2g} = \frac{3}{g} \text{ (§. 313)},$$

und die gesammte träge Masse auf den Umfang der Rolle AB reducirt:

$$= \left(P + \frac{Q + G_1}{4} + \frac{G k^2}{a^2} + \frac{G_1 k_1^2}{4 a_1^2}\right) : g = (40 + {}^{72}/_4 + 3 + {}^{3}/_4) : g = \frac{247}{4g},$$

daher die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes:

$$p = \frac{4}{247}\, 4g = \frac{16 \,.\, 9{,}81}{247} = 0{,}635 \text{ Meter};$$

dagegen die Acceleration des steigenden Gewichtes:

$$p_1 = \frac{p}{2} = 0{,}317 \text{ Meter}.$$

Die Spannung des Seiles BE ist:

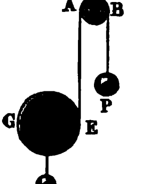
$$S = P - \left(P + \frac{G}{2}\right) \frac{p}{g} = 40 - 43\, \frac{0{,}635}{9{,}81} = 40 - 2{,}78 = 37{,}22 \text{ Kilogramm};$$

die des Seiles GH:

$$S_1 = S - \frac{G}{2} \cdot \frac{p}{2g} = 37{,}22 - 3\, \frac{0{,}635}{2 \,.\, 9{,}81} = 37{,}12 \text{ Kilogramm}.$$

§. 324. Zusammengesetzter ist die Bewegung, wenn die Rolle EG, Fig. 569, nur an einem umgeschlagenen Seile hängt. Nehmen wir an, daß P mit der Acceleration p sinkt und Q mit q steigt, so erhalten wir die Acceleration der drehenden Bewegung am Umfange der losen Rolle:

Fig. 569.



$$q_1 = p - q \text{ (§. 47)}.$$

Setzen wir nun die Spannung des Seiles $AE = S$, so erhalten wir:

$$P - S = \left(P + \frac{G k^2}{a^2}\right) \frac{p}{g},$$

ferner:

$$S - (Q + G_1) = (Q + G_1) \frac{q}{g},$$

da nach §. 304 angenommen werden kann, daß S in dem Schwerpunkte D von EG angreift, und endlich:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} \cdot \frac{q_1}{g},$$

da auch anzunehmen ist, daß der Schwerpunkt D festgehalten und die Rolle durch S in Umdrehung gesetzt wird.

Die letzten drei Formeln geben die Accelerationen:

$$p = \frac{P - S}{P + \frac{G k^2}{a^2}} g,\ q = \frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1} g \text{ und } q_1 = \frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g;$$

und alle drei in die Gleichung $q_1 = p - q$ eingesetzt, erhält man:

$$\frac{S a_1^2}{G_1 k_1^2} g = \frac{P - S}{P + \frac{G k^2}{a^2}} g - \frac{S - (Q + G_1)}{Q + G_1} g,$$

woraus nun die Seilspannung

$$S = \frac{2 P a^2 + G k^2}{\left(\frac{a_1^2}{G_1 k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)(P a^2 + G k^2) + a^2}$$

folgt. Aus dem Werthe für S ergeben sich nun auch durch Anwendung obiger Formeln die Beschleunigungen der Gewichte P und Q.

Vernachlässigen wir die Masse G der festen Rolle, und setzen wir auch Q = Null, so erhalten wir einfach:

$$S = \frac{2 P a^2 \,.\, G_1 k_1^2}{P (a_1^2 + k_1^2) a^2 + G_1 a^2 k_1^2} = \frac{2 P G_1 k_1^2}{G_1 k_1^2 + P (a_1^2 + k_1^2)}.$$

Ist das Seilende AE, statt daß es über die Rolle AB weggeht, fest, so hat man die Beschleunigung $p = 0$, daher $q_1 = -q$ und folglich die Spannung:

$$S = \frac{(Q + G_1)\, G_1 k_1^2}{(Q + G_1)\, a_1^2 + G_1 k_1^2}$$

und für Q = Null:

$$S = \frac{G_1 k_1^2}{a_1^2 + k_1^2}.$$

Ist der rollende Körper G_1 ein massiver Cylinder, so hat man:

$$\frac{G_1 k_1^2}{a_1^2} = {}^1/_2\, G_1,$$

und es ergiebt sich die Spannung für den ersten Fall, wo das Seilende AE über die Rolle AB geht und das Gewicht P trägt:

$$S = \frac{2 P G_1}{3 P + G_1},$$

und für den zweiten, wo das Seilende AE fest ist:

$$S = \frac{G_1}{3}.$$

Soll im ersten Falle das Gewicht P steigen, so hat man p negativ, also $S > P$, d. i.:

$$2\,P\,G_1\,k_1^2 > P\,G_1\,k_1^2 + P^2\,(a_1^2 + k_1^2),$$

einfach:

$$\frac{G_1}{P} > 1 + \frac{a_1^2}{k_1^2};$$

damit ferner G_1 sinke, ist nöthig, daß $S < G_1$, also

$$\frac{G_1}{P} > 1 - \frac{a_1^2}{k_1^2} \text{ sei.}$$

Beispiel. Wenn bei der Rollenverbindung des Beispieles zu §. 323, Fig. 568, das Seil GH plötzlich reißt, so wird wenigstens anfänglich das Seil BE gespannt durch die Kraft:

$$S = \frac{2\,P + \frac{G\,k^2}{a^2}}{\left(\frac{a_1^2}{G_1\,k_1^2} + \frac{1}{Q + G_1}\right)\left(P + \frac{G\,k^2}{a^2}\right) + 1} = \frac{2\,.\,40 + 3}{(1/3 + 1/72)\,(40 + 3) + 1}$$

$$= \frac{83\,.\,72}{25\,.\,43 + 72} = \frac{5976}{1147} = 5{,}210 \text{ Kilogramm.}$$

Hierbei ist die Beschleunigung des sinkenden Gewichtes P:

$$p = \left(\frac{P - S}{P + \frac{G\,k^2}{a^2}}\right) g = \left(\frac{40 - 5{,}210}{40 + 3}\right) \cdot 9{,}81 = \frac{34{,}79}{43} \cdot 9{,}81 = 7{,}94 \text{ Meter,}$$

ferner die Beschleunigung der sinkenden Rolle:

$$q = \left(\frac{Q + G_1 - S}{Q + G_1}\right) g = \left(\frac{72 - 5{,}210}{72}\right) \cdot 9{,}81 = \frac{66{,}79}{72} \cdot 9{,}81 = 9{,}1 \text{ Meter,}$$

und die Umdrehungsacceleration dieser Rolle:

$$q_1 = \frac{S\,a_1^2}{G_1\,k_1^2} \cdot g = \frac{5{,}210}{3} \cdot 9{,}81 = 17{,}04 \text{ Meter.}$$

§. 325. **Fortrollen eines Körpers auf einer horizontalen Ebene.** Wenn ein runder Körper ACD, Fig. 570, mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit c auf der horizontalen Bahn DE fortgeschoben wird, so nimmt derselbe in Folge der Reibung auf dieser Bahn eine Drehung mit allmälig wachsender Geschwindigkeit an, deren

Fig. 570.

Acceleration p durch die Formel

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G}{M \frac{k^2}{a^2}} = \frac{\varphi a^2}{k^2} g \text{ bestimmt ist,}$$

worin φ den Reibungscoefficienten, $G = Mg$ das Gewicht, also φG die Reibung, ferner Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers und a den Wälzungshalbmesser CD desselben bezeichnen. Die durch diese Acceleration in der Zeit t erzeugte Umdrehungsgeschwindigkeit im Abstande $CD = a$ von der Axe C ist

$$v = pt = \varphi \frac{a^2}{k^2} gt.$$

Dagegen erleidet die fortschreitende Bewegung des Körpers eine Retardation q, welche die Formel

$$q = \frac{\text{Widerstand}}{\text{Masse}} = \frac{\varphi G}{M} = \varphi g$$

angiebt, und wonach die Geschwindigkeit dieser Bewegung nach t Secunden

$$v_1 = c - qt = c - \varphi g t \text{ ist.}$$

Setzt man nun $v_1 = v$, also

$$\varphi \frac{a^2}{k^2} gt = c - \varphi g t,$$

so erhält man die Zeit, nach welcher die Geschwindigkeit des Drehens gleich der des Fortschreitens wird, und daher das Wälzen des Körpers eintritt:

$$t = \frac{c}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\varphi g} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g}.$$

Am Ende dieser Zeit ist die gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$c_1 = \frac{a^2}{k^2} \varphi g t = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2},$$

und der progressive Weg des Körpers:

$$s = \left(\frac{c + c_1}{2}\right) t = \frac{2a^2 + k^2}{a^2 + k^2} \frac{c}{2} \cdot \frac{k^2}{a^2 + k^2} \cdot \frac{c}{\varphi g} = \frac{(2a^2 + k^2) k^2}{(a^2 + k^2)^2} \cdot \frac{c^2}{2 \varphi g}.$$

Wäre der Coefficient der rollenden Reibung = Null, so würde der Körper AB mit der constanten Geschwindigkeit $c_1 = \frac{a^2 c}{a^2 + k^2}$ auf der horizontalen Ebene ohne Ende fortrollen; da aber dieser Bewegung noch die wälzende Reibung $\frac{fG}{a}$ entgegenwirkt (s. §. 197), so wird der Körper nach Zurücklegung eines gewissen Weges s_1 zur Ruhe kommen. Am Ende dieses

Weges ist durch die Arbeit $\frac{fGs_1}{a}$ dieser Reibung das ganze Arbeitsvermögen

$$\frac{Gc_1^2}{2g} + \frac{Gk^2}{a^2} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \frac{a^2 + k^2}{a^2} \frac{Gc_1^2}{2g}$$

der trägen Masse des Körpers aufgezehrt, und daher

$$\frac{fGs_1}{a} = \frac{a^2 + k^2}{a^2} \frac{Gc_1^2}{2g}$$

zu setzen, wonach der Weg

$$s_1 = \frac{a^2 + k^2}{fa} \cdot \frac{c_1^2}{2g} = \frac{a^3}{f(a^2 + k^2)} \frac{c^2}{2g}$$

in der Zeit

$$t_1 = \frac{2s_1}{c_1} = \frac{a^2 + k^2}{fa} \cdot \frac{c_1}{g} = \frac{ac}{fg}$$

zurückgelegt wird, bis der Körper zur Ruhe kommt.

Für eine rollende Kugel ist $\frac{k^2}{a^2} = {}^2/_5$ und für einen Cylinder $\frac{k^2}{a^2} = {}^1/_2$; s. §. 315.

Im letzteren Falle ist z. B. $t = {}^1/_3 \frac{c}{\varphi g}$, $c_1 = {}^2/_3 c$, $s = {}^5/_9 \frac{c^2}{2\varphi g}$ und $s_1 = {}^2/_3 \frac{a}{f} \frac{c^2}{2g}$.

Drittes Capitel.

Die Centrifugalkraft starrer Körper.

§. 326. **Normalkraft.** Die Kraft der Trägheit tritt nicht bloß bei Geschwindigkeitsveränderungen, sondern auch bei Richtungsveränderungen eines bewegten Körpers hervor, da ein Körper vermöge seiner Trägheit allein nur gleichförmig und in der geraden Linie fortgeht (s. §. 57). Die Beurtheilung der Wirkungen der Trägheit bei stetigen Richtungsveränderungen, namentlich bei der Bewegung der Körper in krummen Linien, und insbesondere im Kreise, ist Gegenstand dieses Capitels.

Bewegt sich ein materieller Punkt in einer krummen Linie, so hat derselbe an jeder Stelle eine von der jedesmaligen Bewegungsrichtung ablenkende Acceleration, die wir in der Phoronomie unter dem Namen Normalacceleration kennen gelernt haben. Ist der Krümmungshalbmesser an einer Stelle der Bahn des bewegten Punktes $= r$ und die Geschwindigkeit dieses Punktes $= v$, so hat man für die Normalacceleration (nach §. 44):

$$p = \frac{v^2}{r}.$$

Ist nun die Masse des Punktes $= M$, so entspricht dieser Normalacceleration eine Kraft:

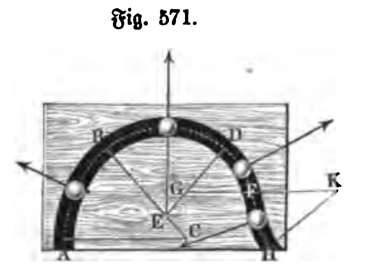
$$P = Mp = \frac{Mv^2}{r},$$

die wir als die erste Ursache, weshalb der Punkt an jeder Stelle seine Bewegungsrichtung ändert, ansehen müssen. Hat der Punkt außer der Normalkraft keine andere (Tangential-) Kraft, so ist die Geschwindigkeit v desselben unveränderlich $= c$, und daher die Normalkraft

$$P = \frac{Mc^2}{r}$$

nur abhängig von der jedesmaligen Krümmung oder von dem Krümmungshalbmesser, und zwar kleiner bei schwacher Krümmung oder großem Krümmungshalbmesser, und größer bei starker Krümmung oder kleinerem Krümmungshalbmesser. Bei doppeltem Krümmungshalbmesser ist z. B. die Normalkraft nur halb so groß als bei einfachem Krümmungshalbmesser. Wird ein materieller Punkt M durch eine horizontale Bahn, Fig. 571, gezwungen, eine krumme Linie $ABDFH$ zu durchlaufen, so behält derselbe, wenn wir die Reibung außer Acht lassen, an allen Stellen einerlei Geschwindigkeit c, und übt an jeder Stelle einen der Normalkraft gleichen Druck gegen die concave Seitenwand aus. Während der Durchlaufung des Bogens AB ist dieser Druck $= \frac{Mc^2}{CA}$, während der Durchlaufung von BD ist er $= \frac{Mc^2}{EB}$, für den Bogen DF ist er $= \frac{Mc^2}{GD}$ und für den Bogen FH fällt er $= \frac{Mc^2}{KF}$ aus, wenn CA, EB, GD und KF die Krümmungshalbmesser der Wegtheile AB, BD, DF und FH sind.

Fig. 571.



§. 327. **Centripetal- und Centrifugalkraft.** Bewegt sich ein materieller Punkt oder Körper im Kreise, so wirkt die Normalkraft radial einwärts, weshalb sie dann Centripetal- oder Annäherungskraft genannt wird, während die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seiner Trägheit entgegengesetzt, d. i. radial auswärts wirkt, den Namen Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft erhalten hat. Centripetalkraft ist die auf den Körper einwirkende und Centrifugalkraft ist die vom Körper zurückwirkende Gegenkraft. Beide sind an Größe einander gleich und in der Richtung entgegengesetzt (§. 67).

Bei der Umdrehung der Planeten um die Sonne besteht die Centripetalkraft in einer Anziehungskraft der Sonne; wird der bewegte Körper durch eine Führung oder Leitung, ähnlich wie Fig. 571 angiebt, gezwungen, eine Kreisbahn zu durchlaufen, so wirkt die Führung durch ihre Starrheit als Centripetalkraft und der Centrifugalkraft des Körpers entgegen, ist endlich der umlaufende Körper durch einen Faden oder durch eine Stange mit dem Drehungspunkte verbunden, so ist es die Elasticität der Stange, welche sich mit der Centrifugalkraft des Körpers ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch als Centripetalkraft wirkt.

Ist G das Gewicht des in Umdrehung befindlichen Körpers, also dessen Masse $M = \frac{G}{g}$, ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die Umdrehung vor sich geht, $= r$ und die Umdrehungsgeschwindigkeit $= v$, so hat man nach dem letzten Paragraphen die Centrifugalkraft:

$$P = \frac{M v^2}{r} = \frac{G v^2}{g r} = 2 \, \frac{v^2}{2 g} \, \frac{G}{r},$$

also auch:

$$P : G = 2 \, \frac{v^2}{2 g} : r,$$

d. h. die Centrifugalkraft verhält sich zum Gewichte des Körpers, wie die doppelte Geschwindigkeitshöhe zum Umdrehungshalbmesser.

Ist die Bewegung gleichförmig, welches jedesmal eintritt, wenn außer der Centripetalkraft keine andere Kraft (Tangentialkraft) auf den Körper wirkt, so läßt sich die Geschwindigkeit $v = c$ durch die Umdrehungszeit t ausdrücken, indem man setzt:

$$c = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{2 \pi r}{t},$$

und man erhält hiernach für die Centrifugalkraft:

$$P = \left(\frac{2 \pi r}{t}\right)^2 \frac{M}{r} = \frac{4 \pi^2}{t^2} M r = \frac{4 \pi^2}{g t^2} G r.$$

Da $4\pi^2 = 39,4784$ und für Metermaß $\frac{1}{g} = 0,102$ ist, so hat man für die Rechnungen bequemer:

$$P = \frac{39,4784}{t^2} \cdot Mr = 4,025 \cdot \frac{Gr}{t^2} \text{ Kilogramm.}$$

Oft giebt man die Zahl u der Umdrehungen in der Minute und ersetzt deshalb t durch $\frac{60''}{u}$, weshalb folgt:

$$P = \frac{39,4784}{3600} u^2 Mr = 0,010966\, u^2 Mr = 0,001118\, u^2\, Gr \text{ Kilogramm.}$$

Auch ist für preuß. Maß:

$$P = 1,2633 \frac{Gr}{t^2} = 0,000351\, u^2\, Gr \text{ Pfund.}$$

Da $\frac{2\pi}{t}$ die Winkelgeschwindigkeit ω ist, so läßt sich auch setzen:

$$P = \omega^2 \,.\, Mr.$$

Hiernach folgt, daß bei gleichen Umdrehungszeiten oder bei gleich viel Umdrehungen in einer gewissen Zeit, und also auch bei gleichen Winkelgeschwindigkeiten, die Centrifugalkraft wie das Product aus Masse und Drehungshalbmesser wächst, und daß sie unter übrigens gleichen Umständen den Quadraten der Umdrehungszeiten umgekehrt, oder den Quadraten der Umlaufszahlen und also auch den Quadraten der Winkelgeschwindigkeiten direct proportional ist.

Beispiele. 1) Wenn ein Körper von 20 Kilogramm Gewicht einen Kreis von 1 Meter Halbmesser in der Minute 400mal durchläuft, so ist seine Centrifugalkraft $P = 0,001118 \,.\, 400^2 \,.\, 20 \,.\, 1 = 3577,6$ Kilogramm.

Wäre dieser Körper durch ein Hanfseil, dessen Festigkeitsmodul 4,8 Kilogramm betrage, mit der Axe verbunden, so wäre unter Voraussetzung dreifacher Sicherheit der erforderliche Seilquerschnitt:

$$F = \frac{3 \,.\, 3577,6}{4,8} = 2236 \text{ Quadratmillimeter,}$$

wozu ein Durchmesser von rund 53,4 Millimeter gehört.

2) Aus dem Erdhalbmesser $r = 20\frac{1}{4}$ Millionen Fuß und der Umdrehungszeit oder Tageslänge $t = 24$ St. $= 24 \,.\, 60 \,.\, 60 = 86400$ Sec. folgt die Centrifugalkraft eines Körpers unter dem Aequator der Erde:

$$P = 1,2633 \cdot \frac{20'250000\, G}{86400^2} = \frac{2558}{864^2} \cdot G = \frac{1}{290} \cdot G,$$

wäre aber die Tageslänge 17mal so klein, also $\frac{24}{17} = 1$ St. $24'\,42''$, so würde diese Kraft $17^2 = 289$mal so groß, also ungefähr dem Gewichte G des Körpers gleich sein. Unter dem Aequator wäre dann die Centrifugalkraft der Schwerkraft gleich, und Körper daselbst würden ebenso wenig niederfallen als in die Höhe steigen.

3) Bei der Umdrehung des Mondes um die Erde wird die Centrifugalkraft desselben von der Anziehungskraft der Erde aufgehoben. Ist G das Gewicht des Mondes, a seine Entfernung von der Erde und t seine Umdrehungszeit um dieselbe, so folgt die Centrifugalkraft dieses Weltkörpers

$$= 1,2633 \cdot \frac{G a}{t^2}.$$

Ist r der Erdhalbmesser und nimmt man an, daß die Schwerkraft in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt wie die $n$te Potenz dieser Entfernungen wachse, so hat man die Schwere des Mondes oder die Anziehungskraft der Erde

$$= G \left(\frac{r}{a}\right)^n,$$

und setzen wir beide Kräfte einander gleich, so erhalten wir:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n = 1,2633 \cdot \frac{a}{t^2}.$$

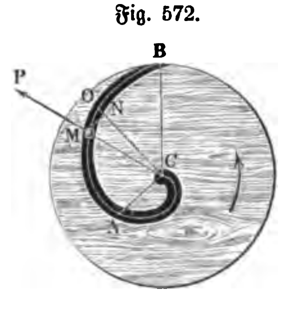
Nun ist $\frac{r}{a} = \frac{1}{60}$, $a = 1215$ Millionen Fuß und $t = 27$ Tage 7 St. 42 Min. $= 39342$ Min. $= 39342 \,.\, 60$ Sec., es folgt daher:

$$\left(\frac{1}{60}\right)^n = \frac{1,2633 \,.\, 1215}{393,4^2 \,.\, 36} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2,$$

und es ist hiernach $n = 2$, d. h. die Schwerkraft der Erde steht im umgekehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde.

§. 328. **Arbeit der Centrifugalkraft.** Ist die Bahn CAB, Fig. 572, in welcher sich ein Körper M bewegt, selbst nicht in Ruhe, sondern dreht sich dieselbe um eine Axe C, so theilt sie dem Körper eine Centrifugalkraft P mit, vermöge welcher das Arbeitsvermögen des Körpers vergrößert oder vermindert wird, je nachdem er sich bei seiner Bewegung in der Bahn von der Drehungsaxe C entfernt, oder sich derselben nähert. Ist M die Masse des Körpers, ω die constante Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich die Bahn, z. B. ein Kreisel, um ihre Axe C dreht, und bezeichnet z die veränderliche Entfernung CM des in der Bahn CAB laufenden Körpers, so hat man die veränderliche Centrifugalkraft desselben:

Fig. 572.



$$P = \omega^2 M z,$$

und es ist folglich die Arbeit dieser Kraft, während der Körper ein Wegtheilchen MO durchläuft, und der Halbmesser CM um $NO = \zeta$ wächst:

$$P \zeta = \omega^2 M z \,.\, \zeta.$$

Denken wir uns nun den Halbmesser s aus n Theilchen, jeden $= \zeta$, bestehend, setzen wir also $s = n\zeta$, und nehmen wir an, daß der Körper seinen Weg im Drehungspunkte C beginnt, so erhalten wir die Arbeit der Centrifugalkraft des Körpers beim Durchlaufen des Weges CAM, wobei die Entfernung des Körpers allmälig von 0 bis s wächst, indem wir in dem letzten Ausdrucke statt s nach und nach die Werthe ζ, 2ζ, $3\zeta \ldots n\zeta$ einsetzen und die so erhaltenen Werthe addiren:

$A = \omega^2 M\zeta(\zeta + 2\zeta + 3\zeta + \cdots + n\zeta) = \omega^2 M\zeta^2(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$,

oder da $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ bei einer großen Anzahl von Gliedern $\frac{n^2}{2}$ zu setzen ist:

$$A = \omega^2 M\zeta^2 \frac{n^2}{2} = {}^1\!/_2\, \omega^2 M s^2.$$

Da die Umdrehungsgeschwindigkeit des Kreisels im Abstande $CM = s$ von der Umdrehungsaxe:

$$v = \omega s$$

ist, so läßt sich folglich einfacher

$$A = {}^1\!/_2\, M v^2 = \frac{v^2}{2g}\, G$$

setzen, wenn man noch statt der Masse M das Gewicht $G = Mg$ des Körpers einführt.

Wenn der Körper seine Bewegung nicht in C, sondern in irgend einem anderen Punkte A außerhalb der Umdrehungsaxe beginnt, dessen Entfernung von C, $CA = s_1$ und Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v_1 = \omega s_1$$

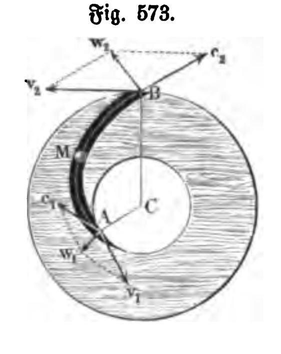
ist, so fällt natürlich die Arbeit ${}^1\!/_2\, \omega^2 M s_1^2$ beim Durchlaufen des Weges CA ganz aus, und es ist daher die entsprechende Arbeit der Centrifugalkraft, während der Körper von A nach M läuft:

$$A = {}^1\!/_2\, \omega^2 M s^2 - {}^1\!/_2\, \omega^2 M s_1^2 = {}^1\!/_2\, \omega^2 M (s^2 - s_1^2)$$
$$= {}^1\!/_2\, M (v^2 - v_1^2) = \frac{(v^2 - v_1^2)}{2g}\, G.$$

Wenn sich also ein Körper in einer starren Bahn oder Rinne bewegt, welche sich um eine feste Axe dreht, so nimmt das Arbeitsvermögen dieses Körpers um das Product aus dem Gewichte G desselben und aus der Differenz der Geschwindigkeitshöhen $\left(\frac{v^2}{2g}\right.$ und $\left.\frac{v_1^2}{2g}\right)$, welche den Umdrehungsgeschwindigkeiten der Endpunkte A und M des Weges zukommen, zu oder ab, und zwar ersteres bei einer Bewegung von innen nach außen, und letzteres bei einer Bewegung von außen nach innen.

§. 329. Ein Körper M trete bei A, Fig. 573, mit einer relativen Geschwindigkeit c_1 in die Schaufel AMB eines Kreiselrades ein, welches eine gleichförmige Rotationsgeschwindigkeit haben soll. Setzt man noch voraus, daß auf M äußere beschleunigende Kräfte nicht einwirken, so ist nach §. 301 die relative Beschleunigung von M die Resultirende zweier anderen Beschleunigungen, von denen die eine gleich der entgegengesetzten Beschleunigung der rotirenden Kreiselbewegung, also gleich der Centrifugalkraft ist, während die andere, durch $2\omega c$ ausgedrückte, stets auf der Schaufel normal steht. Wenn der materielle Punkt von A nach B gelangt ist, hat die relative Geschwindigkeit c_1 in diejenige c_2 sich geändert. Man findet c_2 nach dem Princip der lebendigen Kräfte, indem man den halben Gewinn an lebendiger Kraft $G\,\frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}$ gleich der Arbeit der relativen Beschleunigung setzt. Diese besteht nur in der Arbeit der Centrifugalkraft $A = G\,\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$, s. §. 328, da die andere Componente $2\omega c$ stets auf dem Wege AMB senkrecht steht, daher eine Arbeit nicht verrichtet. Man hat also:

Fig. 573.



$$A = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g}\,G = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}\,G,$$

daher:

$$c_2^2 - c_1^2 = v_2^2 - v_1^2, \text{ oder}$$
$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2,$$

folglich die relative Austrittsgeschwindigkeit selbst:

$$c_2 = \sqrt{c_1^2 + v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{c_1^2 + \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)},$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels, sowie r_1 und r_2 die Entfernungen CA und CB des Eintritts- und des Austrittspunktes (A und B) von der Drehungsaxe C bezeichnen.

Ebenso bestimmt sich die relative Austrittsgeschwindigkeit c_1, wenn der Körper bei B mit der relativen Geschwindigkeit c_2 den Kreisel erreicht und sich auf demselben von außen nach innen bewegt; es ist nämlich:

$$c_1 = \sqrt{c_2^2 - (v_2^2 - v_1^2)} = \sqrt{c_2^2 - \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Da der Körper beim Durchlaufen des Weges AMB außer seiner relativen Geschwindigkeit (c) in der Bahn auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit (v) der letzteren hat, so ist er bei A mit einer absoluten Geschwindigkeit $\overline{Aw_1} = w_1$ einzuführen, welche sowohl der Größe als auch der Richtung nach

durch die Diagonale des aus c_1 und v_1 construirten Parallelogramms bestimmt wird, und es ergiebt sich ebenso die absolute Austrittsgeschwindigkeit $\overline{Bw_2} = w_2$ des Körpers bei B durch die Diagonale des aus der relativen Geschwindigkeit c_2 und aus v_2 construirten Parallelogramms $Bc_2w_2v_2$.

Das Arbeitsquantum, welches der Körper bei Durchlaufung des Kreisels in der Bahn AMB gewonnen oder verloren und folglich der Kreisel verloren oder gewonnen hat, ist

$$A = \pm \left(\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g}\right) G.$$

Sollte der Körper beim Durchlaufen des Kreisels in der Richtung AMB sein ganzes Arbeitsvermögen $\frac{w_1^2}{2g} G$ dem Kreisel mittheilen, so müßte die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w_2 =$ Null, und deshalb nicht allein $c_2 = v_2$, sondern auch die Richtung von c_2 der von v_2 genau entgegengesetzt sein, d. h. es müßte die Bahn bei B tangential am Umfange des Kreisels auslaufen.

Beispiel. Wenn der in Fig. 573 abgebildete Kreisel den inneren Halbmesser $CA = r_1 = 0,4$ Meter und den äußeren Halbmesser $CB = r_2 = 0,6$ Meter hat, und sich pr. Minute 100 mal umdreht, so ist seine Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\pi u}{30} = 3,1416 \cdot \frac{10}{3} = 10,472 \text{ Meter},$$

und folglich seine innere Umfangsgeschwindigkeit:

$v_1 = \omega r_1 = 0,4 \,.\, 10,472 = 4,19$ Meter und seine äußere:

$v_2 = \omega r_2 = 0,6 \,.\, 10,472 = 6,28$ Meter.

Läßt man nun in denselben bei A einen Körper mit $w_1 = 10$ Meter so eintreten, daß der Winkel $w_1 A v_1$, welchen seine absolute Bewegung mit der Umdrehungsrichtung einschließt, $\alpha = 30$ Grad ist, so hat man für die relative Geschwindigkeit c_1, mit welcher der Körper die Bewegung im Kreisel beginnt:

$$c_1^2 = v_1^2 + w_1^2 - 2 v_1 w_1 \cos.\alpha = 17,56 + 100 - 72,57 = 44,99,$$

und daher:

$$c_1 = 6,71 \text{ Meter}.$$

Ferner ist für den Winkel $v_1 A c_1 = \beta$, unter welchem sich die Bahn bei A an den inneren Kreiselumfang anschließen muß, damit der Körper ohne Stöße in dieselbe einlaufe:

$$\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{w_1}{c_1}, \text{ also:}$$

$$\sin.\beta = \frac{10 \sin.30^0}{6,71},$$

wonach $\beta = 48^0\ 12'$ folgt.

Für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2 ist

$$c_2^2 = c_1^2 + v_2^2 - v_1^2 = 44,99 + 39,44 - 17,56 = 66,87,$$

folglich:

$$c_2 = 8,18 \text{ Meter};$$

dagegen für die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2, wenn der Canal oder die Rinne AMB den äußeren Umfang unter einem Winkel δ von 20 Grad schneidet, also $v_2 B c_2 = 160^0$ ist:

$$w_2^2 = c_2^2 + v_2^2 - 2 c_2 v_2 \cos. \delta = 66{,}87 + 39{,}44 - 96{,}58 = 9{,}73,$$

folglich:

$$w_2 = 3{,}12 \text{ Meter}.$$

Endlich ergiebt sich aus den Geschwindigkeitshöhen:

$$\frac{w_1^2}{2g} = 0{,}051 \ . \ 100 = 5{,}1 \text{ und } \frac{w_2^2}{2g} = 0{,}051 \ . \ 9{,}73 = 0{,}49 \text{ Meter}$$

das Arbeitsquantum, welches der Körper vom Gewichte G beim Durchlaufen des Kreisels diesem mittheilt:

$$A = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} G = (5{,}1 - 0{,}49)\ G = 4{,}61\ G,$$

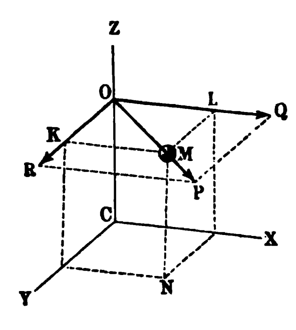
z. B. wenn dieser Körper das Gewicht $G = 10$ Kilogramm hat:

$$A = 4{,}61 \ . \ 10 = 46{,}1 \text{ Meterkilogramm}.$$

Anmerkung. Die vorstehende Theorie der Bewegung eines Körpers in einem Kreisel findet ihre Anwendung bei den Turbinen oder Kreiselrädern.

§. 330. **Centrifugalkräfte ausgedehnter Massen.** Auf einen Inbegriff von Massen oder auf eine Masse von endlicher Ausdehnung ist die oben gefundene Formel für die Centrifugalkraft nicht unmittelbar anwendbar, weil man im Voraus nicht weiß, welcher Drehungshalbmesser r in die Rechnung einzuführen ist. Um diesen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Es sei in Fig. 574, CZ die Umdrehungsaxe, und CX und CY seien zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen; es sei ferner M ein Massentheil, und $MK = x$, $ML = y$ und $MN = z$ seien dessen Abstände von den Coordinatenebenen YZ, ZX und XY. Da die Centrifugalkraft P radial wirkt, so läßt sich ihr Angriffspunkt nach dem Durchschnittspunkte O mit der Drehungsaxe verlegen. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Axenrichtungen CX und CY, so erhalten wir die Seitenkräfte $\overline{OQ} = Q$ und $\overline{OR} = R$, für welche gilt:

Fig. 574.



$$OQ : OP = OL : OM \text{ und } OR : OP = OK : OM,$$

weshalb nun

$$Q = \frac{x}{r} P \text{ und } R = \frac{y}{r} P$$

folgt, wobei r die Entfernung OM des Massentheilchens von der Umdrehungsaxe bezeichnet. In gleicher Weise mit allen Massentheilchen verfahren, erhalten wir zwei Systeme von Parallelkräften, eines in der Ebene XZ und das andere in der Ebene YZ, jedes aber auf die Axe CZ winkelrecht wirkend. Bedienen wir uns zur Unterscheidung der Inderzahlen 1, 2, 3 u. s. w.,

ſetzen wir alſo die Maſſentheile M_1, M_2, M_3, und ihre Abſtände x_1, x_2, x_3 u. ſ. w., ſo bekommen wir hiernach die Mittelkraft des einen Syſtems Fig. 575:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots = \frac{P_1 x_1}{r_1} + \frac{P_2 x_2}{r_2} + \frac{P_3 x_3}{r_3} + \cdots$$
$$= \omega^2 \,.\, (M_1 x_1 + M_2 x_2 \cdots)$$

und die des anderen:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 \,.\, (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots).$$

Fig. 575.

Setzen wir endlich die Abſtände CO_1, CO_2 u. ſ. w. der Maſſentheile von der Ebene $XY = z_1$, z_2 u. ſ. w., ſo erhalten wir für die Angriffspunkte U und V dieſer Mittelkräfte die Abſtände $CU = u$ und $CV = v$ durch die Gleichungen:

$$(Q_1 + Q_2 + \cdots)\, u = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots$$

und $(R_1 + R_2 + \cdots)\, v = R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots$, weshalb folgt:

$$u = \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots} = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

und

$$v = \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots} = \frac{M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots}{M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots}.$$

Es werden alſo hiernach im Allgemeinen die Centrifugalkräfte eines Maſſenſyſtems oder eines ausgedehnten Körpers auf zwei Kräfte zurückgeführt, die ſich, ſo lange u und v ungleich ſind, nicht zu einer einzigen vereinigen laſſen.

Beiſpiel. Sind die Maſſen eines Syſtems:
$M_1 = 10$ Kilogrm., $M_2 = 15$ Kilogrm., $M_3 = 18$ Kilogrm., $M_4 = 12$ Kilogrm. und ihre Abſtände:

$x_1 = 0$ Meter,	$x_2 = 4$ Meter,	$x_3 = 2$ Meter,	$x_4 = 6$ Meter,
$y_1 = 3$ „	$y_2 = 1$ „	$y_3 = 5$ „	$y_4 = 3$ „
$z_1 = 2$ „	$z_2 = 3$ „	$z_3 = 3$ „	$z_4 = 0$ „

ſo hat man folgende mittleren Centrifugalkräfte:

$$Q = \omega^2 . (10 . 0 + 15 . 4 + 18 . 2 + 12 . 6) = 168 . \omega^2 \text{ und}$$
$$R = \omega^2 . (10 . 3 + 15 . 1 + 18 . 5 + 12 . 3) = 171 . \omega^2,$$

und hiernach die Abſtände ihrer Angriffspunkte von dem Anfangspunkte C:

$$u = \frac{10.0.2 + 15.4.3 + 18.2.3 + 12.6.0}{10.0 + 15.4 + 18.2 + 12.6} = \frac{288}{168} = \frac{12}{7} = 1{,}714 \text{ Meter}$$

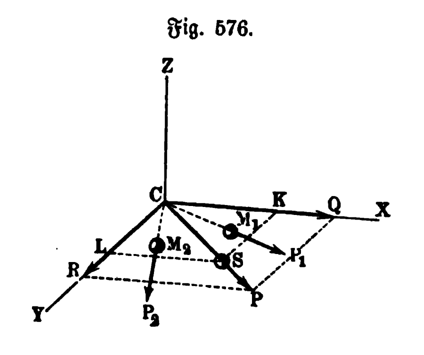
und

$$v = \frac{10.3.2 + 15.1.3 + 18.5.3 + 12.3.0}{10.3 + 15.1 + 18.5 + 12.3} = \frac{375}{171} = \frac{125}{57} = 2{,}193 \text{ Meter.}$$

Die Verschiedenheit dieser Werthe von u und v zeigt an, daß die Centrifugalkräfte durch eine einzige Kraft nicht ersetzt werden können.

§. 331. Befinden sich die Massentheile in einer Umdrehungsebene, d. i. in einer Ebene XCY, Fig. 576, welche winkelrecht auf der Umdrehungsaxe steht, wie $M_1, M_2 \ldots$, so lassen sich ihre Centrifugalkräfte in eine einzige vereinigen, weil sich ihre Richtungen in einem einzigen Punkte C der Axe CZ schneiden. Behalten wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen bei, so erhalten wir die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle:

Fig. 576.



$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 \sqrt{(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)^2 + (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)^2}.$$

Sind nun $CK = x$ und $CL = y$ die Coordinaten des Schwerpunktes vom Massensysteme $M = M_1 + M_2 + \cdots$, so hat man:

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = Mx \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = My,$$

und es folgt daher die Centrifugalkraft:

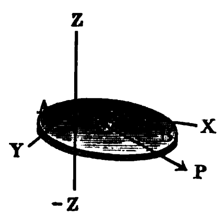
$$P = \omega^2 \sqrt{M^2 x^2 + M^2 y^2} = \omega^2 M \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 Mr,$$

wofern noch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand CS des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe CZ bezeichnet.

Für den Winkel $PCX = \alpha$, welchen diese Kraft mit der Axe CX einschließt, ist

$$tang.\, \alpha = \frac{R}{Q} = \frac{My}{Mx} = \frac{y}{x};$$

Fig. 577.



es geht daher die Richtung der Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt des Systemes, und es ist dieselbe genau so groß, als wenn die sämmtlichen Massentheile im Schwerpunkte vereinigt wären.

Für eine auf der Umdrehungsaxe $Z\overline{Z}$ rechtwinkelig stehende Scheibe AB, Fig. 577, ist hiernach die Centrifugalkraft ebenfalls $= \omega^2 Mr$,

wenn M ihre Masse und r die Entfernung CS ihres Schwerpunktes S von der Axe bezeichnet.

Liegen ebenso die Schwerpunkte der Massentheile eines Körpers in der Umdrehungsebene, oder ist diese Ebene Symmetrieebene des Körpers $ADFF_1$, Fig. 578, so lassen sich die Centrifugalkräfte der Massentheile des Körpers zu einer einzigen, im Schwerpunkte desselben angreifenden Mittelkraft vereinigen, welche dem Abstande S dieses Punktes von der Umdrehungsaxe entspricht und sich daher durch die Formel $P = \omega^2 Mr$ bestimmen läßt.

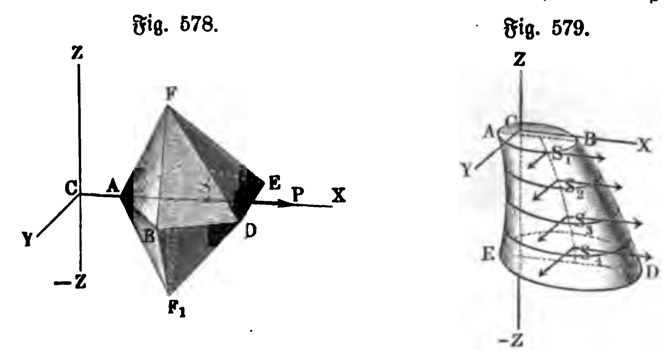


Fig. 578. Fig. 579.

Um die Centrifugalkraft eines anderen Körpers $ABDE$, Fig. 579, zu finden, zerlegen wir denselben durch Ebenen winkelrecht zur Axe ZZ in scheibenförmige Elemente, ermitteln die Schwerpunkte S_1, S_2 u. s. w. derselben, bestimmen mit Hülfe der letzteren die Centrifugalkräfte, zerlegen jede derselben nach den Axenrichtungen CX und CY in Seitenkräfte, und vereinigen die Seitenkräfte in der Ebene ZCX zu einer Mittelkraft Q, sowie die in der Ebene ZCY zu einer Mittelkraft R.

Befinden sich die Schwerpunkte sämmtlicher Scheiben in einer Parallellinie zur Umdrehungsaxe, so ist $x = x_1 = x_2$ u. s. w., sowie $y = y_1 = y_2$ u. s. w., und daher auch $r = r_1 = r_2$ u. s. w.; es folgt daher die Centrifugalkraft des ganzen Körpers:

$$P = \omega^2 (M_1 r + M_2 r + \cdots) = \omega^2 M r,$$

und der Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene XY:

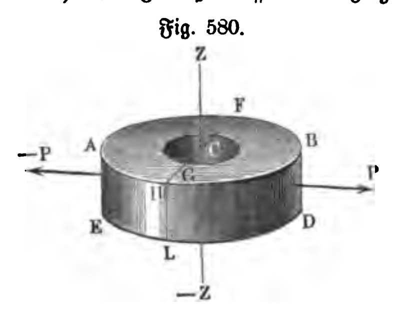
$$u = \frac{(M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots) r}{(M_1 + M_2 + \cdots) r} = \frac{M_1 z_1 + M_2 z_2 + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots} = z.$$

Diesen Gleichungen zufolge ist die Centrifugalkraft eines Körpers, welcher sich in Elemente zerlegen läßt, deren Schwerpunkte in einer mit der Umdrehungsaxe parallel laufenden Linie liegen, gleich der Centrifugalkraft der in dem Schwerpunkte dieses Körpers vereinigten Masse desselben, und es fällt auch der Angriffspunkt dieser Kraft mit diesem Schwerpunkte zusammen. Hiernach lassen sich die Centrifugalkräfte aller symmetrischen Körper (s. §. 108),

deren Symmetrieaxe der Umdrehungsaxe parallel läuft, und also auch die aller Rotationskörper, deren geometrische Axen mit der Umdrehungsaxe parallel sind, finden. Fällt die geometrische Axe eines solchen Körpers mit der Umdrehungsaxe zusammen, so ist die resultirende Centrifugalkraft sogar Null.

Beispiel. Es sind die Dimensionen, die Dichtigkeit und Festigkeit eines Mühlsteines $ABDE$, Fig. 580, gegeben, man soll die Winkelgeschwindigkeit ω finden, bei welcher das Zerreißen desselben in Folge der Centrifugalkraft eintritt. Setzen wir den Halbmesser CF des Mühlsteines $= r_1$, den Halbmesser CG seines Auges $= r_2$, die Höhe $AE = HL = l$, die Dichtigkeit $= \gamma$ und den Festigkeitsmodul $= K$, so erhalten wir die Kraft zum Zerreißen desselben in einer diametralen Ebene,

Fig. 580.



$$P = 2\,(r_1 - r_2)\,l K,$$

das Gewicht des Steines:

$$G = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)\,l\gamma,$$

und den Umdrehungshalbmesser für jede Hälfte des Steines, d. i. die Entfernung ihres Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe (§. 116):

$$r = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

Im Augenblicke des Zerreißens ist die Centrifugalkraft von einer Hälfte des Steines der Festigkeit gleich, wir bekommen daher die Bestimmungsgleichung:

$$\omega^2 \,.\, {}^1\!/_2\, \frac{G r}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\,l K,$$

d. i.:

$$\omega^2 \,.\, {}^2\!/_3\,(r_1^3 - r_2^3)\,\frac{l\gamma}{g} = 2\,(r_1 - r_2)\,l K,$$

und $2l$ zu beiden Seiten aufgehoben, folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\,(r_1 - r_2)\,K}{(r_1^3 - r_2^3)\,\gamma}} = \sqrt{\frac{3gK}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\,\gamma}}.$$

Ist $r_1 = 0{,}6$ Meter, $r_2 = 0{,}1$ Meter, $K = 0{,}5$ Kilogramm und das specifische Gewicht der Mühlsteinmasse 2,5, also das Gewicht eines Cubikmillimeters Masse desselben $\gamma = 0{,}0000025$ Kilogramm, so folgt die Winkelgeschwindigkeit beim Eintreten des Zerreißens:

$$\omega = \sqrt{\frac{3\,.\,9810\,.\,0{,}5}{(360000 + 60000 + 10000)\,0{,}0000025}} = 116{,}8 \text{ Millimeter.}$$

Ist die Zahl der Umdrehungen in einer Minute $= u$, so hat man $\omega = \frac{2\pi u}{60}$, daher umgekehrt $u = \frac{30\omega}{\pi}$, hier aber $= \frac{30\,.\,116{,}8}{\pi} = 1116$. Die gewöhnliche Umdrehungszahl eines solchen Mühlsteines ist nur 120, also nur $^1/_9$ hiervon.

Für ein Schwungrad läßt sich $r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 = 3r^2$ setzen, wenn r den mittleren Halbmesser seines Ringes bezeichnet. Daher ist hier

$$\omega = \sqrt{\frac{gK}{r^2\gamma}} \text{ oder } v = \omega r = \sqrt{\frac{gK}{\gamma}}.$$

Befinden sich die sämmtlichen Theile $M_1, M_2 \ldots$ eines Massensystems, §. 332.
Fig. 581, oder die Schwerpunkte der Elemente eines Körpers in einer durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften, und es lassen sich daher dieselben in der Regel auf eine einzige Kraft zurückführen. Sind die Entfernungen der Massentheile oder Elemente von der Umdrehungsaxe CZ:

$$O_1 M_1 = r_1,\ O_2 M_2 = r_2 \text{ u. s. w.},$$

so erhält man für ihre Centrifugalkräfte:

$$P_1 = \omega^2 M_1 r_1,\ P_2 = \omega^2 M_2 r_2 \text{ u. s. w.},$$

und daher die mittlere Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 (M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots) = \omega^2 M r,$$

wofern r den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Masse M von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Es ist also auch hier der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe als Drehungshalbmesser anzusehen. Um aber den Angriffspunkt O der resultirenden Centrifugalkraft P zu finden, setzen wir die

Fig. 581.

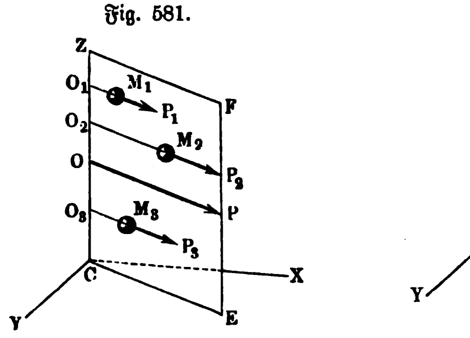
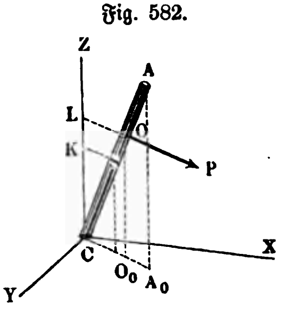


Fig. 582.



Abstände der Massentheile von der Normalebene: $CO_1 = z_1$, $CO_2 = z_2$ u. s. w. in die Formel:

$$CO = z = \frac{M_1 r_1 z_1 + M_2 r_2 z_2 + \cdots}{M_1 r_1 + M_2 r_2 + \cdots},$$

woraus man erkennt, daß die resultirende Centrifugalkraft in diesem Falle nicht durch den Schwerpunkt geht.

Mit Hülfe der Formel $P = \omega^2 M r$ lassen sich die Centrifugalkräfte von Rotationskörpern und von anderen Körpern der Geometrie finden, wenn die Axen dieser Körper mit der Umdrehungsaxe in eine Ebene fallen.

Für eine Stange AC, Fig. 582, deren Länge $AC = l$ und Neigungswinkel ACZ gegen die Umdrehungsaxe $CZ = \alpha$ ist, hat man:

$$r = \overline{KS} = \frac{1}{2}\, l \sin. \alpha$$

und folglich die Centrifugalkraft:

$$P = \omega^2 . \frac{1}{2} M l \sin. \alpha.$$

Um den Angriffspunkt O dieser Kraft zu finden, theilen wir die Stange in n Elemente, jedes von der Masse $\frac{M}{n}$. Ein solches Element im Abstande λ von C hat den Drehungshalbmesser $\lambda \, sin. \, \alpha$; daher die Centrifugalkraft $\omega^2 \cdot \frac{M}{n} \lambda \, sin. \, \alpha$. Da diese Centrifugalkraft den Abstand $\lambda \, cos. \, \alpha$ von C hat, so ist ihr Moment in Bezug auf C durch

$$\omega^2 \frac{M}{n} \lambda \, sin. \, \alpha \, . \, \lambda \, cos. \, \alpha = \omega^2 \frac{M}{n} \lambda^2 \, sin. \, \alpha \, cos. \, \alpha$$

ausgedrückt. Setzt man nun für λ nach und nach $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n} \cdots \frac{nl}{n}$, und bildet die Summe der Momente, so ergiebt sich das Moment der ganzen Stange:

$$Pu = \omega^2 \frac{M}{n} \, sin. \, \alpha \, cos. \, \alpha \, \frac{l^2}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \, sin. \, \alpha \, cos. \, \alpha,$$

daher der Hebelarm $CL = O_0 \, O$, oder:

$$u = \frac{1}{3} \omega^2 M l^2 \, sin. \, \alpha \, cos. \, \alpha : \frac{1}{2} \omega^2 M l \, sin. \, \alpha = \frac{2}{3} l \, cos. \, \alpha,$$

und die Entfernung des Angriffspunktes O von dem in der Axe liegenden Stangenende C:

$$CO = \frac{2}{3} l.$$

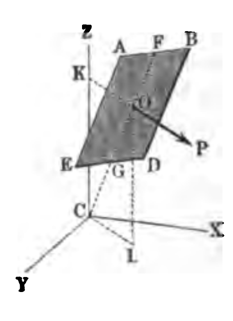
Reicht die Stange AB, Fig. 583, nicht bis zur Axe, so hat man:

$$P = \frac{1}{2} \omega^2 F l_1^2 \, sin. \, \alpha - \frac{1}{2} \omega^2 F l_2^2 \, sin. \, \alpha$$
$$= \frac{1}{2} \omega^2 F \, sin. \, \alpha \, (l_1^2 - l_2^2),$$

und das Moment:

Fig. 583.

Fig. 584.



$$Pu = \frac{1}{3}\omega^2 F \sin.\alpha \cos.\alpha\,(l_1^3 - l_2^3)\,^*),$$

weil die Masse von CA (= Querschnitt mal Länge) $= Fl_1$ und die Masse von $CB = Fl_2$ ist. Es folgt daher die Entfernung des Angriffspunktes O vom Durchschnitte C mit der Axe, wenn $l_0 = \frac{l_1 + l_2}{2}$ die Entfernung CS des Schwerpunktes und $l = l_1 - l_2$ die Länge der Stange bezeichnen,

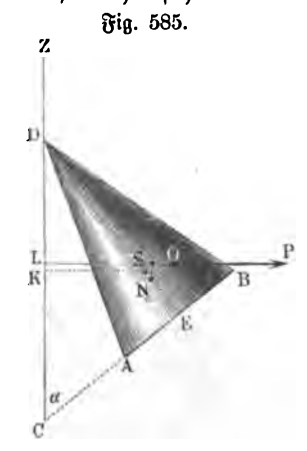
$$CO = \frac{2}{3}\,\frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{4}{6}\,\frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{l_1 + l_2} = \frac{3\,(l_1 + l_2)^2 + (l_1 - l_2)^2}{6\,(l_1 + l_2)}$$
$$= l_0 + \frac{l^2}{12\,l_0}.$$

Diese Formel gilt auch für ein rectanguläres Blatt $ABDE$, Fig. 584, welches sich durch die Axenebene COZ in zwei congruente Rechtecke theilen läßt und dessen Ebene rechtwinkelig gegen diese Axenebene steht, weil die Centrifugalkraft von jedem der Elemente, welche sich durch Schnitte normal zu CZ ergeben, in der Mittellinie FG angreift. Sind also die Entfernungen CF und CG der beiden Grundlinien AB und DE von dem Axenpunkte C, l_1 und l_2, so hat man auch hier:

$$CO = \frac{2}{3}\,\frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = l_0 + \frac{l^2}{12\,l_0}.$$

Ebenso ergiebt sich die Centrifugalkraft eines geraden Kreiskegels ABD, Fig. 585, welcher sich um eine durch die Spitze D desselben gehende Axe CZ dreht, wenn man in der Formel $P = \omega^2 Mr$ statt r den Abstand KS des Schwerpunktes S dieses Körpers von CZ einsetzt. Bezeichnet h die Höhe ED des Kegels und α den Winkel BCZ, um welchen die Basis AB desselben von der Umdrehungsaxe abweicht, so hat man

Fig. 585.



$$KS = \overline{DS}\cos.DSK = \frac{3}{4}\,h\cos.\alpha$$

und daher die gesuchte Centrifugalkraft

$$P = \omega^2 M.\frac{3}{4}\,h\cos.\alpha.$$

Der Angriffspunkt O dieser Kraft ist durch die Coordinaten $DL = u$ und $LO = v$ bestimmt, für welche die höhere Analysis unter der Voraussetzung, daß

*) Mit Hülfe der Differenzialrechnung hat man das Moment:

$$Pu = \int_{l_2}^{l_1} \omega^2 F\,\partial\lambda\,.\,\lambda^2 \sin.\alpha\cos.\alpha = \omega^2 F \sin.\alpha\cos.\alpha\,\frac{l_1^3 - l_2^3}{3}.$$

die Umdrehungsaxe CZ nicht durch die Kegelmasse hindurchgeht, folgende Ausdrücke:

$$u = {}^4/_5\, h \sin.\alpha \left[1 - \left(\frac{r}{2h}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$v = {}^4/_5\, h \cos.\alpha \left[1 + \left(\frac{r \tang.\alpha}{2h}\right)^2\right]$$

findet, worin r den Halbmesser $EA = EB$ der Basis bezeichnet.

§. 333. In dem Falle, wenn die Körpertheile weder in einer Normalebene zur Umdrehungsaxe, noch in einer Ebene durch die Umdrehungsaxe enthalten sind, lassen sich die resultirenden Centrifugalkräfte $Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$ und $R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$ nicht in eine einzige Kraft verwandeln, wohl aber ist es möglich, diese Kräfte durch eine im Schwerpunkte angreifende Kraft

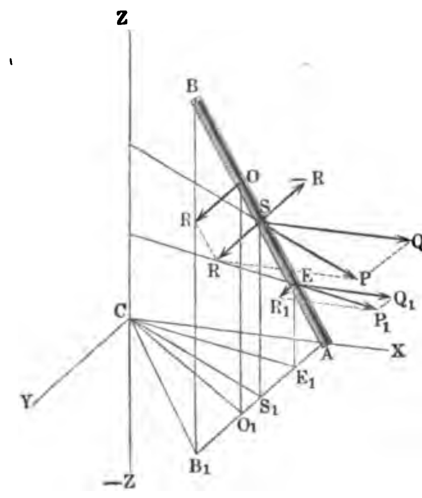
$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 M r$$

und durch ein aus Q und R zusammengesetztes Kräftepaar zu ersetzen. Bringen wir nämlich im Schwerpunkte S vier sich das Gleichgewicht haltende Kräfte $+ Q$ und $- Q$, sowie $+ R$ und $- R$ an, so geben die positiven Theile die Mittelkraft

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

wogegen die negativen Theile $- Q$ und $- R$ mit den in U und V (s. Fig. 575) angreifenden Centrifugalkräften die Kräftepaare $(Q, - Q)$ und $(R, - R)$ bilden, die sich zu einem einzigen Kräftepaare zusammensetzen lassen.

Fig. 586.



Um mit dieser Zurückführung der Centrifugalkräfte eines umlaufenden Körpers auf eine Kraft und ein Kräftepaar bekannt zu werden, ziehen wir folgenden einfachen Fall in Betracht. Die Stange AB, Fig. 586, welche sich um die Axe $Z\overline{Z}$ dreht, liege parallel zur Ebene YZ und ruhe mit dem Ende A in der Axe CX. Setzen wir die Länge AB dieser Stange $= l$, das Gewicht derselben $= G$, den Winkel ABB_1, um welchen diese Stange von der Drehaxenrichtung abweicht, $= \alpha$, und ihren Abstand CA von der Ebene YZ, welches auch ihr kürzester

Abstand von der Axe $Z\overline{Z}$ ist, $= a$. Ist nun E ein Element $\frac{M}{n}$ der Stange und $y = AE_1$ die Horizontalprojection seines Abstandes AE vom Ende A, so hat man für die Componenten der Centrifugalkraft P_1 dieses Elementes:

$$Q_1 = \omega^2 \frac{M}{n} \overline{CA} = \omega^2 \frac{M}{n} a \text{ und } R_1 = \omega^2 \frac{M}{n} \overline{AE_1} = \omega^2 \frac{M}{n} y,$$

dagegen ihre Momente in Beziehung auf die Grundebene XCY, da der Abstand dieses Elementes von der Ebene XY:

$$E_1 E = \overline{AE_1}\ cotg.\alpha = y\, cotg.\alpha \text{ ist,}$$

$$Q_1 z_1 = \omega^2 \frac{M}{n} \overline{CA}.\overline{E_1 E} = \omega^2 \frac{M}{n} a\, y\, cotg.\alpha \text{ und}$$

$$R_1 z_1 = \omega^2 \frac{M}{n} y^2\, cotg.\alpha.$$

Die sämmtlichen Seitenkräfte parallel zur Ebene XZ geben die Resultirende:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots = n\,\omega^2 \cdot \frac{M}{n} a = \omega^2 Ma$$

und das Moment derselben:

$$Qu = Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cotg.\alpha\, (y_1 + y_2 + \cdots),$$

oder, da $y_1 = \frac{l\, sin.\alpha}{n}$, $y_2 = \frac{2\, l\, sin.\alpha}{n}$, $y_3 = \frac{3\, l\, sin.\alpha}{n}$ u. s. w. zu nehmen und $cotg.\alpha\, sin.\alpha = cos.\alpha$ ist,

$$Qu = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cos.\alpha \cdot \frac{l}{n} (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \omega^2 \cdot \frac{M}{n} a\, cos.\alpha \frac{l}{n} \cdot \frac{n^2}{2}$$
$$= {}^1/_2\, \omega^2 M a\, l\, cos.\alpha.$$

Es ist also der Abstand des Angriffspunktes dieser Seitenkraft von der Grundebene XY:

$$S_1 S = u = \frac{{}^1/_2\, \omega^2 M a\, l\, cos.\alpha}{\omega^2 M a} = {}^1/_2\, l\, cos.\alpha,$$

d. h. es fällt dieser Punkt mit dem Schwerpunkte der Stange zusammen. Die Seitenkräfte, welche parallel zu YZ wirken, geben die Resultirende:

$$R = R_1 + R_2 + \cdots = \omega^2 \frac{M}{n} (y_1 + y_2 + \cdots)$$

$$= \omega^2 \frac{M}{n} \frac{l\, sin.\alpha}{n} \cdot \frac{n^2}{2} = {}^1/_2\, \omega^2 M l\, sin.\alpha \text{ mit dem Momente}$$

$$Rv = \omega^2 \frac{M}{n} cotg.\alpha\, (y_1^2 + y_2^2 + \cdots)$$

$$= \omega^2 \frac{M}{n} cotg.\, \alpha \cdot \left(\frac{(l\, sin.\, \alpha)^2}{n^2} + \frac{(2\, l\, sin.\, \alpha)^2}{n^2} + \cdots\right)$$

$$= \omega^2 \frac{M}{n} \frac{l^2}{n^2} (sin.\, \alpha)^2\, cotg.\, \alpha\, (1 + 4 + 9 + \cdots + n^2)$$

$$= \omega^2 \frac{M}{n} \frac{l^2}{n^2} sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha \cdot \frac{n^3}{3}$$

$$= {}^1\!/_3\, \omega^2 M l^2 sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha.$$

Es ist hiernach der Abstand des Angriffspunktes O dieser Kraft von der Grundebene XY:

$$O_1 O = v = \frac{{}^1\!/_3\, \omega^2 M l^2 sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{{}^1\!/_2\, \omega^2 M l\, sin.\, \alpha} = {}^2\!/_3\, l\, cos.\, \alpha,$$

d. i. dieser Angriffspunkt liegt um $({}^2\!/_3 - {}^1\!/_2)\, l\, cos.\, \alpha = {}^1\!/_6\, l\, cos.\, \alpha$ senkrecht, oder überhaupt um SO = ein Sechstel der Stangenlänge AB über dem Schwerpunkt S der Stange.

Aus den Kräften $Q = \omega^2 M a$ und $R = {}^1\!/_2\, \omega^2 M l\, sin.\, \alpha$ folgt die im Schwerpunkte der Stange angreifende Endresultirende:

$$P = \sqrt{Q^2 + R^2} = \omega^2 M \sqrt{a^2 + {}^1\!/_4\, l^2 sin.\, \alpha^2},$$

und das Kräftepaar $(R, -R)$ mit dem Momente

$$R\, .\, \overline{SO} = {}^1\!/_2\, \omega^2 M l\, sin.\, \alpha\, .\, {}^1\!/_6\, l\, cos.\, \alpha$$
$$= {}^1\!/_{12}\, \omega^2 M l^2 sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha = {}^1\!/_{24}\, \omega^2 M l^2 sin.\, 2\, \alpha.$$

§. 334. **Freie Axen.** Nach dem Vorstehenden lassen sich die Centrifugalkräfte eines sich um eine Axe gleichförmig drehenden Körpers entweder zu einer Resultirenden allein, oder zu einer solchen und einem resultirenden Kräftepaare zusammensetzen. Diese Kraft und dieses Kräftepaar greifen die Drehaxe des Körpers an und rufen in den festen Unterstützungen oder Zapfenlagern derselben die zum Gleichgewichte erforderlichen Reactionen hervor. Es ist aber auch möglich, daß die Centrifugalkräfte sich gegenseitig aufheben, so daß die Axe alsdann gar keinen Druck auszuhalten hat. Dieser Fall kommt z. B. vor bei jedem sich um seine geometrische Axe drehenden Umdrehungskörper (Radwelle), und auch bei jedem um eine Symmetrieaxe rotirenden Körper, da in diesen Fällen jedem einzelnen Massentheilchen in seiner Umdrehungsebene ein gleich großes in demselben Abstande auf der entgegengesetzten Seite der Drehaxe entspricht, so daß die Centrifugalkräfte beider als gleich und entgegengesetzt sich gegenseitig aufheben. Wenn in solchem Falle keine äußeren Kräfte auf den Körper wirken würden, so müßte die Axe auch ohne Unterstützungen ihre Lage innehalten, weßwegen man dieselbe in diesem Falle eine freie Axe nennt. Aus dem Vorhergehenden ergeben sich die Bedingungen, unter welchen eine Drehaxe eine freie Axe ist. Es ist nöthig, daß nicht nur jede der Mittelkräfte Q und R aus den parallel den Axen-

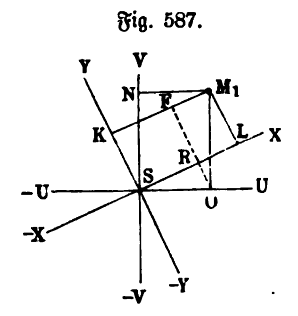
ebenen XZ und YZ wirkenden Componenten der Centrifugalkräfte, sondern auch die Momentensumme eines jeden dieser beiden Kräftesysteme gleich Null ist, also müssen hiernach, unter m irgend ein Massenelement des Körpers verstanden, die Gleichungen erfüllt sein:

$$1)\ \Sigma\, mx\ = 0; \qquad 2)\ \Sigma\, my\ = 0;$$
$$3)\ \Sigma\, mxz = 0; \qquad 4)\ \Sigma\, myz = 0.$$

Die beiden ersten Gleichungen bedingen, daß die Umdrehungsaxe, die als Z-Axe gedacht ist, durch den Schwerpunkt des Körpers gehen muß. Aus den beiden letzten Gleichungen ist §. 309 zufolge zu schließen, daß die Umdrehungsaxe eine Trägheitshauptaxe sein muß. Es folgt hieraus, daß die drei in jedem Körper vorhandenen Schwerpunktshauptaxen freie Axen desselben sind.

Freie Axen eines ebenen Massensystemes. Befinden sich die Theile einer Masse in einer Ebene, bildet z. B. die Masse eine dünne Platte oder ebene Figur, so ist die gerade Linie durch den Schwerpunkt der ganzen Masse und normal zur Ebene derselben eine freie Axe der Masse, denn es ist in diesem Falle die Masse ohne Drehungshalbmesser, und daher die einzig mögliche Centrifugalkraft = Null. Um noch die beiden anderen freien Axen zu finden, schlagen wir folgenden Weg ein. Sei S, Fig. 587, der Schwerpunkt einer Masse, und seien $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ zwei in der Massenebene befindliche Coordinatenaxen, so bestimmen wir die Massentheile durch Coordinaten parallel zu diesen Axen, z. B. das Massentheilchen M_1 durch die Coordinaten $M_1N = u_1$ und $M_1O = v_1$. Sei dagegen $X\overline{X}$ eine freie Axe, $Y\overline{Y}$ eine Axe winkelrecht gegen dieselbe, ferner der zu bestimmende Winkel USX, um welchen die freie Axe von der Coordinatenaxe SU abweicht, $= \varphi$, und setzen wir die Coordinaten der Massentheile in Hinsicht auf die Axen $X\overline{X}$ und $Y\overline{Y}$: $x_1, x_2 \cdots$ und $y_1, y_2 \cdots$, also für den Massentheil M_1: §. 335.

Fig. 587.



$$M_1K = x_1 \text{ und } M_1L = y_1.$$

Hiernach ergiebt sich sehr leicht:

$$x_1 = M_1K = SR + RL = SO\cos.\varphi + OM_1\sin.\varphi = u_1\cos.\varphi + v_1\sin.\varphi,$$
$$y_1 = M_1L = -\,OR + OF = -\,SO\sin.\varphi + OM_1\cos.\varphi$$
$$= -\,u_1\sin.\varphi + v_1\cos.\varphi;$$

und daher das Product:

$$x_1 y_1 = (u_1 \cos.\varphi + v_1 \sin.\varphi) . (- u_1 \sin.\varphi + v_1 \cos.\varphi)$$
$$= - (u_1^2 - v_1^2) \sin.\varphi \cos.\varphi + u_1 v_1 (\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2)$$

oder, da $\sin.\varphi \cos.\varphi = \frac{1}{2} \sin. 2\varphi$ und $\cos.\varphi^2 - \sin.\varphi^2 = \cos. 2\varphi$ ist,

$$x_1 y_1 = - \tfrac{1}{2} (u_1^2 - v_1^2) \sin. 2\varphi + u_1 v_1 \cos. 2\varphi.$$

Es ist daher das Moment des Massentheiles M_1:

$$M_1 x_1 y_1 = - \frac{M_1}{2} (u_1^2 - v_1^2) \sin. 2\varphi + M_1 u_1 v_1 \cos. 2\varphi,$$

ebenso das Moment des Massentheiles M_2:

$$M_2 x_2 y_2 = - \frac{M_2}{2} (u_2^2 - v_2^2) \sin. 2\varphi + M_2 u_2 v_2 \cos. 2\varphi$$

u. s. w., und die Summe der Momente aller Massentheile, oder das Moment der ganzen Masse:

$$M_1 x_1 y_1 + M_2 x_2 y_2 + \cdots = - \tfrac{1}{2} \sin. 2\varphi [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] + \cos. 2\varphi (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots).$$

Damit $X\overline{X}$ eine freie Axe werde, muß aber nach dem vorigen Paragraphen dieses Moment = Null sein; wir müssen daher setzen

$$\tfrac{1}{2} \sin. 2\varphi [(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)] - \cos. 2\varphi (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots) = 0,$$

und erhalten hiernach als Bedingungsgleichung:

$$\tang. 2\varphi = \frac{\sin. 2\varphi}{\cos. 2\varphi} = \frac{2 (M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}$$
$$= \frac{\text{Doppeltes Moment der Centrifugalkraft}}{\text{Differenz der Trägheitsmomente}}.$$

Durch diese Formel ergeben sich zwei Werthe für 2φ, welche von einander um 180°, und also auch zwei Werthe von φ, welche von einander um 90° abweichen; es ist deshalb nicht allein die durch diesen Winkel φ bestimmte Axe $X\overline{X}$ eine freie Axe, sondern auch die gegen sie winkelrecht gerichtete Axe $Y\overline{Y}$.

§. 336. Von vielen Flächen und Körpern lassen sich die freien Axen ohne alle Rechnung angeben. Bei einer symmetrischen Figur ist z. B. die Symmetrieaxe eine freie Axe, das Perpendikel im Schwerpunkte die zweite und die Axe winkelrecht gegen die Ebene der Figur die dritte freie Axe. Bei einem Rotationskörper AB, Fig. 588, ist die Rotationsaxe $Z\overline{Z}$ eine freie Axe, ebenso auch jede Normale $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ . . . zu dieser Linie durch den Schwerpunkt S. Bei einer Kugel ist jeder Durchmesser eine freie Axe, bei einem geraden, von sechs Rechtecken begrenzten Parallelepipede ABD, Fig. 589, sind es die drei durch den Schwerpunkt S gehenden und auf

den Seitenflächen BD, AB und AD normal stehenden oder mit den Kanten parallel laufenden Axen $X\overline{X}$, $Y\overline{Y}$ und $Z\overline{Z}$.

Fig. 588.

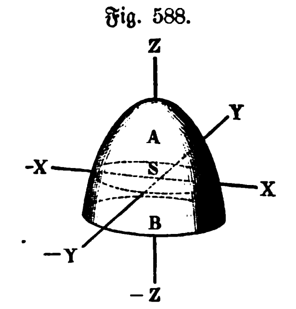
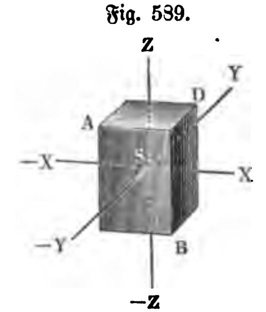
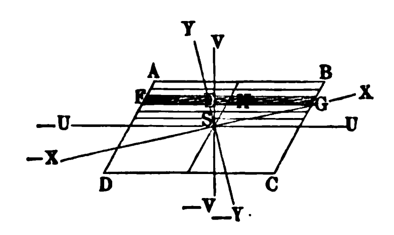


Fig. 589.



Bestimmen wir noch die freien Axen von einem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 590. Legen wir durch den Schwerpunkt S desselben die unter sich rechtwinkelig stehenden Coordinatenaxen $U\overline{U}$ und $V\overline{V}$ so, daß die eine der Seite AB des Parallelogrammes parallel läuft, und zerlegen wir das Parallelogramm durch Parallellinien in $2n$ gleiche Streifen, wie z. B. FG. Ist nun die eine Seite $AB = 2a$, die andere Seite $AD = 2b$, und der spitze Winkel ADC zwischen je zwei Seiten $= \alpha$, so erhalten wir für den um $SE = x$ von $U\overline{U}$ abstehenden Streifen FG die Länge des einen Theiles:

Fig. 590.



$$EG = KG + EK = a + x\, cotg.\, \alpha$$

sowie die des anderen Theiles:

$$EF = a - x\, cotg.\, \alpha,$$

und, da $\frac{b}{n}\, sin.\, \alpha$ die Breite beider ist, die Inhalte dieser Streifen

$$\frac{b\, sin.\, \alpha}{n}(a + x\, cotg.\, \alpha) \text{ und } \frac{b\, sin.\, \alpha}{n}(a - x\, cotg.\, \alpha);$$

auch folgen die Maße der Centrifugalkräfte von diesen Theilen in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$:

$$\frac{b\, sin.\, \alpha}{n}(a + x\, cotg.\, \alpha) \cdot {}^1/_2\, (a + x\, cotg.\, \alpha) = \frac{b\, sin.\, \alpha}{2n}(a + x\, cotg.\, \alpha)^2$$

und

$$\frac{b\, sin.\, \alpha}{2n}(a - x\, cotg.\, \alpha)^2,$$

sowie ihre Momente in Hinsicht auf die Axe $U\overline{U}$:

$$\frac{b \sin. \alpha}{2n}(a + x \cotg. \alpha)^2 x \text{ und } \frac{b \sin. \alpha}{2n}(a - x \cotg. \alpha)^2 x.$$

Da beide Kräfte in Hinsicht auf $V\overline{V}$ einander entgegengesetzt wirken, so giebt die Vereinigung ihrer Momente die Differenz:

$$\frac{b x \sin. \alpha}{2n}[(a + x \cotg. \alpha)^2 - (a - x \cotg. \alpha)^2] = \frac{2}{n} a b x^2 \cos. \alpha.$$

Setzen wir in der Formel für x nach und nach $\frac{b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{2 b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{3 b \sin. \alpha}{n}$ u. s. w. ein, und addiren wir die dadurch erhaltenen Ergebnisse, so bekommen wir das Maß für das Moment der Centrifugalkraft des halben Parallelogrammes:

$$\frac{2ab}{n}\cos.\alpha \cdot \frac{b^2 \sin. \alpha^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = 2 a b^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha \cdot \frac{n^3}{3 n^3}$$
$$= {}^2/_3\, a b^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha,$$

und also für das ganze Parallelogramm, oder:

$$M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots = {}^4/_3\, a b^3 \sin. \alpha^2 \cos. \alpha.$$

Das Trägheitsmoment in Hinsicht auf die Axe $V\overline{V}$ ist für einen Streifen FG:

$$\frac{b \sin. \alpha}{n}\left(\frac{(a + x \cotg. \alpha)^3}{3} + \frac{(a - x \cotg. \alpha)^3}{3}\right)$$
$$= \frac{2 b \sin. \alpha}{3n}(a^3 + 3 a x^2 \cotg. \alpha^2) = {}^2/_3 \frac{ab}{n} \sin. \alpha\,(a^2 + 3 x^2 \cotg. \alpha^2).$$

Setzt man nun für x successiv $\frac{b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{2 b \sin. \alpha}{n}$, $\frac{3 b \sin. \alpha}{n}$ u. s. w., und summirt man die sich ergebenden Werthe, so folgt das Trägheitsmoment der einen Hälfte:

$${}^2/_3\, a b \sin. \alpha\,(a^2 + b^2 \cos. \alpha^2),$$

und daher das des Ganzen:

$${}^4/_3\, a b \sin. \alpha\,(a^2 + b^2 \cos. \alpha^2).$$

In Hinsicht auf die Umdrehungsaxe $U\overline{U}$ ist hingegen das Trägheitsmoment des Parallelogrammes:

$$4 a b \sin. \alpha \cdot \frac{b^2 \sin. \alpha^2}{3} = {}^4/_3\, a b^3 \sin. \alpha^3 \text{ (§. 312)};$$

es ergiebt sich daher die gesuchte Differenz der Trägheitsmomente, d. i.:

$$(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots),$$
$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\, (a^2 + b^2 cos.\, \alpha^2) - \frac{4}{3}\, a\, b^3 sin.\, \alpha^3$$
$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\, [a^2 + b^2 (cos.\, \alpha^2 - sin.\, \alpha^2)]$$
$$= \frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\, (a^2 + b^2 cos.\, 2\,\alpha).$$

Endlich folgt für den Winkel $USX = \varphi$, welchen die freie Axe $X\overline{X}$ mit der Coordinatenaxe $U\overline{U}$ oder der Seite AB einschließt, nach §. 335:

$$tang.\, 2\,\varphi = \frac{2\,(M_1 u_1 v_1 + M_2 u_2 v_2 + \cdots)}{(M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2 + \cdots) - (M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 + \cdots)}$$
$$= \frac{2\,.\, \frac{4}{3}\, a\, b^3 sin.\, \alpha^2 cos.\, \alpha}{\frac{4}{3}\, a\, b\, sin.\, \alpha\, (a^2 + b^2 cos.\, 2\,\alpha)} = \frac{b^2 sin.\, 2\,\alpha}{a^2 + b^2 cos.\, 2\,\alpha}.$$

Beim Rhombus ist $a = b$, daher:

$$tang.\, 2\,\varphi = \frac{sin.\, 2\,\alpha}{1 + cos.\, 2\,\alpha} = \frac{2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{1 + cos.\, \alpha^2 - sin.\, \alpha^2} = \frac{2\, sin.\, \alpha\, cos.\, \alpha}{2\, cos.\, \alpha^2} = tg.\, \alpha,$$

also:

$$2\,\varphi = \alpha \text{ und } \varphi = \frac{\alpha}{2}.$$

Da dieser Winkel die Richtung der Diagonale angiebt, so folgt, daß die Diagonalen freie Axen des Rhombus sind.

Beispiel. Bei dem schiefwinkeligen Parallelogramme $ABCD$, Fig. 590, messen die Seiten $AB = 2\,a = 16$ Zoll, $BC = 2\,b = 10$ Zoll und ist der Umfangswinkel $ABC = \alpha = 60^0$, welche Richtungen haben dessen freie Axen? Es ist:

$$tang.\, 2\,\varphi = \frac{5^2\,.\, sin.\, 120^0}{8^2 + 5^2\,.\, cos.\, 120^0} = \frac{25\,.\, sin.\, 60^0}{64 - 25\, cos.\, 60^0} = \frac{25\,.\, 0{,}86603}{64 - 25\,.\, 0{,}5}$$
$$= 0{,}42040 = tang.\, 22^0 48', \text{ oder } tang.\, 202^0 48'.$$

Hiernach folgen $\varphi = 11^0 24'$ und $101^0 24'$ als Neigungswinkel der zwei ersten freien Axen gegen die Seite AB. Die dritte freie Axe steht auf der Ebene des Parallelogrammes in seinem Schwerpunkte rechtwinkelig. Diese Winkel bestimmen auch die freien Axen eines geraden Parallelepipedes mit rhomboidalen Grundflächen.

Wirkung auf die Umdrehungsaxe. Wenn sich ein materieller Punkt M, Fig. 591 (a. f. S.), ungleichförmig um eine feste Axe C dreht, so hat dieselbe nicht bloß die Centrifugalkraft, sondern auch die Kraft der Trägheit dieses Punktes auszuhalten. Während die Centrifugalkraft radial auswärts wirkt, hat natürlich die Kraft der Trägheit eine tangentiale Richtung, und zwar entweder der der Umdrehungsbewegung entgegengesetzt, oder mit derselben zusammenfallend, je nachdem die Acceleration dieser Bewegung eine positive oder eine negative (Retardation) ist. Man kann daher auch annehmen, daß die Centrifugalkraft $\overline{MN} = \overline{CN} = N$ unmittelbar in der Axe C angreife, und daß die Kraft der Trägheit $\overline{MP} = -P$ aus §. 337.

einem Kräftepaare (P, $-P$) und einer Axenkraft $\overline{CP} = -P$ bestehe, und folglich die ganze Axenkraft $\overline{CR} = R$ durch die Diagonale eines aus N und $-P$ construirten rechtwinkeligen Parallelogrammes bestimmen.

Ist r die Entfernung CM der Masse M von der Umdrehungsaxe C, sowie ω die Winkelgeschwindigkeit und $\varkappa$ die Winkelacceleration, so hat man nach §§. 327 und 305:

$$N = \omega^2 Mr$$

und

$$P = \varkappa Mr,$$

daher die gesuchte Mittelkraft:

$$R = \sqrt{N^2 + P^2} = Mr\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}$$

und für den Winkel $RCN = \varphi$, um welchen die Richtung dieser Kraft von der Richtung CM der Centrifugalkraft abweicht,

$$tang.\,\varphi = \frac{-P}{N} = -\frac{P}{N} = -\frac{\varkappa}{\omega^2}.$$

Da in Folge der Acceleration $\varkappa$, ω veränderlich ist, so fallen natürlich auch die Centrifugalkraft N und die Mittelkraft R variabel aus.

Fig. 591.

Um die Centrifugal- und Trägheitskräfte eines Systems von Massen M_1, M_2 u. s. w. zu vereinigen, zerlegt man diese Kräfte nach zwei Axenrichtungen $\overline{XX}$ und $\overline{YY}$ in Seitenkräfte, vereinigt hierauf die in einer Axenrichtung wirkenden Kräfte durch algebraische Addition und setzt endlich die hieraus resultirenden zwei Kräfte wie oben zu einer Mittelkraft zusammen. Sind x und y die Coordinaten CK und CL des materiellen Punktes M in Hinsicht auf das Axensystem $\overline{XX}$, $\overline{YY}$, so hat man die beiden Componenten der Centrifugalkraft N:

$$N_1 = \frac{x}{r} N = \omega^2 Mx \text{ und}$$

$$N_2 = \frac{y}{r} N = \omega^2 My,$$

dagegen die der Trägheit:

$$P_1 = \frac{y}{r} P = \varkappa My \text{ und}$$

$$P_2 = \frac{x}{r}\, P = \varkappa M x;$$

es folgt daher die Gesammtkraft in der Axe $\overline{XX}$:

$$Q = N_1 + P_1 = \omega^2 M x + \varkappa M y$$

und die in der Axe $\overline{YY}$:

$$R = N_2 - P_2 = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Hat man es nun mit einem sich um eine feste Axe C, Fig. 592, drehenden Systeme von materiellen Punkten oder Massen M_1, M_2 u. s. w. zu thun, deren Coordinaten in Hinsicht auf eine Coordinatenaxe $\overline{XX}$:

$$CK_1 = x_1,\ CK_2 = x_2 \text{ u. s. w.}$$

Fig. 592.

und in Hinsicht auf die andere Coordinatenaxe $\overline{YY}$:

$$CL_1 = y_1,\ CL_2 = y_2 \text{ u. s. w.}$$

sind, so fällt folglich die Gesammtkraft in der ersten Axe:

$Q = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1 + \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2 + \cdots$, d. i.:

$Q = \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)$,

und dagegen die in der anderen Axe:

$R = \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots)$ aus.

Bezeichnet man endlich die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ durch M und die Coordinaten ihres Schwerpunktes in Hinsicht auf die Axen $\overline{XX}$ und $\overline{YY}$ durch x und y, so hat man (siehe §. 331):

$$M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = M x \text{ und}$$
$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = M y;$$

daher einfacher:

$$Q = \omega^2 M x + \varkappa M y \text{ und}$$
$$R = \omega^2 M y - \varkappa M x.$$

Aus Q und R folgt nun die Mittelkraft:

$$S = \sqrt{Q^2 + R^2},$$

sowie für den Richtungswinkel $XCS = \varphi$ derselben:

$$tang.\ \varphi = \frac{R}{Q}.$$

Da Mx und My die statischen Momente des Schwerpunktes sind, so folgt, daß man bei Bestimmung des Axendruckes (S) eines in einer und derselben Umdrehungsebene befindlichen Massensystemes die ganze Masse in dem Schwerpunkte des Systemes vereinigt annehmen könne, und da die Entfernung des Schwerpunktes des Massensystemes von der Umdrehungsaxe

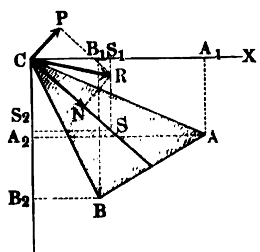
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ist, so hat man auch:

$$S = \sqrt{[(\omega^2 Mx + \varkappa My)^2 + (\omega^2 My - \varkappa Mx)^2]}$$
$$= M\sqrt{[\omega^4 (x^2 + y^2) + \varkappa^2 (x^2 + y^2)]}$$
$$= M\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}\sqrt{x^2 + y^2} = Mr\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2}.$$

Anmerkung. Für ein Dreieck ABC, Fig. 593, welches sich um seinen Eckpunkt C dreht, und dessen Eckpunkte A und B durch die Coordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) bestimmt sind, hat man nach §. 114 die Coordinaten seines Schwerpunktes S:

Fig. 593.



$$CS_1 = x = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

und

$$CS_2 = y = \frac{y_1 + y_2}{3}$$

und die Masse, wenn man dieselbe durch den Flächeninhalt mißt,

$$M = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}.$$

Auch läßt sich das Trägheitsmoment desselben in Hinsicht auf die Umdrehungsaxe C durch den Ausdruck

$$W = \frac{M}{6}\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 - x_2} + \frac{y_1^3 - y_2^3}{y_1 - y_2}\right)$$
$$= \frac{M}{6}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$$

bestimmen.

Diese Formeln finden auch ihre Anwendung auf ein gerades Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck ABC ist.

Beispiel. Ein gerades Prisma mit der dreiseitigen Grundfläche ABC soll durch ein constant wirkendes Kräftepaar so schnell um die Seitenkante C gedreht werden, daß es im Verlaufe von $t = 1{,}5$ Secunden $u = {}^5/_2$ Umdrehungen macht, und man soll nicht allein das Moment dieses Kräftepaares, sondern auch

noch die Wirkung dieser Bewegung auf die Axe C bestimmen. Es sei die Basis ABC dieses Körpers durch die Coordinaten

$$x_1 = 1{,}5,\ y_1 = 0{,}5;\ x_2 = 0{,}4,\ y_2 = 1{,}0 \text{ Meter}$$

bestimmt, ferner die Höhe oder Länge desselben $l = 0{,}2$ Meter, und seine Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikmeters $\gamma = 500$ Kilogramm. Hieraus berechnet sich zunächst der Inhalt der Basis:

$$F = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} = \frac{1{,}5 \,.\, 1{,}0 - 0{,}4 \,.\, 0{,}5}{2} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}65 \text{ Quadratmeter},$$

und daher die Masse des ganzen Körpers:

$$M = \frac{F l \gamma}{g} = 0{,}102 \,.\, 0{,}65 \,.\, 0{,}2 \,.\, 500 = 6{,}63.$$

Nun ist ferner

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 2{,}25 + 0{,}60 + 0{,}16 = 3{,}01,$$
$$y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 = 0{,}25 + 0{,}50 + 1{,}00 = 1{,}75;$$

daher folgt das Trägheitsmoment des Körpers:

$$W = (3{,}01 + 1{,}75)\,\frac{M}{6} = 4{,}76\,\frac{6{,}63}{6} = 5{,}26.$$

Da in Folge der Beständigkeit des Umdrehungskräftepaares die Umdrehungsbewegung eine gleichförmig beschleunigte ist, so folgt die Winkelgeschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit $t = 1{,}5$ Secunden (s. §. 10):

$$\omega = \frac{2s}{t} = \frac{2 \,.\, 2\pi u}{1{,}5} = \frac{2 \,.\, 2\pi \,.\, 5}{2 \,.\, 1{,}5} = 20{,}944 \text{ Meter},$$

und es ist daher die erforderliche mechanische Arbeit:

$$A = \tfrac{1}{2}\,\omega^2 W = \tfrac{1}{2}\,(20{,}944)^2\, 5{,}26 = 1154{,}55 \text{ Meterkilogramm}.$$

Die Winkelacceleration ist

$$\varkappa = \frac{\omega}{t} = \frac{20{,}944}{1{,}5} = 13{,}96 \text{ Meter},$$

daher das Moment des Kräftepaares:

$$Pa = \varkappa W = 13{,}96 \,.\, 5{,}26 = 73{,}43 \text{ Meterkilogramm}.$$

Die Abstände des Schwerpunktes S der Basis von den Coordinaten XX und YY sind

$$x = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{1{,}5 + 0{,}4}{3} = 0{,}6333 \text{ und}$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{0{,}5 + 1{,}0}{3} = 0{,}5,$$

folglich ergiebt sich der Abstand des Schwerpunktes von der Axe:

$$CS = r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}6511.$$

Ferner ist

$$\omega^4 = 20{,}944^4 = 192422{,}6 \text{ und } \varkappa^2 = 13{,}96^2 = 194{,}88;$$

daher folgt:

$$\sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} = \sqrt{192617{,}48} = 438{,}9,$$

und es wächst demnach der Axendruck während der beschleunigten Umdrehung des Körpers von

$$P = \varkappa M r = 13{,}96 \,.\, 6{,}63 \,.\, 0{,}6511 = 60{,}2 \text{ Kilogramm}$$

bis

$$R = \sqrt{\omega^4 + \varkappa^2} \,.\, M r = 438{,}9 \,.\, 6{,}63 \,.\, 0{,}6511 = 1891{,}66 \text{ Kilogramm}.$$

Wenn nach Verlauf von 1,5 Secunden Zeit das Kräftepaar zu wirken aufhört, so nimmt der Körper eine gleichförmige Umdrehungsbewegung an, und

es besteht von nun an der von der Axe auszuhaltende Druck nur in der Centrifugalkraft:

$$N = \omega^2 M r = 20{,}94^2 \,.\, 6{,}63 \,.\, 0{,}6511 = 1890{,}58 \text{ Kilogramm.}$$

Der von 60,2 bis 1891,66 allmälig anwachsende Axendruck ist anfangs rechtwinkelig gegen die centrale Schwerlinie CS gerichtet, nähert sich aber während des Wachsens der Geschwindigkeit dieser Linie immer mehr und mehr, so daß er am Ende der Zeit $t = 1{,}5$ Secunden nur noch um einen Winkel φ von dieser Linie abweicht, welcher durch

$$tang.\ \varphi = \frac{P}{N} = \frac{60{,}2}{1891{,}66} = 0{,}03183$$

bestimmt ist und hiernach den Werth $\varphi = 1^0 49'$ hat. Wenn das Kräftepaar zu wirken aufhört, so fällt natürlich die Richtung der Axenkraft $N = 1890{,}58$ Kilogramm ganz in die centrale Schwerlinie CS, und dreht sich folglich auch mit dieser Linie im Kreise herum.

Wenn man statt des Kräftepaares nur eine Kraft P am Hebelarme a auf den Körper wirken läßt, so gesellt sich zu dem obigen Axendrucke noch ein dieser Kraft gleicher Druck P.

§. 338. **Mittelpunkt des Stosses.** Befinden sich die einzelnen Theile M_1, M_2 ..., Fig. 594, eines rotirenden Massensystemes nicht in einer und derselben Umdrehungsebene, so fallen die Richtungen der Kräfte

$Q_1 = \omega^2 M_1 x_1 + \varkappa M_1 y_1$,
$Q_2 = \omega^2 M_2 x_2 + \varkappa M_2 y_2$ etc.

nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{X}X$, sondern in die Coordinatenebene XZ und ebenso die der Kräfte:

$R_1 = \omega^2 M_1 y_1 - \varkappa M_1 x_1$,
$R_2 = \omega^2 M_2 y_2 - \varkappa M_2 x_2$ etc.

nicht mehr in die Coordinatenaxe $\overline{Y}Y$, sondern in die Coordinatenebene YZ. Es lassen sich nun zwar die Kräftesysteme Q_1, Q_2 u. s. w. und R_1, R_2 u. s. w. auf die bekannte Weise (§. 330) zu den Mittelkräften:

$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots$ und
$R = R_1 + R_2 + \cdots$

Fig. 594.

vereinigen, da aber ihre Angriffslinien UQ und VR im Allgemeinen nicht in eine Ebene fallen, sondern die Drehungsaxe CZ in zwei verschiedenen Punkten U und V schneiden, so ist eine weitere Vereinigung dieser Kräfte zu einer Mittelkraft nicht, sondern nur eine Zurückführung derselben auf eine Kraft und ein Kräftepaar möglich. Die Seitenkräfte Q und R sind natürlich wie oben:

$$\begin{aligned} Q &= \omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) \\ &= \omega^2 Mx + \varkappa My, \text{ und} \\ R &= \omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) \\ &= \omega^2 My - \varkappa Mx, \end{aligned}$$

wenn wieder M die ganze Masse $M_1 + M_2 + \cdots$ und x und y die Abstände ihres Schwerpunktes S von den Coordinatenebenen YZ und XZ bezeichnen.

Setzen wir ferner die Abstände der Massen M_1, M_2 u. s. w. von der auf der Umdrehungsaxe CZ rechtwinkelig stehenden Umdrehungsebene XY, z_1, z_2 u. s. w., so erhalten wir (wie in §. 330) für die Abstände der Angriffspunkte U und V der Kräfte Q und R von dem Anfangspunkte C:

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q_1 z_1 + Q_2 z_2 + \cdots}{Q_1 + Q_2 + \cdots} \\ &= \frac{\omega^2 (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) + \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v &= \frac{R_1 z_1 + R_2 z_2 + \cdots}{R_1 + R_2 + \cdots} \\ &= \frac{\omega^2 (M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots)}{\omega^2 (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots) - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}. \end{aligned}$$

Wird die Axe CZ in zwei Punkten A und B (Zapfenlagern) festgehalten, welche um die Coordinaten $CA = l_1$ und $CB = l_2$ vom Anfangspunkte abstehen, so zerlegt sich die Kraft Q in die Seitenkräfte:

$$X_1 = \left(\frac{l_2 - u}{l_2 - l_1}\right) Q \text{ und } X_2 = \left(\frac{u - l_1}{l_2 - l_1}\right) Q$$

und die Kraft R in die Seitenkräfte:

$$Y_1 = \left(\frac{l_2 - v}{l_2 - l_1}\right) R \text{ und } Y_2 = \left(\frac{v - l_1}{l_2 - l_1}\right) R,$$

und es ist nun der Druck im Zapfen A:

$$S_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2},$$

und der im Zapfen B:

$$S_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2}.$$

Wird die Acceleration der Umdrehungsbewegung nicht durch ein Kräftepaar, dessen Moment Pa ist, sondern durch eine excentrische Kraft P am Hebelarme a hervorgebracht, so tritt noch ein dieser Kraft P gleicher Druck zu den Axenkräften Q und R hinzu. Lassen wir diese Kraft P parallel zur Axe CY und im Abstande $FO = a$ von der Umdrehungsaxe, rechtwinkelig gegen die Ebene XZ wirken, und nehmen wir noch an, daß ihre Angriffslinie um $CF = HO = b$ von der Coordinatenebene XY abstehe, so wird durch dieselbe nur die Kraft R um P vergrößert, und zwar der Theil Y_1 im Stützpunkte A um

Fig. 595.

$$Y_3 = \left(\frac{l_2 - b}{l_2 - l_1}\right) P,$$

und der Theil Y_2 im Stützpunkte B um

$$Y_4 = \left(\frac{b - l_1}{l_2 - l_1}\right) P.$$

Wenn $M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots = 0$, sowie
$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0$, ferner:
$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0$ und
$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$,

und folglich die Umdrehungsaxe CZ eine freie Axe ist, so fallen nicht allein die Kräfte Q und R, sondern auch ihre Momente Qu und Rv einzeln Null aus, und es ist daher (vergl. §. 334) zu folgern, daß bei Umdrehung eines Massensystemes um eine freie Axe sich nicht allein die Centrifugalkräfte, sondern auch die Trägheitskräfte einander das Gleichgewicht halten.

Nehmen wir an, daß sich das Massensystem in Ruhe befindet, daß also $\omega =$ Null ist, oder sehen wir von der Wirkung der Centrifugalkräfte auf die Umdrehungsaxe ab, so erhalten wir einfacher die Axendrücke:

$$Q = \varkappa M y = \varkappa (M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots),$$
$$R = - \varkappa M x = - \varkappa (M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots),$$ sowie

$$Qu = \varkappa\,(M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots) \text{ und}$$
$$Rv = -\,\varkappa\,(M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots).$$

Wenn die Ebene XZ Symmetrieebene und folglich auch Schwerebene des ganzen Massensystems ist, so fällt

$$M_1 y_1 + M_2 y_2 + \cdots = 0 \text{ und}$$
$$M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0,$$

und daher auch

$$Q = 0,$$

sowie

$$Qu = 0$$

aus.

Machen wir nun noch die Forderung, daß die Umdrehungskraft

$$P = \frac{\varkappa W}{a}$$

durch die Trägheitskraft R aufgehoben wird, ohne eine Wirkung auf die Umdrehungsaxe zurückzulassen, so können wir

$$P + R = 0$$

und

$$Pb + Rv = 0,$$

d. i.:

$$\frac{\varkappa W}{a} - \varkappa\,(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots) = 0, \text{ sowie}$$
$$\frac{\varkappa W b}{a} - \varkappa\,(M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots) = 0$$

setzen, und es folgt hiernach:

$$a = \frac{W}{Mx} = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$
$$b = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{W}\,a = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$
$$= \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Diese Coordinaten bestimmen einen Punkt O, welcher der **Mittelpunkt des Stoßes** genannt wird. **Derselbe hat die Eigenschaft, daß irgend eine durch ihn gehende Stoßkraft, welche auf der durch die Drehaxe gelegten Symmetrieebene des Körpers senkrecht steht, eine Wirkung auf die Drehaxe desselben nicht ausübt.**

Wenn man die XY-Ebene von C nach F, also um die Größe

$$b = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

verschoben denkt, so ist der Abstand der Kraft P von dieser Ebene b = Null, und man hat daher:

$$b = 0 = \frac{M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots}$$

oder:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = 0.$$

Da nun nach der Voraussetzung auch $M_1 y_1 z_1 + M_2 y_2 z_2 + \cdots = 0$ ist, so ergiebt sich hieraus nach §. 309, daß CZ eine Trägheitshauptaxe für den Punkt F ist, und man kann daher auch sagen:

Damit die Drehaxe eines einer Stoßkraft P unterworfenen Körpers keiner Stoßwirkung ausgesetzt ist, muß

1) die stoßende Kraft senkrecht stehen auf der durch die Drehaxe und den Schwerpunkt gelegten Ebene,

2) die Drehaxe eine Trägheitshauptaxe für denjenigen Punkt sein, in welchem sie von einer durch P senkrecht zur Drehaxe gelegten Ebene geschnitten wird, und

3) der Abstand der stoßenden Kraft von der Drehaxe die Größe

$$a = \frac{M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2 + \cdots}{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}$$

haben.

Beispiele. 1) Für eine gerade Linie oder eine überall gleich dicke Stange CE, Fig. 596, welche an einem Ende C mit der Umdrehungsaxe CZ unter einem bestimmten Winkel ZCE zusammenstößt, ist, wenn M die Masse derselben und r den Abstand DE ihres zweiten Endes E von der Umdrehungsaxe bezeichnet, das Trägheitsmoment:

Fig. 596.

$$W = Mk^2 = \tfrac{1}{3} Mr^2 \text{ (s. §. 311)},$$

dagegen das statische Moment:

$$Mx = \tfrac{1}{2} Mr.$$

Bezeichnet nun h die Projection CD der Stangenlänge CE auf die Umdrehungsaxe CZ, so hat man

$$\frac{CO_1}{O_1 M_1} = \frac{z_1}{x_1} = \frac{h}{r},$$

also:

$$M_1 x_1 z_1 = \frac{h}{r} M_1 x_1^2,\ M_2 x_2 z_2 = \frac{h}{r} M_2 x_2^2, \text{ u. s. w.}$$

und es folgt daher das Centrifugalmoment:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \frac{h}{r}(M_1 x_1^2 + M_2 x_2^2 + \cdots) = \frac{h}{r} \cdot \tfrac{1}{3} Mr^2 = \tfrac{1}{3} Mhr.$$

Daher sind die Coordinaten des Stoßmittelpunktes O dieser Stange durch

$$FO = a = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} Mr^2}{\tfrac{1}{2} Mr} = \tfrac{2}{3} r \text{ und}$$

$$CF = b = \frac{\text{Centrifugalmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{\tfrac{1}{3} Mhr}{\tfrac{1}{2} Mr} = \tfrac{2}{3} h$$

bestimmt, und es ist demnach dieser Mittelpunkt um zwei Drittel der Stangenlänge CE vom Ende C und um ein Drittel derselben vom Ende E der Stange entfernt.

Fig. 597.

2) Das Trägheitsmoment einer rechtwinkeligen Dreiecksfläche ABC, Fig. 597, welche sich um eine Kathete CA dreht, ist, wenn man deren Masse durch M und deren Katheten CA und AB durch h und r bezeichnet:

$$T = \frac{h r^3}{12} = \frac{h r}{2} \cdot \frac{r^2}{6} = \frac{1}{6} M r^2 \text{ (s. §. 229),}$$

und das statische Moment derselben, da ihr Schwerpunkt S um $\frac{r}{3}$ von der Axe CA absteht,

$$M x = \frac{M r}{3},$$

folglich ist der Abstand des Stoßmittelpunktes O dieser Fläche von eben dieser Axe:

$$F O = a = \frac{\frac{1}{6} M r^2}{\frac{1}{3} M r} = \frac{1}{2} r.$$

Für ein streifenförmiges Element KL des Dreieckes, welches die Länge x und die Breite $\frac{h}{n}$ hat, und um $CK = z$ von der Spitze C absteht, ist das Centrifugalmoment:

$$M x z = \frac{h}{n} x \cdot \frac{1}{2} x z,$$

oder, da $\frac{x}{z} = \frac{r}{h}$, also $x = \frac{r}{h} z$ ist,

$$M x z = \frac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 z^3.$$

Nimmt man nun für z nach und nach $1\left(\frac{h}{n}\right)$, $2\left(\frac{h}{n}\right)$, $3\left(\frac{h}{n}\right) \cdots n\left(\frac{h}{n}\right)$ und addirt die dadurch erhaltenen Werthe für $M x z$, so ergiebt sich das ganze Centrifugalmoment:

$$M_1 x_1 z_1 + M_2 x_2 z_2 + \cdots = \frac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) \left(\frac{h}{n}\right)^3$$
$$= \frac{1}{2} \frac{h}{n} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{n^4}{4} \left(\frac{h}{n}\right)^3 = \frac{1}{8} r^2 h^2 = \frac{1}{4} \frac{r h}{2} r h$$
$$= \frac{1}{4} M r h,$$

und daher der Abstand des Stoßmittelpunktes O vom Eckpunkte C:

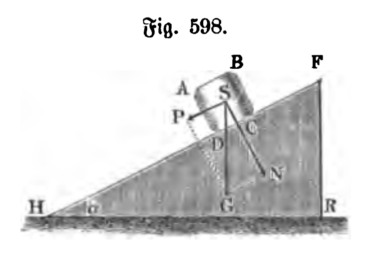
$$C F = b = \frac{\frac{1}{4} M r h}{\frac{1}{3} M r} = \frac{3}{4} h.$$

Viertes Capitel.

Von den Wirkungen der Schwerkraft bei Bewegungen auf vorgeschriebenen Bahnen.

§. 339. **Gleiten auf der geneigten Ebene.** Ein schwerer Körper kann auf mancherlei Weise verhindert werden, frei zu fallen; betrachten wir indessen im Folgenden nur zwei Fälle, nämlich denjenigen, daß der Körper von einer geneigten Ebene unterstützt wird, und denjenigen, daß er um eine horizontale Axe drehbar ist. In beiden Fällen sind die Wege des Körpers in einer Verticalebene enthalten. Befindet sich der Körper auf einer geneigten Ebene, so zerlegt sich das Gewicht desselben in zwei Seitenkräfte, von denen die eine normal gegen die Ebene gerichtet ist und von dieser aufgenommen wird, und die andere parallel zur Ebene und auf den Körper als bewegende Kraft wirkt. Ist G das Gewicht des Körpers $ABCD$, Fig. 598, und α die Neigung der schiefen Ebene FH gegen den Horizont, so hat man nach §. 150 jenen Normaldruck:

Fig. 598.



$$N = G \cos. \alpha$$

und diese bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha.$$

Die Bewegung des Körpers kann nun entweder gleitend oder wälzend sein; berücksichtigen wir zunächst nur die erstere. In diesem Falle nehmen alle Theile des Körpers gleichen Antheil an der Bewegung desselben, und haben daher auch eine gemeinschaftliche Acceleration p, die sich durch die bekannte Formel:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{P}{M} = \frac{G \sin. \alpha}{G} \cdot g = g \sin. \alpha$$

ausdrücken läßt. Es ist also

$$p : g = \sin. \alpha : 1,$$

d. h. die Beschleunigung eines Körpers auf der schiefen Ebene verhält sich zur Beschleunigung des freien Falles wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zu Eins. Wegen der hinzutretenden Reibung gewährt aber diese Formel selten hinreichende Genauig-

keit; es ist daher nothwendig, in vielen Fällen der Anwendung auch auf die Reibung Rücksicht zu nehmen.

Bewegt sich ein Körper auf einer krummen Fläche, so ist die Acceleration veränderlich und an jeder Stelle gleich der Acceleration, welche der Berührungsebene an die krumme Fläche entspricht.

Gleitet ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit Null auf einer geneigten Ebene ohne Reibung herab, so ist nach §. 11 die Endgeschwindigkeit nach t Secunden:

$v = g \sin. \alpha . t = 9{,}81 \sin. \alpha . t$ Meter $= 31{,}25 \sin. \alpha . t$ Fuß

und der zurückgelegte Weg:

$s = \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2 = 4{,}905 \sin. \alpha . t^2$ Meter $= 15{,}625 \sin. \alpha . t^2$ Fuß.

Beim freien Falle ist $v_1 = gt$ und $s_1 = \frac{1}{2} gt^2$, es läßt sich daher setzen:

$$v : v_1 = s : s_1 = \sin. \alpha : 1,$$

d. h. es verhalten sich die Endgeschwindigkeit und der Weg beim Fallen auf der schiefen Ebene zur Endgeschwindigkeit und dem Wege beim freien Fallen, wie der Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene zur Einheit.

In dem rechtwinkeligen Dreiecke FGH, Fig. 599, mit verticaler Hypotenuse FG ist die Kathete:

Fig. 599.

$$FH = FG \sin. FGH = FG \sin. FHR = FG \sin. \alpha,$$

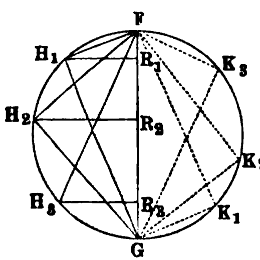
wenn α die Neigung FHR dieser Kathete gegen den Horizont bezeichnet; es ist daher:

$$FH : FG = \sin. \alpha : 1,$$

es durchläuft also ein Körper die verticale Hypotenuse FG und die geneigte Kathete FH in einer und derselben Zeit. Es läßt sich hiernach zu dem Fallwege auf der schiefen Ebene der entsprechende Weg des freien Falles, und zu dem letzteren der erstere durch Construction finden.

Da die auf dem Durchmesser FG, Fig. 600, stehenden Peripheriewinkel FH_1G, FH_2G u. s. w. lauter rechte sind, so schneidet der Halbkreis über FG von allen in F anfangenden schiefen Ebenen die mit dem Durchmesser, und deshalb auch unter sich, in gleichen Zeiten durchlaufenen Wege FH_1, FH_2 u. s. w. ab. Man sagt daher: die Sehnen eines Kreises und der Durchmesser desselben werden gleichzeitig oder isochron durchfallen. Uebrigens gilt dieser Isochronismus nicht allein für die Sehnen FH_1, FH_2 u. s. w., welche im höchsten Punkte F des Kreises anfangen, sondern auch für die Sehnen H_1G

Fig. 600.



$H_2 G$ u. s. w., welche in dem untersten Punkte G desselben auslaufen. Zieht man nämlich von F die Sehne FK_1 parallel mit $H_1 G$, so haben FK_1 mit $H_1 G$ gleiche Lage und gleiche Länge. Ein Körper durchfällt daher beide Sehnen in derselben Zeit, d. h. in der Zeit, welche er zum Durchfallen des Durchmessers FG gebrauchen würde.

§. 340. Aus der Gleichung

$$s = \frac{v^2}{2p} = \frac{v^2}{2 g \sin. \alpha}$$

für den durchlaufenen Weg folgt:

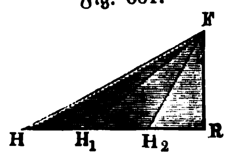
$$s \sin. \alpha = \frac{v^2}{2g}$$

und umgekehrt:

$$v = \sqrt{2 g s \sin. \alpha}.$$

Nun ist aber $s \sin. \alpha$ die Höhe FR (Fig. 601) der schiefen Ebene oder die Verticalprojection h des Weges $FH = s$ auf derselben; es sind daher die Endgeschwindigkeiten von Körpern, welche mit Null Anfangsgeschwindigkeit von verschieden geneigten, gleich hohen Ebenen FH, FH_1 u. s. w. herabfallen, unter sich gleich und auch gleich der Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt, wenn er von der Höhe FR dieser Ebenen frei herabfällt. (Hiermit ist sowohl §. 45, als auch §. 87 zu vergleichen.)

Fig. 601.



Aus der Gleichung

$$s = \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2$$

folgt die Formel für die Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin. \alpha}} = \frac{1}{\sin. \alpha} \sqrt{\frac{2 s \sin. \alpha}{g}} = \frac{1}{\sin. \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Für den freien Fall durch die Höhe $FR = h$ ist aber die Zeit:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

es ergiebt sich demnach:

$$t : t_1 = 1 : \sin. \alpha = s : h = FH : FR,$$

es verhält sich also die Zeit des Fallens auf der schiefen Ebene zur Zeit des freien Falles von der Höhe dieser Ebene wie die Länge zur Höhe der schiefen Ebene.

Beispiele. 1) Von einer schiefen Ebene FH, Fig. 602, ist der Anfangspunkt F gegeben und der Endpunkt H in einer gegebenen Linie AB so zu bestimmen, daß der Fall auf dieser Ebene in der kürzesten Zeit erfolge. Zieht

man durch F die Horizontale FG bis zum Durchschnitte mit AB, und macht man $GH = GF$, so erhält man in H den gesuchten Punkt und also in FH die Ebene der kürzesten Fallzeit; denn führt man durch F und H einen sich an FG und GH tangential anlegenden Kreis, so sind dessen isochron durchlaufene Sehnen FK_1, FK_2 u. s. w. kürzer als die Längen FH_1, FH_2 u. s. w. der entsprechenden schiefen Ebenen; es ist folglich auch die Fallzeit für jene Sehnen kleiner, als für diese Längen, und die Fallzeit für die schiefe Ebene FH, welche mit einer Sehne zusammenfällt, die kürzeste.

Fig. 602.

A G F C H₁ K₁ R H K₂ H₂ D B

2) Man soll die Neigung derjenigen schiefen Ebene FH, Fig. 602, angeben, von welcher ein Körper in derselben Zeit herabfällt, die er gebrauchen würde, wenn er erst von der Höhe FR frei herabfiele, und dann mit der erlangten Geschwindigkeit horizontal bis H fortginge. Die Zeit zum Herabfallen von der senkrechten Höhe $FR = h$ ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

und die erlangte Geschwindigkeit in R ist:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Tritt nun beim Uebergange aus der verticalen Bewegung in die horizontale kein Geschwindigkeitsverlust ein, was erfolgt, wenn die Ecke R abgerundet ist, so wird der Weg $RH = h\,cotg.\,\alpha$ gleichförmig und in der Zeit

$$t_2 = \frac{h\,cotg.\,\alpha}{v} = \frac{h\,cotg.\,\alpha}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2}\,cotg.\,\alpha\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

durchlaufen. Die Fallzeit für die schiefe Ebene ist:

$$t = \frac{1}{sin.\,\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}};$$

setzen wir daher $t = t_1 + t_2$, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{sin.\,\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\,cotg.\,\alpha \text{ oder } \frac{tang.\,\alpha}{sin.\,\alpha} = tang.\,\alpha + \frac{1}{2},$$

deren Auflösung auf $tang.\,\alpha = \frac{3}{4}$ führt. In der entsprechenden schiefen Ebene verhält sich hiernach die Höhe zur Basis zur Länge wie 3 zu 4 zu 5, und es ist der Neigungswinkel $\alpha = 36^0 52' 11''$.

3) Bei einer schiefen Ebene von der gegebenen Basis a ist die Zeit zum Herabgleiten:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g\,sin.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{2a}{g\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}} = \sqrt{\frac{4a}{g\,sin.\,2\alpha}};$$

sie fällt daher am kleinsten aus, wenn $sin.\,2\alpha$ am größten, d. i. $= 1$, also $2\alpha^0 = 90^0$ oder $\alpha^0 = 45^0$ ist. Von Dächern mit 45^0 Neigung fließt daher das Wasser in der kürzesten Zeit herab.

Geht die Bewegung auf einer schiefen Ebene mit einer gewissen **Anfangsgeschwindigkeit** c vor sich, so hat man die in §. 13 und §. 14 gefundenen Formeln in Anwendung zu bringen. Hiernach ist für einen auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper die Endgeschwindigkeit: §. 341.

$$v = c - g \sin. \alpha . t$$

und der zurückgelegte Weg:

$$s = ct - \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2,$$

dagegen für den von der schiefen Ebene herabsinkenden Körper:

$$v = c + g \sin. \alpha . t \text{ und } s = ct + \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2.$$

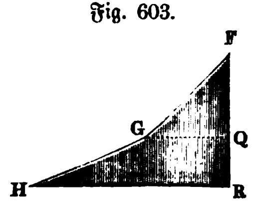
Uebrigens gilt in beiden Fällen der Bewegung die Formel:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2 g \sin. \alpha} \text{ oder } s \sin. \alpha = h = \frac{v^2 - c^2}{2 g} = \frac{v^2}{2 g} - \frac{c^2}{2 g}.$$

Es ist also stets die Verticalprojection (h) des auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weges (s) gleich der Differenz der Geschwindigkeitshöhen.

Stoßen zwei schiefe Ebenen FG und GH, Fig. 603, in einer abgerundeten Kante an einander, so findet beim Uebergange des fallenden Körpers von der einen Ebene zur anderen kein Stoß und deshalb auch kein Geschwindigkeitsverlust statt; es gilt deshalb auch für das Herabfallen eines Körpers von dieser Verbindung zweier Ebenen die Regel: Fallhöhe (FR) gleich Differenz der Geschwindigkeitshöhen. Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Regel auch bei dem Sinken und Steigen auf einer derartigen Verbindung von beliebig vielen Ebenen, sowie beim Fallen und Aufsteigen auf krummen Linien oder Flächen ihre Richtigkeit behält (vergl. §. 87).

Fig. 603.



Beispiele. 1) Ein Körper steigt mit 10 Meter Anfangsgeschwindigkeit auf einer schiefen Ebene von 22° Neigung hinauf, wie groß ist seine Geschwindigkeit und sein zurückgelegter Weg nach $1\frac{1}{2}$ Secunden?

Es ist die Geschwindigkeit:

$v = 10 - 9{,}81 \,.\, \sin. 22^0 \,.\, 1{,}5 = 10 - 9{,}81 \,.\, 0{,}3746 \,.\, 1{,}5 = 4{,}49$ Meter

und der Weg:

$$s = \frac{c + v}{2} t = \frac{10 + 4{,}49}{2} 1{,}5 = 10{,}87 \text{ Meter.}$$

2) Wie hoch erhebt sich ein Körper mit 20 Meter Anfangsgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene von 48° Ansteigen?

Es ist die senkrechte Höhe:

$$h = \frac{v^2}{2 g} = 0{,}051 \,.\, 400 = 20{,}4 \text{ Meter,}$$

daher der ganze Weg auf der schiefen Ebene:

$$s = \frac{h}{\sin. \alpha} = \frac{20{,}4}{\sin. 48^0} = 27{,}46 \text{ Meter.}$$

Die zur Zurücklegung desselben nöthige Zeit ist:

$$t = \frac{2 s}{v} = \frac{2 \,.\, 27{,}46}{20} = 2{,}75 \text{ Secunden.}$$

Gleiten auf der geneigten Ebene mit Rücksicht auf Reibung. Die gleitende Reibung übt einen bedeutenden Einfluß auf das Fallen und Steigen eines Körpers auf einer schiefen Ebene aus. Aus dem Gewichte G des Körpers und aus dem Neigungswinkel α der schiefen Ebene folgt der Normaldruck: §. 342.

$$N = G \cos. \alpha$$

und hieraus wieder die Reibung:

$$F = \varphi N = \varphi G \cos. \alpha.$$

Subtrahirt man diese von der Kraft $P = G \sin. \alpha$, mit welcher die Schwerkraft den Körper von der schiefen Ebene herabtreibt, so bleibt die bewegende Kraft:

$$P = G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha,$$

und es ergiebt sich die Beschleunigung des von der schiefen Ebene herabsinkenden Körpers:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G} g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha)\, g.$$

Bei einem auf der schiefen Ebene hinaufsteigenden Körper ist die bewegende Kraft gleich $-(G \sin. \alpha + \varphi . G \cos. \alpha)$, daher auch die Acceleration p negativ und gleich $-(\sin. \alpha + \varphi \cos. \alpha)\, g$.

Sind zwei auf verschiedenen Ebenen FE und FH, Fig. 604, befindliche Körper durch eine über eine Leitrolle C gelegte, vollkommen biegsame Schnur mit einander verbunden, so ist es möglich, daß der eine von beiden Körpern sinkt und den anderen mit emporzieht. Bezeichnen wir die Gewichte dieser Körper durch G und G_1 und die Neigungswinkel der schiefen Ebenen, auf welchen dieselben fortgleiten, durch α und α_1, und nehmen wir an, daß G sinke und G_1 mit emporziehe, so erhalten wir als bewegende Kraft:

Fig. 604.

$$P = G \sin. \alpha - G_1 \sin. \alpha_1 - \varphi G \cos. \alpha - \varphi G_1 \cos. \alpha_1$$
$$= G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1)$$

und als bewegte Masse:

$$M = \frac{G + G_1}{g},$$

daher die Acceleration, mit welcher G sinkt und G_1 steigt:

$$p = \frac{G (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) - G_1 (\sin. \alpha_1 + \varphi \cos. \alpha_1)}{G + G_1} g.$$

Da die Reibung als widerstehende Kraft keine Bewegung erzeugen kann, so ist für das Sinken von G und Steigen von G_1 nöthig, daß

$$G\,(sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha) > G_1\,(sin.\,\alpha_1 + \varphi\,cos.\,\alpha_1),$$

also

$$\frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha},\ \text{d. i.}\ \frac{G}{G_1} > \frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)}$$

ist. Soll hingegen G_1 sinken und G mit emporziehen, so muß sein:

$$\frac{G_1}{G} > \frac{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}{sin.\,\alpha_1 - \varphi\,cos.\,\alpha_1}\ \text{oder:}$$

$$\frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha},\ \text{d. i.}\ \frac{G}{G_1} < \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}.$$

So lange aber $\frac{G}{G_1}$ innerhalb der Grenzen

$$\frac{sin.\,\alpha_1 + \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha}\ \text{und}\ \frac{sin.\,\alpha_1 - \varphi\,cos.\,\alpha_1}{sin.\,\alpha + \varphi\,cos.\,\alpha}\ \text{oder}$$

$$\frac{sin.\,(\alpha_1 + \varrho)}{sin.\,(\alpha - \varrho)}\ \text{und}\ \frac{sin.\,(\alpha_1 - \varrho)}{sin.\,(\alpha + \varrho)}$$

liegt, so lange wird die Reibung jede Bewegung verhindern.

Beispiele. 1) Ein Schlitten gleitet auf einer 50 Meter langen und 20 Grad fallenden Schneebahn herab und geht, unten angekommen, auf einer horizontalen Schneebahn fort, bis ihn die Reibung in Ruhe versetzt. Wenn nun der Coefficient der Reibung zwischen Schnee und Schlitten = 0,03 ist, welchen Weg wird der Schlitten, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, auf der horizontalen Ebene zurücklegen?

Es ist die Acceleration des Schlittens:

$$p = (sin.\,\alpha - \varphi\,cos.\,\alpha)\,g = (sin.\,20^0 - 0{,}03\,.\,cos.\,20^0)\,.\,9{,}81$$
$$= 0{,}3138\,.\,9{,}81 = 3{,}078\ \text{Meter},$$

daher die Endgeschwindigkeit des Herabgleitens:

$$v = \sqrt{2\,p\,s} = \sqrt{2\,.\,3{,}078\,.\,50} = 17{,}54\ \text{Meter}.$$

Auf der horizontalen Ebene ist die Acceleration:

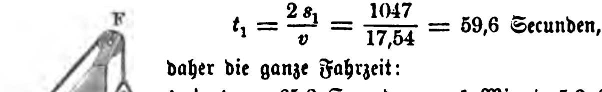
$$p_1 = -\,\varphi\,g = -\,0{,}03\,.\,9{,}81 = 0{,}294\ \text{Meter, daher der Weg:}$$

$$s_1 = \frac{v^2}{2\,\varphi\,g} = \frac{307{,}8}{0{,}588} = 523{,}5\ \text{Meter}.$$

Die Zeit zum Herabgleiten ist:

$$t = \frac{2\,s}{v} = \frac{100}{17{,}54} = 5{,}7\ \text{Secunden}$$

und zum Fortgleiten:

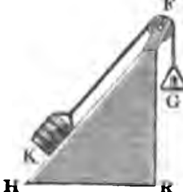


$$t_1 = \frac{2\,s_1}{v} = \frac{1047}{17{,}54} = 59{,}6\ \text{Secunden},$$

daher die ganze Fahrzeit:

$$t + t_1 = 65{,}3\ \text{Secunden} = 1\ \text{Minute}\ 5{,}3\ \text{Secunden}.$$

Fig. 605.



2) Ein gefüllter Kübel K, Fig. 605, mit 250 Kilogramm Bruttogewicht, soll durch ein senkrecht niederziehendes Gewicht G von 260 Kilogramm auf einer schiefen Ebene FH von 30 Meter Länge und 50^0 Neigung

emporgezogen werden; welche Zeit wird dazu nöthig sein, wenn der Coefficient der Reibung des Kübels auf der Leitung 0,36 beträgt?

Es ist die bewegende Kraft:

$$G - (sin.\,\alpha + \varphi\, cos.\,\alpha)\,K = 260 - (sin.\,50^0 + 0,36\,.\,cos.\,50^0)\,.\,250$$
$$= 260 - 0,9974\,.\,250 = 10,6 \text{ Kilogramm},$$

daher die Beschleunigung:

$$p = \frac{10,6}{250 + 260}\,9,81 = 0,0208\,.\,9,81 = 0,204 \text{ Meter},$$

ferner die Zeit der Bewegung:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{60}{0,204}} = 17,16 \text{ Secunden}$$

und die Endgeschwindigkeit:

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{60}{17,16} = 3,5 \text{ Meter}.$$

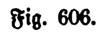
Rollende Bewegung auf einer schiefen Ebene. Bei einem von einer schiefen Ebene herabrollenden Wagen wirkt vorzüglich die Axenreibung der Beschleunigung entgegen; ist G das Gewicht des Wagens, r der Axen- und a der Radhalbmesser, so beträgt die auf den Radumfang reducirte Zapfenreibung: §. 343.

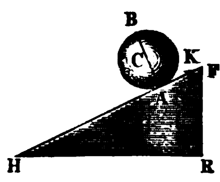
$$\frac{\varphi r}{a} N = \frac{\varphi r}{a} G\, cos.\,\alpha$$

und daher die Beschleunigung:

$$p = \left(sin.\,\alpha - \frac{\varphi r}{a} cos.\,\alpha\right) g.$$

Wälzt sich ein runder Körper AB, z. B. ein Cylinder oder eine Kugel u. s. w., von einer schiefen Ebene FH, Fig. 606, herab, so hat man es mit einer progressiven und drehenden Bewegung zugleich zu thun. In der Regel ist die Acceleration p des Fortschreitens gleich der Acceleration des Drehens, d. h. die Bewegung ist eine rein wälzende, ohne Gleiten, indem der Berührungspunkt auf dem rollenden Körper einen ebenso großen Weg zurücklegt, wie auf der ruhenden Unterlage (§. 173). Setzen wir daher das Trägheitsmoment des sich wälzenden Körpers $= Gk^2$ und den Halbmesser CA des Wälzens $= a$, so erhalten wir für die Kraft $\overline{AK} = K$, mit welcher die Walze in Folge des Eingreifens ihrer Theile in die Theile der schiefen Ebene in Umdrehung gesetzt wird:


Fig. 606.



$$K = p\,\frac{G k^2}{g a^2}.$$

Nun wirkt aber die Kraft K der Kraft $G\, sin.\,\alpha$ zum Herablaufen entgegen; es folgt daher die bewegende Kraft für die progressive Bewegung:

$$P = G \sin. \alpha - K$$

und die Beschleunigung derselben:

$$p = \frac{G \sin. \alpha - K}{G} g.$$

Eliminirt man K aus beiden Gleichungen, so erhält man:

$$G p = G g \sin. \alpha - \frac{G k^2}{a^2} p,$$

folglich die gesuchte Acceleration:

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}}.$$

Bei einem sich wälzenden homogenen Cylinder ist $k^2 = \frac{1}{2} a^2$ (§. 313), daher

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} g \sin. \alpha;$$

bei einer Kugel aber $k^2 = \frac{2}{5} a^2$ (§. 315), daher

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7} g \sin. \alpha;$$

es ist also bei dem rollenden Cylinder die Beschleunigung nur $\frac{2}{3}$ und bei der rollenden Kugel nur $\frac{5}{7}$ mal so groß als bei einem ohne Reibung gleitenden Körper.

Die Kraft des Drehens ist:

$$K = \frac{g \sin. \alpha}{1 + \frac{k^2}{a^2}} \cdot \frac{G k^2}{g a^2} = \frac{G k^2 \sin. \alpha}{a^2 + k^2}.$$

So lange dieselbe kleiner ist als die gleitende Reibung $\varphi G \cos. \alpha$, so lange läuft auch der Körper vollkommen wälzend von der Ebene herab. Ist aber

$$K > \varphi G \cos. \alpha, \text{ d. i. } tang. \alpha > \varphi \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right),$$

so reicht die Reibung nicht mehr aus, dem Körper eine der fortschreitenden Geschwindigkeit gleiche Umdrehungsgeschwindigkeit zu ertheilen; es ist daher dann die Acceleration des Fortschreitens wie bei der gleitenden Reibung:

$$p = \frac{G \sin. \alpha - \varphi G \cos. \alpha}{G} g = (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) g$$

und die der Umdrehung:

$$p_1 = \frac{\varphi G \cos. \alpha}{G k^2 : a^2} \cdot g = \varphi \frac{a^2}{k^2} g \cos. \alpha.$$

Für einen hohlen Cylinder mit dem inneren Halbmesser r_1 und dem äußeren r_2 hat man $k^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}$ (s. §. 313), wofür man bei verhältnißmäßig geringer Wandstärke, also wenn r_1 nahezu gleich r_2 ist, $k^2 = r^2 = a^2$ setzen kann. Es ist demnach für einen Cylindermantel (z. B. einen Dampfkessel oder ein Rad mit geringer Kranzstärke) die Beschleunigung

$$p = \frac{g \sin. \alpha}{1 + 1} = \frac{g \sin. \alpha}{2}$$

nur halb so groß, wie beim Gleiten ohne Reibung und daher ohne Rollen. Nach dem Obigen bestimmt sich der größte Werth für die Neigung α der schiefen Ebene, bei welcher noch kein Gleiten eintritt, durch

$tang. \alpha = 2 \varphi$ bei einem Cylindermantel,
$tang. \alpha = 3 \varphi$ bei einem massiven Cylinder und
$tang. \alpha = 3,5 \varphi$ bei einer Kugel.

Bei größeren Werthen von α stellt sich neben der wälzenden Bewegung des sinkenden Körpers ein Gleiten ein.

Bei einem Wagen vom Gewichte G mit Rädern vom Halbmesser a und dem Trägheitsmomente $W_1 = G_1 k_1^2$ und Zapfen vom Halbmesser r hat man:

$$K = p \frac{G_1 k_1^2}{g a^2} \text{ und } p = \frac{G \sin. \alpha - \varphi \frac{r}{a} G \cos. \alpha - K}{G} g,$$

d. i.:

$$p = \frac{g \left(\sin. \alpha - \varphi \frac{r}{a} \cos. \alpha\right)}{1 + \frac{G_1 k_1^2}{G a^2}}.$$

Beispiele. 1) Ein belasteter Wagen von 2000 Kilogramm Gewicht mit Rädern von 1,2 Meter Höhe und einem Trägheitsmomente von 90 rollt von einer schiefen Ebene mit 12° Neigung herab; welches ist seine Acceleration, wenn der Coefficient der Axenreibung $\varphi = 0,15$ und die Stärke der Radaxen $2 r = 0,08$ Meter beträgt?

Es ist:

$$\frac{G_1 k_1^2}{G a^2} = \frac{90}{2000 . 0,6^2} = 0,125 \text{ und } \varphi \frac{r}{a} = 0,15 \frac{0,04}{0,6} = 0,01,$$

daher die gesuchte Beschleunigung:

$$p = \frac{9,81 . (\sin. 12^0 - 0,01 . \cos. 12^0)}{1 + 0,125} = 1,73 \text{ Meter.}$$

2) Mit welchen Accelerationen rollt eine massive Walze von einer schiefen Ebene herab, deren Fallwinkel $\alpha = 40^0$ beträgt?

Ist der Coefficient für die gleitende Reibung der Walze auf der Ebene $\varphi = 0,24$, so hat man:

$$\varphi \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) = 0,24 \ (1 + 2) = 0,72;$$

nun ist aber $tang. 40^0 = 0,839$; es fällt daher $tang. \alpha$ größer als $\varphi \left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)$ und die Acceleration der rollenden Bewegung kleiner als die der progressiven Bewegung aus. Die letztere ist

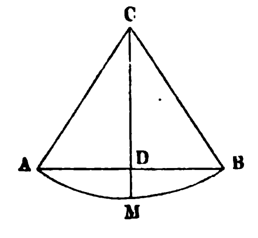
$p = (sin. \alpha - \varphi\ cos. \alpha)\ g = (0,6428 - 0,24\ .\ 0,7660)\ .\ 9,81 = 4,50$ Meter, die erstere aber nur

$$p_1 = \varphi \frac{a^2}{k^2}\ g\ cos. \alpha = 0,24\ .\ 2\ .\ 0,7660\ .\ 9,81 = 3,6 \text{ Meter.}$$

§. 344. **Das Kreispendel.** Ein an einer horizontalen Axe hängender Körper ist im Gleichgewichte, so lange sein Schwerpunkt senkrecht unter der Axe liegt; bringt man aber den Schwerpunkt aus der die Axe enthaltenden Verticalebene, und überläßt man den Körper sich selbst, so nimmt derselbe eine schwingende Bewegung, d. i. eine hin- und hergehende Bewegung im Kreise, an. Im Allgemeinen heißt ein um eine horizontale Axe schwingender Körper ein Kreispendel oder Pendel schlechtweg. Ist der schwingende Körper ein materieller Punkt, und besteht die Verbindung desselben mit der Umdrehungsaxe in einer gewichtslosen Linie, so hat man es mit einem einfachen oder mathematischen Pendel zu thun; besteht aber das Pendel in einem ausgedehnten Körper oder aus mehreren Körpern, so heißt dasselbe ein zusammengesetztes, physisches oder materielles Pendel. Ein solches Pendel läßt sich als eine feste Verbindung von lauter einfachen, um eine gemeinschaftliche Axe schwingenden Pendeln ansehen. Das einfache Pendel ist nur ein eingebildetes, seine Annahme gewährt aber besondere Vortheile, weil es leicht ist, die Theorie der Bewegung des zusammengesetzten Pendels auf die des einfachen zurückzuführen.

Wird das in C aufgehangene Pendel, Fig. 607, aus seiner verticalen Lage CM in die Lage CA gebracht und nun sich selbst überlassen, so geht es vermöge seiner Schwere mit einer beschleunigten Bewegung nach CM zurück, und es kommt dessen Masse im tiefsten Punkte M mit einer Geschwindigkeit c an, deren Höhe $\frac{c^2}{2g}$ der Fallhöhe DM gleich ist. In Folge dieser Geschwindigkeit durchläuft es nun auf der anderen Seite den Bogen $MB = MA$ und steigt dabei wieder auf die Höhe DM. Von B aus fällt es von Neuem nach M und A zurück, und so geht es wiederholt im Kreisbogen AB hin und her. Wäre der Widerstand der Luft und die Axenreibung ganz beseitigt, so würde diese schwingende Bewegung des Pendels ohne Ende fortgehen; weil aber diese Hindernisse nie ganz wegzubringen sind,


Fig. 607.

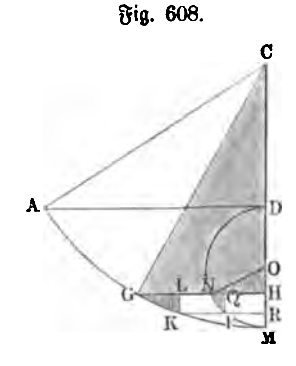


so werden die Schwingungsbögen mit der Zeit immer kleiner und kleiner, und das Pendel geht endlich zur Ruhe über.

Die Bewegung des Pendels von A bis B nennt man einen **Schwung** oder **Pendelschlag**, den Bogen AB selbst aber den **Schwingungsbogen**; der den halben Schwingungsbogen messende Winkel, um welchen sich das Pendel zu beiden Seiten von der Lothlinie CM entfernt, heißt der **Elongationswinkel**, **Ausschlagswinkel** oder **Ausschlag** schlechtweg. Die Zeit, in welcher das Pendel eine Oscillation macht, heißt endlich **Schwingungszeit** oder **Schwingungsdauer**.

Theorie des einfachen Kreispendels. Wegen der häufigen Anwendung der Pendel im praktischen Leben, namentlich bei Uhren, ist es wichtig, §. 345.

Fig. 608.



die Schwingungszeiten derselben zu kennen; die Bestimmung derselben ist daher eine Hauptaufgabe der Mechanik. Setzen wir in der Absicht, diese Aufgabe zu lösen, die Pendellänge $AC = MC = r$, Fig. 608, und die einem ganzen Schwunge entsprechende Fall- oder Steighöhe $MD = h$. Nehmen wir nun an, daß das Pendel von A nach G gefallen sei, und setzen wir die dieser Bewegung entsprechende Fallhöhe $DH = x$, so können wir die in G erlangte Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gx}$$

und das Zeittheilchen, innerhalb dessen der Wegtheil GK durchlaufen wird,

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

setzen. Beschreiben wir nun aus der Mitte O von $MD = h$ und mit dem Halbmesser $OM = OD = \frac{1}{2}h$ einen Halbkreis MND, so können wir von diesem einen Bogentheil NP angeben, welcher mit GK gleiche Höhe $PQ = KL = RH$ hat und in einfacher Beziehung zu diesem Wegtheile GK steht. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GKL und CGH ist

$$\frac{GK}{KL} = \frac{CG}{GH},$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH}.$$

Dividiren wir daher diese beiden Proportionen durch einander und berücksichtigen wir, daß $KL = PQ$ ist, so erhalten wir das Verhältniß der genannten Bogentheile:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG.NH}{GH.ON}.$$

Der Lehre vom Kreise, und insbesondere dem Theorem von der mittleren Proportionallinie zufolge ist aber

$$\overline{GH}^2 = MH\,(2\,CM - MH) \text{ und } \overline{NH}^2 = MH\,.\,DH,$$

es folgt daher:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{CG\,.\,\sqrt{DH}}{ON\,.\,\sqrt{2\,CM - MH}} = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r - (h-x)}}$$

und die Zeit zum Durchlaufen eines Wegelementes:

$$\tau = \frac{r\sqrt{x}}{\frac{1}{2}h\sqrt{2r-(h-x)}} \cdot \frac{NP}{\sqrt{2gx}} = \frac{2r}{h\sqrt{2g\,[2r-(h-x)]}} \cdot NP$$

$$= \sqrt{\frac{r}{g}}\,\frac{NP}{h\sqrt{1-\frac{h-x}{2r}}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung gestattet man dem Pendel nur einen kleinen Ausschlag, und es ist deshalb $\frac{h}{2r}$ sowie $\frac{x}{2r}$ und also auch $\frac{h-x}{2r}$ eine so kleine Größe, daß wir sie selbst, sowie ihre höheren Potenzen, außer Acht lassen, und nun

$$\tau = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{NP}{h}$$

setzen können. Die Dauer eines halben Schwunges, oder die Zeit, innerhalb welcher das Pendel den Bogen AM zurücklegt, ist gleich der Summe von allen, den Elementen GK oder NP entsprechenden Zeittheilchen, oder, da $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ ein constanter Factor ist, gleich $\frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Summe aller den Halbkreis DNM bildenden Elemente, d. i. $= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}}$ mal Halbkreis $\left(\frac{\pi h}{2}\right)$ selbst, also

$$t_1 = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi h}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

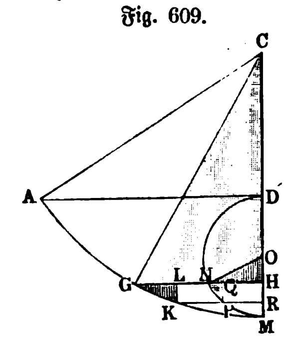
Dieselbe Zeit braucht aber auch das Pendel beim Aufsteigen, weil hier die Geschwindigkeiten dieselben sind und nur in der Richtung entgegengesetzt vorkommen, deshalb ist denn eine ganze Schwingungsdauer doppelt so groß, d. i.

$$t = 2\,t_1 = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schärfere Formel für die Schwingungszeit des Kreispendels. §. 346.

Nimmt man die X-Axe horizontal im tiefsten Punkte M des Kreises, Fig. 609, und die Y-Axe vertical durch den Aufhängungspunkt C an, so ist die Gleichung des Kreises gegeben durch:

Fig. 609.



$$r^2 = x^2 + (r - y)^2 \text{ oder } x^2 = 2\,r y - y^2.$$

Hieraus folgt:

$$2\,x\partial x = (2\,r - 2\,y)\,\partial y \text{ oder } \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{r - y}{x}.$$

Nun hat man allgemein für jede Curve:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial y^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 1\right],$$

also in unserem Falle:

$$\partial s^2 = \partial y^2 \left[\left(\frac{r - y}{x}\right)^2 + 1\right] = \partial y^2 \left[\frac{r^2 - 2\,r y + y^2}{2\,r y - y^2} + 1\right]$$

$$= \partial y^2 \, \frac{r^2}{2\,r y - y^2}.$$

Dividirt man beiderseits mit ∂t^2, so folgt:

$$\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = \frac{\partial y^2}{\partial t^2} \, \frac{r^2}{2\,r y - y^2}.$$

Nun ist aber $\frac{\partial s}{\partial t} = v$, wenn v die Tangentialgeschwindigkeit bedeutet, und da nach dem Princip der lebendigen Kräfte (s. §. 77)

$$v^2 = 2\,g\,(h - y)$$

ist, so hat man die Gleichung:

$$\frac{\partial y^2}{\partial t^2} \, \frac{r^2}{2\,r y - y^2} = 2\,g\,(h - y)$$

oder:

$$\partial t = \frac{r\,\partial y}{\sqrt{2\,g\,(h - y)\,(2\,r y - y^2)}} = {}^1\!/_2 \sqrt{\frac{r}{g}} \, \frac{\partial y}{\sqrt{h y - y^2}} \left(1 - \frac{y}{2\,r}\right)^{-1/2}.$$

Um dies zu integriren, schreiben wir:

$$\left(1 - \frac{y}{2\,r}\right)^{-1/2} = 1 + {}^1\!/_2 \left(\frac{y}{2\,r}\right) + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\left(\frac{y}{2\,r}\right)^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\left(\frac{y}{2\,r}\right)^3 + \cdots$$

Durch Integration folgt nunmehr:

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int\frac{\partial y}{\sqrt{hy - y^2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2r}\right) + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{y}{2r}\right)^2 + \ldots\right].$$

Man kann jetzt jedes einzelne Glied integriren, wenn man die bekannte Recursionsformel benutzt:

$$\int\frac{y^n \partial y}{\sqrt{hy - y^2}} = -\frac{y^{n-1}\sqrt{hy - y^2}}{n} + \frac{(2n-1)h}{2n}\int\frac{y^{n-1}\partial y}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Berücksichtigt man, daß der erste Summand auf der rechten Seite zu Null wird sowohl für $y = 0$, wie für $y = h$, so ergiebt sich durch wiederholte Anwendung obiger Recursionsformel bis zu $n = 0$:

$$\int_0^h\frac{y^n \partial y}{\sqrt{hy - y^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} h^n \int_0^h\frac{\partial y}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Da nun $\int_0^h\frac{\partial y}{\sqrt{hy - y^2}} = arc. sin. \frac{\frac{h}{2} - h}{\frac{h}{2}} - arc. sin. \frac{\frac{h}{2} - 0}{\frac{h}{2}}$

$= arc. sin. (-1) - arc. sin. (+1) = \frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} = \pi$ ist,

so folgt für die Dauer einer halben Schwingung von A nach M:

$$t_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \ldots\right].$$

Da die Geschwindigkeit beim Steigen auf der anderen Seite genau so abnimmt, wie sie beim Durchfallen der Bogenhälfte AM wächst, so ist die Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens oder die sogenannte Schwingungsdauer:

$$t = 2t_1 = \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2\frac{h}{2r} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{h}{2r}\right)^3 + \cdots\right]\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Schwingt das Pendel im Halbkreise, so hat man $h = r$ und daher die Schwingungszeit:

$$t = \left(1 + \tfrac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{225}{18432} + \cdots\right)\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}180\,\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

In den meisten Fällen der Anwendung ist der Schwingungsbogen viel kleiner als der Halbkreis, und die Formel

$$t = \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

hinreichend genau.

Aus dem Elongationswinkel α folgt $\cos. \alpha = \frac{r - h}{r} = 1 - \frac{h}{r}$, also $\frac{h}{r} = 1 - \cos. \alpha$ und daher:

$$\frac{h}{8r} = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos. \alpha}{2} = \frac{1}{4} \left(\sin. \frac{\alpha}{2}\right)^2;$$

es läßt sich folglich hiernach die einem gegebenen Elongationswinkel entsprechende Correction der Schwingungszeit finden. Ist z. B. dieser Winkel $\alpha = 15^0$, so hat man:

$$\frac{h}{8r} = \frac{1}{4} \left(\sin. \frac{15^0}{2}\right)^2 = 0{,}00426,$$

dagegen für $\alpha = 5^0$:

$$\frac{h}{8r} = 0{,}00047;$$

bei dem letzten Elongationswinkel ist also die Schwingungsdauer

$$t = 1{,}00047\, \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Man kann also bei einem Ausschlag unter 5^0 ziemlich genau die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{r} = 1{,}003 \sqrt{r}$$

setzen.

Pendellängen. Da in der Formel §. 347.

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

der Ausschlagswinkel nicht vorkommt, so folgt auch, daß die Dauer kleiner Pendelschwingungen gar nicht von diesem Winkel abhängt, daß also verschiedene, jedoch nicht weit ausschlagende gleich lange Pendel isochron schwingen oder gleiche Schwingungszeiten haben. Ein Pendel mit 4 Grad Ausschlag hat also (fast) dieselbe Schwingungsdauer, als ein Pendel mit 1 Grad Ausschlag.

Vergleichen wir die Schwingungsdauer t mit der Zeit t_1 des freien Falles, so stoßen wir auf Folgendes. Die Zeit zum freien Fallen von der Höhe r ist

$$t_1 = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}},$$

daher folgt

$$t : t_1 = \pi : \sqrt{2};$$

die Zeit eines Pendelschwunges verhält sich also zur Zeit, in welcher ein Körper von einer der Pendellänge gleichen Höhe frei herabfällt, wie die Ludolph'sche Zahl π zur Quadratwurzel aus 2. Die Zeit zum Durchfallen von $2r$ ist:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \,.\, 2r}{g}} = 2\sqrt{\frac{r}{g}};$$

daher verhält sich auch die Schwingungsdauer zur Zeit des Fallens von einer der doppelten Pendellänge gleichen Höhe wie π zu 2.

Setzen wir die den Pendellängen r und r_1 entsprechenden Schwingungszeiten t und t_1, so erhalten wir:

$$t : t_1 = \sqrt{r} : \sqrt{r_1};$$

es verhalten sich also bei einer und derselben Beschleunigung der Schwere die Schwingungszeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Ist dagegen n die Zahl der Schwingungen, welche das eine Pendel in einer gewissen Zeit, z. B. in der Minute, macht, und n_1 die Zahl der Schwingungen, welche in derselben Zeit vom anderen Pendel gemacht werden, so hat man:

$$t : t_1 = \frac{1}{n} : \frac{1}{n_1},$$

daher umgekehrt:

$$n : n_1 = \sqrt{r_1} : \sqrt{r},$$

d. h. die Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen. Das viermal so lange Pendel giebt also die halbe Schwingungszahl.

Ein Pendel heißt ein Secundenpendel, wenn seine Schwingungsdauer eine Secunde beträgt. Setzen wir in der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, $t = 1$, so bekommen wir die Länge des Secundenpendels $r = \frac{g}{\pi^2}$, für das preußische Fußmaß:

$$r = 3{,}1662 \text{ Fuß} = 38 \text{ Zoll},$$

für das Metermaß aber:

$$r = 0{,}9938 \text{ Meter}.$$

Aus der Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ folgt durch Umkehrung $g = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 r$; es läßt sich also hiernach aus der Länge r eines Pendels und aus der Schwingungsdauer t desselben die Beschleunigung g der Schwere finden. Diese

Methode ist einfacher und sicherer als die Anwendung der Atwood'schen Fallmaschine.

Anmerkung. Durch Pendelbeobachtungen hat man auch die Abnahme der Schwerkraft, von den Polen nach dem Aequator zu, nachgewiesen und deren Größe bestimmt. Diese Abnahme hat ihren Grund in dem Einflusse der Centrifugalkraft, welche aus der täglichen Umdrehung der Erde um ihre eigene Axe entspringt, sowie in der Zunahme der Erdhalbmesser von den Polen nach dem Aequator zu. Die Centrifugalkraft vermindert z. B. im Aequator die Schwere um $\frac{1}{290}$ ihres Werthes (§. 326), während sie unter den Polen selbst Null ist. Ist β die geographische Breite des Beobachtungsortes, so hat man, Pendelbeobachtungen zufolge, an diesem Orte die Acceleration der Schwere:

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259\ cos.\ 2\beta) \text{ in Metern,}$$

also unter dem Aequator, wo $\beta = 0$ also $cos.\ 2\beta = 1$ ist,

$$g = 9{,}8056\ (1 - 0{,}00259) = 9{,}780 \text{ Meter}$$

und unter den Polen, wo $\beta = 90^0$ also $cos.\ 2\beta = cos.\ 180^0 = -1$ ist,

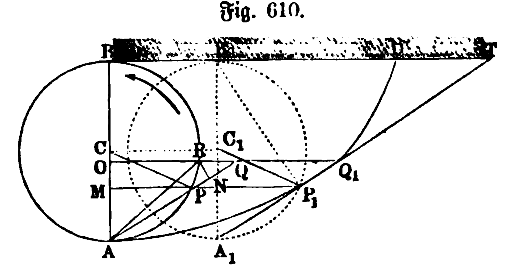
$$g = 9{,}8056\ .\ 1{,}00259 = 9{,}831 \text{ Meter.}$$

Uebrigens ist g auf Bergen kleiner als im Niveau des Meeres.

Cycloide. Man kann auf unendlich mannigfaltige Weise einen Körper in Schwingungen oder hin- und hergehende Bewegungen versetzen, nennt wohl auch jeden in einem solchen Bewegungszustande befindlichen Körper ein Pendel, und unterscheidet hiernach verschiedene Arten von Pendeln, wie z. B. das Kreispendel, welches wir im Vorstehenden betrachtet haben, ferner das Cycloidenpendel, wo der Körper in Folge seiner Schwere in einem Cycloidenbogen hin- und herschwingt, ferner das Torsionspendel, wo der Körper in Folge der Torsion eines Fadens oder Drahtes schwingt, u. s. w. Hier möge nur noch vom Cycloidenpendel die Rede sein. §. 348.

Die Cycloide AP_1D, Fig. 610, ist eine krumme Linie, welche von jedem Punkte A eines Kreises APB beschrieben wird, der sich auf einer geraden Linie BD wälzt. Hat sich dieser Erzeugungskreis um $BB_1 = CC_1$ fortgewälzt, ist er also in die Lage A_1B_1 gekommen, so hat er sich auch um den Bogen $AP = A_1P_1 = BB_1 = PP_1$ gedreht, es ist folglich die irgend einer Abscisse AM entsprechende Ordinate MP_1 = Ordinate MP des Kreises plus Drehungsbogen AP. Bei diesem Wälzen dreht sich der Erzeugungskreis um den jedesmaligen Berührungspunkt in der Grundlinie BD; steht er also in A_1B_1, so dreht er sich um B_1 und beschreibt dadurch das Bogenelement P_1Q_1 der Cycloide; es ist folglich

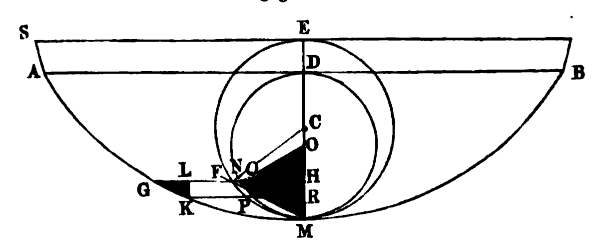
Fig. 610.



die Sehne $B_1 P_1$ die Richtung der Normale und die Sehne $A_1 P_1$ die der Tangente $P_1 T$ im Punkte P_1 der Cycloide. Die bis zur Ordinate $O Q_1$ reichende Verlängerung PQ der Sehne AP ist auch gleich dem Cycloidenelemente $P_1 Q_1$; da ferner der Weg PR des Drehens gleich ist dem Wege RQ des Fortschreitens, so ist PQ Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes PRQ und gleich der doppelten Linie PN, welche das Perpendikel RN abschneidet; endlich ist aber PN die Differenz von zwei benachbarten Sehnen AR und AP und folglich das Cycloidenelement $P_1 Q_1 =$ der doppelten Sehnendifferenz $(AR - AP)$. Da die stetig auf einander folgenden Bogenelemente zusammen einen ganzen Bogen AP_1 und ebenso die sämmtlichen Sehnendifferenzen die ganze Sehne AP ausmachen, so ist hiernach die Länge des Cycloidenbogens AP_1 gleich dem Doppelten der ihm zugehörigen Kreissehne AP. Der halben Cycloide $AP_1 D$ entspricht der Durchmesser als Kreissehne; es ist daher die Länge der halben Cycloide gleich dem doppelten Durchmesser ($2\,AB$) des Erzeugungskreises.

§. 349. **Cycloidenpendel.** Aus den im Vorstehenden gefundenen Eigenschaften der Cycloide läßt sich nun die Theorie des Cycloidenpendels oder die Formel für die Zeit der Schwingung eines Körpers in einem Cycloidenbogen leicht entwickeln. Es sei AKM, Fig. 611, die Hälfte des Cycloidenbogens,

Fig. 611.



in welchem ein Körper fällt und steigt oder oscillirt, und ME sei der Erzeugungskreis, also $CE = CM = r$ der Halbmesser desselben. Hat der Körper den Bogen AG durchlaufen, ist er also von der Höhe $DH = x$ herabgefallen (vergl. §. 345), so hat er die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ erlangt, mit welcher er das Bogenelement GK in der Zeit

$$\tau = \frac{GK}{v} = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$$

durchläuft. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke GLK und FHM ist aber

$$\frac{GK}{KL} = \frac{FM}{MH}$$

oder, da $\overline{FM}^2 = MH \,.\, ME$,

$$\frac{GK}{KL} = \frac{\sqrt{MH.ME}}{MH} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}};$$

wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke NPQ und ONH ist

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{NH}$$

oder, da $\overline{NH}^2 = MH.DH$,

$$\frac{NP}{PQ} = \frac{ON}{\sqrt{MH.DH}}.$$

Nun ist $KL = PQ$, daher folgt durch Division:

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{ME}}{\sqrt{MH}} \cdot \frac{\sqrt{MH.DH}}{ON} = \frac{\sqrt{ME.DH}}{ON}$$

oder, da ON die halbe Fallhöhe $= \frac{h}{2}$, $ME = 2r$ und $DH = x$ ist,

$$\frac{GK}{NP} = \frac{\sqrt{2rx}}{{}^1\!/_2 h} = \frac{2\sqrt{2rx}}{h}.$$

Setzt man nun $GK = \frac{2\sqrt{2rx}}{h} \cdot \overline{NP}$ in die Formel $\tau = \frac{GK}{\sqrt{2gx}}$, so erhält man:

$$\tau = \frac{2\sqrt{2rx}}{h\sqrt{2gx}} \cdot \overline{NP} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \overline{NP}.$$

Die Zeit des Fallens von A bis M ist nun die Summe aller Werthe von τ, welche man erhält, wenn man für NP nach und nach alle Theile des Halbkreises DNM einführt, also

$$= \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} \text{mal Halbkreis } DNM \left(\frac{\pi}{2}h\right).$$

Auf diese Weise erhält man die Zeit zum Durchfallen des Bogens AM:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}h \cdot \frac{2}{h}\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

und da die Zeit des Steigens im Bogen MB ebenso groß ist, die Schwingungszeit oder Zeit zum Durchlaufen des ganzen Bogens AMB:

$$t = 2t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Da diese Größe ganz unabhängig ist von der Bogenlänge, so folgt, daß mathematisch genau die Schwingungszeiten für alle Bögen einer und derselben Cycloide gleich sind, das Cycloidenpendel also vollkommen isochron

schwingt. Vergleichen wir diese Formel mit derjenigen für die Schwingungsdauer eines Kreispendels, so folgt, daß die Schwingungszeiten für beide Pendelarten einander gleich sind, wenn die Länge des Kreispendels gleich ist dem vierfachen Halbmesser von dem Erzeugungskreise des Cycloidenpendels.

Auf analytischem Wege bestimmt sich die Schwingungsdauer des Cycloidenpendels wie folgt: Nimmt man AH, Fig. 612, als X-Axe und AB als Y-Axe an, so ist, unter φ den Wälzungswinkel des erzeugenden Kreises verstanden,

$$x = r\,(\varphi + sin.\,\varphi) \text{ und } y = r\,(1 - cos.\,\varphi),$$

daraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = r\,(1 + cos.\,\varphi) \text{ und } \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\,sin.\,\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich durch Division:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{sin.\,\varphi}{1 + cos.\,\varphi} = \frac{\frac{1}{r}\sqrt{r^2 - (r-y)^2}}{1 + \frac{1}{r}\,(r - y)} = \sqrt{\frac{y}{2r - y}}.$$

Man erhält also:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial y^2\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right) = \partial y^2\left(1 + \frac{2r - y}{y}\right) = \partial y^2\,\frac{2r}{y}.$$

Man hat daher jetzt wieder nach dem Princip der lebendigen Kräfte, wie beim Kreispendel (§. 346),

$$\frac{\partial s^2}{\partial t^2} = v^2 = 2g\,(h - y) = \frac{\partial y^2}{\partial t^2}\,\frac{2r}{y},$$

woraus sich ergiebt:

$$\partial t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\partial y}{\sqrt{hy - y^2}}.$$

Hieraus folgt allgemein:

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\int\frac{\partial y}{\sqrt{hy - y^2}} = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot arc.\,cos.\,\frac{2y - h}{h},$$

und wenn man für y die Grenzwerthe h und Null einsetzt, ergiebt sich die Dauer einer halben Schwingung von C bis A:

$$t_1 = \sqrt{\frac{r}{g}}\,[arc.\,cos.\,1 - arc.\,cos.\,(-1)] = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

wie oben.

Anmerkung. Um einen an einem biegsamen Faden hängenden Körper in einem Cycloidenbogen schwingen lassen zu können und dadurch ein Cycloidenpendel herzustellen, hängt man denselben zwischen zwei Cycloidenbögen CO und CO_1, Fig. 612, auf, so daß sich der Faden bei jedem Ausschlage von dem einen Bogen ab- und auf den anderen aufwickelt. Daß bei diesem Ab- und Aufwickeln des Fadens COP der Endpunkt P desselben eine der gegebenen Cycloide gleiche Curve beschreibt, daß also die Evolvente der Cycloide eine gleiche Cycloide in umgekehrter Lage ist, läßt sich einfach so darthun. So wie die Länge der halben Cycloide $COA = CD = 2AB$ ist, ebenso hat man den Bogen $OA =$ der

abgewickelten Geraden OP; aber Bogen OA ist $=$ zweimal Sehne $AF = 2GO$, daher auch $PG = GO = AF$ und $HN = AE$. Beschreibt man nun über $DH = AB$ einen Halbkreis DKH, und zieht man die Ordinate NP, so hat man $KH = PG$ und daher auch

Fig. 612.

$PK = GH = AH - AG = AH - FO =$ Bog. AFB — Bog. AF $=$ Bog. $BF =$ Bog. DK,

und endlich die Ordinate $NP =$ Kreisordinate NK plus entsprechender Bogen DK; es ist also NP die Ordinate einer Cycloide DPA, welche dem Erzeugungskreise DKH entspricht.

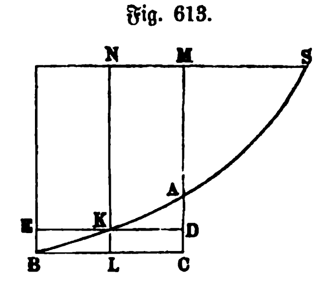
Ueber die Anwendung des Cycloidenpendels bei Uhren s. „Jahrbücher des polytechn. Institutes in Wien", Bd. 20, Art. II. Auch Prechtl's technologische Encyklopädie, B. 19.

Die Curve der kürzesten Fallzeit. Es läßt sich mittels des höheren Calcüls nachweisen, daß die Cycloide außer dieser Eigenschaft des Isochronismus oder Tautochronismus auch noch die des Brachystochronismus besitzt, daß sie nämlich diejenige Linie zwischen zwei gegebenen Punkten ist, in welcher ein Körper in der kürzesten Zeit von dem einen Punkte nach dem anderen herabfällt. §. 350.

Der Beweis hierzu läßt sich, nach Jacob Bernoulli, auf folgende Weise führen.

Es sei die relative Lage zweier Punkte A und B, Fig. 613, durch den verticalen Abstand $AC = a$ und den horizontalen Abstand $BC = b$ und die einer horizontalen Linie DE durch den verticalen Abstand $AD = h$ gegeben; man sucht den Punkt K, in welchem ein von A nach B fallender Körper die Linie DE durchschneiden muß, um in der kürzesten Zeit von A nach B zu gelangen. Kommt der Körper in A mit der Geschwindigkeit v an, so ist die Geschwindigkeit in K:

Fig. 613.



$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh};$$

setzen wir nun voraus, daß die Punkte A, K und B einander unendlich nahe liegen, oder daß a, b und h sehr klein sind gegen v, so können wir auch annehmen, daß AK gleichförmig mit der Geschwindigkeit v und KB gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_1 durchlaufen werde, daß also die Zeit zum Durchfallen des Weges AKB

$$t = \frac{AK}{v} + \frac{KB}{v_1} \text{ sei.}$$

Bezeichnen wir DK durch z, so haben wir:

$$AK = \sqrt{h^2 + z^2} \text{ und } KB = \sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}$$

und daher:

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + z^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}}{v_1}.$$

Diese Zeit wird nun ein Minimum, wenn wir ihr erstes Differenzialverhältniß, d. i.

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{z}{v\sqrt{h^2 + z^2}} - \frac{b-z}{v_1 \sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}} = \text{Null}$$

setzen.

Nun ist aber

$$\frac{z}{\sqrt{h^2 + z^2}} = \frac{KD}{KA} = cos.\ AKD = cos.\ \varphi$$

und

$$\frac{b-z}{\sqrt{(a-h)^2 + (b-z)^2}} = \frac{BL}{BK} = cos.\ KBL = cos.\ \varphi_1,$$

wofern wir die Neigungswinkel der Wege AK und KB gegen den Horizont mit φ und φ_1 bezeichnen; daher erhalten wir als Bedingungsgleichung:

$$\frac{cos.\ \varphi}{v} = \frac{cos.\ \varphi_1}{v_1}.$$

Setzen wir die den Geschwindigkeiten v und v_1 entsprechenden Fallhöhen $MA = y$ und $NK = y_1$, also

$$v = \sqrt{2gy} \text{ und } v_1 = \sqrt{2gy_1},$$

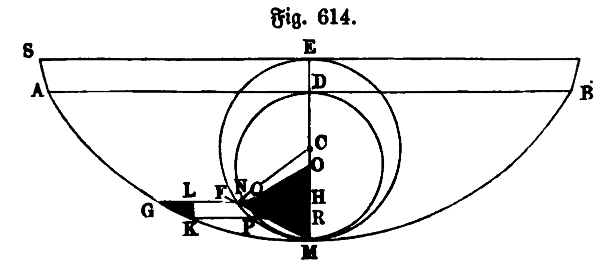
so geht unsere Gleichung in folgende

$$\frac{cos.\ \varphi}{\sqrt{y}} = \frac{cos.\ \varphi_1}{\sqrt{y_1}}$$

über, und wenden wir nun unseren Fall auf das Fallen in einer krummlinigen Bahn $SAKB$ an, so folgt hiernach, daß für jede Stelle in dieser Curve der Quotient $\frac{cos.\ \varphi}{\sqrt{y}}$ eine constante Zahl, etwa $= \frac{1}{\sqrt{2r}}$ ist.

Diese Eigenschaft entspricht aber einer Cycloide SGM, Fig. 614, denn es ist für ein Wegelement GK dieser Curve:

Fig. 614.



$$\cos. \varphi = \frac{GL}{GK} = \frac{FH}{FM} = \frac{\sqrt{MH.EH}}{\sqrt{MH.EM}} = \sqrt{\frac{EH}{EM}} = \sqrt{\frac{y}{2r}}$$

und daher:

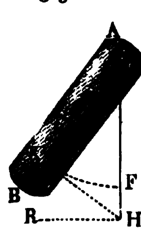
$$\frac{\cos. \varphi}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

wobei r den Halbmesser $CM = CE$ des Erzeugungskreises EFM bezeichnet.

Es ist also ein Cycloidenbogen SG derjenige, in welchem ein Körper in der kürzesten Zeit von einem Punkte S nach einem anderen G herabfällt.

Das materielle Pendel. Um die Schwingungszeit eines zusammengesetzten Pendels oder irgend eines um eine horizontale Axe C schwingenden Körpers AB, Fig. 615, zu finden, suchen wir zunächst den Mittelpunkt des Schwunges oder Schwingungspunkt, d. i. denjenigen Punkt K des Körpers auf, welcher, wenn er für sich allein um C schwingt oder ein mathematisches Pendel ausmacht, dieselbe Schwingungsdauer hat wie der ganze Körper. Man sieht leicht ein, daß es dieser Erklärung zufolge mehrere Schwingungspunkte in einem Körper giebt; gewöhnlich meint man aber nur denjenigen von ihnen, welcher mit dem Schwerpunkte in einem und demselben Perpendikel zur Umdrehungsaxe liegt. §. 351.

Fig. 615.



Aus dem veränderlichen Ausschlagswinkel $KCF = \varphi$ folgt die Beschleunigung des isolirten Punktes K:

$$= g \sin. \varphi,$$

weil man sich vorstellen kann, daß derselbe von einer schiefen Ebene mit der Neigung $KHR = KCF = \varphi$ herabgleitet. Ist aber Mk^2 das Trägheitsmoment des ganzen Körpers oder der Körperverbindung AB in Hinsicht auf die Axe C, Ms dessen statisches Moment, d. i. das Product aus der Masse und aus dem Abstande $CS = s$ ihres Schwerpunktes S von der Umdrehungsaxe C und r die Entfernung CK des Schwingungspunktes K von der Umdrehungsaxe oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem materiellen Pendel AB isochron schwingt, so hat man die auf K reducirte Masse:

$$= \frac{Mk^2}{r^2}$$

und die dahin reducirte Umdrehungskraft:

$$= \frac{s}{r} Mg \sin. \varphi;$$

folglich die Beschleunigung:

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}} = \frac{s}{r}\, Mg \sin.\varphi : \frac{Mk^2}{r^2} = \frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \sin.\varphi.$$

Damit dieses Pendel mit dem mathematischen einerlei Schwingungsdauer habe, ist nöthig, daß beide an jeder Stelle ihrer Bewegung einerlei Beschleunigung besitzen, daß also

$$\frac{Msr}{Mk^2} \cdot g \sin.\varphi = g \sin.\varphi$$

sei. Diese Gleichung giebt nun:

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Entfernung des Schwingungspunktes vom Drehungspunkte, oder die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten gleiche Schwingungsdauer hat, wenn man das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Pendels durch sein statisches oder Gewichtsmoment dividirt.

Setzt man diesen Werth von r in die Formel $t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$, so erhält man für die Schwingungsdauer eines zusammengesetzten Pendels die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{Mgs}} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{gs}}$$

oder genauer:

$$t = \pi \left(1 + \frac{h}{8r}\right) \sqrt{\frac{k^2}{gs}}.$$

Umgekehrt läßt sich aus der Schwingungsdauer eines aufgehängten Körpers sein Trägheitsmoment finden, indem man setzt:

$$Mk^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 \cdot Mgs \text{ oder } k^2 = \left(\frac{t}{\pi}\right)^2 gs.$$

Anmerkung 1. Um das Trägheitsmoment Mk^2 eines Körpers aus der Schwingungsdauer desselben bestimmen zu können, ist nöthig, daß man das statische Moment $Mgs = Gs$ desselben kenne. Das letztere findet man dadurch, daß man den Körper AC, Fig. 616, durch ein Seil ABD aus seiner Gleichgewichtslage bringt, welches über eine Leitrolle gelegt und durch Gewichte P gespannt wird. Das Perpendikel CN von der Drehungsaxe C gegen die Richtung des Seiles AB ist der Hebelarm a des Gewichtes P, und Pa ist gleich dem Momente $G . \overline{CH}$ des im Schwerpunkte S niederziehenden Gewichtes G. Bezeichnet α den Winkel $VCS = CSH$, um welchen der Körper durch die Kraft P gedreht wird, so hat man noch:

$$\overline{CH} = \overline{CS} \sin.\alpha = s \sin.\alpha,$$

folglich:

$$Gs \sin.\alpha = Pa$$

und das gesuchte statische Moment:

$$Gs = \frac{Pa}{\sin.\alpha}.$$

Anmerkung 2. Ein sehr einfaches und brauchbares Pendel ADF, Fig. 617, besteht in einer Bleikugel A von ungefähr 30 Millimeter Durchmesser und in einem

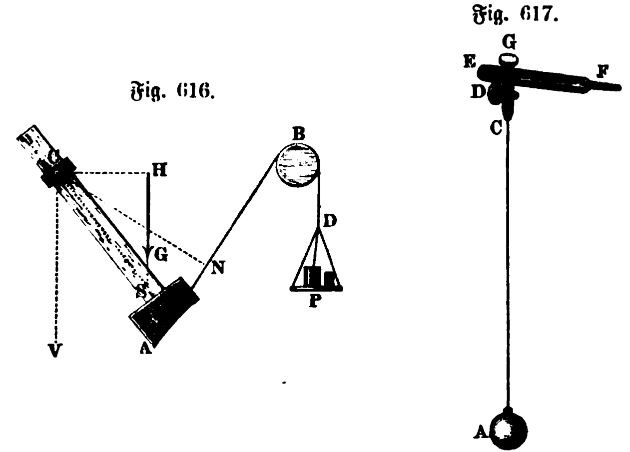


Fig. 616.

Fig. 617.

seidenen Faden, dessen oberes Ende C von einer Zwinge D mit einer Preßschraube festgehalten wird. Diese Zwinge wird durch einen Arm EF gesteckt und mit demselben durch eine Schraube G fest verbunden, nachdem man ihn mittels seines schraubenförmig zugeschnittenen Endes F in einen Thürstock oder einen anderen festen Punkt eingebohrt hat. Bei einer Länge $CA = 0,2485$, also nahe $\frac{1}{4}$ Meter, schlägt dieses Pendel halbe Secunden, und zwar fast eine Stunde lang, wiewohl in immer kleineren und kleineren Bögen.

Beispiele. 1) Für eine gleichförmig dichte prismatische Stange AB, Fig. 618, deren Drehpunkt C um $CA = l_1$ und $CB = l_2$ von den Enden A und B absteht, hat man, wenn F den Querschnitt dieser Stange bezeichnet, das Trägheitsmoment nach §. 311:

$$Mk^2 = \frac{1}{3} F (l_1^3 + l_2^3)$$

und das statische Moment:

$$Ms = \frac{1}{2} F (l_1^2 - l_2^2);$$

es ist daher die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dieser Stange isochron schwingt:

Fig. 618.

B

A

$$r = \frac{Mk^2}{Ms} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^2 - l_2^2} = \frac{l^2 + 3d^2}{6d},$$

wenn l die Summe $l_1 + l_2$ und d die Differenz $l_1 - l_2$ bezeichnet. Soll diese Stange halbe Secunden schlagen, so hat man:

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{\pi^2} = \frac{1}{4} \,.\, 0,9938 = 0,248 \text{ Meter},$$

beträgt aber die ganze Länge der Stange 0,3 Meter, so ist zu setzen:

$$0,248 = \frac{0,09 + 3d^2}{6d} \text{ oder } d^2 - 0,496\,d = -0,03,$$

es folgt daher:

$$d = 0,248 - \sqrt{0,0315} = 0,071 \text{ Meter}$$

und hieraus:

$$l_1 = \frac{l + d}{2} = 0,186 \text{ Meter, sowie } l_2 = \frac{l - d}{2} = 0,114 \text{ Meter.}$$

2) Für ein Pendel mit kugelförmiger Linse AB, Fig. 619, ist, wenn G das Gewicht und l die Länge CA der Stange oder des Fadens, dagegen K das Gewicht der Kugel und r_1 ihren Halbmesser $MA = MB$ bezeichnet:

Fig. 619.

$$r = \frac{\frac{1}{3}Gl^2 + K[(l + r_1)^2 + \frac{2}{5}r_1^2]}{\frac{1}{2}Gl + K(l + r_1)}.$$

Wiegt nun der Draht 0,05 Kilogramm und die Kugel 2 Kilogramm, ist ferner die Länge des Drahtes 0,4 Meter und der Halbmesser der Kugel 0,04 Meter, so hat man die Entfernung des Schwingungspunktes dieses Pendels von der Schwingungsaxe:

$$r = \frac{\frac{1}{3}\,0{,}05 \,.\, 0{,}4^2 + 2\,(0{,}44^2 + \frac{2}{5}\,0{,}04^2)}{\frac{1}{2}\,0{,}05 \,.\, 0{,}4 + 2 \,.\, 0{,}44} = 0{,}4394 \text{ Meter}.$$

Ohne Rücksicht auf den Draht wäre $r = \frac{0{,}3884}{0{,}88} = 0{,}4414$ Meter, und die träge Masse der Kugel in ihrem Centro angenommen, wäre $r = 0{,}44$ Meter. Die Schwingungszeit dieser Kugel ist

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 1{,}003\sqrt{0{,}4394} = 0{,}665 \text{ Secunden}.$$

Anmerkung 3. Aus der Formel $t = \pi\sqrt{\frac{k^2}{g s}}$ erkennt man sofort, daß die Schwingungsdauer t um so größer wird, je kleiner der Abstand s des Schwerpunktes von der Schwingungsaxe ist. Man macht hiervon Gebrauch, wenn es sich darum handelt, Pendel von geringer Länge und doch großer Schwingungsdauer zu construiren. Wollte man z. B., daß die im obigen Beispiele 1) berechnete Pendelstange ganze Secunden schlage, also mit einem mathematischen Pendel von 0,9938 Meter Länge isochron sei, so läßt sich dies, obschon die Stange nur eine Länge von 0,3 Meter hat, durch eine geeignete Aufhängung derselben jederzeit erreichen. Man hat dann nämlich die Gleichung:

$$r = 0{,}9938 = \frac{0{,}3^2 + 3\,d^2}{6\,d} \text{ oder } d^2 - 1{,}9876\,d = -\,0{,}03,$$

woraus $d = 0{,}015$ Meter folgt, so daß die beiden Pendelarme

$$l_1 = \frac{l + d}{2} = 0{,}1575 \text{ und } l_2 = \frac{l - d}{2} = 0{,}1425 \text{ Meter}$$

werden.

Im Allgemeinen erkennt man hieraus, daß jede Verlängerung eines materiellen Pendels rückwärts über die Drehaxe hinaus die Schwingungsdauer vergrößern muß, indem hierdurch der Schwerpunkt des ganzen Pendels der Drehungsaxe entsprechend näher gerückt, d. h. s verkleinert, somit r vergrößert wird.

§. 352. **Reciprocität des Aufhängepunktes und des Schwingungspunktes.** Es sei S der Schwerpunkt eines materiellen Pendels AB, Fig. 620, der Abstand SC der Schwingungsaxe C vom Schwerpunkte sei a, das Trägheitsmoment für eine Axe, die im Schwerpunkte parallel der Drehaxe ist, sei W_s, so ist nach §. 307 das Trägheitsmoment für die Umdrehungsaxe:

$$W_c = W_s + Ma^2$$

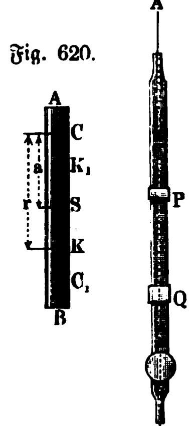
und also die Entfernung des Schwingungspunktes von der Drehaxe:

$$CK = r = \frac{W_c}{Ma} = \frac{W_s + Ma^2}{Ma} = \frac{W_s}{Ma} + a.$$

Es möge nun das Pendel in dem Punkte K aufgehängt werden, welcher den Abstand $r - a$ vom Schwerpunkte hat, so ist jetzt die Länge r_1 des mit dem Pendel isochronen einfachen Pendels durch dieselbe Formel gegeben, wenn man darin für den Schwerpunktsabstand a den nunmehrigen Werth $r - a$ einsetzt; es wird dann:

Fig. 620.

Fig. 621.



$$r_1 = \frac{W_s}{M(r - a)} + r - a.$$

Setzt man für $r - a$ den Werth aus der obigen Formel $\frac{W_s}{Ma}$ ein, so folgt:

$$r_1 = \frac{W_s}{M\frac{W_s}{Ma}} + \frac{W_s}{Ma} = a + \frac{W_s}{Ma} = r.$$

Man erkennt hieraus, daß der Schwingungspunkt mit dem Aufhängepunkte vertauscht werden kann, ohne daß die Schwingungsdauer eine andere wird. Es wird also C zum Schwingungspunkte, wenn K als Aufhängepunkt gewählt wird.

Man benutzt diese Eigenschaft bei dem sogenannten, zuerst von Bohnenberger vorgeschlagenen und später von Kater angewendeten Reversionspendel AB, Fig. 621, welches mit zwei schneidigen Axen C und K ausgerüstet ist, die so gegen einander gestellt sind, daß die Schwingungszeiten dieselben bleiben, das Pendel mag um die eine oder um die andere Axe schwingen. Um nicht die Axen gegen einander verstellen zu müssen, werden noch zwei Laufgewichte P und Q angebracht, wovon das kleinere durch eine feine Schraube gestellt werden kann. Hat man durch Verschieben oder Einstellen dieser Laufgewichte es dahin gebracht, daß die Schwingungsdauer dieselbe ist, das Pendel mag um C oder um K schwingen, so bekommt man in der Entfernung CK beider Schneiden von einander die Länge r des einfachen Pendels, welches mit dem Reversionspendel gleichzeitig schwingt, und es ergiebt sich nun die Schwingungsdauer durch die Formel:

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Aus der obigen Formel für die Länge r eines mit einem zusammengesetzten Pendel isochronen einfachen Pendels

$$r = \frac{W_s}{Ma} + a$$

ergiebt sich ohne Weiteres, daß ein in C, Fig. 620, aufgehängtes Pendel von beliebiger Form dieselbe Schwingungsdauer auch dann noch haben muß, wenn es in einem Punkte C_1 aufgehängt wird, welcher von S um dieselbe Größe a entfernt ist, wie C, und es ist ebenfalls deutlich, daß der zu C_1 als Aufhängungspunkt gehörige Schwingungspunkt K_1 von S denselben Abstand haben muß wie K von S. Man erkennt daraus, daß es für jedes Pendel vier in gerader Linie liegende Punkte C, K, C_1 und K_1 giebt, für welche als Aufhängepunkte das Pendel dieselbe Schwingungsdauer hat. Sollen die beiden Punkte C und K_1 sich decken, in welchem Falle natürlich auch K und C_1 zusammenfallen, so hat man $SC = SK$, d. h. $a = r - a$ zu setzen. Es führt dies zu der Bedingung

$$a = \frac{W_s}{Ma} \text{ oder } Ma^2 = W_s.$$

Bezeichnet man W_s mit Mk^2, so hat man:

$$Ma^2 = Mk^2 \text{ oder } a = k,$$

d. h. es muß die Entfernung des Aufhängepunktes von dem Schwerpunkte gleich sein dem Trägheitshalbmesser des Pendels (für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe).

Diese Beziehungen gelten übrigens nicht nur für stabförmige, sondern ganz allgemein für alle Körper. Ist AB, Fig. 622, ein beliebig geformter Körper, dessen Schwerpunkt S ist, so giebt es für jeden um S beschriebenen Kreis CC_1, dessen Radius a ist, einen zweiten Kreis KK_1 vom Halbmesser $r - a = \frac{W_s}{Ma}$ von solcher Beschaffenheit, daß den vier Durchschnittspunkten C, K, C_1, K_1 dieser beiden Kreise mit einem beliebigen Durchmesser gleiche Schwingungsdauer entspricht, vorausgesetzt, daß die Aufhängungsaxen durch diese Punkte parallel zu derjenigen Schwerpunktsaxe angenommen werden, auf welche W_s bezogen ist. Je größer der eine Kreis CC_1 wird, desto kleiner wird sein Gegenkreis KK_1, und beide fallen zusammen in den Kreis CK_1KC_1, sobald der Abstand SC gleich dem Trägheitshalbmesser k angenommen wird.

Fig. 622.

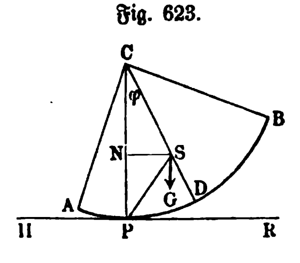
In diesem Falle wird r ein Minimum, wie man sich leicht überzeugt, wenn man aus $r = \frac{Mk^2}{Ma} + a$ den Werth $\frac{\partial r}{\partial a}$ entwickelt und gleich Null setzt, dies ergiebt:

$$\frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{k^2}{a^2} + 1 = 0 \text{ oder } a = k.$$

§. 353. **Wälzendes Pendel.** Mit dem Schwingen eines Pendels läßt sich auch das Schaukeln oder Wiegen eines Körpers mit walzenförmigem Fuße vergleichen. Dieses Wiegen ist zwar, wie jede andere wälzende Bewegung, aus einer progressiven und einer Drehbewegung zusammengesetzt, allein es läßt sich auch annehmen, daß es aus einer einfachen Drehung mit veränderlicher Drehaxe bestehe. Diese Drehaxe ist aber der Stützpunkt P, womit der

schaukelnde Körper ABC, Fig. 623, auf der horizontalen Basis HR aufruht. Ist der Halbmesser $CD = CP$ der walzenförmigen Basis $ADB = r$ und der Abstand CS des Schwerpunktes S des ganzen Körpers vom Mittelpunkte C dieser Basis $= s$, so hat man für die dem Drehungswinkel $SCP = \varphi$ entsprechende Entfernung $SP = y$ des Schwerpunktes vom Drehungspunkte:

Fig. 623.



$$y^2 = r^2 + s^2 - 2rs\cos.\varphi$$
$$= (r - s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Bezeichnen wir noch das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Hinsicht auf den Schwerpunkt S durch Mk^2, so erhalten wir das Trägheitsmoment in Hinsicht auf den Stützpunkt P:

$$W = M(k^2 + y^2) = M\left[k^2 + (r - s)^2 + 4rs\left(\sin.\frac{\varphi}{2}\right)^2\right],$$

wofür bei kleinen Schwingungswinkeln $M[k^2 + (r - s)^2 + rs\varphi^2]$ oder gar nur $M[k^2 + (r - s)^2]$ gesetzt werden kann. Da nun das Kraftmoment $= G.\overline{SN} = Mg.\overline{CS}\sin.\varphi = Mgs\sin.\varphi$ ist, so folgt die Winkelacceleration für die Drehung um P:

$$\varkappa = \frac{\text{Kraftmoment}}{\text{Trägheitsmoment}} = \frac{Mgs\sin.\varphi}{M[k^2 + (r - s)^2]} = \frac{gs\sin.\varphi}{k^2 + (r - s)^2}.$$

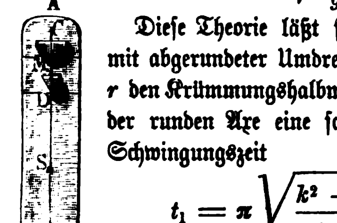
Beim einfachen Pendel ist dieselbe $= \frac{g\sin.\varphi}{r_1}$, wenn r_1 dessen Länge bezeichnet; sollen daher beide isochron schwingen, so muß sein:

$$\frac{gs\sin.\varphi}{k^2 + (r - s)^2} = \frac{g\sin.\varphi}{r_1}, \text{ d. i. } r_1 = \frac{k^2 + (r - s)^2}{s}.$$

Die Schwingungszeit der Wiege ist hiernach:

$$t = \pi\sqrt{\frac{r_1}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (r - s)^2}{gs}}.$$

Fig. 624.



Diese Theorie läßt sich auch auf ein Pendel AB, Fig. 624, mit abgerundeter Umdrehungsaxe CM anwenden, wenn man statt r den Krümmungshalbmesser CM dieser Axe einführt. Wäre statt der runden Axe eine schneidige Axe D angebracht, so würde die Schwingungszeit

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{k^2 + \overline{DS}^2}{g.DS}} = \pi\sqrt{\frac{k^2 + (s - x)^2}{g(s - x)}}$$

betragen, wofern der Abstand CD der Schneide D vom Mittelpunkte C der runden Axe durch x bezeichnet wird. Beide Pendel haben nun gleiche Schwingungszeiten, wenn

$$\frac{k^2 + (s - x)^2}{s - x} = \frac{k^2 + (r - s)^2}{s} \text{ oder } \frac{k^2}{s - x} - x = \frac{k^2 + r^2}{s} - 2r$$

ist. Schreiben wir $\frac{k^2}{s - x} = \frac{k^2}{s} + \frac{k^2 x}{s^2}$ annähernd, und vernachlässigen wir r^2, so erhalten wir:

$$x = \frac{2 r s^2}{s^2 - k^2}.$$

Anmerkung. Von dem conischen Pendel ist unter dem Artikel „Regulator" im dritten Theile die Rede.

Im Supplementbande wird von den schwingenden Bewegungen ausführlich gehandelt.

Fünftes Capitel.

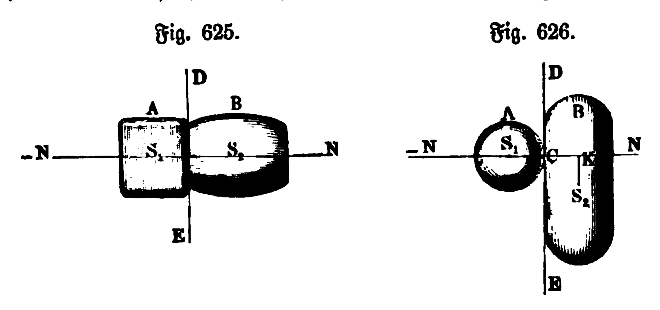
Die Lehre vom Stoße.

§. 354. **Stoss überhaupt.** Vermöge der Undurchdringlichkeit der Materie können zwei Körper gleichzeitig nicht einen und denselben Raum einnehmen. Kommen aber zwei bewegte Körper so mit einander in Berührung, daß einer in den Raum des anderen einzudringen sucht, so findet eine Wechselwirkung zwischen beiden statt, welche eine Veränderung in den Bewegungszuständen dieser Körper zur Folge hat. Diese Wechselwirkung ist es, welche man Stoß nennt.

Die Verhältnisse des Stoßes hängen zunächst von dem Gesetze der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§. 67) ab; während des Stoßes drückt der eine Körper genau ebenso stark auf den anderen, wie dieser in entgegengesetzter Richtung auf jenen. Die im Berührungspunkte der beiden Körper auf der gemeinschaftlichen Berührungsebene senkrechte Gerade ist die Richtung der Stoßkraft. Befinden sich die Schwerpunkte beider Körper in dieser Linie, so heißt der Stoß ein centrischer oder Centralstoß, außerdem aber ein excentrischer Stoß. Die Körper A und B in Fig. 625 geben einen centrischen Stoß, weil ihre Schwerpunkte S_1 und S_2 in der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene DE liegen; von den Körpern A und B in Fig. 626 stößt A centrisch und B excentrisch, weil S_1 in und S_2 außerhalb der Normal- oder Stoßlinie $N\overline{N}$ befindlich ist.

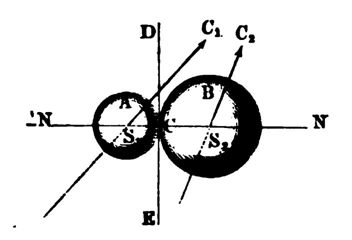
In Hinsicht auf die Bewegungsrichtung unterscheidet man den geraden Stoß und den schiefen Stoß von einander. Beim geraden Stoße

Fig. 625. Fig. 626.



fallen die Bewegungsrichtungen beider Körper in die Stoßlinie; wenn dies nicht der Fall ist, wird der Stoß ein schiefer genannt. Bewegen sich z. B. die Körper A und B, Fig. 627, in Richtungen $S_1 C_1$ und $S_2 C_2$, welche von der Normalen oder Stoßlinie $N\overline{N}$ abweichen, so findet ein schiefer Stoß statt, während derselbe ein gerader wäre, wenn diese Bewegungsrichtungen mit $N\overline{N}$ zusammenfielen.

Fig. 627.



Außerdem unterscheidet man noch den Stoß freier Körper und den Stoß ganz oder theilweise unterstützter Körper von einander.

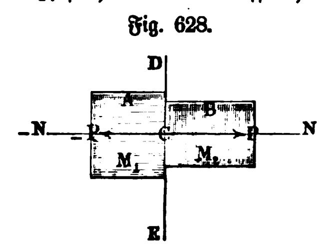
Die Zeit während der Mittheilung oder Veränderung der Bewegung durch den Anstoß ist zwar sehr klein, aber keineswegs unendlich klein; sie hängt, sowie die Stoßkraft selbst, von Masse, Geschwindigkeit und Elasticität der zum Stoße gelangenden Körper ab. Man kann diese Zeit aus zwei Perioden bestehend annehmen. In der ersten Periode drücken die Körper einander zusammen, und in der zweiten dehnen sich dieselben ganz oder zum Theil wieder aus. Durch das Zusammendrücken wird die Elasticität zur Wirkung gebracht, welche sich mit der Trägheit ins Gleichgewicht setzt und eben dadurch den Bewegungszustand der zusammenstoßenden Körper verändert. Wird bei dem Zusammendrücken die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, geht also der Körper am Ende des Stoßes in seine vorige Gestalt vollkommen wieder zurück, so nennen wir den Körper einen vollkommen elastischen; nimmt aber der Körper am Ende des Stoßes seine vorige Form nicht vollständig wieder an, so heißt der Körper unvollkommen §. 355.

elastisch, und behält endlich der Körper die durch das Maximum des Zusammendrückens erhaltene Form, besitzt er also gar kein Bestreben zum Ausdehnen, so wird er ein unelastischer Körper genannt. Jedenfalls ist aber diese Eintheilung nur in Beziehung auf eine gewisse Stärke des Stoßes als richtig anzunehmen; denn es ist möglich, daß ein und derselbe Körper bei einem schwachen Stoße sich noch elastisch und bei einem starken Stoße unelastisch zeigt. Streng genommen giebt es zwar weder einen vollkommen elastischen, noch einen vollkommen unelastischen Körper; doch nennen wir in der Folge solche Körper elastische, welche nach dem Stoße ihre ursprüngliche Gestalt annähernd wieder annehmen, und diejenigen unelastische, welche durch den Stoß bedeutende bleibende Formveränderungen erleiden (vergl. §. 206).

In der praktischen Mechanik werden die zum Stoße gelangenden Körper, wie z. B. Holz, Eisen u. s. w., sehr oft als unelastische angesehen, weil dieselben entweder an und für sich eine kleine Elasticität besitzen, oder durch Wiederholung der Stöße ihre Elasticität größtentheils verlieren. Uebrigens ist es eine wichtige Regel, Stöße bei Maschinen und Bauwerken so viel wie möglich zu vermeiden oder zu mäßigen oder in elastische zu verwandeln, weil durch dieselben Erschütterungen und große Abnutzungen, oft sogar Brüche herbeigeführt werden, und weil dieselben einen Theil der Leistung der Maschinen consumiren.

§. 356. **Centralstoss.** Entwickeln wir zunächst die Gesetze des geraden Centralstoßes frei beweglicher Körper. Denken wir uns die Stoßzeit aus lauter gleichen Theilen τ bestehend und nehmen wir an, daß die Stoßkraft während des ersten Zeittheilchens $= P_1$, während des zweiten P_2, während des dritten P_3 sei u. s. w. Ist nun die Masse des einen Körpers A, Fig. 628, $= M_1$, so hat man die entsprechenden Accelerationen:

Fig. 628.



$$p_1 = \frac{P_1}{M_1},\ p_2 = \frac{P_2}{M_1},$$
$$p_3 = \frac{P_3}{M_1} \text{ u. s. w.}$$

Nach §. 19 ist aber die einer Acceleration p und einem Zeittheilchen τ entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$\varkappa = p\tau;$$

es sind daher für den vorliegenden Fall die elementaren Geschwindigkeitsveränderungen:

$$\varkappa_1 = \frac{P_1 \tau}{M_1},\ \varkappa_2 = \frac{P_2 \tau}{M_1},\ \varkappa_3 = \frac{P_3 \tau}{M_1} \text{ u. s. w.}$$

und es ist die in einer gewissen endlichen Zeit erfolgte Geschwindigkeitszunahme resp. Abnahme der Masse M_1:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \cdots = (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_1},$$

sowie die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung der Masse B von der Größe M_2:

$$= (P_1 + P_2 + P_3 + \cdots)\frac{\tau}{M_2}.$$

Bei dem folgenden oder stoßenden Körper A wirkt die Stoßkraft der Geschwindigkeit c_1 entgegen, es findet folglich hier eine Geschwindigkeitsabnahme statt, und es ist die nach einer gewissen Zeit noch übrig bleibende Geschwindigkeit dieses Körpers:

$$v_1 = c_1 - (P_1 + P_2 + \cdots)\frac{\tau}{M_1};$$

bei dem vorangehenden oder gestoßenen Körper B hingegen wirkt die Stoßkraft in der Bewegungsrichtung, es erhält daher die Geschwindigkeit c_2 einen Zuwachs und es geht dieselbe in

$$v_2 = c_2 + (P_1 + P_2 + \cdots)\frac{\tau}{M_2}$$

über.

Eliminiren wir aus beiden Gleichungen $(P_1 + P_2 + \cdots)\,\tau$, so bleibt uns die allgemeine Formel:

I. $M_1\,(c_1 - v_1) = M_2\,(v_2 - c_2)$ oder
$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2$.

Man bezeichnet wohl das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers durch den Namen **Bewegungsmoment** und kann hiernach behaupten: **in jedem Augenblicke der Stoßzeit ist die Summe der Bewegungsmomente ($M_1 v_1 + M_2 v_2$) beider Körper eben so groß wie vor dem Stoße.**

Im Augenblicke des größten Zusammendrückens haben beide Körper einerlei Geschwindigkeit v, setzen wir daher diesen Werth statt v_1 und v_2 in die gefundene Gleichung, so bleibt:

$$M_1 v + M_2 v = M_1 c_1 + M_2 c_2,$$

und es ergiebt sich die Geschwindigkeit beider Körper im Augenblicke der **stärksten Zusammendrückung**:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}.$$

Sind die Körper A und B unelastisch, besitzen sie also nach dem Zusammendrücken kein Bestreben, sich wieder auszudehnen, so hört alle Mittheilung oder Veränderung der Bewegung auf, wenn beide Körper bis aufs Maximum zusammengedrückt sind, und es gehen daher auch beide nach dem Stoße mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fort.

Beispiele. 1) Bewegt sich ein unelastischer Körper B von 30 Kilogramm Gewicht mit 3 Meter Geschwindigkeit, und trifft ihn ein anderer unelastischer Körper A von 50 Kilogramm mit 7 Meter Geschwindigkeit, so gehen beide nach dem Zusammentreffen mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{50 . 7 + 30 . 3}{50 + 30} = \frac{350 + 90}{80} = \frac{44}{8} = 5\tfrac{1}{2} \text{ Meter}$$

fort.

2) Um einen Körper von 120 Kilogramm Gewicht aus einer Geschwindigkeit $c_2 = 1\frac{1}{2}$ Meter in eine Geschwindigkeit v von 2 Meter zu versetzen, läßt man ihn von einem 50 Kilogramm schweren Körper stoßen; welche Geschwindigkeit muß dieser haben? Hier ist

$$c_1 = v + \frac{(v - c_2) M_2}{M_1} = 2 + \frac{(2 - 1,5) . 120}{50} = 2 + \frac{6}{5} = 3,2 \text{ Meter.}$$

§. 357. **Elastischer Stoss.** Sind die zum Stoße gelangenden Körper vollkommen elastisch, so dehnen sie sich, nachdem sie sich in der ersten Periode zusammengedrückt haben, in der zweiten Periode der Stoßzeit allmälig wieder aus, bis sie am Ende der Stoßdauer ihre ursprüngliche Gestalt wieder angenommen haben. In Folge hiervon wird dem gestoßenen Körper eine fernere Beschleunigung ertheilt, während der stoßende Körper eine fernere Verzögerung erleidet. Da aber die mechanische Arbeit, welche aufzuwenden ist, um einen elastischen Körper zusammenzudrücken, gleich ist der Arbeit, welche derselbe bei seiner Ausdehnung wieder ausgiebt, so findet beim Stoße zwischen elastischen Körpern ein Verlust an lebendiger Kraft nicht statt, und es gilt daher für denselben noch folgende zweite Gleichung:

$$\text{II.} \quad M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 \text{ oder}$$
$$M_1 (c_1^2 - v_1^2) = M_2 (v_2^2 - c_2^2).$$

Aus den Gleichungen I. und II. lassen sich nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Körper nach dem Stoße finden. Zuerst folgt durch Division:

$$\frac{c_1^2 - v_1^2}{c_1 - v_1} = \frac{v_2^2 - c_2^2}{v_2 - c_2},$$

d. i.:

$$c_1 + v_1 = v_2 + c_2 \text{ oder } v_2 - v_1 = c_1 - c_2 .$$

Setzt man nun den sich hieraus ergebenden Werth

$$v_2 = c_1 + v_1 - c_2$$

in die Gleichung I., so folgt:

$$M_1 v_1 + M_2 v_1 + M_2 (c_1 - c_2) = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ oder}$$
$$(M_1 + M_2)\, v_1 = (M_1 + M_2)\, c_1 - 2 M_2 (c_1 - c_2),$$

wodurch sich nun herausstellt:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} \text{ und}$$

$$v_2 = c_1 - c_2 + c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Während bei unelastischen Körpern der Verlust an Geschwindigkeit des stoßenden Körpers

$$c_1 - v = c_1 - \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

ist, fällt hiernach bei elastischen Körpern derselbe doppelt so groß, nämlich

$$c_1 - v_1 = \frac{2 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

aus, und während bei unelastischen Körpern der Geschwindigkeitsgewinn des gestoßenen Körpers

$$v - c_2 = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2} - c_2 = \frac{M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

beträgt, stellt sich bei elastischen Körpern derselbe zu

$$v_2 - c_2 = \frac{2 M_1 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

ebenfalls doppelt so groß heraus.

Beispiel. Zwei vollkommen elastische Kugeln, die eine von 10 Kilogramm, die andere von 16 Kilogramm Gewicht, stoßen mit den Geschwindigkeiten 12 Meter und 6 Meter gegen einander, welches sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße? Es ist hier $M_1 = 10$ und $c_1 = 12$ Meter, sowie $M_2 = 16$ und $c_2 = -6$ Meter zu setzen, daher ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{2 . 16 (12 + 6)}{10 + 16} = \frac{2 . 16 . 18}{26} = 22{,}154 \text{ Meter},$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des anderen:

$$v_2 - c_2 = \frac{2 . 10 . 18}{26} = 13{,}846 \text{ Meter};$$

es prallt hiernach der erste Körper nach dem Stoße mit $v_1 = 12 - 22{,}154 = -10{,}154$ Meter, und der andere Körper mit $-6 + 13{,}846 = 7{,}846$ Meter Geschwindigkeit zurück. Uebrigens ist das Maß der lebendigen Kraft beider Körper nach dem Stoße

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = 10 . 10{,}154^2 + 16 . 7{,}846^2 = 1031 + 985 = 2016$$

ebenso groß wie vor dem Stoße, nämlich:

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 = 10 . 12^2 + 16 . 6^2 = 1440 + 576 = 2016.$$

Wären diese Körper unelastisch, so würde der erste nur $\frac{c_1 - v_1}{2} = 11,077$ Meter an Geschwindigkeit verlieren, und der andere $\frac{v_2 - c_2}{2} = 6,923$ Meter gewinnen; es würde also der erste Körper nach dem Stoße noch die Geschwindigkeit $12 - 11,077 = 0,923$ Fuß behalten, und der zweite die Geschwindigkeit $-6 + 6,923 = 0,923$ annehmen, übrigens aber der Arbeitsverlust

$[2016 - (10 + 16)\, 0,923^2] : 2g = (2016 - 22,2) \,.\, 0,051 = 101,7$ Meterkilogramm entstehen.

§. 358. **Besondere Fälle.** Die in den vorstehenden Paragraphen entwickelten Formeln für die Endgeschwindigkeiten des Stoßes gelten natürlich auch dann noch, wenn der eine Körper in Ruhe ist, oder wenn sich beide Körper einander entgegen bewegen, oder wenn eine Masse unendlich groß ist in Hinsicht auf die andere u. s. w. Ist die Masse M_2 in Ruhe, so hat man $c_2 = 0$, daher für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

dagegen für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1 \text{ und}$$

$$v_2 = 0 + \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2} = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1.$$

Laufen die Körper einander entgegen, ist also c_2 negativ, so folgt für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_1 c_1 - M_2 c_2}{M_1 + M_2},$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - \frac{2 M_2 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}, \text{ sowie } v_2 = - c_2 + \frac{2 M_1 (c_1 + c_2)}{M_1 + M_2}.$$

Sind in diesem Falle die Bewegungsmomente einander gleich, ist also $M_1 c_1 = M_2 c_2$, so ist beim unelastischen Stoße $v = 0$, d. h. die Körper versetzen einander in Ruhe; bei elastischen Körpern ist aber

$$v_1 = c_1 - \frac{2 (M_2 c_1 + M_1 c_1)}{M_1 + M_2} = c_1 - 2 c_1 = - c_1 \text{ und}$$

$$v_2 = - c_2 + \frac{2 (M_2 c_2 + M_1 c_2)}{M_1 + M_2} = - c_2 + 2 c_2 = + c_2;$$

dann kehren also die Körper nach dem Stoße mit entgegengesetzten Geschwindigkeiten zurück. Sind hingegen die Massen einander gleich, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{c_1 - c_2}{2},$$

dagegen für elastische:

$$v_1 = - c_2 \text{ und } v_2 = c_1,$$

d. h. dann gehen die Massen mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Laufen die Massen wieder in gleicher Richtung, und ist die vorausgehende Masse M_2 unendlich groß, so hat man für unelastische Körper:

$$v = \frac{M_2 c_2}{M_2} = c_2$$

und für elastische:

$$v_1 = c_1 - 2 (c_1 - c_2) = 2 c_2 - c_1, v_2 = c_2 + 0 = c_2;$$

es wird also die Geschwindigkeit der unendlich großen Masse durch den Anstoß der endlichen Masse nicht abgeändert. Ist nun noch die unendlich große Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat man für unelastische Körper:

$$v = 0$$

und für elastische:

$$v_1 = - c_1, v_2 = 0;$$

dann bleibt also auch die unendlich große Masse in Ruhe, es verliert aber im ersteren Falle der anstoßende Körper seine Geschwindigkeit vollständig, und es wird dieselbe im zweiten Falle in die entgegengesetzte verwandelt.

Der Stoß bringt nach dem Vorhergehenden immer gewisse Aenderungen in den Geschwindigkeiten der einzelnen Massen hervor, die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der zusammenstoßenden Massen wird aber in keinem Falle durch den Stoß abgeändert. Nach dem Gesetze des Schwerpunktes (§. 298) geht nämlich die Bewegung eines beliebigen Massensystems so vor sich, als ob alle Massentheilchen in dem Schwerpunkte des Systems vereinigt wären, und in diesem Punkte auch alle äußeren Kräfte angriffen. In dem Falle des Zusammenstoßens sind äußere Kräfte nicht vorhanden, indem die Massen mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegend vorausgesetzt sind, und die durch den Stoß rege gemachten Kräfte innere sind, die sich paarweise aufheben. Aus diesem Grunde kann die Bewegung des Schwerpunktes der zusammenstoßenden Massen durch den Stoß nicht geändert werden, und es muß dieser Schwerpunkt vor, während und nach dem Stoße mit gleicher Geschwindigkeit und in derselben Richtung sich bewegen.

Beispiele. 1) Mit welcher Geschwindigkeit ist ein Körper von 8 Kilogramm an einen ruhenden Körper von 25 Kilogramm anzustoßen, damit der letztere eine Geschwindigkeit von 2 Meter annimmt? Wären die Körper unelastisch, so hätte man zu setzen:

$$v = \frac{M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

d. i.:

$$2 = \frac{8 . c_1}{8 + 25},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_4 = 8^1/_4 \text{ Meter}$$

die gesuchte Geschwindigkeit; wären sie aber elastisch, so hätte man:

$$v_2 = \frac{2 M_1 c_1}{M_1 + M_2},$$

daher:

$$c_1 = {}^{33}/_8 = 4^1/_8 \text{ Meter}.$$

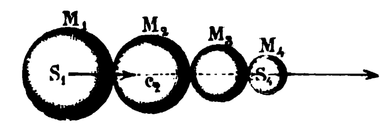
2) Trifft eine Masse M_1, Fig. 629, die ruhende Masse $M_2 = n M_1$ mit der Geschwindigkeit c_1, so hat man bei vollkommener Elasticität dieser Massen die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} c_1 = \frac{1 - n}{1 + n} c_1 \text{ und } v_2 = \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} c_1 = \frac{2}{1 + n} c_1.$$

Trifft die Masse M_2 mit dieser durch den Stoß erlangten Geschwindigkeit v_2 die Masse $M_3 = n M_2 = n^2 M_1$, so haben wir nach dem Stoße die Geschwindigkeiten von M_2 und M_3:

$$v_2' = \frac{M_2 - M_3}{M_2 + M_3} v_2 = \frac{1 - n}{1 + n} \cdot \frac{2}{1 + n} c_1 \text{ und } v_3 = \frac{2 M_2}{M_2 + n M_2} v_2 = \left(\frac{2}{1 + n}\right)^2 c_1.$$

Fig. 629.



Die letzte ($z$te) Masse M_z hat, wenn das Verhältniß je zweier auf einander folgender Massen gleich n ist, die Geschwindigkeit $v_z = \left(\frac{2}{1 + n}\right)^{z-1} . c_1$, und die vorletzte Masse M_{z-1}, welche gegen M_z mit der Geschwindigkeit

$$v_{z-1} = \left(\frac{2}{1 + n}\right)^{z-2} . c_1$$

stieß, hat nach dem Stoße die Geschwindigkeit $v'_{z-1} = \frac{1 - n}{1 + n} \left(\frac{2}{1 + n}\right)^{z-2} c_1$.

Ist z. B. das Gewicht jeder Masse nur halb so groß, wie das der vorhergehenden, also $n = \frac{1}{2}$, so folgt

$$v_2 = \frac{4}{3} c_1, v_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 c_1 \cdots, v_{10} = \left(\frac{4}{3}\right)^9 c_1 = 13{,}32\, c_1 \text{ und}$$

$$v_1 = \frac{1}{3} c_1, v_2' = \frac{4}{9} c_1, v_3' = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2 c_1 \cdots, v_9' = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^8 c_1 = 3{,}33\, c_1.$$

Sind die Massen sämmtlich von gleicher Größe, ist also $n = 1$, so folgt für die letzte ($z$te) Masse:

$$v_z = c_1$$

und für alle anderen:

$$v_1 = 0,\ v_2' = 0,\ v_3' = 0 \cdots v'_{z-1} = 0,$$

d. h. die erste Masse M_1 giebt ihre Geschwindigkeit c_1 an die letzte Masse M_z ab, und alle zwischen diesen befindlichen Massen verbleiben in Ruhe.

Arbeitsverlust. Beim Zusammenstoßen unelastischer Massen findet stets ein Verlust an lebendiger Kraft statt, weshalb die Massen nach dem Stoße nicht so viel Arbeit zu verrichten vermögen, wie vor dem Stoße. Vor dem Stoße enthalten die mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 fortgehenden Massen M_1 und M_2 die lebendige Kraft: §. 359.

$$M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2,$$

nach dem Stoße haben aber die mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

fortgehenden Massen die lebendige Kraft:

$$M_1 v^2 + M_2 v^2;$$

es giebt daher die Subtraction dieser Kräfte den Verlust an lebendiger Kraft durch den Anstoß:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1 + v)(c_1 - v) - M_2 (c_2 + v)(v - c_2);$$ da nun

$$M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2) = \frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2}$$

ist, so folgt:

$$K = (c_1 + v - c_2 - v)\frac{M_1 M_2 (c_1 - c_2)}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}.$$

Sind die Gewichte der Massen G_1 und G_2, ist also

$$M_1 = \frac{G_1}{g} \text{ und } M_2 = \frac{G_2}{g},$$

so hat man hiernach den Verlust an mechanischer Arbeit oder Leistung:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Man nennt $\frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ das harmonische Mittel aus G_1 und G_2 und kann hiernach behaupten: der Verlust an Leistung, welcher durch den Stoß zweier unelastischen Massen herbeigeführt und auf die Formveränderung derselben verwendet wird, ist gleich dem Producte aus dem harmonischen Mittel beider Massen und aus der Fallhöhe, welche der Differenz der Geschwindigkeiten dieser Massen entspricht.

Uebrigens läßt sich auch setzen:

$$K = M_1 (c_1^2 - v^2) + M_2 (c_2^2 - v^2)$$
$$= M_1 (c_1^2 - 2 c_1 v + v^2 + 2 c_1 v - 2 v^2) + M_2 (c_2^2 - 2 c_2 v + v^2 + 2 c_2 v - 2 v^2)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + 2 M_1 v (c_1 - v) + M_2 (c_2 - v)^2 + 2 M_2 v (c_2 - v)$$
$$= M_1 (c_1 - v)^2 + M_2 (c_2 - v)^2,$$

weil $M_1 (c_1 - v) = M_2 (v - c_2)$ ist.

Hiernach ist also die durch den unelastischen Stoß verlorene lebendige Kraft gleich der Summe von den Producten aus den Massen und den Quadraten ihrer Geschwindigkeitsverluste oder Geschwindigkeitsgewinne.

Ist eine der Massen, z. B. M_2, in Ruhe, so hat man den Arbeitsverlust:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2},$$

und ist die bewegte Masse M_1 sehr groß gegen die ruhende, so verschwindet G_2 gegen G_1, und es bleibt:

$$A = \frac{c_1^2}{2g} G_2.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einer Maschine in jeder Minute 16 Stöße zwischen den unelastischen Massen

$$M_1 = \frac{1000}{g} \text{ Kilogramm und } M_2 = \frac{1200}{g} \text{ Kilogramm}$$

mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 5$ Meter und $c_2 = 2$ Meter erfolgen, so ist ihr Verlust an Leistung in Folge dieser Stöße:

$$A = {}^{16}/_{60} \cdot \frac{(5-2)^2}{2g} \cdot \frac{1000 . 1200}{2200} = {}^{4}/_{15} \, . \, 9 \, . \, 0{,}051 \, . \, {}^{6000}/_{11} = 1{,}836 \, . \, {}^{400}/_{11}$$

$= 66{,}77$ Meterkilogramm per Secunde.

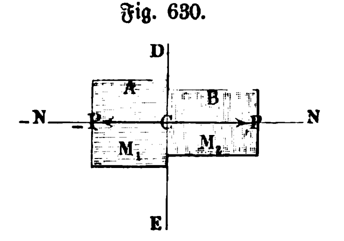
2) Wenn auf einer Eisenbahn zwei Wagenzüge von 60000 Kilogramm und 80000 Kilogramm Gewicht mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 6$ und $c_2 = 4$ Meter gegen einander stoßen, so entsteht ein auf die Zerstörung der Locomotive und Wagen verwendeter Arbeitsverlust, welcher bei vollständigem Mangel an Elasticität der zum Stoße gelangenden Theile

$$A = \frac{(6+4)^2}{2g} \cdot \frac{60000 . 80000}{140000} = 100 \, . \, 0{,}051 \, . \, \frac{480000}{14} = 174857 \text{ Meterkilogr.}$$

beträgt.

§. 360. **Härte.** Kennt man die Elasticitätsmodel der zum Stoße gelangenden Körper, so kann man auch die Kraft des Zusammendrückens und die Größe desselben finden. Es seien von den Körpern A und B, Fig. 630, die Querschnitte F_1 und F_2, die Längen l_1 und l_2 und die Elasticitätsmodul E_1 und E_2. Stoßen beide mit einer Kraft P gegen einander, so sind die bewirkten Zusammendrückungen nach §. 210:

Fig. 630.



$$\lambda_1 = \frac{P l_1}{F_1 E_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P l_2}{F_2 E_2},$$

und es ist das Verhältniß derselben:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{F_2 E_2}{F_1 E_1} \cdot \frac{l_1}{l_2}.$$

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen $\frac{F_1 E_1}{l_1}$ durch H_1, sowie $\frac{F_2 E_2}{l_2}$ durch H_2, so erhalten wir:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} \text{ und } \lambda_2 = \frac{P}{H_2},$$

sowie:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{H_2}{H_1}.$$

Nennen wir nach dem Beispiele Whewell's (s. The Mechanics of Engineering §. 207) die Größe $\frac{FE}{l}$ die Härte eines Körpers, so folgt, daß die Tiefen der Zusammendrückungen den Härten umgekehrt proportional sind.

Stößt eine Masse $M = \frac{G}{g}$ mit der Geschwindigkeit c auf eine unbewegliche oder unendlich große Masse, so verwendet sie ihre ganze lebendige Kraft auf das Zusammendrücken, es ist daher (nach §. 212):

$$\frac{1}{2} P\lambda = \frac{Mc^2}{2} = \frac{c^2}{2g} G.$$

Nun ist aber der Weg λ gleich der Summe von den Zusammendrückungen λ_1 und λ_2 und $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$, sowie $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$, es folgt daher:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = P\left(\frac{1}{H_1} + \frac{1}{H_2}\right) = \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} P,$$

sowie umgekehrt:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \lambda,$$

und die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{1}{2} \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \lambda^2 = \frac{c^2}{2g} G,$$

also:

$$\lambda = c\sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \cdot \frac{G}{g}},$$

woraus sich nun P, λ_1 und λ_2 berechnen lassen.

Beispiel. Schlägt man einen schmiedeeisernen Hammer von 25 Quadratcentimeter Basis und 0,150 Meter Höhe mit einer Geschwindigkeit von 6 Meter auf eine Bleiplatte von 12 Quadratcentimeter Basis und 0,025 Meter Dicke, so stellen sich folgende Verhältnisse heraus. Der Elasticitätsmodul des Schmiede-

eisens ist $E_1 = 20000$ und der des Bleies $E_2 = 500$, daher sind die Härten dieser Körper:

$$H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1} = \frac{2500 \,.\, 20000}{150} = 333333 \text{ und}$$

$$H_2 = \frac{F_2 E_2}{l_2} = \frac{1200 \,.\, 500}{25} = 24000.$$

Das Gewicht G des Hammers ist, wenn das specifische Gewicht des Eisens zu 7,7 angenommen wird:

$$G = 0{,}25 \,.\, 1{,}5 \,.\, 7{,}7 = 2{,}89 \text{ Kilogramm,}$$

folglich ergiebt sich $\frac{G}{g}$, worin g in Millimetern zu nehmen ist, da E_1 und E_2 sich auf diese Einheit beziehen, zu $-\frac{G}{g} = \frac{2{,}89}{9810} = 0{,}000295$.

Setzt man nun diese Werthe in die Formel $\lambda = c\sqrt{\frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \,.\, \frac{G}{g}}$ ein, so erhält man den Weg des Hammers beim Zusammendrücken:

$$\lambda = 6000\sqrt{\frac{357333 \,.\, 0{,}000295}{333333 \,.\, 24000}} = 0{,}69 \text{ Millimeter.}$$

Hieraus folgt die Stoßkraft:

$$P = \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\lambda = \frac{333333 \,.\, 24000}{357333}\, 0{,}69 = 15462{,}2 \text{ Kilogramm,}$$

ferner die Zusammendrückung des Hammers:

$$\lambda_1 = \frac{P}{H_1} = \frac{15462{,}2}{333333} = 0{,}046 \text{ Millimeter}$$

und die der Bleiplatte:

$$\lambda_2 = \frac{P}{H_2} = \frac{15462{,}2}{24000} = 0{,}644 \text{ Millimeter.}$$

§. 361. **Elastisch-unelastischer Stoss.** Bewegen sich zwei Massen M_1 und M_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hinter einander her, so ist im Augenblicke der größten Zusammendrückung die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider nach §. 356:

$$v = \frac{M_1 c_1 + M_2 c_2}{M_1 + M_2}$$

und die auf die Zusammendrückung verwendete Arbeit nach §. 359:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}.$$

Nun läßt sich diese Arbeit auch

$$A = \frac{1}{2} P\lambda = \frac{1}{2} P(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \lambda^2$$

setzen, es ergiebt sich folglich die Summe der Zusammendrückungen beider Massen:

$$\lambda = (c_1 - c_2)\sqrt{\frac{G_1 G_2}{g(G_1 + G_2)} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

woraus sich nun die zusammendrückende Kraft P und die Zusammendrückungen λ_1 und λ_2 der einzelnen Massen finden lassen.

Sind die Massen unelastisch, so bleiben diese Zusammendrückungen auch nach dem Stoße; ist aber eine von beiden Massen elastisch, so dehnt sich dieselbe in einer zweiten Periode wieder aus, und die daraus erwachsende Arbeit erzeugt eine neue Geschwindigkeitsveränderung. Ist z. B. die Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ elastisch, so wird in dieser zweiten Periode des Stoßes die Arbeit:

$$\frac{1}{2} P \lambda_1 = \frac{1}{2} \frac{P^2}{H_1} = \frac{1}{2 H_1} \left(\frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2}\right)^2 \lambda^2$$
$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

frei. Man hat daher in diesem Falle für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße die Formeln:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 v^2 + M_2 v^2 + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$
$$= M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

d. i.:

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2 - (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2}.$$

Setzt man den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - v_1 = x$, so hat man den Geschwindigkeitsgewinn:

$$v_2 - c_2 = \frac{M_1 x}{M_2},$$

und es nimmt die letzte Gleichung die Form:

$$x(2c_1 - x) - x\left(2c_2 + \frac{M_1 x}{M_2}\right) - (c_1 - c_2)^2 \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0$$

oder:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} x^2 - 2(c_1 - c_2)x + (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1}{H_1 + H_2} = 0 \text{ an.}$$

Multiplicirt man dieselbe mit $\frac{M_2}{M_1 + M_2}$ und setzt man

$$\frac{H_1}{H_1 + H_2} = 1 - \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

so erhält man die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 2(c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}x + (c_1 - c_2)^2\left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2$$
$$= (c_1 - c_2)^2\left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2}$$

oder:

$$\left(x - (c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 = (c_1 - c_2)^2\left(\frac{M_2}{M_1 + M_2}\right)^2 \cdot \frac{H_2}{H_1 + H_2},$$

deren Auflösung den Geschwindigkeitsverlust x des ersten Körpers giebt:

$$x = c_1 - v_1 = (c_1 - c_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right)$$

und den Geschwindigkeitsgewinn des anderen Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2)\frac{M_1}{M_1 + M_2}\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Beispiel. Wenn man annimmt, daß in dem Beispiele des vorigen Paragraphen der eiserne Hammer vollkommen elastisch und die Bleiplatte ganz unelastisch ist, so erhält man den Geschwindigkeitsverlust des mit 6 Meter Geschwindigkeit auffallenden 2,89 Kilogramm schweren Hammers, da $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$ zu setzen ist:

$$c_1 - v_1 = c_1\left(1 + \sqrt{\frac{H_2}{H_1 + H_2}}\right) = 6\left(1 + \sqrt{\frac{24000}{357333}}\right) = 6(1 + 0{,}259) = 7{,}554 \text{ M.},$$

daher die Geschwindigkeit des Hammers nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - 7{,}554 = 6 - 7{,}554 = -1{,}554 \text{ Meter.}$$

Die Geschwindigkeit der unterstützten Bleiplatte bleibt natürlich Null.

§. 362. **Unvollkommen elastischer Stoss.** Sind die an einander stoßenden Körper unvollkommen elastisch, so dehnen sich dieselben in der zweiten Periode der Stoßzeit nur zum Theil wieder aus, es wird also auch die beim Comprimiren in der ersten Periode verbrauchte lebendige Kraft in der zweiten Periode nicht vollständig wieder ausgegeben. Sind wieder λ_1 und λ_2 die Tiefen der Eindrücke, und ist P die Stoßkraft, so hat man die Arbeitsverluste beim Comprimiren $= \frac{1}{2}P\lambda_1$ und $\frac{1}{2}P\lambda_2$. Wird nun beim Ausdehnen hiervon das μfache, oder allgemeiner, beim Ausdehnen des einen Körpers das μ_1- und beim Ausdehnen des zweiten das $\mu_2$fache zurückgegeben, so bleibt der gesammte Arbeitsverlust nach dem Stoße:

$$A = \frac{1}{2}P\left[(1 - \mu_1)\lambda_1 + (1 - \mu_2)\lambda_2\right],$$

oder $\lambda_1 = \frac{P}{H_1}$ und $\lambda_2 = \frac{P}{H_2}$ gesetzt:

$$A = \frac{1}{2}P^2\left[\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right].$$

Nach dem vorigen Paragraphen ist aber

$$P = \frac{H_1 H_2 \lambda}{H_1 + H_2} \text{ und } \lambda = (c_1 - c_2) \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2}},$$

daher ergiebt sich der in Frage gestellte Arbeitsverlust:

$$A = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{H_1 H_2}{H_1 + H_2} \left(\frac{1 - \mu_1}{H_1} + \frac{1 - \mu_2}{H_2}\right)$$

$$= \frac{(c_1 - c_2)^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \left(1 - \frac{\mu_1 H_2 + \mu_2 H_1}{H_1 + H_2}\right).$$

Um nun die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nach dem Stoße zu finden, haben wir die Gleichungen:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 c_1 + M_2 c_2 \text{ und}$$

$$M_1 v_1^2 + M_2 v_2^2 = M_1 c_1^2 + M_2 c_2^2$$

$$- (c_1 - c_2)^2 \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{(1 - \mu_1) H_2 + (1 - \mu_2) H_1}{H_1 + H_2}$$

mit einander zu verbinden und aufzulösen. Ganz auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen ergiebt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right)$$

und der Geschwindigkeitsgewinn des vorangehenden Körpers:

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} \left(1 + \sqrt{\frac{\mu_2 H_1 + \mu_1 H_2}{H_1 + H_2}}\right).$$

Diese beiden allgemeinen Formeln enthalten auch die Gesetze des vollkommen elastischen und des unelastischen Stoßes. Setzt man in ihnen $\mu_1 = \mu_2 = 1$, so erhält man die schon oben gefundenen Formeln für den Stoß zwischen vollkommen elastischen Körpern, nimmt man aber $\mu_1 = \mu_2 = 0$ an, so erhält man die Formeln des unelastischen Stoßes u. s. w. Sind beide Körper von gleichem Grade der Elasticität, ist also $\mu_1 = \mu_2$, so hat man einfacher:

$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \sqrt{\mu}).$$

Ist noch die Masse M_2 in Ruhe und unendlich groß, so folgt:

$$c_1 - v_1 = c_1 (1 + \sqrt{\mu}), \text{ d. i.:}$$

$$v_1 = - c_1 \sqrt{\mu}, \text{ sowie umgekehrt:}$$

$$\mu = \left(\frac{v_1}{c_1}\right)^2.$$

Läßt man die Masse M_1 von einer Höhe h auf eine fest unterstützte gleichartige Masse M_2 herabfallen, und steigt dieselbe nach dem Aufschlagen auf eine Höhe h_1 zurück, so kann man aus beiden Höhen den Coefficienten der unvollkommenen Elasticität durch die Formel

$$\mu = \frac{h_1}{h}$$

finden. Schon Newton fand auf diese Weise für Elfenbein:

$$\mu = (^8/_9)^2 = {^{64}/_{81}} = 0{,}79,$$

für Glas:

$$\mu = (^{15}/_{16})^2 = 0{,}9375^2 = 0{,}879,$$

für Kork, Stahl, Wolle:

$$\mu = (^5/_9)^2 = 0{,}555^2 = 0{,}309.$$

Hierbei wird jedoch vorausgesetzt, daß der stoßende oder auffallende Körper die Kugel- und der gestoßene Körper oder die Unterlage eine Plattenform hat. Der General Morin ließ Geschützkugeln von 6 bis 20 Kilogramm Gewicht auf verschiedene Massen von Thon, Holz, Gußeisen, welche an einem Federdynamometer oder einer Federwage aufgehangen waren, herabfallen, und fand, daß für Thon und für Holzstücke μ nahe $= 0$, dagegen für Gußeisen μ nahe $= 1$ ist, daß also der Stoß mit den ersteren Körpern als unelastisch, und der mit dem letzteren als vollkommen elastisch angesehen werden kann (s. A. Morin, Notions fondamentales de Mécanique, Art. 67—70).

Beispiel. Welche Geschwindigkeiten nehmen zwei Stahlplatten nach dem Stoße an, wenn dieselben vor dem Stoße die Geschwindigkeiten $c_1 = 10$ und $c_2 = -6$ Meter besitzen, die eine 30 und die andere 40 Kilogramm wiegt? Hier ist

$$c_1 - v_1 = (10 + 6) \cdot {^{40}/_{70}}\,(1 + {^5/_9}) = 16 \cdot {^4/_7} \cdot {^{14}/_9} = \frac{16 \cdot 8}{9} = 14{,}22 \text{ Meter, und}$$

$$v_2 - c_2 = \frac{30}{40} \cdot 14{,}22 \doteq 10{,}66 \text{ Meter,}$$

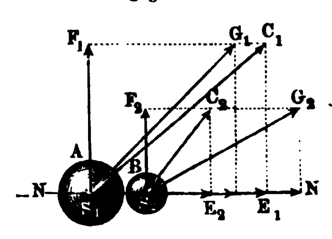
daher sind die gesuchten Geschwindigkeiten:

$$v_1 = c_1 - 14{,}22 = 10 - 14{,}22 = -4{,}22 \text{ Meter und}$$
$$v_2 = c_2 + 10{,}66 = -6 + 10{,}66 = 4{,}66 \text{ Meter.}$$

§. 363. **Schiefer Stoss**. Weichen die Bewegungsrichtungen $\overline{S_1 C_1}$ und $\overline{S_2 C_2}$ zweier Körper A und B, Fig. 631, von der Normale $N\overline{N}$ zur Berührungsebene ab, so ist der Stoß ein schiefer. Wir führen die Theorie desselben auf die des geraden Stoßes zurück, wenn wir die Geschwindigkeiten $S_1 C_1 = c_1$ und $S_2 C_2 = c_2$ nach der Normale und nach der Tangentialrichtung zerlegen. Die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Normale $N\overline{N}$ geben

einen Centralstoß und werden daher auch genau so verändert, wie beim Centralstoß, die mit der Berührungsebene parallelen Geschwindigkeiten hingegen verursachen gar keinen Stoß und bleiben daher unverändert. Vereinigt man die nach den Regeln des Centralstoßes veränderte Normalgeschwindigkeit eines jeden Körpers mit der unveränderten gebliebenen Tangentialgeschwindigkeit, so erhält man die resultirenden Geschwindigkeiten dieser Körper nach dem Stoße. Setzen wir die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen mit der Normale einschließen, α_1 und α_2, also $C_1 S_1 N = \alpha_1$ und $C_2 S_2 N = \alpha_2$, so erhalten wir für die Normalgeschwindigkeiten $S_1 E_1$ und $S_2 E_2$ die Werthe $c_1 \cos.\alpha_1$ und $c_2 \cos.\alpha_2$, dagegen für die Tangentialgeschwindigkeiten $S_1 F_1$ und $S_2 F_2$, $c_1 \sin.\alpha_1$ und $c_2 \sin.\alpha_2$. Durch den Stoß erleiden aber die ersteren Geschwindigkeiten Veränderungen, und es geht die erste über in:

Fig. 631.



$$v_1 = c_1 \cos.\alpha_1 - (c_1 \cos.\alpha_1 - c_2 \cos.\alpha_2)\frac{M_2}{M_1 + M_2}(1 + \sqrt{\mu})$$

und die zweite in:

$$v_2 = c_2 \cos.\alpha_2 + (c_1 \cos.\alpha_1 - c_2 \cos.\alpha_2)\frac{M_1}{M_1 + M_2}(1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern, wie seither, M_1 und M_2 die Massen beider Körper bezeichnen.

Aus v_1 und $c_1 \sin.\alpha_1$ ergiebt sich die resultirende Geschwindigkeit $S_1 G_1$ des ersten Körpers:

$$V_1 = \sqrt{v_1^2 + c_1^2 \sin.\alpha_1^2}$$

und aus v_2 und $c_2 \sin.\alpha_2$ die Geschwindigkeit $S_2 G_2$ des zweiten Körpers:

$$V_2 = \sqrt{v_2^2 + c_2^2 \sin.\alpha_2^2};$$

auch ergeben sich die Abweichungen der Geschwindigkeitsrichtungen von der Normale durch die Formeln:

$$tang.\beta_1 = \frac{c_1 \sin.\alpha_1}{v_1} \text{ und } tang.\beta_2 = \frac{c_2 \sin.\alpha_2}{v_1},$$

wenn β_1 den Winkel $G_1 S_1 N$ sowie β_2 den Winkel $G_2 S_2 N$ bezeichnet.

Beispiel. Zwei Kugeln von 30 und 50 Kilogramm Gewicht stoßen sich mit den Geschwindigkeiten $c_1 = 20$ und $c_2 = 25$ Meter, deren Richtungen um die Winkel $\alpha_1 = 21^0 35'$ und $\alpha_2 = 65^0 20'$ von der Normale der Berührungsebene abweichen, in welchen Richtungen und mit welchen Geschwindigkeiten gehen diese Massen nach dem Stoße fort? Es sind die unveränderlichen Seitengeschwindigkeiten:

$c_1 \sin.\alpha_1 = 20 . \sin. 21^0 35' = 7,357$ Meter und
$c_2 \sin.\alpha_2 = 25 . \sin. 65^0 20' = 22,719$ Meter,

dagegen die veränderlichen:

$$c_1 \cos. \alpha_1 = 20 . \cos. 21^0 35' = 18,598 \text{ Meter und}$$
$$c_2 \cos. \alpha_2 = 25 . \cos. 65^0 20' = 10,433 \text{ Meter.}$$

Sind die Körper unelastisch, so hat man $\mu = 0$, daher die veränderten Normalgeschwindigkeiten:

$v_1 = 18,598 - (18,598 - 10,433) . {}^{50}/_{80} = 18,598 - 5,103 = 13,495$ Meter und
$v_2 = 10,433 + 8,165 . {}^{3}/_{8} = 10,433 + 3,062 = 13,495$ Meter.

Die resultirenden Geschwindigkeiten sind nun:

$$V_1 = \sqrt{13,495^2 + 7,357^2} = \sqrt{236,24} = 15,37 \text{ Meter und}$$
$$V_2 = \sqrt{13,495^2 + 22,719^2} = \sqrt{698,27} = 26,42 \text{ Meter;}$$

für ihre Richtungen hat man:

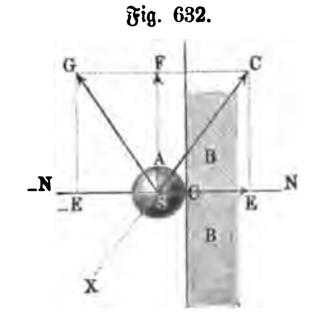
$$tang. \beta_1 = \frac{7,357}{13,495},\ log. tang. \beta_1 = 0,73653 - 1,\ \beta_1 = 28^0 36' \text{ und}$$
$$tang. \beta_2 = \frac{22,719}{13,495},\ log. tang. \beta_2 = 0,22622,\ \beta_2 = 59^0 17'.$$

§. 364. **Stoss gegen eine unendlich grosse Masse.** Trifft die Masse A, Fig. 632, gegen eine andere unendlich große Masse oder gegen ein unbewegliches Hinderniß $B B$, hat man also $c_2 = 0$ und $M_2 = \infty$, so folgt:

$$v_1 = c_1 \cos. \alpha_1 - c_1 \cos. \alpha_1 (1 + \sqrt{\mu}) = - c_1 \cos. \alpha_1 \sqrt{\mu} \text{ und}$$
$$v_2 = 0 + c_1 \cos. \alpha_1 \cdot \frac{M_1 (1 + \sqrt{\mu})}{\infty} = 0.$$

Ist nun noch $\mu = 0$, so wird auch $v_1 = 0$, ist aber $\mu = 1$, so folgt $v_1 = - c_1 \cos. \alpha_1$, d. h. beim unelastischen Stoße geht die Normalgeschwindigkeit ganz verloren, beim elastischen hingegen wird sie in die entgegengesetzte verwandelt. Für den Winkel, um welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße von der Normale abweicht, ist

Fig. 632.



$$tang. \beta_1 = \frac{c_1 \sin. \alpha_1}{v_1} = - \frac{c_1 \sin. \alpha_1}{c_1 \cos. \alpha_1 \sqrt{\mu}}$$
$$= - tang. \alpha_1 \sqrt{\frac{1}{\mu}}.$$

Für unelastische Körper wird also:

$$tang. \beta_1 = - \frac{tang. \alpha_1}{0} = \infty;\ \text{d. i. } \beta_1 = 90^0$$

und für elastische:

$$tang. \beta_1 = - tang. \alpha_1,\ \text{d. i. } \beta_1 = - \alpha_1.$$

Nach dem Stoße eines unelastischen Körpers gegen ein unelastisches Hinderniß geht also der erstere mit der Tangentialgeschwindigkeit $c_1 \sin. \alpha_1$ in

der Richtung SF der Berührungsebene fort, nach dem Stoße eines elastischen Körpers gegen ein elastisches Hinderniß aber geht der Körper mit unveränderter Geschwindigkeit in einer Richtung SG fort, die mit der Normale $N\overline{N}$ und der anfänglichen Richtung XS in eine Ebene fällt, und mit der Normale denselben Winkel $GS\overline{N}$ einschließt, wie die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit ebenderselben auf der entgegengesetzten Seite. Man nennt den Winkel $XS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung vor dem Stoße mit der Normale oder dem Lothe einschließt, den *Einfallswinkel* und den Winkel $GS\overline{N}$, welchen die Bewegungsrichtung nach dem Stoße ebendamit bildet, den *Austritts-* oder *Reflexionswinkel*, und kann hiernach behaupten: *beim vollkommen elastischen Stoße fallen Reflexions- und Einfallswinkel mit dem Einfallslothe in einerlei Ebene, welche die Einfallsebene genannt wird, und es sind beide Winkel einander gleich.*

Beim unvollkommen elastischen Stoße ist das Verhältniß $\sqrt{\mu}$ der Tangenten dieser Winkel gleich dem Verhältnisse der durch die Ausdehnung zurückgegebenen Geschwindigkeit zu der durch die Compression verlorenen Geschwindigkeit. Mit Hülfe dieses Gesetzes läßt sich nun leicht die Richtung finden, in welcher der Körper A, Fig. 633, gegen das unbewegliche Hinderniß BB zu stoßen ist, damit er nach dem Stoße eine gewisse Richtung SY verfolge. Ist der Stoß ein elastischer, so fällen wir von einem Punkte Y der gegebenen Richtung das Perpendikel YO gegen das Einfallsloth $N\overline{N}$, verlängern dasselbe, bis die Verlängerung OY_1 dem Perpendikel selbst gleich wird; SY_1 ist dann die in Frage stehende Stoßrichtung, denn es ist dieser Construction zufolge Winkel $\overline{N}SY_1 = \overline{N}SY$. Ist der Stoß unvollkommen elastisch, so mache man $OY_1 = \sqrt{\mu}\,.\,OY$; dann ist Y_1S ebenfalls die gesuchte Anfangsrichtung, da

Fig. 633.

$$\frac{tang.\,\alpha_1}{tang.\,\beta_1} = \frac{OY_1}{OY} = \sqrt{\mu} \text{ ausfällt.}$$

Fällt man ein Loth YR gegen die Linie SR parallel zur Berührungsebene, und macht man dessen Verlängerung $RX = \overline{RY}\sqrt{\frac{1}{\mu}}$, so bekommt man aus leicht einzusehenden Gründen ebenfalls in SX die gesuchte Einfallsrichtung.

Anmerkung. Die Theorie des schiefen Stoßes findet ihre vorzüglichste Anwendung beim Billardspiel. S. Théorie mathématique des effets du jeu de billard, par Coriolis. Nach Coriolis ist beim Anstoße eines Billardballes gegen die Bande das Verhältniß der zurückgegebenen Geschwindigkeit zur Einfallsgeschwindigkeit = 0,5 bis 0,6, also $\mu = 0{,}5^2 = 0{,}25$ bis $0{,}6^2 = 0{,}36$. Mit Hülfe dieses Werthes läßt sich nun auch die Richtung angeben, in welcher ein Ball A gegen eine Bande BB zu stoßen ist, damit er von dieser nach einem gegebenen Punkte Y zurückgeworfen werde. Man fälle von dem gegebenen Punkte Y das Perpendikel YR gegen die mit der Bande parallel laufende Schwerlinie des Balles, verlängere dasselbe um $RX = \sqrt{\frac{1}{\mu}} = {}^{10}/_6$ bis ${}^{10}/_5$ seines Werthes und ziehe die Gerade $Y_1 X$; der sich herausstellende Durchschnitt D ist die Stelle, nach welcher man den Ball A zu stoßen hat, damit er durch Bricol nach Y gelange. Durch die Drehbewegung des Balles wird dieses Verhältniß allerdings noch etwas geändert.

§. 365. **Stossreibung.** Bei dem schiefen Stoße entsteht auch eine Reibung zwischen den sich stoßenden Körpern, welche die Seitengeschwindigkeiten in der Richtung der Berührungsebene abändert. Die Reibung F des Stoßes bestimmt sich wie die Reibung des Druckes; bezeichnet P die Stoßkraft und φ den Reibungscoefficienten, so ist sie $F = \varphi P$. Sie unterscheidet sich nur insofern von der Reibung des Druckes, als sie, wie der Stoß selbst, nur während einer sehr kleinen Zeit wirksam ist. Die durch sie hervorgebrachten Geschwindigkeitsveränderungen sind aber deshalb nicht unmeßbar klein, denn die Stoßkraft P und folglich auch der Theil φP derselben ist in der Regel sehr groß. Bezeichnet man die stoßende Masse durch M und die durch die Stoßkraft P erzeugte Normalacceleration durch p, so hat man:

$$P = Mp \text{ und daher } F = \varphi Mp,$$

sowie die Verzögerung oder negative Acceleration der Reibung während des Stoßes:

$$\frac{F}{M} = \varphi p;$$

d. i. φmal so groß, wie die der Normalkraft. Nun haben aber die Wirkungen beider Kräfte gleiche Zeitdauer; es ist daher auch die durch die Reibung erzeugte Geschwindigkeitsveränderung φmal so groß, wie die durch den Stoß bewirkte Veränderung in der Normalgeschwindigkeit.

Die Richtigkeit dieser Theorie hat Morin durch Versuche dargethan (s. dessen Notions fondamentales de Mécanique).

In dem Falle, wenn ein Körper mit der Geschwindigkeit c gegen eine unbewegliche Masse BB unter dem Einfallswinkel α, Fig. 634, stößt, ist

nach dem vorigen Paragraphen die Veränderung in der Normalgeschwindigkeit:

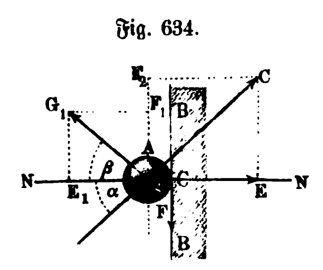


Fig. 634.

$$w = c \cos. \alpha \; (1 + \sqrt{\mu});$$

daher die durch die Reibung bewirkte Veränderung in der Tangentialgeschwindigkeit:

$$= \varphi w = \varphi c (1 + \sqrt{\mu}) \cos. \alpha.$$

Es geht also nach dem Stoße die Seitengeschwindigkeit $c \sin. \alpha$ in

$$c \sin. \alpha - \varphi c (1 + \sqrt{\mu}) \cos. \alpha$$
$$= [\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})] c$$

über, und sie fällt bei vollkommen elastischen Körpern

$$= (\sin. \alpha - 2 \varphi \cos. \alpha) c,$$

dagegen bei unelastischen Körpern

$$= (\sin. \alpha - \varphi \cos. \alpha) c$$

aus.

Durch die Reibung während des Stoßes erhalten die Körper sehr oft eine Drehung um ihren Schwerpunkt, oder es wird, wenn eine Drehbewegung vor dem Stoße schon vorhanden war, dieselbe abgeändert. Ist das Trägheitsmoment des runden Körpers A in Hinsicht auf seine durch den Schwerpunkt S gehende Drehaxe $= Mk^2$ und der Drehungshalbmesser $SC = a$, so hat man die auf den Berührungspunkt C reducirte Masse des Körpers

$$= \frac{Mk^2}{a^2},$$

daher die durch die Reibung F hervorgebrachte Drehbeschleunigung dieses Punktes:

$$p_1 = \frac{F}{Mk^2 : a^2} = \frac{\varphi Mp}{Mk^2 : a^2} = \varphi p \cdot \frac{a^2}{k^2}$$

und die entsprechende Geschwindigkeitsveränderung:

$$w_1 = \varphi \frac{a^2}{k^2} \cdot w = \varphi \frac{a^2}{k_2} (1 + \sqrt{\mu}) \, c \cos. \alpha.$$

Bei einem Cylinder ist $\frac{a^2}{k^2} = 2$ und bei einer Kugel $\frac{a^2}{k^2} = {}^5/_2$, daher folgt für diese runden Körper die durch den Stoß gegen eine feste Ebene hervorgebrachte Veränderung in der Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w_1 = 2 \varphi \, (1 + \sqrt{\mu}) \, c \cos. \alpha \text{ und } w_1 = {}^5/_2 \, \varphi \, (1 + \sqrt{\mu}) \, c \cos. \alpha.$$

Die im Obigen entwickelten Formeln für die Geschwindigkeitsveränderungen durch die Stoßreibung beruhen auf der Voraussetzung, daß diese Reibung während

der ganzen Stoßdauer wirklich stattfindet. Dieselbe hört aber in dem Augenblicke auf zu wirken, in welchem die Geschwindigkeitscomponente des stoßenden Körpers parallel zu der gestoßenen Fläche, d. h. die Geschwindigkeit des Gleitens zu Null wird, weil von diesem Augenblicke an, wo das Gleiten aufhört, von einer Reibung nicht mehr die Rede sein kann.

Wenn u die Umdrehungsgeschwindigkeit des stoßenden Körpers M um seine zur Einfallsebene senkrechte Schwerpunktsaxe an seinem Umfange bezeichnet, so ist die Geschwindigkeit des Gleitens bei Beginn des Stoßes gegeben durch:

$$\gamma = c\, sin.\, \alpha \pm u,$$

je nachdem die Umdrehungsgeschwindigkeit u im Berührungspunkte mit der fortschreitenden Bewegung $c\, sin.\, \alpha$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat. Für den Fall, daß diese beiden Größen gleich und entgegengesetzt sind, ist $\gamma = 0$ und es findet überhaupt keine Reibung, sondern ein Rollen statt. Im Allgemeinen sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die fortschreitende Geschwindigkeit $c\, sin.\, \alpha$ und die Umfangsgeschwindigkeit u haben gleiche Richtung, Fig. 635. Die Reibung wirkt dann in der Richtung BF und zwar verkleinernd auf $c\, sin.\, \alpha$ sowohl wie auf u, so daß nach dem Stoße die fortschreitende Geschwindigkeit $c\, sin.\, \alpha - \varphi c\, cos.\, \alpha\, (1 + \sqrt{\mu})$ und die Umfangsgeschwindigkeit $u - \varphi c\, cos.\, \alpha\, \frac{a^2}{k^2}(1 + \sqrt{\mu})$ oder bei der Kugelform $u - \frac{5}{2}\varphi \,.\, c\, cos.\, \alpha\, (1 + \sqrt{\mu})$ beträgt. Als Bedingung für die Gültigkeit dieser Gleichungen hat man $\gamma_1 \geqq 0$, d. h.

Fig. 635.

$$c\, sin.\, \alpha + u \geqq \frac{7}{2}\varphi \,.\, c\, cos.\, \alpha\, (1 + \sqrt{\mu}).$$

Man erkennt übrigens leicht, daß die fortschreitende Bewegung zu Null und sogar negativ wird, sobald $\varphi\, cos.\, \alpha\, (1 + \sqrt{\mu}) \gtreqless sin.\, \alpha$ oder wenn $tang.\, \alpha \lesseqgtr \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})$ ist. Setzt man $\varphi\, cos.\, \alpha\, (1 + \sqrt{\mu}) = sin.\, \alpha$ in die Bedingungsgleichung ein, so folgt $u \geqq \frac{5}{2}\varphi \,.\, c\, cos.\, \alpha\, (1 + \sqrt{\mu})$ oder $u \geqq \frac{5}{2} c\, sin.\, \alpha$.

Nimmt man für $\sqrt{\mu}$ den Mittelwerth $\sqrt{\mu} = 0{,}55$ und $\varphi = 0{,}20$ an, so folgt $\varphi\, (1 + \sqrt{\mu}) = 0{,}310$ und $\alpha = arc.\, tang.\, 0{,}310 = 17^0 20'$ ist derjenige Winkel HAE, unter welchem die Kugel gegen die Ebene FB gestoßen werden muß, wenn die Geschwindigkeit $c\, sin.\, \alpha$ vernichtet werden, d. h. wenn die Kugel in dem Einfallslothe zurückprallen soll. Die Umfangsgeschwindigkeit u der Kugel muß dann wenigstens $u = \frac{5}{2} c\, sin.\, \alpha$ betragen, wenn die Reibung während der ganzen Stoßdauer wirken soll. Ist $tang.\, \alpha < \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})$ oder $\alpha < 17^0 20'$, so wird, immer unter der Voraussetzung, daß die Reibung während der ganzen Stoßdauer stattfindet, die fortschreitende Bewegung negativ, d. h. die in der Richtung HA ankommende Kugel wird nach einer Richtung AJ zurückgeworfen, welche mit HA auf derselben Seite des Einfallslothes liegt, indem die Seitengeschwindigkeit EJ negativ geworden ist. Man kann hierbei sogar die Kugel

veranlassen, in derselben Geraden zurückzukehren, in welcher sie vor dem Stoße ging. Für diesen Fall hat man den Winkel EAJ gleich α zu setzen, oder $tang. EAJ = tang.\, \alpha$. Nun ist aber

$$tang. EAJ = \frac{EJ}{AE} = \frac{c \sin.\alpha - \varphi c \cos.\alpha\,(1+\sqrt{\mu})}{-c\cos.\alpha\sqrt{\mu}}$$
$$= -tang.\alpha\sqrt{\frac{1}{\mu}} + \varphi\left(1+\sqrt{\frac{1}{\mu}}\right).$$

Setzt man also

$$-tang.\alpha\sqrt{\frac{1}{\mu}} + \varphi\left(1+\sqrt{\frac{1}{\mu}}\right) = tang.\alpha,\text{ so folgt } tang.\alpha = \varphi,$$

daher für $\varphi = 0{,}2$, $\alpha = 11^0 20'$.

Denkt man sich, die Kugel bewege sich im Einfallslothe EA gegen die feste Ebene, nimmt man also $\alpha = 0$ an, so geht die allgemeine Bedingung für die Gültigkeit der Reibungsformeln

$$c \sin.\alpha + u \geqq \frac{7}{2}\varphi(1+\sqrt{\mu})\, c\cos.\alpha \text{ über in } u \geqq \frac{7}{2}\varphi(1+\sqrt{\mu})\, c.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird die Kugel unter einem Winkel β reflectirt, für welchen man hat:

$$tang.\beta = \frac{c\sin.\alpha - \varphi c\cos.\alpha\,(1+\sqrt{\mu})}{-c\cos.\alpha\sqrt{\mu}} = \varphi\,\frac{1+\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}}.$$

Für $\varphi = 0{,}2$ und $\sqrt{\mu} = 0{,}55$ folgt:

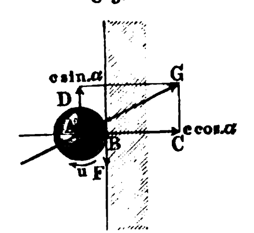
$$tang.\beta = 0{,}2\,\frac{1{,}55}{0{,}55} = 0{,}564;\ \beta = 29^0 30' \text{ und } \frac{7}{2}\varphi(1+\sqrt{\mu}) = 1{,}085.$$

Um diesen Winkel von nahezu 30° kann ein normal gegen die Bande gestoßener Billardball beim Zurückgehen von der Normalen nach links oder rechts abgelenkt werden, je nachdem man ihm (durch einseitiges Stoßen) eine Umdrehungsgeschwindigkeit nach der einen oder anderen Richtung im Betrage von mindestens $1{,}085\,c$ ertheilt. Eine geringere Umfangsgeschwindigkeit hat eine geringere Dauer der Reibung, daher eine geringere seitliche Ablenkung des Balles zur Folge.

2) Die fortschreitende Geschwindigkeit $c \sin.\alpha$ und die Umfangsgeschwindigkeit u haben entgegengesetzte Richtung. Die Geschwindigkeit des Gleitens ist in diesem Falle $\gamma = c\sin.\alpha - u$ und stimmt hinsichtlich der Richtung mit der größeren der beiden Geschwindigkeiten überein.

a) Ist daher $c\sin.\alpha > u$, so wirkt die Reibung F der fortschreitenden Geschwindigkeit $c\sin.\alpha$ entgegengesetzt (Fig. 636), daher auf diese verzögernd, hingegen auf u vergrößernd ein, so daß die Geschwindigkeit des Gleitens nach dem Stoße

Fig. 636.



$$\gamma_1 = c\sin.\alpha - u - \frac{7}{2}\varphi c\cos.\alpha\,(1+\sqrt{\mu})$$

ist, vorausgesetzt, daß diese Größe nicht negativ, d. h. daß

$$c\sin.\alpha - u \geqq \frac{7}{2}\varphi c\cos.\alpha\,(1+\sqrt{\mu})$$

ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, wenn man vielmehr:

$$c \sin. \alpha - u = \nu \frac{7}{2} \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})$$

hat, worin ν ein ächter Bruch ist, so findet die Stoßreibung nur während eines Theiles der Stoßdauer statt, bis γ zu Null geworden ist, und man hat nach dem Stoße die fortschreitende Geschwindigkeitscomponente gleich

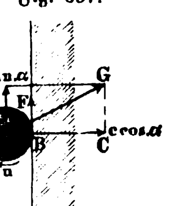
$$c \sin. \alpha - \nu \varphi c \,.\, \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})$$

und die rotirende Geschwindigkeit gleich

$$u + \nu \frac{5}{2} \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu}).$$

b) Wenn dagegen $c \sin. \alpha < u$, so wirkt die Reibung in der Richtung von $c \sin. \alpha$, also hierauf beschleunigend und auf u verzögernd ein (Fig. 637), und man hat als Bedingung für die Gültigkeit der oben entwickelten Reibungsformeln:

Fig. 637.



$$u - c \sin. \alpha - \frac{7}{2} \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu}) \geqq 0,$$

d. h.:

$$u - c \sin. \alpha \geqq \frac{7}{2} \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu}).$$

Alsdann ist die tangentiale Geschwindigkeit nach dem Stoße:

$$c \sin. \alpha + \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})$$

und die Umfangsgeschwindigkeit:

$$u - \frac{5}{2} \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu}).$$

Ist aber obige Bedingung nicht erfüllt, sondern hat man:

$$u - c \sin. \alpha = \nu \frac{7}{2} \,.\, \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu}),$$

worin ν kleiner als Eins ist, so findet man wieder die Tangentialgeschwindigkeit nach dem Stoße gleich

$$c \sin. \alpha + \nu \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu})$$

und die Umfangsgeschwindigkeit gleich

$$u - \nu \frac{5}{2} \,.\, \varphi c \cos. \alpha (1 + \sqrt{\mu});$$

in diesem Falle hat die Kugel eine rollende Bewegung angenommen.

Es ergiebt sich also, daß durch die Stoßreibung in dem Falle a), wenn $c \sin. \alpha > u$ ist, der Ball beim Zurückprallen eine Annäherung an das Einfallsloth und in dem Falle b), wo $c \sin. \alpha < u$ ist, eine Ablenkung von dem Einfallslothe erfährt.

Beispiel. Wenn ein Billardball mit 5 Meter Geschwindigkeit und unter dem Einfallswinkel $\alpha = 45^0$ gegen die Bande stößt, welche Bewegungen nimmt derselbe nach dem Stoße an? Setzt man für $\sqrt{\mu}$ den mittleren Werth 0,55, so hat man die normale Seitengeschwindigkeit nach dem Stoße

$= - c \cos. \alpha \sqrt{\mu} = - 0,55 \,.\, 5 \,.\, \cos. 45^0 = - 2,75 \sqrt{1/2} = - 1,944$ Meter, und nimmt man mit Coriolis $\varphi = 0,20$ an, so erhält man die Seitengeschwindigkeit parallel zur Bande

$= c\, sin.\, \alpha - \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\, c\, cos.\, \alpha = (1 - 0{,}20 \,.\, 1{,}55) \,.\, 3{,}536 = 0{,}69 \,.\, 3{,}536$
$= 2{,}439$ Meter,

auch folgt für den Reflexionswinkel β:

$$tang.\, \beta = \frac{2{,}439}{1{,}944} = 1{,}2548,$$

also: $\beta = 51^0 27'$,

und die Geschwindigkeit nach dem Stoße bleibt

$$= \frac{1{,}944}{cos.\, 51^0 27'} = 3{,}12 \text{ Meter.}$$

Außerdem nimmt der Ball auch noch die Umdrehungsgeschwindigkeit

$$\frac{5}{2}\, \varphi \,.\, 1{,}55 \,.\, 3{,}536 = 2{,}740 \text{ Meter}$$

um seine verticale Schwerlinie an. Da der Ball sich nicht gleitend, sondern wälzend auf dem Billard fortbewegt, so ist anzunehmen, daß er außer der fortschreitenden Geschwindigkeit $c = 5$ Meter auch noch eine gleichgroße Umdrehungsgeschwindigkeit besitze, und daß sich diese ebenfalls in die Componenten

$$c\, cos.\, \alpha = 3{,}536 \text{ und } c\, sin.\, \alpha = 3{,}536 \text{ Meter}$$

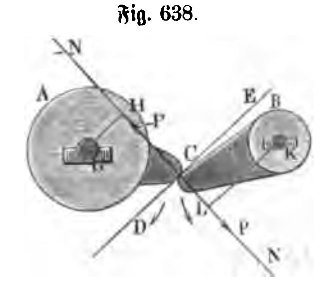
zerlegen lasse. Die erste Componente entspricht einer Drehung um eine Axe parallel zur Bandenaxe und geht in

$$c\, cos.\, \alpha - \frac{5}{2}\, \varphi\, (1 + \sqrt{\mu})\, c\, cos.\, \alpha = 3{,}536 - 2{,}740 = 0{,}796 \text{ Meter}$$

über, die andere Componente $c\, sin.\, \alpha = 3{,}536$ Meter entspricht einer Drehung um eine Axe normal zur Bande und bleibt unverändert.

Stoss drehbarer Körper. Stoßen zwei um feste Axen G und K drehbare Körper A und B, Fig. 638, gegen einander, so stellen sich Geschwindigkeitsveränderungen heraus, welche sich aus den Trägheitsmomenten $M_1 k_1^2$ und $M_2 k_2^2$ dieser Körper hinsichtlich der festen Axen und mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Formeln bestimmen lassen. Sind die Perpendikel GH und KL, welche sich von den Drehungsaxen gegen die Stoßlinie fällen lassen, a_1 und a_2, so hat man die auf die Lothpunkte H und L in der Stoßlinie reducirten trägen Massen $= \frac{M_1 k_1^2}{a_1^2}$ und $\frac{M_2 k_2^2}{a_2^2}$. Führt man diese Werthe statt M_1 und M_2 in die Formeln für den freien Centralstoß ein, so bekommt man die Geschwindigkeitsveränderungen der Punkte H und L (§. 362): §. 366

Fig. 638.



$$c_1 - v_1 = (c_1 - c_2) \frac{M_2 k_2^2 : a_2^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_2 k_2^2\, a_1^2}{M_1 k_1^2\, a_2^2 + M_2 k_2^2\, a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}), \text{ sowie}$$

$$v_2 - c_2 = (c_1 - c_2) \frac{M_1 k_1^2 : a_1^2}{M_1 k_1^2 : a_1^2 + M_2 k_2^2 : a_2^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

$$= (c_1 - c_2) \frac{M_1 k_1^2 a_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

wofern c_1 und c_2 die Geschwindigkeiten dieser Punkte vor dem Stoße waren.

Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten vor dem Stoße durch ε_1 und ε_2 und die nach dem Stoße durch ω_1 und ω_2, so haben wir $c_1 = a_1 \varepsilon_1$, $c_2 = a_2 \varepsilon_2$, sowie $v_1 = a_1 \omega_1$ und $v_2 = a_2 \omega_2$ zu setzen, und erhalten für den stoßenden Körper den Verlust an Winkelgeschwindigkeit:

$$\varepsilon_1 - \omega_1 = a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu})$$

und für den gestoßenen Körper den Gewinn an Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega_2 - \varepsilon_2 = a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2} (1 + \sqrt{\mu}),$$

folglich die Winkelgeschwindigkeiten nach dem Stoße selbst:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 - a_1 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2 (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2) (1 + \sqrt{\mu}) \frac{M_1 k_1^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Sind beide Körper vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, also:

$$1 + \sqrt{\mu} = 2,$$

und sind sie unelastisch, so hat man $\mu = 1$, also:

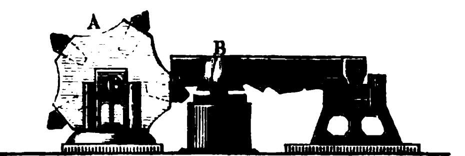
$$1 + \sqrt{\mu} = 1.$$

Im letzteren Falle ist der durch den Stoß hervorgebrachte Verlust an lebendiger Kraft nach §. 359:

$$K = (a_1 \varepsilon_1 - a_2 \varepsilon_2)^2 \cdot \frac{M_1 k_1^2 \cdot M_2 k_2^2}{M_1 k_1^2 a_2^2 + M_2 k_2^2 a_1^2}.$$

Beispiel. Die armirte Welle $A G$, Fig. 639, hat in Hinsicht auf ihre Umdrehungsaxe G das Trägheitsmoment

Fig. 639.



$$M_1 k_1^2 = 2000 : g$$

und der Stirnhammer $B K$ dasselbe in Hinsicht auf seine Axe K

$$M_2 k_2^2 = 8000 : g.$$

Der Hebelarm $G C$ der Welle ist 0,6 Meter, sowie der Hebelarm $K C$ des Hammers 2 Meter und die Winkelgeschwindigkeit der Welle im Augenblicke des Stoßes an den Hammer = 1,2 Meter. Wie groß ist diese Geschwindigkeit nach dem Stoße, und

welche Leistung geht durch jeden Stoß verloren, wenn gänzlicher Mangel an Elasticität vorausgesetzt wird? Es ist die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Welle:

$$\omega_1 = 1,2 - 0,6^2 \, . \, 1,2 \frac{8000}{2000 \, . \, 4 + 8000 \, . \, 0,6^2} = 1,2 \left(1 - \frac{36}{136}\right) = 0,882 \text{ Meter}$$

und die des Hammers:

$$\omega_2 = 2 \, . \, 0,6 \, . \, 1,2 \frac{2000}{2000 \, . \, 4 + 8000 \, . \, 0,6^2} = 0,265 \text{ Meter.}$$

(Es ist natürlich auch $\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{G\,C}{K\,C} = \frac{0,6}{2}\, \omega_1 = 0,3\, \omega_1$.)

Der Arbeitsverlust bei jedem Anstoße ist:

$$A = \frac{(0,6 \, . \, 1,2)^2}{2g} \frac{2000 \, . \, 8000}{2000 \, . \, 4 + 8000 \, . \, 0,6^2} = 0,051 \, . \, 0,518 \, . \, \frac{2000}{1,36} = 38,8 \text{ Meterkilogr.}$$

Stoss eines schwingenden Körpers. Kommt ein freier, geradlinigt bewegter Körper A, Fig. 640, mit einem um eine feste Axe K drehbaren Körper BCK zum Stoße, so findet man die Geschwindigkeiten nach dem Stoße, indem man in den Formeln des vorigen Paragraphen statt $a_1\,\varepsilon_1$ und $a_1\,\omega_1$ die progressiven Geschwindigkeiten c_1 und v_1, sowie statt $\frac{M_1\,k_1^2}{a_1^2}$ die träge Masse M_1 des ersten Körpers einsetzt, die übrigen Bezeichnungen aber unverändert läßt. Es ist hiernach die Geschwindigkeit der ersten Masse nach dem Stoße: §. 367.

Fig. 640.



$$v_1 = c_1 - (c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und die Winkelgeschwindigkeit der zweiten:

$$\omega_2 = \varepsilon_2 + a_2\,(c_1 - a_2\,\varepsilon_2)\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}.$$

Ist die Masse M_2 in Ruhe, also $\varepsilon_2 = 0$, so hat man:

$$v_1 = c_1 - c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = c_1\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_1\,a_2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}.$$

Ist hingegen M_1 in Ruhe, stößt also die oscillirende Masse, so hat man $c_1 = 0$, daher:

$$v_1 = a_2\,\varepsilon_2\,(1 + \sqrt{\mu}) \cdot \frac{M_2\,k_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}$$

und

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \left(1 - (1 + \sqrt{\mu})\,\frac{M_1\,a_2^2}{M_1\,a_2^2 + M_2\,k_2^2}\right).$$

Die Geschwindigkeit, welche einer ruhenden Masse von einer anderen durch den Anstoß ertheilt wird, hängt nicht allein von der Geschwindigkeit des Anstoßes und von den Massen der Körper, sondern auch von dem Abstande $KL = a_2$ zwischen der Stoßrichtung $N\overline{N}$ und der Axe K des drehbaren Körpers ab. Stößt die freie Masse, so nimmt die drehbare Masse die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_2 = c_1 \left(1 + \sqrt{\mu}\right) \frac{M_1 a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}$$

an, und trifft die schwingende Masse gegen die freie, so erhält diese die Geschwindigkeit:

$$v_1 = \varepsilon_2 \left(1 + \sqrt{\mu}\right) \frac{M_2 k_2^2 \cdot a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2};$$

es werden also beide Geschwindigkeiten um so größer, je größer

$$\frac{a_2}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2} \text{ oder } \frac{1}{M_1 a_2 + \frac{M_2 k_2^2}{a_2}},$$

also je kleiner $M_1 a_2 + M_2 \frac{k_2^2}{a_2}$ ist.

Setzen wir statt a_2, $a \pm x$, wo x sehr klein ist, so bekommen wir den Werth des letzteren Ausdruckes:

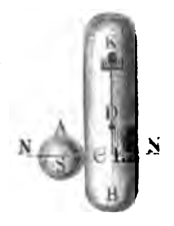
$$M_1 (a \pm x) + \frac{M_2 k_2^2}{a \pm x} = M_1 a \pm M_1 x + \frac{M_2 k_2^2}{a} \left(1 \mp \frac{x}{a} + \frac{x_2}{a_2} \mp \cdots\right),$$

oder, wegen der Kleinheit der Potenzen von x,

$$M_1 a + \frac{M_2 k_2^2}{a} \pm \left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x.$$

Soll nun a dem kleinsten aller Werthe von $M_1 a_2 + \frac{M_2 k_2^2}{a_2}$ entsprechen, so muß das Glied $\pm \left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x$ wegfallen, weil dasselbe entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, je nachdem x positiv oder negativ vorausgesetzt wird, und daher jedenfalls einen negativen Werth annehmen kann:

Fig. 641.



Es folgt also:

$$\left(M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2}\right) x = \text{Null, d. i.:}$$

$$\frac{M_2 k_2^2}{a^2} = M_1,$$

folglich:

$$a = \sqrt{\frac{M_2 k_2^2}{M_1}} = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \text{*)}.$$

Wenn man also in diesem Abstande a den einen Körper gegen den anderen stößt, so nimmt dieser die größte Geschwindigkeit an, und zwar:

$$1)\ \omega_2 = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2 k_2} \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{c_1}{2a}$$

in dem Falle, wenn der drehbare Körper gestoßen wird; und

$$2)\ v_1 = \tfrac{1}{2} k_2 \varepsilon_2 (1 + \sqrt{\mu}) \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = (1 + \sqrt{\mu}) \frac{\varepsilon_2 a}{2},$$

wenn der freie Körper einen Stoß erhält.

Man nennt den in der Stoßlinie befindlichen Endpunkt L des der größten Geschwindigkeit entsprechenden Abstandes oder Hebelarmes $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ zuweilen, jedoch unpassend, Mittelpunkt des Stoßes, angemessener vielleicht Stoßpunkt.

Es ist derselbe nicht mit dem oben (§. 338) gefundenen Mittelpunkte des Stoßes zu verwechseln, dessen Entfernung von der Umdrehungsaxe durch den Ausdruck

$$a = \frac{M_2 k_2^2}{M_2 s} = \frac{k_2^2}{s},$$

bestimmt ist, worin s den Abstand des Schwerpunktes der Masse M_2 von der Umdrehungsaxe bezeichnet. Wenn die Richtung $\overline{NN}$ des Zusammenstoßes der Massen M_1 und M_2 durch den Mittelpunkt des Stoßes geht, so fällt die Reaction auf die Umdrehungsaxe der letzteren Null aus.

Damit z. B. ein Hammer beim Aufschlagen nicht pralle, d. i. auf die Hand, welche ihn hält, oder auf die Hülse, um welche er sich dreht, nicht reagire, ist es nöthig, daß der Schlag durch den Mittelpunkt des Stoßes gehe.

Wird der aufgehangene Körper KB im Stoßpunkte, also im Abstande $a = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}$ von der Axe K, durch eine Masse M_1 mit der Kraft P

*) Die Differenzialrechnung giebt für das Minimum von $M_1 a + \frac{M_2 k_2^2}{a}$ einfach die Gleichung:

$$\frac{\partial\left(M_1 a + \frac{M_2 k_2^2}{a}\right)}{\partial a} = M_1 - \frac{M_2 k_2^2}{a^2} = 0, \text{ woraus wie oben}$$

$$a = \sqrt{\frac{M_2 k_2^2}{M_1}} = k_2 \sqrt{\frac{M_2}{M_1}} \text{ folgt.}$$

gestoßen, so ist die Reaction auf die Axe:

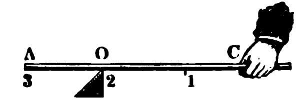
$$P_1 = P + R = P - \varkappa M_2 s \text{ (s. §. 338).}$$

Da $P = \frac{\varkappa M_2 k_2^2}{a}$ ist, so folgt die Winkelacceleration $\varkappa = \frac{P a}{M_2 k_2^2}$ und $\varkappa M_2 s = \frac{M_2 s a}{M_2 k_2^2} P$, so daß nun die gesuchte Reaction:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{M_2 s a}{M_2 k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s a}{k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s}{k_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right) \text{ folgt.}$$

Beispiele. 1) Bei einer prismatischen Stange CA, Fig. 642, die sich um einen ihrer Endpunkte dreht, steht der Mittelpunkt des Stoßes um

Fig. 642.

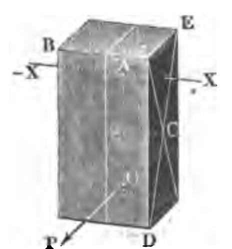


$$C O = a = \frac{\frac{1}{3} r^2}{\frac{1}{2} r} = \frac{2}{3} r = \frac{2}{3} CA$$

von der Axe ab. Wenn man also die Stange an einem Ende festhält, und mit dem in der Entfernung $CO = \frac{2}{3} CA$ befindlichen Punkte auf ein Hinderniß O aufschlägt, so wird man kein Prallen fühlen. Der Stoßpunkt dieser Stange steht dagegen um $r\sqrt{\frac{M_2}{3 M_1}}$ von C ab; ist z. B. die Masse des gestoßenen Körpers, $M_1 = M_2$, so hat man diesen Abstand $= \frac{r}{\sqrt{3}} = 0{,}5774\, r$. In diesem Abstande muß also die Stange CA an die ruhende Masse M_1 anschlagen, damit diese mit der größten Geschwindigkeit fortgeht.

2) Bei einem Parallelepipede BDE, Fig. 643, welches sich um eine zu vier Seiten desselben parallel gehende und um $SA = s$ vom Schwerpunkte abstehende Axe $X\overline{X}$ dreht, ist der Abstand AO des Stoßmittelpunktes O von der Axe:

Fig. 643.



$$a = \frac{s^2 + \frac{1}{3} d^2}{s},$$

wo d die halbe Diagonale CD der Seitenflächen bezeichnet, durch welche die Axe $X\overline{X}$ hindurchgeht (§. 312). Ginge die Stoßkraft P durch den Stoßpunkt, so hätte man:

$$a_1 = k_2\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{(s^2 + \frac{1}{3} d^2)\frac{M_2}{M_1}}$$

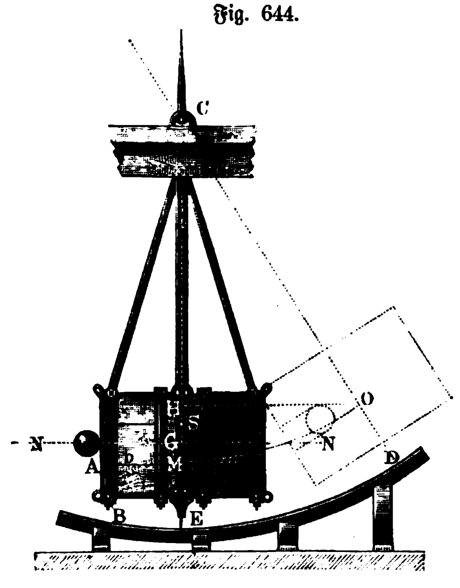
und daher die Reaction auf die Axe:

$$P_1 = P\left(1 - \frac{s a}{k_2^2}\right) = P\left(1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + \frac{1}{3} d^2}}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\right).$$

§. 368. **Ballistisches Pendel.** Eine Anwendung der im Vorstehenden entwickelten Lehren findet man in der Theorie des ballistischen Pendels oder des

Pendels von Robins. Dasselbe besteht in einer großen, um eine horizontale Axe C drehbaren Masse M, Fig. 644, welche durch gegen sie abgeschossene Geschützkugeln A in Schwingungen versetzt wird und dazu dient, die Geschwindigkeiten der ersteren zu ermitteln. Damit ein möglichst unelastischer Stoß eintrete, ist in der vorderen Seite, wo die Kugel anschlägt, eine Oeffnung angebracht, die man von Zeit zu Zeit mit frischem Holze oder Thon u. s. w. ausfüllt. Es bleibt dann auch die Kugel nach dem jedesmaligen Schusse in diesen Massen stecken und schwingt mit dem ganzen Körper gemeinschaftlich. Zur Ermittelung der Geschwindigkeit der Kugel ist es nöthig, den Elongationswinkel dieses Pendels zu kennen; deshalb wird noch ein Gradbogen BD angebracht und ein Stift E unter dem Schwerpunkte des Pendels befestigt, der an dem ersteren hingleitet.

Fig. 644.



Nach dem vorstehenden Paragraphen ist die Winkelgeschwindigkeit des ballistischen Pendels nach dem Anstoße der Kugel:

$$\omega = \frac{M_1 a_2 c_1}{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2},$$

wenn M_1 die Masse der Kugel, $M_2 k_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels, c_1 die Geschwindigkeit der Kugel und a_2 den Hebelarm CG des Stoßes oder den Abstand der Stoßlinie $N\overline{N}$ von der Drehungsaxe des Pendels bezeichnet. Ist die Entfernung CM des Schwingungspunktes M der ganzen Masse sammt Kugel vom Drehpunkte C, d. i. die Länge des einfachen Pendels, welches mit dem ballistischen gleiche Schwingungsdauer hat, $= r$, und der Elongationswinkel $ECD = \alpha$, so hat man die Steighöhe MH des isochron schwingenden Pendels:

$$h = CM - CH = r - r\cos.\alpha = r\,(1 - \cos.\alpha) = 2\,r\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

und daher die Geschwindigkeit im untersten Punkte seiner Bahn:

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = 2\sin.\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g\,r},$$

oder die entsprechende Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{v}{r} = 2 \sin. \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Werthe für die Winkelgeschwindigkeit folgt:

$$c_1 = 2 \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2{}^2}{M_1 a_2} \sin. \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Nun ist aber der Theorie des einfachen Pendels zufolge:

$$r = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} = \frac{M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2}{(M_1 + M_2)\, s},$$

wenn s den Abstand CS des Schwerpunktes S von der Drehaxe bezeichnet; es folgt daher:

$$M_1 a_2^2 + M_2 k_2^2 = (M_1 + M_2)\, s r \text{ und}$$

$$c_1 = 2 \frac{s}{a_2} \frac{M_1 + M_2}{M_1} \sin. \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{g r}.$$

Macht das Pendel in der Minute n Schwingungen, so ist die Schwingungsdauer:

$$\pi \sqrt{\frac{r}{g}} = \frac{60''}{n}, \text{ daher } \sqrt{g r} = \frac{60'' g}{n \pi}$$

und die gesuchte Kugelgeschwindigkeit:

$$c_1 = \frac{120 g s}{n \pi a_2} \frac{M_1 + M_2}{M_1} \sin. \frac{\alpha}{2} = 375 \frac{s}{n a_2} \frac{M_1 + M_2}{M_1} \sin. \frac{\alpha}{2}.$$

Anstatt die Kugel M_1 gegen das Pendel abzuschießen, kann man auch das Geschütz mit dem Pendel zusammen aufhängen und den Ausschlagswinkel α messen, welchen das letztere nach dem Abfeuern durch die Reaction des Geschützes erleidet. Ist P die Explosionskraft der Ladung, so ist die Beschleunigung der Kugel $p_1 = \frac{P}{M_1}$ und die des Pendels $p_2 = \frac{P}{M_2 k_2^2 : a_2^2}$, wenn $M_2 k_2^2$ das Trägheitsmoment des Pendels sammt Kanone, aber ohne Kugel bedeutet. Es verhalten sich daher die Beschleunigungen $p_1 : p_2 = M_2 k_2^2 : M_1 a_2^2$. Da die Explosionskraft auf die Kugel genau so lange einwirkt, wie auf das Geschütz, so müssen auch die erlangten Endgeschwindigkeiten c_1 und c_2 sich wie die Beschleunigungen p_1 und p_2 verhalten, und man hat daher:

$$c_1 : c_2 = M_2 k_2^2 : M_1 a_2^2, \text{ also } c_2 = c_1 \frac{M_1 a_2^2}{M_2 k_2^2}.$$

Für das Pendel ist daher die Winkelgeschwindigkeit nach dem Schusse:

$$\omega = \frac{c_2}{a_2} = c_1 \frac{M_1 a_2}{M_2 k_2^2}.$$

Da nun nach dem Vorstehenden auch $\omega = 2 \sin. \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{g}{r}}$ ist, so folgt:

$$c_1 = 2\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{M_2 k_2^2}{M_1 a_2}\sqrt{\frac{g}{r}} \text{ oder, da } r = \frac{k_2^2}{s} \text{ ist,}$$

$$c_1 = 2\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{M_2 k_2^2}{M_1 a_2}\sqrt{g\,\frac{s}{k_2^2}} = 2\,sin.\,\frac{\alpha}{2}\,\frac{M_2 k_2}{M_1 a_2}\sqrt{g\,s}.$$

Beispiel. Wenn ein ballistisches Pendel von 2000 Kilogramm Gewicht durch eine eingeschossene Kugel von 4 Kilogramm in Schwingungen versetzt wird, deren Elongation 15⁰ mißt, wenn ferner der Abstand s des Schwerpunktes von der Axe 2 Meter und der Abstand der Schußlinie von eben dieser Axe 2,3 Meter beträgt, und wenn die Anzahl der Schwingungen in einer Minute zu $n = 36$ ausfällt, so war die Geschwindigkeit der Kugel im Augenblicke des Anstoßes:

$$c = 375\,\frac{2}{36\,.\,2{,}3}\,\frac{2004}{4}\,sin.\,7^0 30' = 589{,}9 \text{ Meter.}$$

Wäre das Geschütz mit dem Pendel verbunden, so hätte man bei denselben Werthen von M_1, M_2, a_2, s, α und n zunächst $r = \frac{k_2^2}{s} = \frac{g\,t^2}{\pi^2}$, oder da $t = \frac{60}{36} = \frac{10}{6}$ Secunden, so folgt hieraus:

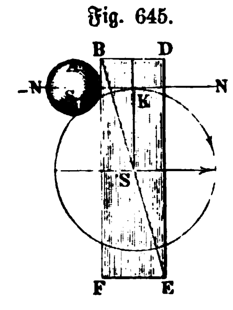
$$k_2 = \sqrt{\frac{s\,g\,t^2}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81\,.\,100}{9{,}87\,.\,36}} = 2{,}35 \text{ Meter.}$$

Hieraus ergiebt sich die Geschwindigkeit der Kugel:

$$c = 2\,sin.\,7^0 30'\,\frac{2000\,.\,2{,}35}{4\,.\,2{,}3}\,\sqrt{9{,}81\,.\,2} = 590{,}9 \text{ Meter.}$$

Excentrischer Stoss. Untersuchen wir endlich noch einen einfachen §. 369.
Fall des excentrischen Stoßes, wenn beide Massen vollkommen frei sind. Wenn zwei Körper A und BE, Fig. 645, so zusammenstoßen, daß die Richtung $N\overline{N}$ des Stoßes durch den Schwerpunkt S_1 des einen Körpers hindurch und vor dem Schwerpunkt S des anderen Körpers vorbeigeht, so ist der Stoß in Hinsicht auf den ersten Körper centrisch und in Hinsicht auf den anderen excentrisch. Die Wirkungen dieses excentrischen Stoßes lassen sich aber nach dem Lehrsatze in §. 304 finden, wenn man annimmt: erstens, der zweite Körper sei frei und die Stoßrichtung gehe durch den Schwerpunkt S selbst, und zweitens, dieser Körper werde im Schwerpunkte festgehalten, und die Stoßkraft wirke als eine Umdrehungskraft. Ist nun c_1 die anfängliche Geschwindigkeit von A, c die des Schwerpunktes von BE, und gehen beide Geschwindigkeiten durch den Stoß in v_1 und v über, so bleibt, wie in §. 356, $M_1 v_1 + M v = M_1 c_1 + M c$. Ist ferner ε die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers BE bei seiner Umdrehung um die im Schwerpunkte senkrecht zur Ebene NNS stehende Axe, geht diese

Fig. 645.



Geschwindigkeit durch den Stoß in ω über, und bezeichnet man das Trägheitsmoment dieses Körpers in Hinsicht auf S durch Mk^2, sowie die Excentricität oder den Abstand SK des Schwerpunktes S von der Stoßrichtung durch s, so hat man auch

$$M_1 v_1 + \frac{Mk^2}{s^2} \cdot s\,\omega = M_1\, c_1 + \frac{Mk^2}{s^2}\, s\,\varepsilon.$$

Sind beide Körper unelastisch, so haben die Berührungspunkte beider am Ende des Stoßes gleiche Geschwindigkeit, es ist also noch $v_1 = v + s\,\omega$. Bestimmt man aus den vorigen Gleichungen v und ω durch v_1 und setzt man die erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$v_1 = \frac{M_1\,(c_1 - v_1)}{M} + c + \frac{M_1\, s^2\,(c_1 - v_1)}{Mk^2} + s\,\varepsilon,$$

und hieraus bestimmt sich der Geschwindigkeitsverlust des ersten Körpers:

$$c_1 - v_1 = \frac{Mk^2\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1\, s^2},$$

sowie der Gewinn an progressiver Geschwindigkeit des zweiten:

$$v - c = \frac{M_1\, k^2\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1\, s^2}$$

und der Gewinn an Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega - \varepsilon = \frac{M_1\, s\,(c_1 - c - s\,\varepsilon)}{(M_1 + M)\,k^2 + M_1\, s^2}.$$

Beim vollkommen elastischen Stoße sind diese Werthe doppelt und beim unvollkommen elastischen Stoße $(1 + \sqrt{\mu})$ mal so groß.

Beispiel. Trifft eine eiserne Kugel A von 40 Kilogramm Gewicht das anfänglich in Ruhe befindliche Parallelepiped BE, Fig. 645, aus Tannenholz mit 10 Meter Geschwindigkeit, ist die Länge dieses Körpers 2 Meter, die Breite 1 Meter und die Dicke 0,6 Meter, und weicht die Stoßrichtung $N\overline{N}$ um $SK = s = 0{,}5$ Meter von dem Schwerpunkte S ab, so ergeben sich folgende Geschwindigkeitswerthe nach dem Stoße. Das specifische Gewicht des Tannenholzes $= 0{,}45$ angenommen, folgt das Gewicht des parallelepipedischen Körpers $= 20 \,.\, 10 \,.\, 6 \,.\, 0{,}45 = 540$ Kilogramm. Das Quadrat der halben Diagonale BS der Seitenfläche BDF parallel zur Stoßrichtung ist:

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1{,}25,$$

daher folgt (nach §. 312):

$$k^2 = \tfrac{1}{3} \,.\, 1{,}25 = 0{,}417,$$

ferner

$$g\,Mk^2 = 540 \,.\, 0{,}417 = 225$$

und

$$g\,(M_1 + M)\,k^2 = 580 \,.\, 0{,}417 = 242,$$

daher ist die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoße:

$$v_1 = c_1 - \frac{M k^2 c_1}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2} = 10\left(1 - \frac{225}{242 + 40 \cdot \frac{1}{4}}\right) = 1{,}07 \text{ Meter},$$

ferner die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des gestoßenen Körpers:

$$v = \frac{M_1 k^2 c_1}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 0{,}417}{252} = 0{,}66 \text{ Meter},$$

und endlich die Winkelgeschwindigkeit desselben:

$$\omega = \frac{M_1 s c_1}{(M_1 + M) k^2 + M_1 s^2} = \frac{40 \cdot 0{,}5 \cdot 10}{252} = 0{,}794 \text{ Meter}.$$

Benutzung der Stosskraft. Während das Gewicht eines Körpers eine nur von der Masse desselben abhängige und mit derselben gleichmäßig wachsende Kraft ist, hat man es dagegen bei dem Stoße mit einer Kraft zu thun, welche nicht allein mit der Masse, sondern auch mit der Geschwindigkeit und mit der Härte der zusammenstoßenden Körper wächst (s. §. 360 und §. 362) und daher auch beliebig gesteigert werden kann. Deshalb ist auch der Stoß ein vorzügliches Mittel zur Erzeugung größerer Kräfte mit Hülfe kleinerer Massen oder Gewichte, von welchen z. B. beim Zerschlagen oder Zerpochen der Steine, beim Schneiden und Zusammendrücken der Metalle, beim Einschlagen der Nägel, Einrammen der Pfähle u. s. w. vielfacher Gebrauch gemacht wird. Auf der anderen Seite wird aber durch den Stoß nicht allein mechanisches Arbeitsvermögen aufgezehrt, sondern auch ein stärkeres Abführen oder Abnutzen der Maschinentheile herbeigeführt und überhaupt die Haltbarkeit und Dauerhaftigkeit der Maschinen und Bauwerke beeinträchtigt, so daß es daher nöthig wird, denselben stärkere Dimensionen zu geben, als wenn sie Züge und Drücke, Gewichte u. s. w. ohne Stöße aufzunehmen hätten. §. 370.

In den Fällen der praktischen Verwendung von Stoßwirkungen ist die gestoßene Masse M_2 in der Regel in Ruhe, also $c_2 = 0$, und das System der stoßenden Massen hat die lebendige Kraft $M_1 c_1^2$, entsprechend einer mechanischen Arbeit $A = G_1 \frac{c_1^2}{2g} = G_1 h$, wenn h die der Geschwindigkeit c_1 entsprechende Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c_1^2}{2g}$ bedeutet. Der bei unelastischen Körpern durch den Stoß erzeugte Verlust an mechanischer Arbeit beträgt nach §. 359:

$$A' = \frac{c_1^2}{2g} \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} = G_1 h \frac{G_2}{G_1 + G_2} = A \frac{G_2}{G_1 + G_2},$$

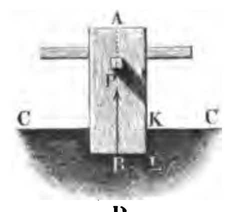
so daß der Rest A'' der in dem Systeme nach dem Stoße verbleibenden mechanischen Arbeit

$$A'' = A - A' = A \frac{G_1}{G_1 + G_2} \text{ ist.}$$

Der Betrag A' wird auf Formveränderungen der stoßenden Körper, hingegen die mechanische Arbeit A'' auf Bewegung resp. Bewegungsänderung derselben verwendet. Bei einer gewissen Größe der vor dem Stoße vorhandenen Arbeit A ist der Verlust A' um so kleiner, je kleiner $\frac{G_2}{G_1 + G_2}$, d. i. je größer G_1 ist, wogegen der Rest an mechanischer Arbeit A'' um so kleiner wird, je größer G_2 oder die gestoßene Masse ist. In der Praxis kommen eben so häufig solche Fälle vor, wo man von der Arbeit A' zur Formänderung Gebrauch macht (zum Pochen, Prägen, Schmieden 2c.), als andererseits solche Gelegenheiten, wo durch den Stoß Körper bewegt werden sollen (Rammen, Heben von Hämmern durch Daumen 2c.). Man wird daher die Anordnung so zu treffen haben, daß in dem ersteren Falle A' und in dem letzteren Falle A'' möglichst groß werde. Handelt es sich z. B. um die Formänderung eines Eisenstabes unter einem Hammer, so bringt der Stoßverlust A' die nützliche Wirkung hervor, man wird daher durch eine hinreichende Größe von G_2, d. h. durch ein großes Amboßgewicht die nicht beabsichtigte Wirkung von A'' so viel als möglich vermindern. Anders verhält es sich hinsichtlich der Daumenwelle, welche den zum Schmieden benutzten Schwanzhammer betreibt. Die Daumen der Welle stoßen auf den Schwanz des Hammers, um letzteren emporzuschnellen; es ist also die Absicht, von der Arbeit A'' zur Bewegung des Hammers Nutzen zu ziehen, und man wird daher den nur auf schnelle Abnutzung der angreifenden Organe wirkenden Stoßverlust A' durch ein großes Gewicht G_1 der Daumenwelle möglichst herabziehen. Aus diesem Grunde erklärt sich der Gebrauch sehr schwerer Daumenwellen, sowie der Vortheil von Schwungmassen in solchen und ähnlichen Fällen.

Um die schädlichen Abnutzungen der Maschinentheile und das Zerstörtwerden derselben in Folge von Stoßwirkungen nach Möglichkeit herabzuziehen, hat man die stoßenden Körper durch geeignete Mittel, etwa durch Einschaltung von Federn, zu möglichst vollkommen elastischen zu machen, um hierdurch den Betrag von A' zu Null zu machen (Buffer bei Eisenbahnfahrzeugen).

Fig. 646.



Schlägt ein fester Körper AB, Fig. 646, auf eine unbegrenzte weiche Masse CDC auf, so drückt er dieselbe mit einer gewissen Kraft zusammen, deren mittlerer Werth P sich mittels der Tiefe $KL = s$ der Eindringung bestimmen läßt, wenn man die Arbeit Ps des Eindringens gleich dem Arbeitsvermögen der trägen Masse des Körpers setzt. Ist M die Masse oder $G = gM$ das Gewicht dieses Körpers (AB) und v die Geschwindigkeit, mit

welcher er auf CDC aufschlägt, so beträgt das Arbeitsvermögen seiner trägen Masse

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{v^2}{2g} G,$$

und es ist daher die gesuchte Kraft, mit welcher die weiche Masse zusammengedrückt wird:

$$P = \frac{1}{2} \frac{M v^2}{s} = \frac{v^2}{2gs} G.$$

Wenn man diese Größe durch den Querschnitt F des Körpers dividirt, so erhält man die Kraft, mit welcher jede Flächeneinheit der lockeren Masse zusammengedrückt ist, und welche folglich auch eine solche Einheit, ohne nachzugeben, tragen kann:

$$p = \frac{P}{F} = \frac{v^2}{2g} \frac{G}{Fs}.$$

Der Sicherheit wegen belastet man jedoch eine solche Masse nur mit einem kleinen, etwa dem zehnten Theile von p.

Führt man die Höhe h statt $\frac{v^2}{2g}$ in die vorige Formel ein, so erhält man den Widerstand der weichen Masse:

$$P = \frac{Gh}{s}, \text{ also für die Flächeneinheit: } p = \frac{Gh}{Fs}.$$

Die Kraft oder der Widerstand P, welchen die lockere oder weiche Masse dem Eindringen eines starren Körpers AB entgegensetzt, ist in der Regel nicht constant, sondern wächst mit der Tiefe s des Eindringens. In vielen Fällen kann man annehmen, daß sie mit s gleichmäßig wächst, und zwar anfangs Null und am Ende des Eindringens doppelt so groß ist als im Mittel. Da nun in den gefundenen Formeln P den mittleren Kraftwerth angiebt, so hat man folglich den Widerstand der weichen Masse oder die Tragkraft P_1 derselben doppelt so groß, als diese Formeln angeben, d. i.:

$$P_1 = 2P = \frac{2Gh}{s}$$

zu setzen.

Beispiel. Wenn eine Handramme AB, Fig. 646, deren Gewicht $G = 60$ Kilogramm ist, von einer Höhe $h = 1$ Meter auf eine Erdmasse herabfällt, und diese beim letzten Schlage noch 5 Millimeter zusammendrückt, so ist die Tragkraft dieser Masse auf eine dem Querschnitt der Ramme gleiche Fläche:

$$P = \frac{Gh}{s} = \frac{60 \, . \, 1}{0{,}005} = 12000 \text{ Kilogramm}.$$

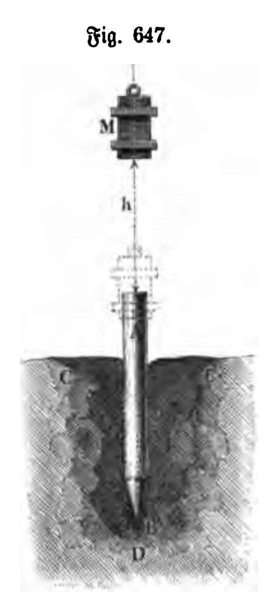
Wäre nun noch der Querschnitt F der Ramme 0,12 Quadratmeter, so würde folglich das Tragvermögen der Erdmasse pr. Quadratmeter

$$p = \frac{P}{F} = \frac{12000}{0{,}12} = 100000 \text{ Kilogramm}$$

betragen, wofür jedoch der Sicherheit wegen etwa nur $\frac{1}{10} P = 10000$ Kilogramm anzunehmen ist.

§. 371. **Einrammen der Pfähle.** Durch Einrammen von Pfählen wie AB, Fig. 647, erhält der Erdboden CDC oder eine andere lockere Masse noch eine größere Tragfähigkeit als durch bloßes Zusammenstampfen. Solche Pfähle sind 3 bis 10 Meter lang, 0,2 bis 0,5 Meter dick, und erhalten einen zugespitzten eisernen Schuh B. Der Körper M, der sogenannte Rammklotz, Rammbär oder Hoyer, welchen man 1 bis 10 Meter hoch herabfallen und auf den Kopf des Pfahles aufschlagen läßt, besteht in der Regel aus Gußeisen, seltener aus Eichenholz und wiegt 5 bis 20 Ctr.

Fig. 647.



Fällt der Rammbär von der senkrechten Höhe h herab, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher er auf den Pfahl aufschlägt:

$$c = \sqrt{2gh},$$

und ist sein Gewicht $= G$, sowie das des Pfahles $= G_1$, so hat man unter der Voraussetzung, daß beide Körper unelastisch sind, die Geschwindigkeit derselben am Ende des Stoßes (s. §. 356):

$$v = \frac{Gc}{G + G_1},$$

daher die entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 \frac{c^2}{2g} = \left(\frac{G}{G + G_1}\right)^2 h.$$

Sinkt nun der Pfahl beim letzten Schlage um die Tiefe s ein, so ist der Widerstand des Erdreiches und also auch die Tragfähigkeit des Pfahles:

$$P = \frac{v^2}{2gs}(G + G_1) = \frac{h}{s} \frac{G^2}{G + G_1},$$

oder vielmehr, da auch das Gewicht $G + G_1$ des Pfahles sammt Rammbär dem Widerstande des Erdreiches entgegenwirkt:

$$P = \frac{h}{s} \frac{G^2}{G + G_1} + (G + G_1).$$

In den meisten Fällen ist $G + G_1$ so klein gegen P, daß der letzte Theil der Formel unbeachtet bleiben kann.

Ist das Gewicht G_1 des Pfahles viel kleiner als das Gewicht G des Rammbäres, so kann man

$$v = \frac{G c}{G + G_1} = c$$

und einfach

$$P = \frac{h}{s} G \text{ setzen.}$$

Die vorstehende Theorie reicht in der praktischen Anwendung nur dann aus, wenn der Widerstand P ein mäßiger und folglich die Tiefe s des Eindringens nicht sehr klein ist, so daß die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. außer Acht gelassen werden kann. Ist hingegen der Widerstand P sehr groß, und folglich die Tiefe s des Eindringens bei einem Schlage sehr klein, so läßt sich die Zusammendrückung λ des Pfahles nicht mehr als Null ansehen und muß daher mit in Betracht gezogen werden.

Der Pfahl fängt natürlich nicht eher an zu sinken, als bis die Kraft des Stoßes dem Widerstande P des Erdreiches gleich geworden ist. Sind nun $H = \frac{F E}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ die Härten des Rammbäres und des Pfahles (im Sinne des §. 360), so beträgt bei der Stoßkraft P die Summe der Zusammendrückungen beider Körper zusammen:

$$\lambda = \frac{P}{H} + \frac{P}{H_1} = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) P,$$

und es ist daher die auf diese Zusammendrückungen verwendete mechanische Arbeit:

$$L = {}^1/_2 P \lambda = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}.$$

Wird nun durch diesen ersten Zusammenstoß die Geschwindigkeit c des Rammbäres in die Geschwindigkeit v umgeändert, so verrichtet die Masse $M = \frac{G}{g}$ desselben die mechanische Arbeit:

$$L = {}^1/_2 M c^2 - {}^1/_2 M v^2 = (c^2 - v^2) \frac{M}{2} = \left(\frac{c^2 - v^2}{2 g}\right) G;$$

wir können folglich

$$\left(\frac{c^2 - v^2}{2 g}\right) G = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2}$$

setzen, und erhalten

$$\frac{v^2}{2 g} = \frac{c^2}{2 g} - \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right) \frac{P^2}{2 G},$$

folglich die Geschwindigkeit des Rammbäres im Augenblicke, wenn der Pfahl einzudringen anfängt:

$$v = \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2G}}.$$

Es ist hiernach zu ermessen, daß dieses Eindringen des Pfahles (und ebenso auch eines Bolzens oder Nagels in eine Wand) nur dann vor sich gehen kann, wenn

$$\frac{c^2}{2g}G > \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2}$$

ist, wenn also das Gewicht des Rammbäres und die Geschwindigkeit desselben dem Widerstande des Erdreiches angemessene Größen haben.

Während der Pfahl eindringt, nimmt die Stoßkraft und folglich auch die Zusammendrückung des Pfahles u. s. w. so lange zu, als die Geschwindigkeit des Rammbäres noch größer ist als die des Pfahles; nachdem aber beide Körper eine gleiche Geschwindigkeit v_1 erlangt haben, und die Stoßkraft ihr Maximum erreicht hat, fangen die Körper an, sich allmälig wieder auszudehnen. Bei diesem Ausdehnen wird die Geschwindigkeit des Pfahles sowohl wie des Rammbäres vernichtet, indem die in diesen Massen enthaltene lebendige Kraft zur Ueberwindung des Widerstandes verwandt wird, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt. Der Druck zwischen Pfahl und Rammbär wird während der Wiederausdehnung stetig kleiner, und in dem Augenblicke, in welchem er bis auf den Werth P des Bodenwiderstandes herabgegangen ist, hört jedes weitere Eindringen des Pfahles auf, indem die übrige, durch das völlige Wiederausdehnen zur Aeußerung gelangende mechanische Arbeit nur noch ein Zurückwerfen des Rammbärs bewirken kann. Es ist folglich in dem gedachten Augenblicke, wo der Druck des Rammbäres auf den Pfahl gerade wieder bis zu dem Werthe P vermindert und der Pfahl zu Ruhe gekommen ist, das ganze mechanische Arbeitsvermögen $\frac{c^2}{2g}G$ des Rammbäres durch die Arbeit

$$\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2}$$

zum Zusammendrücken und durch die Arbeit

$$Ps$$

zum Eintreiben des Pfahles um die Tiefe s verbraucht.

Es ist also hiernach:

$$\frac{c^2}{2g}G = Gh = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2} + Ps$$

und daher die der Eindringungstiefe s entsprechende Tragkraft:

$$P = \left(\frac{HH_1}{H + H_1}\right)\left(\sqrt{2\,\frac{H + H_1}{HH_1}\,\frac{c_2}{2g}\,G + s^2} - s\right).$$

Wäre die Zusammendrückung $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2}$ bedeutend kleiner als der Weg s des Pfahles, so könnte man einfach

$$P = \frac{c^2}{2g}\,\frac{G}{s} = \frac{Gh}{s} \text{ oder schärfer}$$

$$P = \frac{Gh}{s + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{Gh}{2s}} \text{ setzen.}$$

Vergleicht man die Arbeit

$$Ps = \frac{Gh}{1 + \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2s}}$$

des eindringenden Pfahles mit der Arbeit Gh, welche das Aufheben des Rammbäres erfordert, so sieht man, daß sich dieselbe der letzteren um so mehr nähert, je kleiner $\left(\frac{1}{H} + \frac{1}{H_1}\right)\frac{P}{2s}$ ausfällt, je größer also die Härten $H = \frac{FE}{l}$ und $H_1 = \frac{F_1 E_1}{l_1}$ des Rammbäres und des Pfahles, d. i. je größer die Querschnitte F und F_1, sowie die Elasticitätsmodel E und E_1 und je kleiner die Längen l und l_1 dieser Körper sind.

Die Wirkungen dieser beiden Körper durch ihre Gewichte kann man ganz außer Acht lassen, da die letzteren in der Regel gegen den Widerstand P nur klein sind. Ebenso läßt sich die Arbeitsleistung beider Körper, welche dieselben in Folge ihrer, wenn auch nur unvollkommenen Elasticität äußern, nachdem der Pfahl zur Ruhe gekommen ist, vernachlässigen, da der durch die weitere Ausdehnung der Körper zurückgeworfene Rammbär beim Zurückfallen und Wiederaufschlagen auf den Pfahl nicht im Stande ist, P zu überwinden und den Pfahl in Bewegung zu setzen. Der Sicherheit wegen belastet man die eingerammten Pfähle nur mit $^1/_{10}$ des gefundenen Widerstandes P, oder nach Befinden noch schwächer. Nach neuerlich angestellten Versuchen vom Herrn Major John Sanders im Fort Delaware (briefliche Mittheilung) läßt sich der Widerstand annähernd einfach

$$P = \frac{Gh}{3s} \text{ setzen.}$$

Beispiel. Ein Pfahl von 0,1 Quadratmeter Querschnitt, 8 Meter Länge und 600 Kilogramm Gewicht ist durch einen 2 Meter hoch herabfallenden Rammbär von 1000 Kilogramm Gewicht bei der letzten Hitze von 10 Schlägen noch 50 Milli-

meter tiefer eingetrieben worden. Welche Größe hat der Widerstand des Erdreiches? Sieht man von der unbedeutenden Zusammendrückung des gußeisernen Rammbäres ganz ab, und setzt man (nach §. 218) den Elasticitätsmodul des Holzes $E_1 = 1100$ Kilogramm, so erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}+\frac{1}{H_1}\right) = 0 + \frac{l_1}{2F_1E_1} = \frac{8000}{2 \,.\, 100000 \,.\, 1100} = 0{,}0000364.$$

Da ferner $Gh = 1000 \,.\, 2000 = 2\,000\,000$ Millimeterkilogramm und die Tiefe des Eindringens nach einem Schlage $s = 5$ Millimeter ist, so erhält man zur Bestimmung des Widerstandes P folgende Gleichung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}+\frac{1}{H_1}\right)P^2 + Ps = Gh, \text{ d. i.:}$$

$$0{,}0000364\,P^2 + 5P = 2000000 \text{ oder } P^2 + 137\,363\,P = 54\,945\,000\,000.$$

Die Auflösung derselben ergiebt:

$$P = -\,68682 + \sqrt{59\,662\,220\,000} = 175577 \text{ Kilogramm.}$$

Nach der Sanders'schen Formel ist:

$$P = \frac{Gh}{3s} = \frac{2\,000\,000}{15} = 133333 \text{ Kilogramm,}$$

wogegen die erst angegebene einfache Rechnung

$$P = \frac{G^2h}{(G+G_1)s} = \frac{G}{G+G_1}\,\frac{Gh}{s} = \frac{1000}{1600}\,\frac{2\,000\,000}{5} = 250000 \text{ Kilogramm}$$

liefern würde.

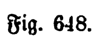
Aus $P = 175\,577$ Kilogramm ergiebt sich:

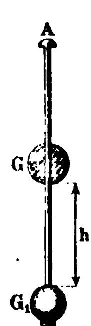
$$\left(\frac{1}{H}+\frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2} = 1\,122\,110 \text{ Millimeterkilogramm,}$$

und daher die Höhe, von welcher der 1000 Kilogramm schwere Rammbär mindestens herabfallen muß, um den Pfahl bewegen zu können:

$$h = \left(\frac{1}{H}+\frac{1}{H_1}\right)\frac{P^2}{2G_1} = \frac{1122110}{1000} = 1{,}122 \text{ Meter.}$$

§. 372. **Absolute Stossfestigkeit.** Mit Hülfe der Arbeitsmodel der Elasticität und Festigkeit (s. §. 212) kann man nun auch berechnen, unter welchen Bedingungen ein stangenförmiger Körper AB, Fig. 648, durch einen in seiner Axenrichtung geführten Stoß bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt oder nach Befinden zerrissen wird. Sei G das Gewicht des stoßenden Körpers von der Masse M und c die durch das Herabfallen von der Höhe h erreichte Geschwindigkeit desselben, und bezeichne G_1 das Gewicht einer an der Stange AB hängenden gestoßenen Masse M_1. Wenn man die Masse der Stange AB vorläufig vernachlässigt, so berechnet sich die gemeinsame Geschwindigkeit v, mit welcher beide Massen M und M_1 nach dem Stoße sich bewegen, zu:


Fig. 648.



$$v = \frac{Mc}{M+M_1} = \frac{Gc}{G+G_1}.$$

Vermöge dieser Geschwindigkeit enthalten diese Massen die lebendige Kraft:

$$(M + M_1)\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{M^2 c^2}{M + M_1},$$

entsprechend einer mechanischen Arbeit:

$$L = \frac{G^2}{G + G_1}\frac{c^2}{2g} = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Diese mechanische Arbeit wird zu einer Ausdehnung der Stange AB verwendet, an welcher der gestoßene Körper hängt. Bezeichnet F den Querschnitt, l die Länge und λ die hervorgerufene Ausdehnung der Stange, sowie E den Elasticitätsmodul des Materials, so ist die zur Erzeugung der Verlängerung λ erforderliche Kraft P gegeben durch:

$$P = \frac{\lambda}{l} EF$$

und die zu dieser Ausdehnung erforderliche mechanische Arbeit nach §. 212:

$$\frac{1}{2} P\lambda = \frac{\lambda^2}{2l} EF.$$

Man hat daher, um λ zu finden, diese zur Ausdehnung erforderliche Arbeit gleich der vorhandenen L zu setzen und findet:

$$\frac{\lambda^2}{2l} EF = \frac{G^2 h}{G + G_1}.$$

Soll der Stab durch den Stoß nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden, so hat man $\frac{\lambda}{l} = \sigma$ zu setzen und findet

$$\frac{G^2 h}{G + G_1} = \frac{\lambda^2}{2l} EF = \frac{1}{2}\sigma^2 E \,.\, Fl = AV,$$

wenn V das Volumen Fl des Stabes und A den Arbeitsmodul $\frac{1}{2}\sigma^2 E$ der Elasticitätsgrenze für Zug bedeutet. Hieraus folgt die Fallhöhe des Gewichtes G, bei welcher eine Anstrengung des Materials bis zur Elasticitätsgrenze eintritt, durch die Formel:

$$h = \frac{G + G_1}{G^2} \,.\, AV.$$

Soll der Stab bis zum Bruche ausgedehnt werden, so liefert diese Formel die erforderliche Fallhöhe, sobald man anstatt A den Arbeitsmodul B für das Zerreißen einführt. Man erkennt aus obiger Formel, daß bei einem bestimmten V und G die Fallhöhe h des letzteren um so größer werden kann, je größer die gestoßene Masse oder deren Gewicht G_1 ist. Setzt man z. B. G_1 einmal verschwindend klein gegen G (z. B. wenn der Stab AB nur mit einem vorstehenden Bunde zum Auffangen von G versehen ist), ein andermal gleich G, so muß im letzteren Falle das Gewicht doppelt so hoch

herabfallen wie im ersteren, wenn in der Stange in beiden Fällen gleiche Spannungen hervorgerufen werden sollen. Aus diesem Grunde soll man Körpern, welche starken Stößen ausgesetzt sind, möglichst große Massen geben.

Die von den Massen M und M_1 ausgeübte Leistung ist streng genommen etwas größer, als oben berechnet worden, weil diese Massen während des Stoßes noch um die Größe λ sinken, daher hat man genauer:

$$L = \frac{G^2 h}{G + G_1} + (G + G_1)\,\lambda,$$

und also für den Fall, daß durch den Stoß die Elasticitätsgrenze erreicht wird:

$$A V = \frac{G^2 h}{G + G_1} + (G + G_1)\,\lambda.$$

Wenn die Masse M_2 und das Gewicht G_2 der Stange AB nicht so klein sind, um sie vernachlässigen zu können, so hat man die Geschwindigkeit v und die lebendige Kraft der Massen nach dem Stoße in folgender Art zu bestimmen. Bezeichnet wieder v die Geschwindigkeit, welche den beiden Gewichten G und G_1 nach dem Stoße innewohnt, so hat der Endpunkt B der Stange AB ebendieselbe Geschwindigkeit v, während der Punkt A der Stange eine Geschwindigkeit Null hat. Dem entsprechend hat jedes Massentheilchen ∂m der Stange, welches um die Größe x unterhalb A liegt, die Geschwindigkeit $\frac{v}{l}x$. Hiernach ergiebt sich das Bewegungsmoment der Stange (§. 356):

$$\int_0^l \partial m \frac{v}{l} x$$

und ihre halbe lebendige Kraft:

$$\int_0^l \frac{1}{2} \partial m \left(\frac{v}{l} x\right)^2.$$

Setzt man hierin $\partial m = \gamma F \partial x$, so folgt das Bewegungsmoment der Stange:

$$\int_0^l \gamma F \frac{v}{l} x \partial x = \gamma F \frac{v}{l} \int_0^l x \partial x = \frac{\gamma F l}{2} v = \frac{M_2}{2} v$$

und die halbe lebendige Kraft derselben:

$$\int_0^l \frac{1}{2} \gamma F \left(\frac{v}{l} x\right)^2 \partial x = \frac{1}{2} \gamma F \frac{v^2}{l^2} \int_0^l x^2 \partial x = \frac{\gamma F l}{3} \frac{v^2}{2} = \frac{M_2}{3} \frac{v^2}{2}.$$

Nach Einführung dieser Werthe folgt die Geschwindigkeit v nach dem Stoße zu:

$$v = \frac{Mc}{M + M_1 + \frac{M_2}{2}} = \frac{Gc}{G + G_1 + \frac{G_2}{2}}$$

und die in dem ganzen Systeme nach dem Stoße enthaltene mechanische Arbeit:

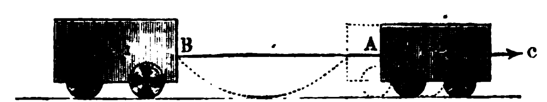
$$\left(G + G_1 + \frac{G_2}{3}\right)\frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(G + G_1 + \frac{G_2}{3}\right)\left(\frac{Gc}{G + G_1 + \frac{G_2}{2}}\right)^2,$$

so daß für die Ausdehnung λ bis zur Elasticitätsgrenze die Gleichung gilt:

$$L = AV = \left(G + G_1 + \frac{1}{3}G_2\right)\left(\frac{G}{G + G_1 + \frac{1}{2}G_2}\right)^2 h$$
$$+ \left(G + G_1 + \frac{1}{2}G_2\right)\lambda.$$

Ein ähnlicher Fall der Stoßwirkung kommt dann vor, wenn eine bewegte Masse $M = \frac{G}{g}$, Fig. 649, mittels einer Kette oder eines Seiles AB eine andere Masse $M_1 = \frac{G}{g}$ in Bewegung setzt. Ist c die Geschwindigkeit von

Fig. 649.



M in dem Augenblicke, wenn das Seil gespannt wird, und v die Geschwindigkeit, mit welcher beide Massen nach dem Stoße zusammen fortgehen, so hat man wieder:

$$v = \frac{Mc}{M + M_1} = \frac{Gc}{G + G_1},$$

dagegen aber die Arbeit, welche auf die Ausdehnung der Kette verwendet wird:

$$L = \frac{1}{2} Mc^2 - \frac{1}{2}(M + M_1)v^2 = \left(M - \frac{M^2}{M + M_1}\right)\frac{c^2}{2}$$
$$= \frac{MM_1}{M + M_1}\frac{c^2}{2} = \frac{GG_1}{G + G_1} h.$$

Wenn daher die Kette u. s. w. bei diesem Zusammenstoßen nur bis zur Elasticitätsgrenze ausgedehnt werden soll, so läßt sich

$$A F l = \frac{G G_1}{G + G_1} h$$

setzen, wobei F den Querschnitt und l die Länge der Kette bezeichnet.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Kettenbrücke zwei gegenüber befindliche Hängestangen zusammen ein constantes Gewicht von 2500 Kilogramm tragen und durch einen darüber wegfahrenden Wagen noch mit 3000 Kilogramm belastet werden, wenn ferner der Arbeitsmodul A der Elasticitätsgrenze des Schmiedeeisens 0,0044 Millimeterkilogramm, die Länge einer Hängestange 5 Meter und der Querschnitt derselben 0,001 Quadratmeter beträgt, so hat man die gefährliche Fallhöhe:

$$h = \frac{G + G_1}{G^2} A V = \frac{2500 + 3000}{9000000} 0{,}0044 . 5000 . 1000 . 2 = \frac{242}{9} = 26{,}9 \text{ Millim.}$$

Rollt hiernach der Wagen über ein Hinderniß von 26,9 Millimeter Höhe weg, so werden die Hängestangen schon Gefahr laufen, über die Elasticitätsgrenze hinaus ausgedehnt zu werden.

2) Wenn das gefüllte Fördergefäß oder die sogenannte Treibetonne in einem Schachte nicht allmälig aus der Ruhe in Bewegung gesetzt wird, sondern mittels des vorher schlaff herabhängenden Seiles plötzlich von dem umlaufenden Korbe in eine gewisse Geschwindigkeit versetzt wird, so dehnt sich dadurch das Seil oft bis über die Elasticitätsgrenze aus, und es wird dasselbe zuweilen auch ganz zerrissen. Ist z. B. die träge Masse der armirten Korbwelle, reducirt auf den Umfang derselben, $M = \frac{G}{g} = \frac{50000}{g}$, das Gewicht der gefüllten Tonne $G_1 =$ 1000 Kilogramm, das Gewicht des Treibseiles = 200 Kilogramm, das Gewicht eines Cubikmillimeters Seil = 0,000008 Kilogramm, folglich das Volumen dieses Seiles:

$$V = F l = \frac{G_2}{\gamma} = \frac{200}{0{,}000008} = 25000000 \text{ Cubikmillimeter}$$

und der Arbeitsmodul für das Zerreißen des Seiles $B = 0{,}25$ Millimeterkilogramm, so hat man die dem Zerreißen des Seiles entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$h = B V \frac{G + G_1}{G G_1} = 0{,}25 . 25000000 \frac{50000 + 1000}{50000 . 1000} = 6{,}375 \text{ Meter,}$$

und daher die Geschwindigkeit des Seiles bei Beginn des Anspannens:

$$c = \sqrt{2 g h} = \sqrt{2 . 9{,}81 . 6{,}375} = 11{,}184 \text{ Meter.}$$

§. 373. **Relative Stossfestigkeit.** Die vorstehende Theorie findet auch ihre Anwendung, wenn ein an beiden Enden unterstützter prismatischer Balken BB, Fig. 650, in seiner Mitte C den Schlag eines von der Höhe $AC = h$ niederfallenden Körpers A aufnehmen muß. Ist G das Gewicht der stoßenden Masse M und G_1 das Gewicht des Balkens, dessen Masse M_1 ist, sowie $c = \sqrt{2 g h}$ die Geschwindigkeit, mit welcher die Masse M auf den Balken BB aufschlägt, so läßt sich die Rechnung folgendermaßen führen: In Folge des Stoßes biegt sich der Balken BB, Fig. 651, nach unten

durch und zwar beträgt die Durchbiegung in der Mitte bei einer Kraft P daselbst, und wenn die ganze Länge mit l bezeichnet wird, nach §§. 235 und 241:

$$CD = s = \frac{\frac{P}{2}}{3\,WE}\left(\frac{l}{2}\right)^3 = \frac{Pl^3}{48\,WE}.$$

Fig. 650.

Fig. 651.

In einem beliebigen anderen Punkte N im Abstande x von der Mitte C beträgt die Durchbiegung (vergl. §. 235):

$$NO = z = s - y = \frac{Pl^3}{48\,WE} - \frac{\frac{1}{2}P}{2\,WE}\left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)$$
$$= \frac{Pl^3}{48\,WE}\left(1 - \frac{6\,x^2}{l^2} + 4\,\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Da nun die Durchbiegung z in N in derselben Zeit herbeigeführt wird, in welcher die Durchbiegung s in der Mitte entsteht, so muß man annehmen, daß das Verhältniß der Durchbiegungen $\frac{s}{z}$ auch gleich dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten ist, mit welchen die Punkte D und O sich nach dem Stoße bewegen. Wenn man daher mit v die Geschwindigkeit in der Mitte und mit v_x diejenige im Abstande x bezeichnet, so hat man zur Bestimmung von v_x die Gleichung:

$$\frac{v}{v_x} = \frac{s}{z} = \frac{1}{1 - \frac{6\,x^2}{l^2} + 4\,\frac{x^3}{l^3}} \text{ oder } v_x = v\left(1 - \frac{6\,x^2}{l^2} + 4\,\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Um nun die Geschwindigkeit v nach dem Stoße zu finden, ist zunächst das Bewegungsmoment des Balkens zu ermitteln. Ist wieder $\partial m = \gamma F \partial x$ ein Element des Balkens, so hat man das Bewegungsmoment einer Balkenhälfte gleich

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \partial m \,.\, v_x = \gamma F v \int_0^{\frac{l}{2}} \partial x \,.\left(1 - \frac{6\,x^2}{l^2} + \frac{4\,x^3}{l^3}\right)$$

$$= \gamma F v\left(\frac{l}{2} - \frac{6\left(\frac{l}{2}\right)^3}{3\,l^2} + \frac{4\left(\frac{l}{2}\right)^4}{4\,l^3}\right) = \frac{5}{16}\,\gamma F l \,.\, v = \frac{5}{16}\,M_1 v$$

und das Bewegungsmoment beider Hälften zusammen gleich $\frac{5}{8} M_1 v$. Es ergiebt sich daher die Geschwindigkeit v in der Mitte nach §. 356 durch:

$$Mc = \left(M + \frac{5}{8} M_1\right) v, \text{ woraus}$$

$$v = \frac{Mc}{M + \frac{5}{8} M_1} = \frac{Gc}{G + \frac{5}{8} G_1} \text{ folgt.}$$

Die lebendige Kraft eines Balkenelementes ∂m, dessen Geschwindigkeit v_x ist, bestimmt sich nunmehr zu

$$\partial m v_x^2 = \gamma F \partial x \,.\, v^2 \left(1 - \frac{6x^2}{l^2} + \frac{4x^3}{l^3}\right)^2,$$

folglich ist diejenige in beiden Balkenhälften gefunden durch:

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \partial m \,.\, v_x^2 = 2 \gamma F v^2 \int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{6x^2}{l^2} + \frac{4x^3}{l^3}\right)^2 \partial x.$$

Der Werth des Integrals ist

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \left(1 - \frac{12x^2}{l^2} + \frac{36x^4}{l^4} + \frac{8x^3}{l^3} - \frac{48x^5}{l^5} + \frac{16x^6}{l^6}\right) \partial x$$

$$= \frac{1}{2} l - \frac{12}{24} l + \frac{36}{160} l + \frac{8}{64} l - \frac{48}{384} l + \frac{16}{896} l = \frac{17}{70} l.$$

Dies eingeführt, liefert die lebendige Kraft des Balkens gleich:

$$2 \gamma F v^2 \,.\, \frac{17}{70} l = \frac{17}{35} M_1 v^2.$$

Da die stoßende Masse M die lebendige Kraft Mv^2 enthält, so beträgt die in dem ganzen Systeme nach dem Stoße vorhandene lebendige Kraft

$$\left(M + \frac{17}{35} M_1\right) v^2 = \left(M + \frac{17}{35} M_1\right) \left(\frac{Mc}{M + {}^5/_8 M_1}\right)^2,$$

oder die darin enthaltene mechanische Arbeit:

$$L = \left(G + \frac{17}{35} G_1\right) \frac{v^2}{2g} = \left(G + \frac{17}{35} G_1\right) \left(\frac{G}{G + {}^5/_8 G_1}\right)^2 h.$$

Bei einer Durchbiegung des Balkens BB von der Länge l durch die Kraft P um die Größe $s = \frac{Pl^3}{48 WE}$ ist eine Arbeit zu verrichten von der Größe:

$$^1/_2 P \,.\, s = {}^1/_2 P^2 \frac{l^3}{48 WE},$$

welche Arbeit gleich L zu setzen ist.

Wenn man die Bedingung stellt, daß der Balken durch den Stoß bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden soll, so ergiebt sich P aus der Gleichung (s. §. 241):

$$P = 4\,T\,\frac{W}{l e},$$

worin T den Tragmodul bezeichnet.

Setzt man diesen Werth ein, so folgt die zur Durchbiegung des Balkens bis zur Elasticitätsgrenze erforderliche mechanische Arbeit zu

$$\tfrac{1}{2}\,P^2\,\frac{l^3}{48\,WE} = \tfrac{1}{2}\,16\,T^2\,\frac{W^2}{l^2 e^2}\cdot\frac{l^3}{48\,WE} = \tfrac{1}{2}\,\frac{T^2}{E}\,\frac{Wl}{3\,e^2} = A\,\frac{Wl}{3\,e^2},$$

unter A den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze $\frac{T^2}{2E}$ verstanden. Man hat daher die Gleichung:

$$L = A\,\frac{Wl}{3\,e^2} = \left(G + \frac{17}{35}\,G_1\right)\left(\frac{G}{G + \frac{5}{8}\,G_1}\right)^2 h,$$

woraus die Höhe h sich bestimmt, von welcher das Gewicht G herabfallen muß, um den Balken bis zur Elasticitätsgrenze anzustrengen. Insbesondere ist für einen prismatischen Balken von der Breite b_1 und Höhe h_1 des Querschnittes:

$$\frac{Wl}{3\,e^2} = \frac{b_1 h_1^3\, l}{3\,.\,12\left(\frac{h_1}{2}\right)^2} = \frac{b_1 h_1\, l}{9} = \frac{V}{9},$$

wenn V das Volumen des Balkens bedeutet, daher hat man:

$$\frac{A V}{9} = \left(G + \frac{17}{35}\,G_1\right)\left(\frac{G}{G + \frac{5}{8}\,G_1}\right)^2 h.$$

Für einen cylindrischen Balken vom Halbmesser r hat man:

$$\frac{Wl}{3\,e^2} = \frac{\pi r^4 l}{3\,.\,4\,.\,r^2} = \frac{\pi r^2 l}{12} = \frac{V}{12}$$

und daher:

$$\frac{A V}{12} = \left(G + \frac{17}{35}\,G_1\right)\left(\frac{G}{G + \frac{5}{8}\,G_1}\right)^2 h.$$

Soll der Balken durch den Stoß bis zum Bruche beansprucht, die Spannung also bis zur Festigkeit K gesteigert werden, so hat man in obigen Formeln $B = \frac{K^2}{2E}$ anstatt A einzuführen, ebenso wie diese Formeln gültig bleiben für irgend eine Spannung k der äußersten Fasern, sobald man darin für A den betreffenden Arbeitsmodul dieser Spannung $\frac{k^2}{2E}$ einführt.

In obigen Entwickelungen ist die Arbeit vernachlässigt worden, welche die Gewichte G und G_1 noch vermöge der Durchbiegung verrichten, ist diese Arbeit, wie z. B. bei Brücken, wo G_1 bedeutend ist, nicht zu vernachlässigen, so hat man dem Ausdrucke für L noch den Werth

$$(G + {}^5/_8\, G_1)\, s = (G + {}^5/_8\, G_1)\, \frac{Pl^3}{48\, WE} = (G + {}^5/_8\, G_1)\, \frac{4\, k\, W}{c\, l}\, \frac{l^3}{48\, WE}$$

$$= (G + {}^5/_8\, G_1)\, \frac{k\, l^2}{12\, e\, E}$$

hinzuzufügen, so daß die allgemeine Gleichung übergeht in:

$$\frac{1}{2}\, \frac{k^2}{E}\, \frac{Wl}{3\, e^2} = \left(G + \frac{17}{35}\, G_1\right) \left(\frac{G}{G + {}^5/_8\, G_1}\right)^2 h + (G + {}^5/_8\, G_1)\, \frac{k\, l^2}{12\, e\, E}\ ^{*)}.$$

Beispiel. Wie hoch muß ein eisernes Gewicht $G = 100$ Kilogramm herabfallen, um eine an beiden Enden aufliegende Gußeisenplatte von 1 Meter Länge, 0,3 Meter Breite und 0,08 Meter Stärke zu zerschlagen.

Das Volumen V der Gußeisenplatte beträgt:

$$V = 1000\ .\ 300\ .\ 80 = 24000000 \text{ Cubikmillimeter}$$

und daher ihr Gewicht bei dem specifischen Gewichte 7,5 des Gußeisens:

$$G_1 = 180 \text{ Kilogramm.}$$

Der Arbeitsmodul des Zerreißens für Gußeisen beträgt nach §. 218:

$$\frac{1}{2}\, \frac{K^2}{E} = \frac{1}{2}\, \frac{13^2}{10000} = 0{,}0084,$$

daher hat man für die fragliche Höhe:

$$\frac{BV}{9} = \frac{0{,}0084\ .\ 24000000}{9} = \left(100 + \frac{17}{35}\, 180\right) \left(\frac{100}{100 + {}^5/_8\ .\ 180}\right)^2 h,$$

oder: $22400 = 187{,}4\ .\ 0{,}221\, h;\ h = 540$ Millimeter.

§. 374. **Torsionsfestigkeit gegen Stoss.** Es lassen sich auch die Wirkungen des Stoßes auf die Torsion der Wellen untersuchen. Nach §§. 269 und 271 ist die mechanische Arbeit, welche die Verdrehung einer Welle um den Winkel α erfordert:

$$L = \frac{Pa\alpha}{2} = \frac{S^2}{2\, C}\, \frac{Wl}{e^2},$$

---

*) In der vorstehenden Untersuchung ist die Spannung vernachlässigt, welcher der Balken schon vor dem Stoße durch seine Eigenlast ausgesetzt ist. Beträgt diese Spannung in der Mitte k_1 und darf also eine Steigerung derselben nur um $k - k_1 = k_2$ eintreten, wenn k die höchstens zulässige Spannung bedeutet, so muß man auf der linken Seite obiger Gleichung anstatt k^2 den Werth $(k_1 + k_2)^2 - k_1^2 = 2\, k_1\, k_2 + k_2^2$ einführen. Dies ist bei Brücken von besonderer Wichtigkeit, bei welchen das bedeutende Eigengewicht von vornherein schon eine beträchtliche Faserspannung k_1 hervorruft.

worin S die größte Faserspannung und e den größten Abstand der Fasern von der Drehaxe, l die Länge der Welle und W ihr Drehungsmoment bedeutet. Insbesondere ist für eine cylindrische Welle:

$$L = \frac{S^2}{2\,C} \frac{\pi d^4}{32\left(\frac{d}{2}\right)^2} l = \frac{S^2}{2\,C} \frac{V}{2}$$

und für eine Welle mit quadratischem Querschnitte von der Seitenlänge b:

$$L = \frac{S^2}{2\,C} \frac{b^4}{6 \cdot \frac{b^2}{2}} l = \frac{S^2}{2\,C} \frac{V}{3}.$$

Wird die Welle bis zur Elasticitätsgrenze oder bis zum Bruche angestrengt, so hat man für $\frac{S^2}{2\,C}$ resp. den Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze A oder den des Abwürgens B zu setzen.

Stößt nun eine umlaufende Radwelle, deren auf den Angriffspunkt des Stoßes reducirte Masse $M = \frac{G}{g}$ ist, gegen die ruhende Masse $M_1 = \frac{G_1}{g}$ mit der Geschwindigkeit c, so gehen beide nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{M c}{M + M_1} = \frac{G c}{G + G_1}$$

fort (§. 358), und es geht hierbei die mechanische Arbeit

$$L = \frac{G\,G_1}{G + G_1} \frac{c^2}{2\,g}$$

verloren (§. 359). Diese mechanische Arbeit L wird auf die Torsion der Welle und auf die Biegung der Radarme verwendet, deshalb ist die Summe der hierzu erforderlichen Arbeiten gleich dem Stoßverluste zu setzen, was zu der Gleichung führt:

$$L = \frac{G\,G_1}{G + G_1} \frac{c^2}{2\,g} = \frac{S^2}{2\,C} \frac{W l}{e^2} + \frac{S_1^2}{2\,E} \frac{W_1 l_1}{3\,e_1^2}.$$

Hierin bedeutet S_1 die größte Biegungsspannung in den Armen, W_1 das Maß des Biegungsmomentes sämmtlicher Arme, l_1 die Länge eines Armes und e_1 den größten Faserabstand eines solchen von seiner neutralen Axe (§. 224). Für die im Querschnitte rechteckigen Arme ist

$$\frac{W_1 l_1}{3\,e_1^2} = \frac{b_1 h_1^3 l_1}{12 \,.\, 3\left(\frac{h_1}{2}\right)^2} = \frac{b_1 h_1 l_1}{9} = \frac{V_1}{9},$$

wenn h_1 die Höhe des Armquerschnittes in der Radebene gemessen, b_1 die Gesammtbreite axial gemessen und V_1 das Volumen aller Arme bedeutet. Hiernach folgt bei Annahme vierkantiger Radarme für eine cylindrische Welle:

$$\frac{G\,G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2g} = \frac{S^2}{2C}\,\frac{V}{2} + \frac{S_1^2}{2E}\,\frac{V_1}{9}$$

und für eine Welle mit quadratischem Querschnitte:

$$\frac{G\,G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2g} = \frac{S^2}{2C}\,\frac{V}{3} + \frac{S_1^2}{2E}\,\frac{V_1}{9}.$$

Die Volumina V und V_1 stehen in einem gewissen Zusammenhange mit einander, welcher dadurch ausgedrückt wird, daß das Biegungsmoment der Arme gleich dem Torsionsmomente der Welle ist. Hiernach hat man:

$$k\,\frac{W}{e} = k_1\,\frac{W_1}{e_1},$$

woraus

$$k\,\frac{\pi d^3}{16} = k_1\,\frac{b_1 h_1^2}{6};\ \text{resp.}\ k\,\frac{b^3}{3\sqrt{2}} = k_1\,\frac{b_1 h_1^2}{6}.$$

Setzt man für V die Werthe $\frac{\pi d^2 l}{4}$ resp. $b^2 l$ und für V_1 denjenigen $b_1 h_1 l_1$ ein, so erhält man schließlich:

$$\frac{G\,G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2g} = \frac{k^2}{2C}\,\frac{\pi d^2 l}{8} + \frac{k_1^2}{2E}\,\frac{b_1 h_1 l_1}{9}$$

für eine cylindrische Welle und

$$\frac{G\,G_1}{G + G_1}\,\frac{c^2}{2g} = \frac{k^2}{2C}\,\frac{b^2 l}{3} + \frac{k_1^2}{2E}\,\frac{b_1 h_1 l_1}{9}$$

für eine Welle mit quadratischem Querschnitte.

Aus den vier letzten Gleichungen lassen sich, wenn noch das Verhältniß der Armdimension $\nu = \frac{b_1}{h_1}$ gegeben ist, die Stärke d oder b der Welle, sowie diejenige h_1 der Arme bestimmen. Hierbei sind die höchstens zulässigen Spannungen k und k_1 aus §§. 271 und 218 zu entnehmen.

Beispiel. Die auf den Angriffspunkt des Daumens reducirte Masse eines Hammerrades ist $M = \frac{100000}{g}$ und die auf denselben Punkt reducirte Masse des Hammers $M_1 = \frac{12000}{g}$. Die Länge der Welle zwischen dem Daumenkranze und dem Rade beträgt $l = 5$ Meter und die von jedem der 16 Radarme $l_1 = 3$ Meter. Wenn der Hammer bei jedem Anhube von den Daumen mit 0,6 Meter Geschwindigkeit ergriffen wird, welche Stärken sind der hölzernen Welle und den hölzernen Armen zu geben für den Fall, daß in der Welle die höchste Schubspannung $k = 0,1$ Kilogramm und die größte Biegungsspannung der Arme $k_1 = 1$ Kilogramm betragen soll?

Man hat zunächst:

$$0,1\,\frac{\pi d^3}{16} = 1\,\frac{b_1 h_1^2}{6}$$

oder, wenn $b_1 = 16 \nu h_1 = 16 \,.\, {}^3/_4 h_1 = 12 h_1$ gesetzt wird:

$$0{,}1 \frac{\pi d^3}{16} = \frac{12 h_1^3}{6} = 2 h_1^3.$$

Hieraus folgt:

$$d = h_1 \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 2}{0{,}1 \,.\, 3{,}14}} = 4{,}66 h_1.$$

Man erhält nunmehr durch Einsetzen obiger Werthe in die für die cylindrische Welle entwickelte Formel:

$$\frac{100\,000 \,.\, 12000}{112\,000} \frac{600^2}{2 \,.\, 9810} = \frac{0{,}1^2}{2 \,.\, 400} \frac{3{,}14 d^2 5000}{8} + \frac{1^2}{2 \,.\, 1100} \frac{12 h_1 h_1 3000}{9}$$

oder:

$$196\,592 = 0{,}025 d^2 + 1{,}818 h_1^2 = 0{,}025 \,.\, 4{,}66^2 h_1^2 + 1{,}818 h_1^2 = 2{,}361 h_1^2.$$

Hieraus folgt

$$h_1 = \sqrt{\frac{196\,592}{2{,}361}} = 288{,}6 \text{ Millimeter},$$

daher die Breite jedes Armes ${}^3/_4 h_1 = 0{,}216$ Meter und die Wellenstärke $d = 4{,}66 h_1 = 1{,}345$ Meter.

Ueber Stossfestigkeit im Allgemeinen. Bei solchen Constructionen, welche Stößen ausgesetzt sind, genügt es nicht, die Dimensionen der einzelnen Organe den im vierten Abschnitte entwickelten Bedingungen gemäß hinreichend stark zu machen, sondern es ist dafür noch die Untersuchung von besonderer Wichtigkeit, ob die einzelnen Theile auch im Stande sind, der dynamischen Anspruchsweise entsprechend, genügende mechanische Arbeit zu entwickeln. Wie aus den vorstehenden Ermittelungen (§§. 372 bis 374) sich ergiebt, ist die von einem Constructionstheile geleistete Arbeit außer von dem Materiale wesentlich von seinem Volumen abhängig. Während bei der statischen Inanspruchnahme durch ruhende Kräfte die Widerstandsfähigkeit eines Körpers abhängig ist von der höchstens zulässigen Spannung k des Materials und von den Querschnittsverhältnissen, ist die Festigkeit gegen Stoßwirkungen eine Function der Größe $\frac{k^2}{E}$ resp. $\frac{k^2}{C}$ und des Volumens. Es werden daher beim Construiren hinsichtlich der Auswahl des Materials und der Formbestimmung verschiedene Regeln gelten, je nachdem ein Constructionstheil gegen ruhende Kräfte oder gegen Stöße widerstehen soll. Während bei statischer Inanspruchnahme dasjenige Material ein vorzügliches genannt werden muß, für welches die zulässige Spannung k einen möglichst hohen Werth annimmt (Gußeisen für Druck, Schmiedeeisen und Stahl für Zug und Druck), wird man bei dynamischen Anstrengungen solchen Materialien den Vorzug einräumen, bei welchen der Arbeitsmodul der zulässigen Spannung $\frac{1}{2} \frac{k^2}{E}$ resp. $\frac{1}{2} \frac{k^2}{C}$ groß ist, d. h. bei welchen k möglichst groß §. 375.

im Verhältniß zu E oder C ausfällt. Da die höchstens zulässige Spannung k in der Regel ein aliquoter Theil von der der Elasticitätsgrenze entsprechenden Spannung T zu sein pflegt, so kann man auch die Bedingung hinstellen, daß das Material einen möglichst großen Arbeitsmodul der Elasticitätsgrenze, d. h. bei einem möglichst großen Werthe von T auch eine bedeutende Ausdehnung bis zur Elasticitätsgrenze haben müsse. In dieser Beziehung eignen sich namentlich gewisse Stahlsorten (nicht alle, da manche Stahlsorten sehr spröde sind) und Schmiedeeisen, besonders recht zähes, zu Draht gezogenes oder Blech gewalztes. Nimmt man außerdem auf die Preise Rücksicht, so nimmt das Holz in dieser Hinsicht eine hervorragende Stellung sogar vor dem Gußstahle ein. Der Arbeitsmodul des Holzes ist nach §. 218 gleich 0,0015, der des Gußstahls 0,072. Nimmt man nun den Preis einer Volumeneinheit des Gußstahls auch nur 70mal so groß an, als den einer Volumeneinheit Holz, so würde, auf gleichen Kostenaufwand bezogen, das Holz zum Stahle sich hinsichtlich seiner Arbeitsleistung wie 70 . 0,0015 zu 0,072 oder wie 105 zu 72 verhalten. Wenn auch dies Verhältniß wegen der schwierigeren, bedeutende Verschwächungen herbeiführenden Verbindungen des Holzes, wegen dessen Vergänglichkeit ꝛc. nicht so günstig ist, so rechtfertigt sich doch die häufige Verwendung des Holzes für solche Constructionen, welche den auf sie einwirkenden Stößen widerstehen sollen, ebenso wie für vorübergehende Ausführungen.

Was die Form der Körper anbetrifft, so ist bei der absoluten Stoßfestigkeit der Arbeitswiderstand lediglich von dem Volumen abhängig (§. 372). Auf die Form des Querschnittes der gezogenen Stangen kommt es dabei, ebenso wie bei der statischen Inanspruchnahme, gar nicht an, vorausgesetzt, daß der Querschnitt auf der ganzen Länge gleiche Größe behält. Mit der Länge wächst also der lebendige Widerstand im directen Verhältnisse, was bei der Anstrengung durch ruhende Kräfte keineswegs der Fall ist.

Wenn der Querschnitt der betreffenden Stange nicht in allen Punkten der Länge dieselbe Größe hat, vielmehr an einer Stelle geringer ist, so kann der Arbeitswiderstand der Stange wesentlich sich vermindern, und zwar in viel stärkerem Verhältnisse, als unter den gleichen Umständen der Widerstand gegen eine ruhende Belastung sich vermindert, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Sei $AABB$, Fig. 652, eine bei AA befestigte Stange vom Querschnitte F und der Länge l, welche einer Stoßwirkung etwa dadurch ausgesetzt ist, daß ein Gewicht G beim Herunterfallen von der Höhe h auf einen vorstehenden Bund EE der Stange schlägt. Letztere kann dann eine mechanische Arbeit aushalten:

$$L = Gh = AFl = AV,$$

ehe die Fasern bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden. Denkt man sich nun den Querschnitt der Stange an irgend einer Stelle CC, etwa durch Eindrehen, auf den Querschnitt $DD = \mu F$ verschwächt, so wird, wenn in diesem Querschnitte die der Elasticitätsgrenze entsprechende Spannung T vorhanden ist, in allen übrigen nicht geschwächten Stellen die Spannung $k = \mu T$ stattfinden. Die von der Stange geleistete Arbeit beträgt daher, wenn der Einschnitt sehr schmal ist:

Fig. 652.

$$L_1 = \frac{1}{2}\frac{k^2}{E}V = \frac{1}{2}\frac{\mu^2 T^2}{E}V = \mu^2 A \,.\, V = \mu^2 L.$$

Würde man die Stange überall auf die Stärke DD abdrehen, so würde an allen Stellen die Spannung T vorhanden sein, der Arbeitswiderstand bestimmt sich daher für diesen Fall zu

$$L_2 = \frac{1}{2}\frac{T^2}{E} \,.\, \mu F l = A \,.\, \mu V = \mu L.$$

Wäre z. B. $\mu = {}^3/_4$, so hätte man

$$L_1 = {}^9/_{16}\, L$$

für die eingeschnittene Stange und

$$L_2 = {}^3/_4\, L = {}^{12}/_{16}\, L$$

für die durchweg abgedrehte Stange.

Es ergiebt sich hieraus das eigenthümliche Resultat, daß der lebendige Widerstand einer Stange durch theilweise Verstärkung derselben verkleinert werden kann. Gleiches gilt auch für die relative Inanspruchnahme durch Stoßwirkungen.

Wird ein prismatischer Körper durch eine Stoßkraft auf Zerbrechen bis zur Elasticitätsgrenze beansprucht, so ist (s. §. 373) die Arbeitsleistung desselben

$$L = A\,\frac{Wl}{3\,e^2}.$$

Für einen rechteckigen Querschnitt geht dieser Werth über in

$$L = A\,\frac{bhl}{9} = A\,\frac{V}{9}.$$

Man sieht hieraus, daß der lebendige Widerstand eines rectangulären Prismas derselbe bleibt, ob man die größere oder die kleinere Querschnittsseite in die Richtung der Stoßkraft legt. Eine Blechplatte also leistet gleich viel Arbeitswiderstand, ob sie flach oder hochkantig gestellt wird, was bei der statischen Anstrengung nicht der Fall ist. Auch folgt aus dem Vorhergehenden die interessante Beziehung, daß ein Träger, welcher einen bestimmten lebendigen Widerstand gegen Stöße äußern soll, um so kleinere Querschnittsdimensionen haben darf, je größer seine Länge ist, während bei der statischen Bean-

spruchung durch ruhende Kräfte eine bestimmte Widerstandsfähigkeit bei vergrößerter Trägerlänge nur durch entsprechende Vergrößerung der Querdimensionen erlangt werden kann.

Legt man indeß einen Balken von quadratischem Querschnitte mit der Seite b so auf, daß die Diagonale in die Richtung der Stoßkraft fällt, so ist, da $e^2 = \frac{1}{2} b^2$ ist,

$$L = A \frac{Wl}{3e^2} = A \frac{b^4 l}{6 \,.\, 3 b^2} = A \frac{V}{18},$$

also nur halb so groß, wie bei der geraden Auflagerung. Bei der Biegung durch ruhende Kräfte verhalten sich die diesen verschiedenen Stellungen entsprechenden Widerstände nach §. 230 wie $\sqrt{2} : 1$ oder wie $1{,}414 : 1$.

Hat der Balken einen kreisförmigen Querschnitt, so ist

$$L = A \frac{Wl}{3e^2} = A \frac{\pi d^4 l}{64 \,.\, 3 \left(\frac{d}{2}\right)^2} = A \frac{\pi d^2 l}{16 \,.\, 3} = A \frac{V}{12},$$

und ebenso erhält man für einen elliptischen Querschnitt mit den Halbaxen a und b:

$$L = A \frac{Wl}{3e^2} = A \frac{\pi a^3 b l}{4 \,.\, 3 a^2} = A \frac{\pi a b l}{12} = A \frac{V}{12}.$$

Man erkennt hieraus, daß ein cylindrischer Balken denselben lebendigen Widerstand gegen Brechen zu leisten vermag, wie ein Balken mit elliptischem Querschnitte, sobald das Volumen in beiden Fällen gleiche Größe hat, und daß der dynamische Widerstand eines Balkens mit elliptischem Querschnitte denselben Werth hat, mag man die kleine oder große Axe des Querschnittes in die Richtung der Stoßkraft legen.

Auch die relative Stoßfestigkeit eines Balkens kann durch Verschwächung desselben an einer Stelle sehr bedeutend vermindert werden, und zwar in viel stärkerem Verhältnisse, als dies hinsichtlich der statischen Festigkeit der Fall ist. Bezeichnet man mit d den Durchmesser und mit l die Länge eines auf zwei Stützen ruhenden Balkens, so kann derselbe nach §. 373 die mechanische Arbeit

$$L = \frac{1}{2} \frac{T^2}{E} \frac{V}{12} = A \frac{V}{12}$$

aufnehmen, ehe die Fasern bis zur Elasticitätsgrenze angestrengt werden. Man denke jetzt in der Mitte des Balkens durch einen concentrisch den Balken umgebenden feinen Sägenschnitt den Durchmesser d bis auf $d_1 = \mu d$ verschwächt. Wenn durch irgend eine Einwirkung die Fasern an dieser schwachen Stelle bis zu T angespannt werden, so ist die Faserspannung in dem ungeschwächten Theile dicht neben dem Einschnitte nur:

$$k = T \frac{d_1^3}{d^3} = \mu^3 T.$$

Die dynamische Widerstandsfähigkeit des Balkens beträgt daher nur noch:

$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{k^2}{E} \frac{V}{12} = \frac{1}{2} \frac{(\mu^3 T)^2}{E} \frac{V}{12} = \mu^6 \frac{T^2}{2E} \frac{V}{12} = \mu^6 A \cdot \frac{V}{12}.$$

Wollte man auch hier den Balken so weit abdrehen, daß der Einschnitt verschwände, also der Durchmesser an allen Stellen nur $d_1 = \mu d$ wäre, so würde das Volumen $V_1 = \mu^2 \frac{\pi d^2}{4} l = \mu^2 V$ sein, und man hätte bei einer Anstrengung der Fasern bis zur Elasticitätsgrenze (T) die Widerstandsfähigkeit gegen Stöße:

$$L_2 = \frac{1}{2} \frac{T^2}{E} \frac{V_1}{12} = A \cdot \frac{\mu^2 V}{12}.$$

Würde man z. B. $d_1 = {}^3/_4\, d$ machen, so würde, wenn der ungeschwächte Balken die Leistung L ausüben kann, diejenige des eingeschnittenen Balkens nur $({}^3/_4)^6 L = 0{,}178\, L$ betragen, wogegen diejenige des überall auf ${}^3/_4\, d$ verschwächten Balkens $L_2 = ({}^3/_4)^2 L = 0{,}5625\, L$ ist.

Man erkennt hieraus, in welchem erheblichen Maße die dynamische Widerstandsfähigkeit eines Balkens durch scheinbare Verstärkungen vermindert werden kann, und es gilt daher als eine berechtigte Constructionsregel, bei solchen Organen, welche Stößen ausgesetzt sind, alle plötzlichen Sprünge in den Querschnittsabmessungen möglichst zu vermeiden.

In der Technik macht man von dem obigen Verhalten einen allgemeinen Gebrauch zum Durchhauen dicker Eisenstangen, Röhren ꝛc., die, wenn sie an einer Stelle durch Meißelhiebe nur wenig eingekerbt werden, an dieser Stelle leicht durch einen darauf geführten Hammerschlag zerbrochen werden können.

Anmerkung. Der Stoßfestigkeit ist erst in neuerer Zeit mehr Aufmerksamkeit geschenkt worden. Wir finden über sie nur Einiges mitgetheilt in Tredgold's Werk über die Stärke des Gußeisens u. s. w. (Strength of cast iron), in Poncelet's Introduction à la mécanique industrielle und in Rühlmann's Grundzüge der Mechanik und Geostatik. Letzteres Werk bezieht sich vorzüglich auf die Versuche Hodgkinson's über die Festigkeit prismatischer Körper gegen den Stoß, worüber ein besonderer Artikel in dem ersten Bande der Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen (dem „Ingenieur") von Bornemann u. s. w. handelt.

Die Versuche Hodgkinson's stimmen im Wesentlichen mit der vorstehenden Theorie über die Stoßfestigkeit überein; sie erstrecken sich vorzüglich auf die relative Festigkeit, und sind in der Art ausgeführt worden, daß pendelartig aufgehangene Gewichte horizontal gegen verticale, an den Enden unterstützte Stäbe schlugen. Hierbei hing die Leistung L gar nicht von der materiellen Beschaffen-

heit des stoßenden Körpers ab. Gleich schwere Körper aus verschiedenen Stoffen (Gußeisen, Gußstahl, Glockenmetall, Blei) brachten bei gleicher Fallhöhe an einem und demselben Stabe (aus Gußeisen oder Gußstahl) gleiche Durchbiegungen hervor; auch waren diese fast genau dieselben, welche die Theorie unter der Voraussetzung findet, daß der Stab vollständig elastisch ist.

Schlußanmerkung. Zum Studium der Mechanik starrer Körper ist außer den älteren Werken von Euler, Poisson, Poinsot, Poncelet, Navier und Coriolis, sowie von Whewell, Mosely, Eytelwein und Gerstner zu empfehlen:

Duhamel, Lehrbuch der analytischen Mechanik, in deutscher Uebersetzung von Wagner, Braunschweig 1853; sowie von Eggers und Schlömilch, Leipzig 1853. Sohnke, analytische Theorie der Statik und Dynamik, Halle 1854; Broch's Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1854; Morin, Leçons de Mécanique pratique, Paris 1855 etc. Delaunay, Traité de Mécanique rationelle, Paris 1856; Rankine, a Manual of applied Mechanics, second edition, London 1861, ein werthvolles, in England viel zu wenig geschätztes Werk. Eine neue Monographie über den Stoß von Poinsot ist im 3. Jahrgang von Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik übersetzt.

Sechster Abschnitt.

Statik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke des Wassers in Gefäßen.

Flüssigkeit. Wir betrachten die flüssigen Körper als Verbindungen §. 376. materieller Punkte, deren Zusammenhang unter einander so schwach ist, daß die kleinsten Kräfte hinreichen, sie durch Verschieben von einander zu trennen (§. 64). Manche der in der Natur vorkommenden Körper, wie z. B. die Luft, das Wasser u. s. w., besitzen diese Eigenschaft der Flüssigkeit in hohem Grade, andere Körper hingegen, wie z. B. Oel, Schmiere, aufgeweichte Erde u. s. w., sind in minderem Grade flüssig. Man nennt jene vollkommen, diese aber unvollkommen flüssige Körper. Gewisse Körper, wie z. B. die Teige, stehen den festen Massen ebenso nahe wie den flüssigen.

Vollkommen flüssige Körper, von welchen in der Folge nur die Rede sein wird, sind auch zugleich vollkommen elastisch, d. h. sie lassen sich durch äußere Kräfte zusammendrücken und nehmen nach Wegnahme dieser Kräfte das erste Volumen vollkommen wieder an. Nur ist die Größe der einem gewissen Drucke entsprechenden Volumenveränderung bei verschiedenen Flüssigkeiten sehr verschieden; während sich dieselbe bei den tropfbar-flüssigen Körpern höchst unbedeutend zeigt, fällt sie bei den luftförmigen Körpern, die man deshalb auch elastische Flüssigkeiten nennt, sehr groß aus. Dieser geringe Grad von Zusammendrückbarkeit der tropfbar-flüssigen Körper

ist der Grund, weswegen man bei den meisten Untersuchungen der Hydrostatik (§. 68) dieselben als incompressibele oder unelastische Flüssigkeiten ansieht und behandelt. Da das Wasser unter allen tropfbar-flüssigen Körpern am meisten verbreitet ist und im Leben am häufigsten angewendet wird, so sieht man es als den Repräsentanten aller dieser Flüssigkeiten an und spricht bei den Untersuchungen in der Mechanik des Flüssigen immer nur vom Wasser, indem man stillschweigend voraussetzt, daß die mechanischen Verhältnisse anderer tropfbaren Flüssigkeiten dieselben sind wie die des Wassers.

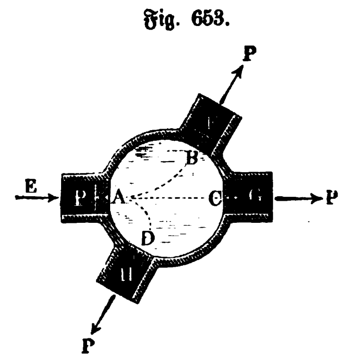
Aus denselben Gründen ist in der Mechanik der elastisch-flüssigen Körper meist nur von der atmosphärischen Luft die Rede.

Anmerkung. Eine Wassersäule von 1 Quadratmeter Querschnitt wird durch ein Gewicht von 10336 Kilogramm, welches dem Drucke der Atmosphäre entspricht, um ungefähr 0,00005 oder 50 Milliontel ihres Volumens zusammengedrückt, wogegen eine Luftsäule unter dem Drucke dieser Kraft nur die Hälfte ihres anfänglichen Volumens einnimmt. Siehe Aimé: „Ueber die Zusammendrückung der Flüssigkeiten", in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband (zu Band 72), 1848. Nach der Formel $P = \frac{\lambda}{l} F E$ (§. 210) folgt, wenn man $F = 1$ Quadratmillimeter, $P = 0{,}010336$ Kilogramm und $\frac{\lambda}{l} = 0{,}00005$ setzt, der Elasticitätsmodul des Wassers für Druck

$$E = \frac{Pl}{F\lambda} = \frac{0{,}010336}{0{,}00005} = 207 \text{ Kilogramm.}$$

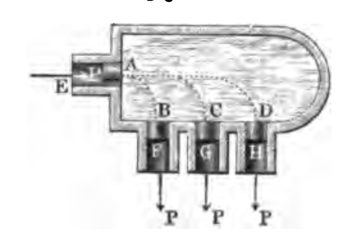
§. 377. **Princip des gleichen Druckes.** Die charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten, wodurch sich dieselben wesentlich von den festen Körpern unterscheiden, und welche der Lehre vom Gleichgewichte flüssiger Körper zur Basis dient, ist die Fähigkeit, den Druck, welcher auf einen Theil der Oberfläche der Flüssigkeit ausgeübt wird, nach allen Richtungen hin unverändert fortzupflanzen. Bei den festen Körpern pflanzt sich der Druck nur in seiner eigenen Richtung fort (§. 88); wird dagegen das Wasser von einer Seite her gedrückt, so entsteht in der ganzen Masse derselben eine Spannung, die sich nach allen Seiten hin äußert und daher an allen Stellen der Oberfläche desselben wahrzunehmen ist. Um sich von der Richtigkeit dieses Gesetzes zu überzeugen, kann man einen mit Wasser gefüllten Apparat anwenden, wie ihn Fig. 653 im horizontalen Durchschnitte repräsentirt.

Fig. 653.



Die gleich weiten und in gleicher Höhe unter dem horizontalen Wasserspiegel befindlichen Röhren AE, BF u. s. w. sind durch vollkommen bewegliche und genau abschließende Kolben verschlossen; das Wasser drückt hierbei durch sein Gewicht auf den einen Kolben genau so stark wie auf den anderen. Sehen wir aber von diesem Drucke ab, oder nehmen wir das Wasser gewichtslos an. Drücken wir nun den einen Kolben A mit einer gewissen Kraft P gegen das Wasser, so pflanzt sich die Druckkraft durch das Wasser hindurch bis zu den übrigen Kolben B, C, D fort, und es ist zur Herstellung des Gleichgewichtes oder um das Zurückgehen dieser Kolben zu verhindern, nöthig, auf jeden derselben eine gleich große Gegenkraft P (Fig. 653) wirken zu lassen. Wir sind daher berechtigt, anzunehmen, daß die auf einen Theil A der Oberfläche der Wassermasse wirkende Kraft P eine Spannung in dieser erzeugt, und sich dadurch nicht nur in der geraden Linie AC, sondern auch in jeder anderen Richtung BF, DH u. s. w. auf andere gleich große Oberflächentheile B, C, D fortpflanzt. Die Richtung des Druckes ist dabei in jedem Oberflächenelemente normal zu demselben.

Fig. 654.



Sind die Axen der Röhren BF, CG u. s. w., Fig. 654, unter sich parallel, so lassen sich die Kräfte, welche auf ihre Kolben wirken, durch Addition zu einer einzigen Kraft vereinigen; ist n die Anzahl dieser gleich großen Kolben, so beträgt daher der Gesammtdruck auf dieselben:

$$P_1 = nP$$

und in dem von der Figur repräsentirten Falle:

$$P_1 = 3\,P.$$

Bezeichnet F_1 die Summe der gedrückten Kolbenflächen B, C, D, so daß $F_1 = nF$ ist, so hat man:

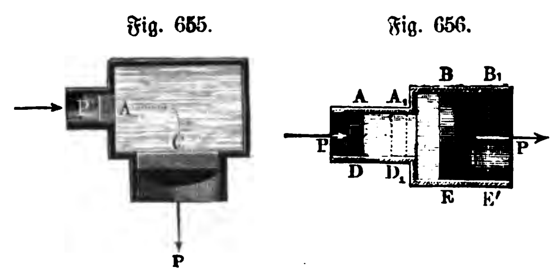
$$n = \frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F} \text{ und } P_1 = \frac{F_1}{F}\,P.$$

Rücken wir nun noch die Röhren B, C, D u. s. w. so zusammen, daß sie, wie in Fig. 655 (a. f. S), eine einzige ausmachen, und verschließen wir sie durch einen einzigen Kolben, so geht F_1 in eine einzige Fläche über, und es ist P_1 die auf sie wirkende Kraft; es folgt daher das allgemeinere Gesetz: die Drücke, welche ein flüssiger Körper auf verschiedene ebene Theile der Gefäßwand ausübt, sind den Inhalten dieser Theile pro-

portional. Bei krummen Flächen gilt dieses Gesetz nur in Bezug auf unendlich kleine als eben anzusehende Theile.

Dieses Gesetz entspricht auch dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten. Bewegt sich der Kolben $AD = F$, Fig. 656, um den Weg $AA_1 = s$ einwärts, so drückt er das Wasserprisma Fs aus seiner Röhre, und geht der Kolben $BE = F_1$ um den Weg $BB_1 = s_1$ auswärts, so läßt er den prismatischen Raum $F_1 s_1$ zurück. Da wir aber vorausgesetzt haben, daß sich die Wassermasse weder ausdehnen noch zusammendrücken läßt, so muß das Volumen derselben bei diesen Kolbenbewegungen unverändert bleiben, also das verdrängte Quantum Fs den freigewordenen Raum $F_1 s_1$ gerade ausfüllen. Die Gleichung $F_1 s_1 = Fs$ giebt aber:

Fig. 655. Fig. 656.



$$\frac{F_1}{F} = \frac{s}{s_1}, \text{ und da } \frac{P_1}{P} = \frac{F_1}{F} \text{ ist, so folgt:}$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{s}{s_1};$$

es ist daher auch Arbeit $P_1 s_1 =$ Arbeit Ps (s. §. 85).

Beispiel. Wenn der Kolben AD einen Durchmesser von 0,05 Meter, dagegen der Kolben BE einen solchen von 0,3 Meter hat, und jener mit einer Kraft P von 20 Kilogramm auf das Wasser gedrückt wird, so übt dieser Kolben eine Kraft

$$P_1 = \frac{F_1}{F} P = \frac{30^2}{5^2} 20 = 720 \text{ Kilogramm}$$

aus. Wird der erste Kolben um 0,18 Meter fortgeschoben, so geht der zweite nur um

$$s_1 = \frac{F}{F_1} s = \frac{25}{900} 0{,}18 = 0{,}005 \text{ Meter}$$

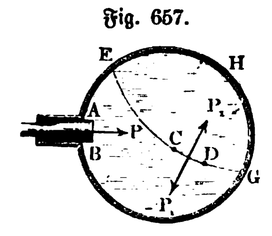
fort.

Anmerkung. Vielfache Anwendungen dieses Gesetzes kommen in der Folge vor: bei der hydraulischen Presse, der Wassersäulenmaschine, bei den Pumpen u. s. w.

§. 378. **Druck im Wasser.** Der Druck, welchen die Wassertheile gegen einander ausüben, ist genau so zu beurtheilen wie der Druck des Wassers gegen

die Gefäßwände. Eine beliebige Fläche ECG, welche das Wasser in einem Gefäße BGH, Fig. 657, in zwei Theile theilt, wird im Gleichgewichtszustande von der einen Seite her eben so stark gedrückt als von der anderen. Da nun ein starrer Körper alle gegen seine Oberfläche rechtwinkelig gerichteten Kräfte aufnimmt, so wird auch das Gleichgewicht des Wassers im Gefäße nicht gestört, wenn die eine Flüssigkeitshälfte EGH erstarrt, und daher ihre Begrenzungsfläche ECG gleichsam zu einer Gefäßwand wird. Drückt die flüssige Hälfte EBG in einem Theile $CD = F_1$ der imaginären Trennungsfläche ECG mit einer Normalkraft P_1 auf die erstarrte Hälfte EGH, so nimmt letztere diese Kraft vollständig auf und übt dabei eine gleiche Gegenkraft $(-P_1)$ auf $CD = F_1$ aus. Da nun aber das Gleichgewichtsverhältniß durch das Flüssigwerden von dieser Wassermasse EGH nicht gestört wird, so drückt dieselbe mit einer gleichen Kraft $(-P_1)$ auf die Wassermasse EBG zurück, und es ist folglich der Druck des Wassers auf jede Seite eines ebenen Flächentheiles $CD = F_1$ durch

Fig. 657.

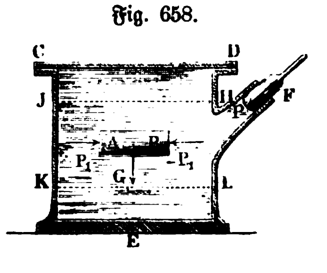


$$P_1 = \frac{F_1}{F} P$$

bestimmt, wofern die Fläche $\overline{AB} = F$ dem Drucke P unterworfen ist. Da diese Betrachtung für jede Richtung und Lage des Flächenelementes CD gilt, so folgt, daß **ein an irgend einer Stelle auf die Oberfläche ausgeübter Druck in allen Punkten der Flüssigkeit und nach allen Richtungen pro Flächeneinheit von derselben Größe ist.**

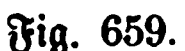
Hierbei ist das Wasser als eine gewichtlose Masse vorausgesetzt worden, obiges Gesetz bedarf daher noch einer Ergänzung, wenn es sich darum handelt, auch den aus dem **Gewichte des Wassers** hervorgehenden Druck zu ermitteln. Denkt man sich von dem Wasser in einem Gefäße CDE, Fig. 658, einen Theil erstarrt, welcher die Form eines unendlich dünnen horizontalen Prismas AB hat, so sieht man leicht ein, daß sich die Kräfte, welche das flüssig bleibende Wasser rund herum auf die Seitenflächen des erstarrten Theiles ausübt, mit dem Gewichte G dieses Theiles ins Gleichgewicht setzen, und daß sich die Horizontaldrücke, mit welchen es gegen die verticalen Grundflächen

Fig. 658.



A und *B* dieses Theiles wirkt, gegenseitig aufheben. Es müssen also auch diese Drücke (P_1 und — P_1) einander gleich und entgegengesetzt sein. Da nun das Gleichgewicht sich nicht ändert, wenn *AB* wieder in den Flüssigkeitszustand zurückkehrt, so folgt, daß die Pressungen des Wassers gegen gleiche verticale Flächenelemente *A* und *B* in einer und derselben Horizontalebene einander gleich sein müssen, und da sich ferner der Druck auf ein Flächenelement nicht ändert, wenn dasselbe eine andere Neigung oder Richtung annimmt, so folgt, daß überhaupt das Wasser in einer horizontalen Schicht, wie z. B. *JH*, *KL* u. s. w. an allen Stellen und nach allen Richtungen hin ein und denselben Druck ausübt.

Denken wir uns hingegen in der Wassermasse *CHK*, Fig. 659, ein verticales Prisma *AB* von unendlich kleinem Querschnitt erstarrt, so können wir aus dem Gleichgewichtszustande desselben mit der übrigen Flüssigkeit folgern, daß sich die Drücke, mit welchen die letztere auf die verticalen Seitenflächen dieses Prismas wirken, gegenseitig aufheben, und daß sich das Gewicht *G* des letzteren Körpers mit dem Ueberschusse $P_1 - P$ des Druckes P_1 auf die untere Grundfläche *B* über den Druck *P* auf die obere Grundfläche *A* im Gleichgewichte befindet. Es ist also hiernach $P_1 - P = G$, d. i. der Druck P_1 des Wassers auf irgend ein Flächenelement *B* gleich dem Drucke *P* desselben auf ein höher liegendes Flächenstück *A* von gleicher Größe, vermehrt um das Gewicht *G* einer Wassersäule *AB*, welche das eine oder andere Flächenelement zur Basis, und den Verticalabstand zwischen beiden Elementen zur Höhe hat. Dieser Satz gilt, dem Obigen zufolge, nicht nur für zwei senkrecht über einander befindliche Elemente, sondern für zwei gleiche Flächenelemente überhaupt, und findet auch seine Anwendung bei der Bestimmung des Druckes auf die Gefäßwand, da sich die Drücke *P* und P_1 in den Horizontalebenen *JH* und *KL* unverändert fortpflanzen. Der Druck P_1 auf ein Flächenelement *B*, *K* oder *L* der Horizontalebene *KL* ist hiernach gleich dem Drucke *P* auf ein gleich großes Element *A*, *J* oder *H* in einer höheren Horizontalebene plus dem Gewichte der Wassersäule, welche dieses Element *F* zur Basis und den Abstand $AB = h$ der beiden Horizontalschichten *JH* und *KL* von einander zur Höhe hat. Ist γ das specifische Gewicht des Wassers (1 Cubikmeter = 1000 Kilogramm), so beträgt das Gewicht jener Wassersäule:


Fig. 659.



$$G = Fh\gamma \text{ und daher } P_1 = P + G = P + Fh\gamma.$$

Sind die Inhalte der Flächenelemente nicht gleich, hat z. B. das obere (in JH) den Inhalt F und das untere (in KL) den Inhalt F_1, so ist der Druck auf letzteres:

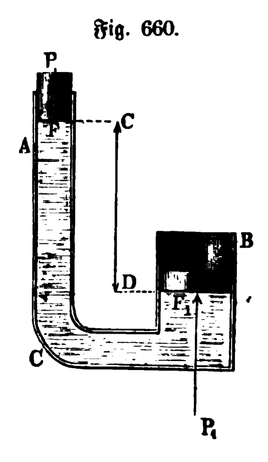
$$P_1 = \frac{F_1}{F}(P + Fh\gamma) = \frac{F_1}{F} P + F_1 h\gamma.$$

Durch dieselbe Formel läßt sich auch der Druck P auf ein Flächenelement F in einer Horizontalschicht JH bestimmen, wenn der äußere Druck P_0 eines Flächenelementes $CD = F_0$ bekannt ist, welches sich um die Höhe h über oder unter JH befindet. Es ist

$$P = \frac{F}{F_0} P_0 \pm Fh\gamma.$$

Da die Druckkräfte gegen gleiche Flächentheile in einer Horizontalebene einander gleich sind, so folgt, daß vorstehende Formel auch auf horizontale Flächen (F, F_0 und F_1) von endlicher Ausdehnung, z. B. auf den Fall anwendbar ist, wo das Wasser dazu dient, die Kraft P einer horizontalen Kolbenfläche F, Fig. 660, auf eine andere horizontale Kolbenfläche F_1 zu übertragen. Die Formel

Fig. 660.



$$P_1 = \frac{F_1}{F} P + F_1 h\gamma$$
$$= F_1\left(\frac{P}{F} + h\gamma\right)$$

giebt den Druck P_1 auf diese Fläche unmittelbar an, wenn h den senkrechten Abstand CD zwischen beiden Kolbenflächen bedeutet.

Bezeichnet man die Drücke $\frac{P}{F}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ auf die Flächeneinheiten durch p und p_1, so hat man noch einfacher

$$p_1 = p + h\gamma.$$

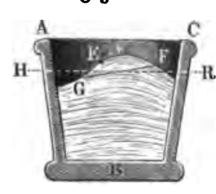
Beispiel. Wenn die beiden Kolbenflächen F und F_1 einer hydrostatischen Presse ACB, Fig. 660, die Durchmesser $d = 0{,}06$ und $d_1 = 0{,}30$ Meter haben und um die senkrechte Höhe $CD = h = 2$ Meter von einander abstehen, und es soll durch den großen Kolben derselben eine Kraft $P_1 = 1200$ Kilogramm ausgeübt werden, so folgt die erforderliche Kraft des kleinen Kolbens aus

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P}{F} + h\gamma \text{ zu:}$$

$$P = \frac{F}{F_1} P_1 - Fh\gamma = \frac{0{,}06^2}{0{,}30^2} 1200 - \frac{\pi \,.\, 0{,}06^2}{4} 2 \,.\, 1000 = 48 - 5{,}65 = 42{,}35 \text{ Klgr.}$$

§. 379. **Wasserspiegel.** Die dem Wasser innewohnende Schwerkraft macht, daß sich alle Elemente desselben abwärts zu bewegen suchen und sich auch wirklich so bewegen, wenn sie nicht daran verhindert werden. Um eine zusammenhängende Wassermasse zu erhalten, ist es deshalb nöthig, das Wasser in Gefäßen einzuschließen. Das in einem Gefäße ABC, Fig. 661, befindliche Wasser ist aber nur dann im Gleichgewichte, wenn die noch freie Oberfläche HR desselben rechtwinkelig auf der Richtung der Schwerkraft, also horizontal ist; denn so lange diese Oberfläche noch krumm oder gegen den Horizont geneigt ist, so lange giebt es auch noch höher liegende Wasserelemente, wie z. B. E, welche wegen ihrer großen Beweglichkeit und in Folge ihrer Schwere über den darunter befindlichen, wie auf einer schiefen Ebene FG, herabgleiten.

Fig. 661.

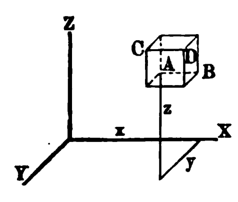


Da bei größeren Entfernungen die Schwerrichtungen nicht mehr als parallele Linien angesehen werden können, so hat man die freie Oberfläche oder den Spiegel des Wassers in einem großen Gefäße, wie z. B. in einem größeren See, nicht mehr als eine Ebene, sondern als einen Kugeloberflächentheil zu betrachten.

Wenn außer der Schwere noch andere Kräfte auf die Wasserelemente wirken, so muß im Gleichgewichtszustande die resultirende Kraft irgend eines Elementes der freien Oberfläche auf dieser senkrecht stehen.

Um diesen Fall zu untersuchen, bezeichne p den Druck pro Flächeneinheit in dem Punkte A im Innern der Flüssigkeit, Fig. 662, dessen Coordinaten x, y, z sind, und es seien unter X, Y, Z die Componenten der resultirenden beschleunigenden Kraft in diesem Punkte verstanden. Wenn man sich nun ein unendlich kleines Parallelepipedum vorstellt, dessen einer Eckpunkt in A liegt, und dessen den Coordinatenaxen parallele Kanten resp. durch ∂x, ∂y und ∂z ausgedrückt sind, so ist das Gewicht dieses Parallelepipedums gleich $\gamma \,.\, \partial x \partial y \partial z$ und die Masse desselben:

Fig. 662.



$$m = \frac{\gamma}{g}\, \partial x \partial y \partial z.$$

Die auf dieses Massenelement nach den Axenrichtungen wirkenden Componenten der beschleunigenden Kraft sind dann:

$$\frac{\gamma}{g}\, \partial x \partial y \partial z \,.\, X, \frac{\gamma}{g}\, \partial x \partial y \partial z \,.\, Y \text{ und } \frac{\gamma}{g}\, \partial x \partial y \partial z \,.\, Z.$$

Die durch den Punkt A hindurchgehende, mit der YZ-Ebene parallele Be-

grenzungsebene des Parallelepipeds hat die Größe $\partial y \partial z$ und ist also dem Drucke $\partial y \partial z \,.\, p$ ausgesetzt. Die damit parallele, im Abstande ∂x durch den Punkt B gehende Begrenzungsebene ist einem specifischen Drucke $p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\partial x$ unterworfen, weshalb der Totaldruck dieser Fläche zu $\partial y\,\partial z\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\partial x\right)$ sich berechnet. Die Resultirende dieser beiden, auf die parallelen Flächen AC und BD wirkenden Druckkräfte ist daher:

$$\partial y\,\partial z \,.\, p - \partial y\,\partial z\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\,\partial x\right) = -\,\partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Ebenso findet man die resultirenden Druckkräfte parallel der Y- und der Z-Axe resp. zu:

$$-\,\partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{\partial p}{\partial y} \text{ und } -\,\partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Für den Zustand des Gleichgewichtes müssen nun diese von außen auf das Parallelepipedum einwirkenden Druckkräfte den nach den Axen genommenen Componenten der resultirenden beschleunigenden Kraft gleich und entgegengesetzt sein, so daß man für das Gleichgewicht hat:

$$\frac{\gamma}{g}\,\partial x\,\partial y\,\partial z \,.\, X = \partial x\,\partial y\,\partial z\,\frac{\partial p}{\partial x} \text{ oder } \frac{\gamma}{g}\,X = \frac{\partial p}{\partial x}$$

und ebenso:

$$\frac{\gamma}{g}\,Y = \frac{\partial p}{\partial y};\; \frac{\gamma}{g}\,Z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beiderseits resp. mit ∂x, ∂y, ∂z und addirt dieselben, so erhält man:

$$\frac{\gamma}{g}\left(X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z\right) = \frac{\partial p}{\partial x}\,\partial x + \frac{\partial p}{\partial y}\,\partial y + \frac{\partial p}{\partial z}\,\partial z = \partial p,$$

woraus durch Integration

$$p = \frac{\gamma}{g}\int\left(X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z\right)$$

folgt.

Wenn die Größe $X\,\partial x + Y\,\partial y + Z\,\partial z$ das vollständige Differenzial einer Function $f(x, y, z)$ ist, so findet man den Druck in einem beliebigen Punkte:

$$p = \frac{\gamma}{g}\,f(x, y, z) + C$$

als Function seiner Coordinaten. Die Constante C bestimmt sich, wenn der Druck p in einem Punkte bekannt ist.

§. 380. An der freien Oberfläche muß nach dem Vorhergehenden die resultirende beschleunigende Kraft in jedem Punkte senkrecht zur Oberfläche gerichtet sein, d. h. es muß

$$X \partial x + Y \partial y + Z \partial z = 0$$

sein (s. §. 297). Nach dem Vorstehenden ist dies aber gleichbedeutend mit $\partial p = 0$ oder $p = f(x, y, z) = Const.$

Dieser Bedingung genügen also alle diejenigen Flächen, welche man erhält, wenn man in $f(x, y, z) = C$ für C irgend welche bestimmten Werthe einsetzt. Man erhält alsdann eine Schaar von Flächen, welche dadurch gekennzeichnet sind, daß in jedem ihrer Punkte die resultirende beschleunigende Kraft in die Normale hineinfällt, und daß der specifische Druck p in allen Punkten einer und derselben Fläche constant ist, weil ∂p dafür Null ist. Man nennt diese Flächen, zu denen wegen der ersten Eigenschaft auch die freie Oberfläche der Flüssigkeit gehört, Niveauflächen (s. §. 297).

Ist eine Flüssigkeit in einem ruhenden Gefäße lediglich der Schwerkraft unterworfen, so ist, wenn man die Z-Axe vertical abwärts annimmt und den Coordinatenanfang in die freie Oberfläche verlegt:

$$X = 0, \; Y = 0 \text{ und } Z = g,$$

daher:

$$\partial p = \frac{\gamma}{g}(X \partial x + Y \partial y + Z \partial z) = \gamma \partial z.$$

Für die Niveauflächen hat man folglich:

$$\partial p = \gamma \partial z = 0 \text{ oder } \gamma z = C,$$

d. h. dieselben sind horizontale Ebenen. Der Druck p in einer Niveaufläche ist gegeben durch:

$$p = \gamma z + C,$$

worin C sich, wenn man $z = 0$ setzt, als der bekannte Druck ergiebt, welcher auf die freie Oberfläche wirkt. Der Druck nimmt also proportional mit der Tiefe z zu, wie schon im §. 378 gezeigt worden ist.

Wenn das Gefäß mit der Flüssigkeit nicht, wie bisher angenommen wurde, in Ruhe ist, sondern sich in Bewegung befindet, so ist nach dem d'Alembert'schen Principe zum relativen Gleichgewichte erforderlich, daß die auf die einzelnen Massentheilchen wirkenden äußeren Kräfte mit solchen Kräften im Gleichgewichte stehen, welche denjenigen gleich und entgegengesetzt sind, welche den frei gedachten Massentheilchen ihre Bewegung ertheilen würden.

Wird z. B. ein Gefäß ABC, Fig. 663, mit der unveränderlichen Acceleration ng in der Richtung EK unter dem Winkel φ gegen die horizontale X-Axe fortbewegt, so wirkt auf jedes Element E außer der Schwere

EG die der Beschleunigung EK entgegengesetzte Trägheitskraft $EF = -ng$. Nimmt man die positive Z-Axe von A vertical aufwärts gerichtet an, so hat man für die Niveauflächen:

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z = -ng\,cos.\,\varphi\,.\,\partial x - (g + ng\,sin.\,\varphi)\,\partial z = 0$$

oder:

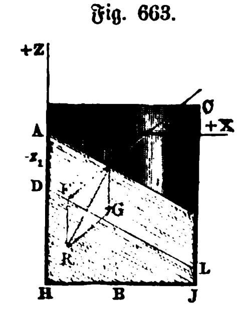
$$-n\,cos.\,\varphi\,.\,x - (1 + n\,.\,sin.\,\varphi)\,z = C.$$

Diese Gleichung entspricht einem Systeme von Ebenen, welche zur Y-Axe parallel sind und mit der X-Axe den Winkel $EAX = \alpha$ bilden, welcher durch

$$tang.\,\alpha = \frac{n\,cos.\,\varphi}{1 + n\,sin.\,\varphi}$$

bestimmt ist.

Fig. 663.



Denselben Winkel α bildet auch die auf der Niveaufläche AE senkrechte Mittelkraft ER aus der Schwere EG und der Trägheitskraft EF mit der verticalen Z-Axe. Der Druck p in einer solchen Niveaufläche bestimmt sich aus:

$$\partial p = \frac{\gamma}{g}\,(-ng\,cos.\,\varphi)\,\partial x - (g + ng\,sin.\,\varphi)\,\partial z$$

zu:

$$p = -\gamma\,[n\,cos.\,\varphi\,.\,x + (1 + n\,sin.\,\varphi)\,z] + C.$$

Legt man den Coordinatenanfang A in die freie Oberfläche, und ist der Druck daselbst zu p_0 gegeben (etwa gleich dem Drucke der Atmosphäre), so folgt für A, wo $x = 0$, $z = 0$ und $p = p_0$ ist:

$$p_0 = C.$$

In irgend einem Punkte D der Z-Axe, dessen verticale Tiefe unter dem Wasserspiegel $AD = -z_1$ ist, erhält man den Druck:

$$p_1 = \gamma\,(1 + n\,sin.\,\varphi)\,z_1 + p_0.$$

Derselbe Druck findet in allen Punkten der durch D parallel mit der freien Oberfläche AE gelegten Ebene DL statt. Man erkennt daraus, daß der Druck im Innern auch hier proportional mit der vertical gemessenen Tiefe unter dem Wasserspiegel zunimmt.

Für $\varphi = 0$, Fig. 664 (a. f. S.), ist $tang.\,\alpha = \frac{n\,.\,1}{1 + 0} = n = \frac{EP}{EG}$ und $p = -\gamma\,(nx + z) + p_0$.

Setzt man $\varphi = 90^0$, d. h. wird das Gefäß vertical aufwärts bewegt, so findet man:

$$tang.\,\alpha = 0;\ \alpha = 0 \text{ und } p = -\gamma\,(1 \quad n)\,z + p_0.$$

Bei einer Bewegung des Gefäßes vertical abwärts hat man $\varphi = 270^0$

zu setzen, und es ist für diesen Fall $tang.\, \alpha = 0$; $\alpha = 0$ und $p = -\gamma\,(1 - n)\,z + p_0$. Wäre z. B. $n = 1$; d. h. würde das Gefäß mit der Beschleunigung der Schwere fallen, so würde der Druck p zu p_0 werden, und der Winkel α wäre unbestimmt, da $tang.\, \alpha$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

Fig. 664.

Wenn $1 + n\, sin.\, \varphi = 0$ ist, so wird $tang.\, \alpha = \infty$, d. h. die Niveauflächen sind in diesem Falle verticale Ebenen.

§. 381. Wenn die Wassermasse gleichförmig um eine feste Axe gedreht wird, so sind die Beschleunigungen der einzelnen Elemente deren Centripetalkräfte, und es müssen daher nach dem d'Alembert'schen Principe die Centrifugalkräfte mit den Schwerkräften zusammen im Gleichgewichte sein.

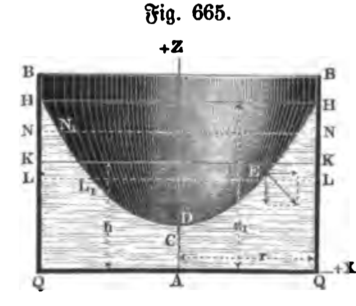


Fig. 665.

Nimmt man, Fig. 665, die Umdrehungsaxe des Gefäßes ABB als Z-Axe an, positiv nach oben, so wirkt auf ein Element E nach unten die Schwerkraft $-\,g$. Die Centrifugalkräfte nach der X-Axe und Y-Axe sind §. 330 zufolge durch $\omega^2 x$ und $\omega^2 y$ ausgedrückt, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit bedeutet.

Man hat daher für die Niveauflächen:

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z = \omega^2 x\partial x + \omega^2 y\partial y - g\partial z = 0$$

und hieraus:

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + Const. = 0$$

oder:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C).$$

Diese Gleichung stellt ein System von Umdrehungsparaboloiden vor; denn setzt man $y = 0$, so erhält man als den Durchschnitt jener Flächen mit der XZ-Ebene ein System von Curven, deren Gleichung:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C)$$

ist. Diese Curven sind Parabeln, deren gemeinsame Hauptaxe mit der Umdrehungsaxe zusammenfällt. Der Scheitel einer solchen Parabel liegt um C über dem Coordinatenanfang A, wie sich ergiebt, wenn man $x = 0$ setzt.

Um die Größe $C = AD$ für die freie Oberfläche zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, daß das Wasserquantum, welches vor Beginn der Drehung den cylindrischen Raum AKK von der Höhe h und dem Halbmesser r ausfüllte, also $\pi r^2 h$, nachher den Raum $AHDHA$ einnimmt. Dieser letztere Raum berechnet sich als Differenz zwischen dem Cylinder $AHHA$ von der Höhe z_1 und dem Paraboloid HDH nach der Guldini'schen Regel zu:

$$\pi r^2 z_1 - {}^2/_3\, r\,(z_1 - C)\,.\,{}^3/_8\, r \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} r^2 (z_1 + C).$$

Durch Gleichsetzung dieser beiden Rauminhalte folgt:

$$\pi r^2 h = \frac{\pi}{2} r^2 (z_1 + C) \text{ oder: } z_1 + C = 2h.$$

Ferner hat man für den Querschnitt durch HH

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z_1 - C) \text{ oder } z_1 - C = \frac{r^2\omega^2}{2g}.$$

Durch Addition resp. Subtraction der beiden Ausdrücke für $z_1 + C$ und $z_1 - C$ erhält man nun:

$$z_1 = h + \frac{r^2\omega^2}{4g} \text{ und } C = h - \frac{r^2\omega^2}{4g}.$$

Nach Einsetzung des Werthes für C wird nun die Gleichung der Niveauflächen:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\left(z - h + \frac{r^2\omega^2}{4g}\right).$$

Aus den Werthen von C und z_1 erkennt man, daß der ursprüngliche Wasserspiegel KK genau in der Mitte liegt zwischen dem Scheitel D und dem Rande HH der paraboloidischen Höhlung, indem

$$z_1 - h = h - C = \frac{r^2\omega^2}{4g}$$

ist. Die Höhe C des Scheitels D über dem Gefäßboden A wird Null, wenn $h = \frac{r^2\omega^2}{4g}$ ist, oder, unter $v = r\omega$ die Umfangsgeschwindigkeit des cylindrischen Gefäßes verstanden, wenn $h = \frac{v^2}{4g}$ ist. Sobald also die zur Umfangsgeschwindigkeit des Gefäßes gehörige Geschwindigkeitshöhe doppelt so groß ist, wie die ursprüngliche Wassertiefe, berührt die paraboloidische Wasseroberfläche den Boden. Bei größerer Umfangsgeschwindigkeit wird C negativ, d. h. die Wassermasse nimmt eine röhrenförmige Gestalt an, indem sie den Boden nicht mehr in der Mitte, sondern nur nach außen in einer Ringfläche berührt, so etwa, als wenn man sich den Boden während der Drehung plötzlich in die Lage LL gebracht denkt. Wollte man ebenfalls

in NN einen Boden anbringen, so würde die rotirende Flüssigkeit einen Ring von dem Querschnitte NLL_1N_1 bilden. Hierauf beruhet die Herstellung von Röhren und anderen hohlen Rotationskörpern durch den sogenannten Centrifugalguß.

Der Druck p im Innern der Flüssigkeit bestimmt sich aus:

$$\partial p = \frac{\gamma}{g}(\omega^2 x \partial x + \omega^2 y \partial y - g \partial z)$$

durch Integration zu:

$$p = \frac{\gamma \omega^2}{2g}(x^2 + y^2) - \gamma z + Const.$$

Die Constante bestimmt sich mit Rücksicht darauf, daß an der Oberfläche der Druck gleich dem Atmosphärendrucke p_0 ist. Setzt man daher für den Scheitel

$$x = 0,\ y = 0,\ z = C \text{ und } p = p_0,$$

so erhält man:

$$p_0 = -\gamma C + Const. = -\gamma\left(h - \frac{r^2\omega^2}{4g}\right) + Const.$$

Hieraus folgt:

$$Const. = p_0 + \gamma\left(h - \frac{r^2\omega^2}{4g}\right) = p_0 + \gamma C.$$

Daher wird

$$p = \frac{\gamma \omega^2}{2g}(x^2 + y^2) - \gamma z + p_0 + C.$$

Für $x^2 + y^2$ kann man ϱ^2 setzen, wenn ϱ den Abstand des betreffenden Punktes von der Umdrehungsaxe bezeichnet, und man erhält daher:

$$p = \gamma \frac{\varrho^2\omega^2}{2g} - \gamma(z - C) + p_0.$$

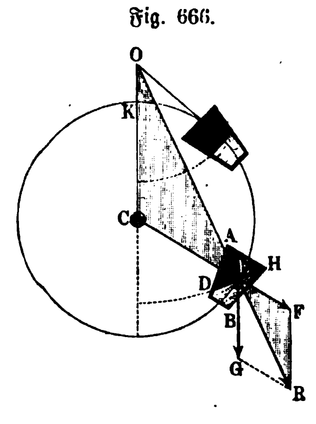
Hieraus erkennt man, daß für alle Punkte in einer horizontalen Ebene, für welche also z dieselbe Größe hat, der Druck zunimmt wie die Größe $\frac{\varrho^2\omega^2}{2g}$, d. h. wie die Geschwindigkeitshöhen dieser Punkte oder wie die Quadrate ihrer Abstände von der Umdrehungsaxe. Setzt man andererseits ϱ constant, d. h. betrachtet man die in einem zur Drehaxe concentrischen Cylindermantel gelegenen Punkte, so nehmen die Drücke proportional mit $C - z$, d. h. wie die vertical gemessenen Tiefen unter der Oberfläche zu. Der größte Druck findet in der Ecke Q statt, wo er ringsum

$$p = \gamma\frac{r^2\omega^2}{2g} - \gamma(0 - C) + p_0 = \gamma\frac{\omega^2}{2g}\frac{2g}{\omega^2}(z_1 - C) + \gamma C + p_0 = \gamma z_1 + p_0$$

beträgt.

Wenn ein Gefäß ABH, Fig. 666, um eine horizontale Axe C gleichförmig bewegt wird, so wirkt auf ein Element E die Schwere EG und die Centrifugalkraft radial in der Richtung EF. Betrachtet man C als Coordinatenanfang und nimmt die X-Axe horizontal und die Z-Axe vertical aufwärts an, so sind, unter ω die constante Winkelgeschwindigkeit verstanden, die Componenten der Centrifugalkraft nach den Axen bezüglich:

Fig. 666.



$$\omega^2 x \text{ und } \omega^2 z \text{ (s. §. 330).}$$

Man hat daher für die Niveauflächen die Differenzialgleichung:

$$X \partial x + Y \partial y + Z \partial z = \omega^2 x \partial x + \omega^2 z \partial z - g \partial z = 0,$$

oder:

$$x^2 + z^2 - \frac{2g}{\omega^2} z = C.$$

Diese Gleichung entspricht einer Schaar von Cylinderflächen, deren horizontale Axe O um die Größe:

$$CO = \frac{g}{\omega^2}$$

vertical über dem Drehungsmittelpunkte gelegen ist. Wenn u die Anzahl der Umdrehungen per Minute bedeutet, so ist auch:

$$CO = g \left(\frac{60}{2\pi u}\right)^2 = \frac{894,6}{u^2} \text{ Meter} = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß.}$$

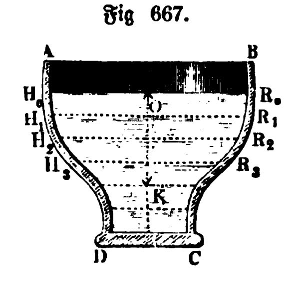
Die gefundene Eigenschaft ist auch aus der Figur zu erkennen, denn wenn man die Richtung der Mittelkraft ER aus der Schwerkraft $EG = g$ und der Centrifugalkraft $EF = \omega^2 EC$ rückwärts verlängert, so erhält man den Schnittpunkt O in der Verticalen, welche durch C geht. Es ist dann wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ECO und EFR:

$$\frac{CO}{EC} = \frac{FR}{EF} = \frac{g}{\omega^2 . EC}, \text{ daher } CO = \frac{g}{\omega^2} \text{ für alle Elemente } E.$$

Bodendruck. Der Druck des Wassers in einem Gefäße $ABCD$, Fig. 667 (a. f. S.), ist unmittelbar unter dem Wasserspiegel am kleinsten, wird mit der Tiefe immer größer und größer und ist dicht über dem Boden am größten. Dies ist zwar schon aus §. 378 zu folgern, läßt sich aber auch auf folgendem Wege beweisen. Nehmen wir an, daß der Wasserspiegel $H_0 R_0$, dessen Inhalt F_0 sein möge, von einer Kraft P_0, z. B. durch die darüber stehende Atmosphäre oder durch einen Kolben gleichförmig gedrückt werde, und denken uns die ganze Wassermasse durch viele Horizontalebenen §. 382.

wie $H_1 R_1$, $H_2 R_2$ u. s. w. in lauter gleich dicke Wasserschichten zerlegt. Ist F_1 der Inhalt des ersten Querschnittes $H_1 R_1$, λ die Dicke einer Wasserschicht und γ das specifische Gewicht des Wassers, so hat man das Gewicht der ersten Wasserschicht $G_1 = F_1 \lambda \gamma$ und denjenigen Theil des Druckes in $H_1 R_1$, welcher aus dem Drucke P_0 des Wasserspiegels $H_0 R_0$ entspringt, nach dem Principe in §. 377:

Fig 667.



$$= \frac{P_0 F_1}{F_0}.$$

Addirt man nun beide Kräfte, so erhält man den Druck im Horizontalschnitte $H_1 R_1$:

$$P_1 = \frac{P_0 F_1}{F_0} + F_1 \lambda \gamma.$$

Dividirt man durch F_1, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{P_1}{F_1} = \frac{P_0}{F_0} + \lambda \gamma,$$

oder, da $\frac{P_0}{F_0}$ und $\frac{P_1}{F_1}$ die auf die Flächeneinheit bezogenen Drücke p_0 und p_1 in $H_0 R_0$ und $H_1 R_1$ bezeichnen:

$$p_1 = p_0 + \lambda \gamma.$$

Der Druck in dem folgenden Horizontalschnitte $H_2 R_2$ bestimmt sich genau so wie der Druck in der Schicht $H_1 R_1$, wenn man berücksichtigt, daß hier der anfängliche Druck auf die Einheit schon $p_1 = p_0 + \lambda \gamma$ ist, während er dort nur p_0 war. Es folgt der Druck in der Horizontalschicht $H_2 R_2$:

$$p_2 = p_1 + \lambda \gamma = p_0 + \lambda \gamma + \lambda \gamma = p_0 + 2 \lambda \gamma;$$

ebenso der Druck in der dritten Schicht $H_3 R_3$:

$$p_3 = p + 3 \lambda \gamma,$$

in der vierten:

$$p_4 = p_0 + 4 \lambda \gamma$$

und in der $n$ten:

$$p_n = p_0 + n \lambda \gamma.$$

Nun ist aber $n \lambda$ die Tiefe $\overline{OK} = h$ dieser $n$ten Schicht unter dem Wasserspiegel, es läßt sich daher der Druck auf jede Flächeneinheit in der $n$ten Horizontalschicht setzen:

$$p = p_0 + h \gamma \text{ (vergl. §. 378).}$$

Man nennt die Tiefe h eines Flächenelementes unter dem Wasserspiegel die Druckhöhe desselben und findet hiernach den Druck des Wassers auf

irgend eine Flächeneinheit, wenn man den von außen wirkenden Druck um das Gewicht einer Wassersäule vermehrt, deren Basis diese Einheit und deren Höhe die Druckhöhe ist.

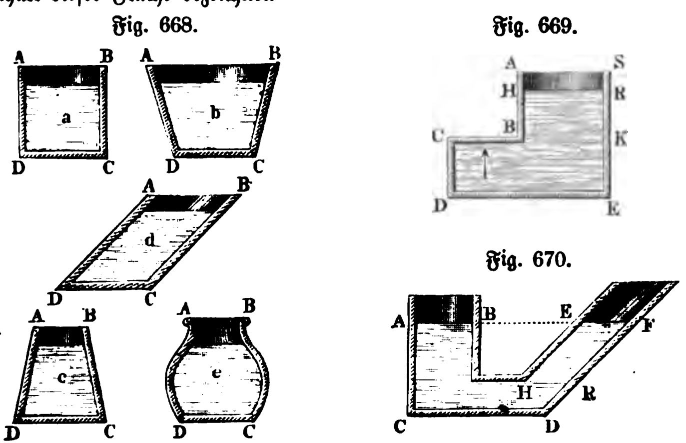
Bei einer horizontalen Fläche, wie z. B. am Boden CD (Fig. 667), ist die Druckhöhe h an allen Stellen eine und dieselbe, ist daher der Inhalt derselben $= F$, so folgt der Druck des Wassers gegen dieselbe:

$$P = (p_0 + h\gamma)F = Fp_0 + Fh\gamma,$$

oder, wenn man vom äußeren Drucke abstrahirt: $P = Fh\gamma$.

Der Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche ist also gleich dem Gewichte der über ihr stehenden Wassersäule Fh.

Dieser Druck des Wassers gegen eine horizontale Fläche, z. B. gegen den Boden oder gegen einen horizontalen Theil der Seitenwand ist von der Form des Gefäßes unabhängig; ob also das Gefäß AC, Fig. 668, prismatisch wie a, oder oben weiter als unten wie b, oder unten weiter als oben wie c, oder schief wie d, oder ob es bauchig wie e ist u. s. w., immer bleibt der Druck gegen den Boden gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis der Boden und deren Höhe die Tiefe des Bodens unter dem Wasserspiegel ist. Da sich der Druck des Wassers nach allen Seiten fortpflanzt, so findet dieses Gesetz auch dann noch seine Anwendung, wenn die Fläche wie z. B. BC in Fig. 669, von unten nach oben gedrückt wird. Jede Flächeneinheit in der an BC anliegenden Wasserschicht BK wird durch eine Wassersäule von der Höhe $HB = RK = h$ gedrückt, es ist folglich auch der Druck gegen die Fläche CB durch $Fh\gamma$ ausgedrückt, wenn F den Inhalt dieser Fläche bezeichnet.



Es folgt auch hieraus noch, daß das Wasser in communicirenden Röhren ABC und DEF, Fig. 670, im Zustande des Gleichgewichtes gleich hoch

steht, oder daß die Spiegel AB und EF desselben in eine und dieselbe Horizontalebene fallen. Zur Erhaltung des Gleichgewichtes ist es nöthig, daß die Wasserschicht HR durch die über ihr stehende Wassersäule ER ebenso stark nach unten gedrückt wird, als durch die unter ihr befindliche Wassermasse von unten nach oben. Da aber in beiden Fällen die gedrückte Fläche eine und dieselbe ist, so muß auch die Druckhöhe in beiden Fällen eine und dieselbe sein, es muß also der Wasserspiegel AB ebenso hoch über HR stehen als der Wasserspiegel EF.

§. 383. **Seitendruck.** Das soeben gefundene Gesetz von dem Wasserdrucke gegen eine Horizontalfläche läßt sich nicht unmittelbar auf eine gegen den Horizont geneigte ebene Fläche anwenden, da bei dieser die Druckhöhen an verschiedenen Stellen verschieden sind. Der Druck $p = h\gamma$ auf jede Flächeneinheit innerhalb der horizontalen Wasserschicht, welche um die Tiefe h unter dem Wasserspiegel steht, wirkt nach allen Richtungen (§. 377) und folglich auch rechtwinkelig gegen die festen Seitenwände des Gefäßes, die (nach §. 142) denselben vollkommen aufnehmen. Ist nun F_1 der Inhalt eines Elementes von einer Seitenfläche ABC, Fig. 671, und h_1 dessen Druckhöhe $F_1 H_1$, welche bei der Kleinheit des Elementes für alle Punkte desselben die nämliche Größe hat, so hat man den Normaldruck des Wassers gegen dasselbe:

Fig. 671.

$$P_1 = F_1 h_1 \gamma;$$

ist ebenso F_2 ein zweites Flächenelement, und h_2 dessen Druckhöhe, so hat man den Normaldruck auf dasselbe:

$$P_2 = F_2 h_2 \gamma;$$

ebenso für ein drittes Element:

$$P_3 = F_3 h_3 \gamma \text{ u. s. w.}$$

Diese Normaldrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft P die Summe dieser Drücke, also

$$P = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots)\,\gamma$$

ist. Nun ist aber noch

$$F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots$$

die Summe der statischen Momente von F_1, F_2 u. s. w. hinsichtlich der Oberfläche AOB des Wassers und $= Fh$, wenn F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe SO ihres Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel bezeichnet, es folgt daher der gesammte Normaldruck gegen die ebene Fläche:

$$P = Fh\gamma.$$

Versteht man hier unter Druckhöhe einer Fläche die Tiefe SO ihres

Schwerpunktes S unter dem Wasserspiegel, so gilt also allgemein die Regel: **der Druck des Wassers normal gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Fläche und deren Höhe die Druckhöhe der Fläche ist.**

Uebrigens ist noch hervorzuheben, daß dieser Wasserdruck nicht von der Wassermenge, welche über oder vor der gedrückten Fläche steht, abhängt, daß also z. B. unter übrigens gleichen Umständen eine Spundwand $ABCD$, Fig. 672, denselben Druck auszuhalten hat, sie mag das Wasser einer schmalen Schleuse $ACEF$, oder das eines größeren Teiches $ACGH$, oder das eines großen Sees abdämmen. Aus der Breite $AB = CD = b$ und der Höhe $AD = BC = a$ einer rectangulären Spundwand folgt die Fläche derselben:

Fig. 672.

$F = ab$ und die Druckhöhe: $SO = \frac{a}{2}$, daher der Wasserdruck:

$$P = ab\,\frac{a}{2}\,\gamma = \frac{1}{2}\,a^2 b\,\gamma.$$

Es wächst also dieser Druck wie die Breite und wie das Quadrat der Höhe der gedrückten Fläche.

Beispiel. Wenn vor einem 1,2 Meter breiten, 1 Meter hohen, 0,08 Meter dicken Schutzbrete von Eichenholz das Wasser 0,8 Meter hoch steht, wie groß ist die Kraft zum Aufziehen desselben?

Das Volumen des Bretes ist:

$$1{,}2\;.\;1\;.\;0{,}08 = 0{,}096 \text{ Cubikmeter.}$$

Nimmt man nun die Dichtigkeit des mit Wasser geschwängerten Eichenholzes nach §. 63 zu 1,11 an, so folgt das Gewicht dieses Bretes:

$$G = 0{,}096\;.\;1{,}11\;.\;1000 = 106{,}6 \text{ Kilogramm.}$$

Der Druck des Wassers gegen das Schutzbret und auch der Druck desselben gegen seine Führung ist:

$$P = \frac{1}{2}\,0{,}8^2\;.\;1{,}2\;.\;1000 = 384 \text{ Kilogramm;}$$

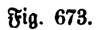
setzt man nun den Coefficienten der Reibung für nasses Holz nach §. 178 $\varphi = 0{,}68$, so folgt die Reibung dieses Bretes in seiner Leitung:

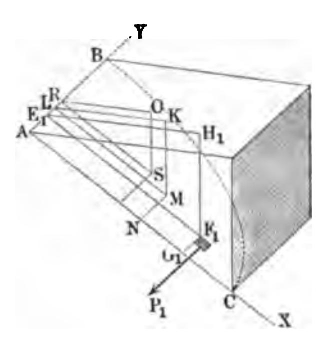
$$F = \varphi P = 0{,}68\;.\;384 = 261{,}1 \text{ Kilogramm.}$$

Addirt man hierzu das Gewicht des Bretes, so erhält man die Kraft zum Aufziehen desselben, vorausgesetzt, daß der Einfluß des Auftriebes (s. §. 391) vernachlässigt wird, gleich $261{,}1 + 106{,}6 = 367{,}7$ Kilogramm.

Mittelpunkt des Wasserdruckes. Die Mittelkraft $P = Fh\gamma$ aus sämmtlichen Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hat, wie **§. 384.**

jede andere Mittelkraft eines Systemes von Parallelkräften, einen bestimmten Angriffspunkt, den man den **Mittelpunkt des Druckes** nennt. Durch Unterstützung dieses Punktes kann dem ganzen Wasserdrucke einer Fläche das Gleichgewicht gehalten werden.


Fig. 673.



Die statischen Momente der Elementarpressungen $F_1 h_1 \gamma$, $F_2 h_2 \gamma$ u. s. w. hinsichtlich der Ebene des Wasserspiegels ABO, Fig. 673, sind:

$$F_1 h_1 \gamma . h_1 = F_1 h_1^2 \gamma,$$
$$F_2 h_2 \gamma . h_2 = F_2 h_2^2 \gamma \text{ u. s. w.;}$$

es ist also das statische Moment des ganzen Wasserdruckes in Hinsicht auf diese Ebene:

$$(F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots) \gamma.$$

Bezeichnet man nun den Abstand KM des **Mittelpunktes** M **dieses Druckes** vom Wasserspiegel durch z, so hat man das Moment des Wasserdruckes auch:

$$Pz = (F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) z \gamma,$$

und es folgt nun durch Gleichsetzen beider Momente die in Frage stehende Tiefe des **Mittelpunktes** M unter dem Wasserspiegel:

$$1) \quad z = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} = \frac{F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 + \cdots}{Fh},$$

wenn, wie oben, F den Inhalt der ganzen Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel bezeichnet.

Um diesen Druckpunkt vollständig zu bestimmen, hat man noch dessen Abstand von einer anderen Ebene oder Linie anzugeben. Setzt man die Abstände $F_1 G_1$, $F_2 G_2$ ... der Flächenelemente F_1, F_2 ... von der den Neigungswinkel der Ebene bestimmenden Falllinie $AC = y_1, y_2, \ldots$, so sind die Momente der Elementardrücke in Hinsicht auf diese Falllinie: $F_1 h_1 y_1 \gamma$, $F_2 h_2 y_2 \gamma$ ..., also ist das Moment der ganzen Fläche: $(F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots) \gamma$.

Bezeichnet man den Abstand MN des Mittelpunktes M von eben dieser Linie durch v, so hat man dieses Moment auch gleich: $(F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots) v \gamma$. Setzt man endlich beide Momente einander gleich, so erhält man die zweite Ordinate:

$$2) \quad v = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{F_1 h_1 + F_2 h_2 + \cdots} = \frac{F_1 h_1 y_1 + F_2 h_2 y_2 + \cdots}{Fh}.$$

Ist α der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen den Horizont, sind ferner $x_1, x_2 \ldots$ die Entfernungen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ ... der Elemente $F_1, F_2 \ldots$,

und ist u der Abstand LM des Druckmittelpunktes M von der Durchschnittslinie AB der Ebene mit dem Wasserspiegel, so hat man $h_1 = x_1 \sin. \alpha$, $h_2 = x_2 \sin. \alpha \ldots$, sowie $z = u \sin. \alpha$. Führt man diese Werthe in den Ausdrücken für z und v ein, so ergiebt sich:

$$u = \frac{F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{statisches Moment}} \text{ und}$$

$$v = \frac{F_1 x_1 y_1 + F_2 x_2 y_2 + \cdots}{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \cdots} = \frac{\text{Centrifugalkraftmoment}}{\text{statisches Moment}}.$$

Man findet also die Abstände u und v des Druckmittelpunktes von der horizontalen Axe AY und von der durch die Falllinie gebildeten Axe AX, wenn man das statische Moment der Fläche in Hinsicht auf die erste Axe einmal in das Trägheitsmoment derselben in Hinsicht auf dieselbe Axe und ein zweites Mal in das Centrifugalkraftmoment derselben in Hinsicht auf beide Axen dividirt. Auch ist der erste Abstand zugleich die Entfernung des Schwingungspunktes von der Durchschnittslinie mit dem Wasserspiegel (§. 351). Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß der Mittelpunkt des Wasserdruckes mit dem in §. 338 bestimmten Mittelpunkte des Stoßes vollkommen zusammenfällt, wenn die Durchschnittslinie AY der Fläche mit dem Wasserspiegel als Drehaxe angesehen wird.

Wasserdruck gegen Rechtecke und Dreiecke. Ist die gedrückte Fläche ein Rechteck AC, Fig. 674, mit horizontaler Grundlinie CD, so befindet sich der Mittelpunkt M des Druckes in der die Grundlinien halbirenden Falllinie KL und steht um $^2/_3$ dieser Linie von der im Wasserspiegel liegenden Seite AB ab. Reicht dieses Rechteck nicht bis zum Wasserspiegel, wie in Fig. 675, ist vielmehr der Abstand KL der unteren Basis CD vom §. 385.

Fig. 674.

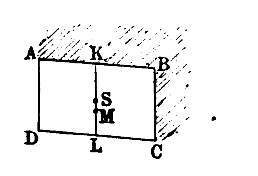


Fig. 675.

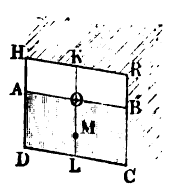
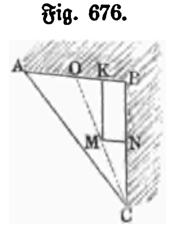


Fig. 676.



Wasserspiegel $= l_1$ und der Abstand KO der oberen Basis $AB = l_2$, so hat man den Abstand KM des Druckmittelpunktes vom Wasserspiegel HR:

$$u = {}^2/_3 \cdot \frac{l_1^3 - l_2^3}{l_1^2 - l_2^2}.$$

Für ein rechtwinkeliges Dreieck, ABC, Fig. 676, dessen eine Kathete

AB im Wasserspiegel liegt, ist der Abstand KM des Druckmittelpunktes M von AB (Beispiel §. 338):

$$u = \frac{1/_6 F \,.\, l^2}{1/_3 F \,.\, l} = 1/_2\, l,$$

wenn l die Höhe BC des Dreiecks bezeichnet.

Der Abstand dieses Punktes M von der anderen Kathete BC ist, da dieser Punkt jedenfalls in der das Dreieck halbirenden Linie CO liegt, welche von der Spitze C nach dem Mittelpunkte der Grundlinie geht, $NM = v = 1/_4\, b$, wenn b die Grundlinie AB bezeichnet.

Liegt die Spitze C im Wasserspiegel, wie Fig. 677 angiebt, befindet sich also die Kathete AB unter der Spitze, so hat man:

$$KM = u = \frac{1/_2 F l^2}{2/_3 F l} = 3/_4\, l \text{ und}$$

$$NM = v = 3/_4 \,.\, \frac{b}{2} = 3/_8\, b.$$

Befindet sich das ganze Dreieck ABC, Fig. 678, unter Wasser, steht die Grundlinie AB um $AH = l_2$ und die Spitze C um $CH = l_1$ vom Wasserspiegel HR ab, so hat man den Abstand MK des Druckmittelpunktes M vom Wasserspiegel HR:

Fig. 677.

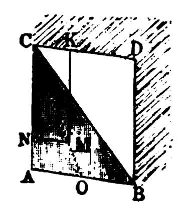
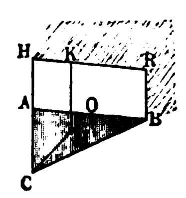


Fig. 678.



$$u = \frac{1/_{18} F (l_1 - l_2)^2 + F \left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)^2}{F \left(l_2 + \frac{l_1 - l_2}{3}\right)}$$

$$= \frac{1/_{18} (l_1 - l_2)^2 + 1/_9 (2 l_2 + l_1)^2}{1/_3 (2 l_2 + l_1)} = \frac{l_1^2 + 2 l_1 l_2 + 3 l_2^2}{2 (l_1 + 2 l_2)}.$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Druckmittelpunkte von anderen ebenen Figuren bestimmen.

Beispiel. Welche Kraft P ist aufzuwenden, um die um eine horizontale Axe D drehbare kreisrunde Klappe AB, Fig. 679, aufzuziehen? Es sei die Länge DA dieser Klappe gleich 0,4 Meter, ihr Durchmesser AB = 0,35 Meter, der Abstand ihres Schwerpunktes S von der Axe D, DS = 0,2 Meter und ihr Gewicht G = 25 Kilogramm. Ferner sei der Abstand DH der Drehaxe D von dem Wasserspiegel HR, in der Ebene der Klappe gemessen, gleich 0,8 Meter und der Neigungswinkel dieser Ebene gegen den Horizont $\alpha = 60^0$.

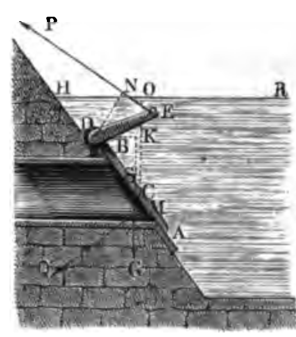
Die gedrückte Fläche ist:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}7854 \,.\, 0{,}35^2 = 0{,}096 \text{ Quadratmeter}$$

und die Druckhöhe oder Tiefe ihres Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel:

$$OC = h = HC \, sin. \alpha = \left(0{,}3 + 0{,}05 + \frac{0{,}35}{2}\right) 0{,}866 = 0{,}455 \text{ Meter},$$

Fig. 679.



daher der Wasserdruck auf die Fläche $AB = F$:

$$Q = Fh\gamma = 0{,}096 \;.\; 0{,}455 \;.\; 1000$$
$$= 43{,}68 \text{ Kilogramm.}$$

Der Hebelarm b dieser Kraft in Hinsicht auf die Drehaxe D ist der Abstand DM des Druckmittelpunktes M von derselben, also:

$$b = HM - HD.$$

Nun ist aber:

$$HM = \frac{\frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^2}{4} \,.\, HC^2}{\frac{\pi d^2}{4} \,.\, HC} = \frac{d^2}{16 \,.\, HC}$$

$$+ HC = \frac{0{,}35^2}{16 \,.\, 0{,}525} + 0{,}525 = 0{,}54 \text{ Meter},$$

daher folgt:

$$b = 0{,}54 - 0{,}30 = 0{,}24 \text{ Meter}$$

und das gesuchte statische Moment des Wasserdruckes:

$$Qb = 43{,}68 \;.\; 0{,}24 = 10{,}48 \text{ Meterkilogramm.}$$

Das statische Moment des Klappengewichts ist gleich

$$G \,.\, DK = G \,.\, DS \,.\, cos. \alpha = 25 \;.\; 0{,}2 \;.\; 0{,}5 = 2{,}5 \text{ Meterkilogramm.}$$

Durch Addition beider Momente erhält man das ganze Moment zum Aufziehen der Klappe:

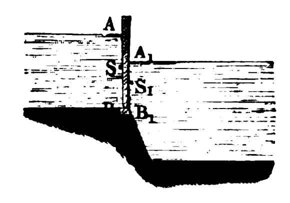
$$Pa = 10{,}48 + 2{,}5 = 12{,}98 \text{ Meterkilogramm}$$

und, wenn die Kraft zum Aufziehen an dem Hebelarm $DN = a = 0{,}2$ Meter wirkt, so folgt die Größe derselben:

$$P = \frac{12{,}98}{0{,}2} = 64{,}9 \text{ Kilogramm.}$$

Druck auf beiden Seiten einer Fläche. Wird eine ebene Fläche AB, Fig. 680, zu beiden Seiten vom Wasser gedrückt, so erhält man die Mittelkraft durch die Differenz der den beiden Seiten entsprechenden und einander entgegenwirkenden Wasserdrücke. §. 386.

Fig. 680.



Ist F der Inhalt des gedrückten Theiles auf der einen Seite der Fläche AB und h die Tiefe AS seines Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel, ferner F_1 der Inhalt des Theiles $A_1 B_1$ auf der anderen Seite der Fläche und h_1 die Tiefe $A_1 S_1$ seines Schwerpunktes unter dem entsprechenden Wasserspiegel, so fällt die gesuchte Mittelkraft: $P = Fh\gamma - F_1 h_1 \gamma = (Fh - F_1 h_1)\,\gamma$ aus.

Ist das Trägheitsmoment des ersten Flächentheiles in Hinsicht auf die Linie, in welcher die Ebene der Fläche den ersten Wasserspiegel schneidet, gleich Fk^2, so hat man das statische Moment des Wasserdruckes von der einen Seite in Hinsicht auf die Axe A gleich

$$Fk^2\gamma,$$

und ist das Trägheitsmoment des zweiten Flächentheiles in Hinsicht auf die Durchschnittslinie mit dem zweiten Wasserspiegel gleich $F_1 k_1^2$, so hat man ebenso das statische Moment des Wasserdruckes von der anderen Seite in Hinsicht auf die Axe im zweiten Wasserspiegel A_1 gleich

$$F_1 k_1^2 \gamma.$$

Setzen wir nun den Abstand AA_1 der Wasserspiegel von einander gleich a, so erhalten wir die Vergrößerung des letzten Momentes beim Uebergange von der Axe A_1 auf die Axe A gleich

$$F_1 h_1 a \gamma,$$

und daher ist das statische Moment des Wasserdruckes $F_1 h_1 \gamma$ in Hinsicht auf die Axe A im ersten Wasserspiegel

$$F_1 k_1^2 \gamma + F_1 h_1 a \gamma = (F_1 k_1^2 + F_1 a h_1)\gamma.$$

Hiernach folgt dann das statische Moment der Differenz beider Mitteldrücke:

$$(Fk^2 - F_1 k_1^2 - aF_1 h_1)\gamma$$

und der Hebelarm dieser Kraftdifferenz, oder der Abstand des Druckmittelpunktes von der Axe im ersten Wasserspiegel:

$$u = \frac{Fk^2 - F_1 k_1^2 - aF_1 h_1}{Fh - F_1 h_1}.$$

Sind die gedrückten Flächentheile einander gleich, welcher Fall eintritt, wenn, wie Fig. 681 repräsentirt, die ganze Fläche $AB = F$ unter Wasser ist, so hat man einfacher:

Fig. 681.

$$P = F(h - h_1)\gamma,$$

und da $k^2 = k_1^2 + 2ah_1 + a^2$ (s. §. 225) und $h - h_1 = a$ ist,

$$u = \frac{k^2 - k_1^2 - ah_1}{h - h_1} = \frac{ah_1 + a^2}{a}$$
$$= h_1 + a = h.$$

In dem letzten Falle ist also der Druck gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe der Höhenabstand RH_1 zwischen beiden Wasserspiegeln ist, und es fällt der Mittelpunkt des Druckes mit dem Schwerpunkte S der Fläche zusammen. Dieses Gesetz ist auch noch dann richtig, wenn beide Wasserspiegel außerdem noch durch gleiche Kräfte, z. B. durch Kolben, oder durch die Atmosphäre gedrückt werden. Denn ist

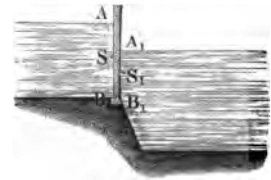
dieser Druck auf jede Flächeneinheit gleich p und also die entsprechende Wassersäulenhöhe $l = \frac{p}{\gamma}$ (§. 382), so hat man statt h, $h + l$ und statt h_1, $h_1 + l$ zu setzen, und es läßt die Subtraction die Kraft

$$P = (h + l - [h_1 + l])\, F\gamma = (h - h_1)\, F\gamma$$

übrig. Aus dem Grunde läßt man denn auch in der Regel bei hydrostatischen Untersuchungen den Atmosphärendruck außer Acht.

Beispiel. Die Höhe AB des Oberwassers bei einer Schifffahrtsschleuse, Fig. 682, beträgt 2 Meter, das Wasser in der Kammer steht am Schleusenthore 1,2 Meter hoch und die Breite des Kanals wie der Kammer beträgt 2,5 Meter, welchen Mitteldruck hat das Schleusenthor auszuhalten?

Fig. 682.



Es ist

$F = 2 \,.\, 2{,}5 = 5$ Quadratmeter und

$F_1 = 1{,}2 \,.\, 2{,}5 = 3$ Quadratmeter,

$h = 1$ Meter und $h_1 = 0{,}6$ Meter, ferner

$a = 2 - 1{,}2 = 0{,}8$ Meter.

Man hat sodann:

$$k^2 = \tfrac{1}{3} \,.\, 2^2 = 1{,}33 \text{ und } k_1^2 = \tfrac{1}{3}\, 1{,}2^2 = 0{,}48,$$

daher folgt der gesuchte Wasserdruck:

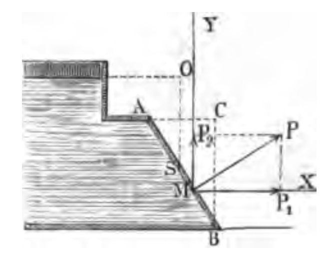
$$P = (Fh - F_1 h_1)\,\gamma = (5 \,.\, 1 - 3 \,.\, 0{,}6)\, 1000 = 3200 \text{ Kilogramm}$$

und die Tiefe seines Angriffspunktes unter dem Oberwasserspiegel:

$$u = \frac{Fk^2 - F_1 k_1^2 - a F_1 h_1}{Fh - F_1 h_1} = \frac{5 \,.\, 1{,}33 - 3 \,.\, 0{,}48 - 0{,}8 \,.\, 3 \,.\, 0{,}6}{5 \,.\, 1 - 3 \,.\, 0{,}6} = 1{,}18 \text{ M.}$$

Druck nach einer bestimmten Richtung. In vielen Fällen ist es wichtig, nur einen, nach einer bestimmten Richtung wirkenden Theil des Wasserdruckes auf eine Fläche zu kennen. Um eine solche Componente zu finden, zerlegen wir den normalen Wasserdruck $\overline{MP} = P$ der Fläche $\overline{AB} = F$, Fig. 683, nach der gegebenen Richtung MX und nach der Richtung MY winkelrecht gegen dieselbe in zwei Seitenkräfte: §. 387.

Fig. 683.



$$MP_1 = P_1 \text{ und } MP_2 = P_2.$$

Ist nun α der Winkel PMX, um welchen die Normalkraft von der gegebenen Richtung MX der Seitenkraft abweicht, so erhält man für die Componenten:

$$P_1 = P\cos.\alpha \text{ und } P_2 = P\sin.\alpha.$$

Entwirft man von der Fläche AB in einer winkelrecht auf der gegebenen Richtung MX stehenden Ebene die Projection BC, so hat man für deren Inhalt F_1 die Formel:

$$F_1 = F \,.\, \cos.\, ABC,$$

oder, da der Neigungswinkel ABC der Fläche zu ihrer Projection gleich ist dem Winkel $PMX = \alpha$ zwischen der Normalkraft P und ihrer Componente P_1, so hat man:

$$F_1 = F\, cos.\, \alpha, \text{ oder umgekehrt:}$$

$$cos.\, \alpha = \frac{F_1}{F},$$

und daher die gesuchte Seitenkraft:

$$P_1 = P\frac{F_1}{F}.$$

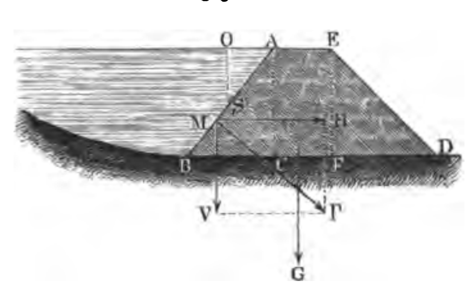
Da noch der Normaldruck die Größe $P = Fh\gamma$ hat, so folgt endlich:

$$P_1 = F_1 h \gamma,$$

d. h. der Druck, womit das Wasser auf eine ebene Fläche nach irgend einer Richtung drückt, ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Projection der Fläche winkelrecht zur gegebenen Richtung und zur Höhe die Tiefe des Schwerpunktes der Fläche unter dem Wasserspiegel hat.

In den meisten Fällen der Anwendung ist es wichtig, nur die verticale oder eine horizontale Componente vom Drucke des Wassers gegen eine Fläche zu kennen. Da die Projection winkelrecht zur Verticalrichtung die Horizontal- und die Projection winkelrecht zu einer Horizontalrichtung eine Verticalprojection ist, so findet man den Verticaldruck des Wassers gegen eine Fläche, wenn man die Horizontalprojection oder den Grundriß derselben als gedrückte Fläche, und dagegen den Horizontaldruck des Wassers nach irgend einer Richtung, wenn man die Verticalprojection oder den Aufriß der Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung als gedrückte Fläche behandelt, in beiden Fällen aber die Tiefe OS des Schwerpunktes S der Fläche unter dem Wasserspiegel als Druckhöhe ansieht.

Fig. 684.



Bei einem prismatischen Teichdamme $ABDE$, Fig. 684, hat man hiernach für den Horizontaldruck des Wassers das verticale Längenprofil AC und für die Verticalkraft die Horizontalprojection BC der Wasserfläche AB als gedrückte Fläche anzusehen. Setzt man daher die Länge des

Dammes gleich l, die Höhe $AC = h$ und die vordere Böschung $BC = a$, so folgt die Horizontalkraft des Wassers:

$$H = lh\frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}h^2 l\gamma$$

und der Verticaldruck desselben:

$$V = al\frac{h}{2}\gamma = \frac{1}{2}alh\gamma.$$

Ist nun noch die obere oder Dammkappenbreite $AE = b$, die hintere Böschung $DF = a_1$ und das specifische Gewicht der Dammmasse $= \gamma_1$, so hat man das Gewicht des Dammes:

$$G = \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right) hl\gamma_1$$

und den ganzen Verticaldruck des Dammes gegen den horizontalen Boden:

$$V + G = \frac{1}{2}alh\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)hl\gamma_1 = \left[\frac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right]hl.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten gleich φ, so folgt nun die Reibung oder Kraft zum Fortschieben des Dammes:

$$F = \varphi\,(V + G) = \left[\frac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right]\varphi hl.$$

In dem Falle, wenn der Horizontaldruck des Wassers dieses Fortschieben bewirken soll, ist daher zu setzen:

$$\frac{1}{2}h^2 l\gamma = \left[\frac{1}{2}a\gamma + \left(b + \frac{a + a_1}{2}\right)\gamma_1\right]\varphi hl,$$

oder einfacher:

$$h = \varphi\left(a + (2b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right).$$

Damit also der Damm vom Wasser nicht fortgeschoben werde, muß sein:

$$h < \varphi\left(a + (2b + a + a_1)\frac{\gamma_1}{\gamma}\right) \text{ oder}$$

$$b > \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{\varphi} - a\right)\frac{\gamma}{\gamma_1} - (a + a_1)\right].$$

Der Sicherheit wegen nimmt man wohl an, daß der Grund des Dammes größtentheils durchwaschen sei, weshalb äußerstenfalls noch ein Gegendruck von unten nach oben gleich $(b + a + a_1)\,lh\gamma$ in Abzug zu bringen und

$$h < \varphi\left[(2b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right]$$

zu setzen ist.

Beispiel. Die Dichtigkeit der Lehmdammmasse ist nahe doppelt so groß, als die des Wassers, also:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = 2 \text{ und } \frac{\gamma_1}{\gamma} - 1 = 1;$$

es läßt sich daher für einen Lehmdamm einfach

$$h < \varphi\,(2\,b + a)$$

setzen. Erfahrungen zufolge widersteht ein Damm hinlänglich, wenn die Höhe, Böschung und Kappenbreite desselben einander gleich sind; setzt man hiernach in der letzten Formel:

$h = b = a$, so ergiebt sich:

$\varphi = \frac{1}{3}$, weshalb man in anderen Fällen:

$$h = \frac{1}{3}\left[(2\,b + a + a_1)\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} - 1\right) - a_1\right]$$

und insbesondere bei Lehmdämmen:

$h = \frac{1}{3}\,(2\,b + a)$, daher umgekehrt:

$$b = \frac{3\,h - a}{2}$$

zu setzen hat.

Beträgt die Dammhöhe 5 Meter, und ist der Böschungswinkel $\alpha = 36^0$, so hat man die Böschung:

$$a = h \; cotg.\,\alpha = 5 \,.\, cotg.\, 36^0 = 5 \,.\, 1{,}3764 = 6{,}882 \text{ Meter}$$

und daher die obere Damm- oder Kappenbreite:

$$b = \frac{15 - 6{,}882}{2} = 4{,}059 \text{ Meter}$$

zu machen.

388. **Druck auf krumme Flächen.** Das im vorigen Paragraphen gefundene Gesetz über den Druck des Wassers nach einer bestimmten Richtung gilt nur für ebene Flächen und für die einzelnen wegen ihrer Kleinheit als eben anzusehenden Elemente krummer Flächen, nicht aber für krumme Flächen überhaupt. Die Normaldrucke auf die einzelnen Elemente einer krummen Fläche lassen sich in Seitenkräfte parallel zu einer gegebenen Richtung und in andere, gegen erstere winkelrecht, zerlegen. Jene Seitendrücke bilden ein System von Parallelkräften, deren Mittelkraft den Druck in der gegebenen Richtung darstellt, und die darauf senkrechten Seitenkräfte lassen sich ebenfalls auf eine Mittelkraft zurückführen. Beide Mittelkräfte gestatten aber nur dann eine weitere Vereinigung, wenn sie zum Durchschnitte gelangen (§. 99). Im Allgemeinen ist es daher nicht möglich, die sämmtlichen Wasserdrücke gegen die Elemente einer krummen Fläche auf eine einzige Karft zurückzuführen, doch kommen einzelne Fälle vor, wo die gedachte Vereinigung möglich ist.

Sind $F_1, F_2, F_3 \ldots$ Elemente einer krummen Fläche, und $h_1, h_2, h_3 \ldots$ ihre Druckhöhen, so hat man den Druck auf die krumme Fläche nach einer bestimmten Richtung, wenn $G_1, G_2, G_3 \ldots$ die Projectionen der Elemente auf eine zur Druckrichtung senkrechte Ebene bedeuten:

$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + G_3 h_3 + \cdots)\,\gamma.$$

In dem Falle, wenn die einzelnen Elemente der krummen Fläche F zu ihren Projectionen G ein constantes Verhältniß, d. h. wenn sie überall dieselbe Neigung gegen die Projectionsebene haben, wenn also:

$$\frac{G_1}{F_1} = \frac{G_2}{F_2} = \frac{G_3}{F_3} \cdots = n$$

ist, hat man:

$$G_1 = n F_1,\; G_2 = n F_2 \ldots,$$

folglich:

$$P = n\,(F_1 h_1 + F_2 h_2 + F_3 h_3 + \cdots)\,\gamma = n F h \gamma,$$

wenn F den Inhalt der gedrückten Fläche und h die Tiefe ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel bedeutet. Nun ist ferner, unter G die Projection der gedrückten Fläche verstanden:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots = n G_1 + n G_2 + n G_3 + \cdots = n G,$$

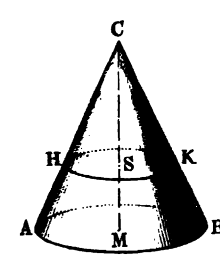
daher:

$$P = n F h \gamma = G h \gamma.$$

In diesem Falle, wo alle Flächenelemente dieselbe Neigung gegen die Projectionsebene oder gegen die Druckrichtung haben, gilt daher ebenfalls wie bei ebenen Flächen das Gesetz, daß **der Wasserdruck nach der betreffenden Richtung gleich dem Gewichte einer Wassersäule ist, deren Basis der Projection der krummen Fläche winkelrecht gegen die gegebene Richtung und deren Höhe der Tiefe des Schwerpunktes der krummen Fläche unter dem Wasserspiegel gleichkommt.**

So ist z. B. der Verticaldruck des Wassers gegen den Mantel eines mit Wasser gefüllten, geraden, kegelförmigen Gefäßes ABC, Fig. 685, gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche die Bodenfläche zur Basis und zwei Drittel der Axenlänge CM zur Höhe hat, weil sämmtliche Elemente der Mantelfläche gleiche Neigung gegen die horizontale Bodenfläche haben, und weil der Schwerpunkt S des Kegelmantels um zwei Drittel der Höhe des Kegels von der Spitze absteht (§. 118). Ist r der Halbmesser der Basis und h die Höhe des Kegels, so hat man den Druck gegen den Boden gleich $\pi r^2 h \gamma$ und den Verticaldruck gegen den Mantel gleich $^2/_3\, \pi r^2 h \gamma$; da aber der Boden mit der Seitenwand fest verbunden ist, und beide Drücke einander entgegen wirken, so folgt die Kraft, mit welcher das Gefäß durch das Wasser abwärts gedrückt wird, zu

Fig. 685.

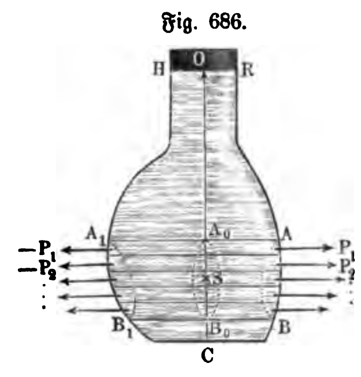


$$(1 - {}^2/_3)\, \pi r^2 h \gamma = {}^1/_3\, \pi r^2 h \gamma$$

gleich dem Gewichte der ganzen Wassermasse. Hätte man den Boden durch einen feinen Schnitt vom Mantel getrennt, so würde derselbe mit seiner vollen Kraft $\pi r^2 h \gamma$ nach unten, oder auf seine Unterlage drücken, dagegen wäre aber auch noch der Mantel mit einer Kraft $\frac{2}{3} \pi r^2 h \gamma$ niederzuhalten, um das Abheben desselben durch das Wasser zu verhindern.

§. 389. **Horizontal- und Verticaldruck.** Wie auch eine krumme Fläche AB, Fig. 686, geformt sein möge, immer ist der Horizontaldruck des Wassers gegen dieselbe gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis die Verticalprojection $A_0 B_0$ der Fläche winkelrecht zur gegebenen Druckrichtung und zur Druckhöhe die Tiefe OS des Schwerpunktes S dieser Projection unter dem Wasserspiegel hat. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt aus der Formel

Fig. 686.



$$P = (G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots) \gamma$$

sogleich, wenn man berücksichtigt, daß die Druckhöhen $h_1, h_2 \ldots$ der Flächenelemente auch zugleich die Druckhöhen ihrer Projectionen sind, daß also

$$G_1 h_1 + G_2 h_2 + \cdots$$

das statische Moment der ganzen Projection in Hinsicht auf den Wasserspiegel, d. i. das Product Gh aus der Verticalprojection G und der Tiefe h ihres Schwerpunktes unter dem Wasserspiegel ist. Man hat also hier wieder

$$P = G h \gamma$$

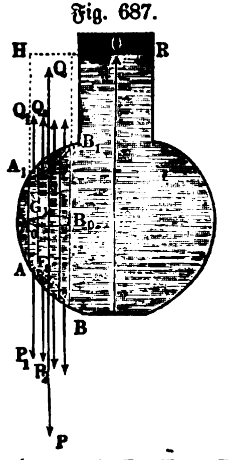
zu setzen, aber nicht außer Acht zu lassen, daß h die Druckhöhe der Verticalprojection ist.

Irgend zwei Theile AB und $A_1 B_1$ der Oberfläche eines Gefäßes, welche dieselbe Verticalprojection $A_0 B_0$ haben, wie sie z. B. durch einen durch das Gefäß gelegten horizontalen Cylindermantel aus der Gefäßwand herausgeschnitten werden würden, haben gleiche und entgegengesetzte Horizontaldrücke. Der Verticalschnitt OC, wodurch man irgend ein Gefäß mit dem darin befindlichen Wasser in zwei gleiche oder ungleiche Theile theilt, ist zugleich die Verticalprojection von beiden Oberflächentheilen $RABC$ und $HA_1 B_1 C$. Nach dem obigen Gesetze sind daher die Horizontaldrücke auf die beiden Oberflächentheile gleich groß, und da sie entgegengesetzt wirken, heben sie sich auf. Es folgt hieraus, daß der Horizontaldruck auf die Oberfläche eines mit Wasser gefüllten Gefäßes niemals eine Bewegung des letzteren hervorbringen kann. Wollte man das Gefäß z. B. an einem Faden aufhängen,

so würde zum Gleichgewichte nur erforderlich sein, daß der Schwerpunkt vertical unter dem Aufhängepunkte liegt, wie auch die Oberflächen beschaffen sein mögen. Der Horizontaldruck äußert sich in diesem Falle nur als innere Kraft, welche durch die in den Gefäßwandungen hervorgerufenen elastischen Spannungen aufgenommen wird.

Der Verticaldruck $P_1 = G_1 h_1 \gamma$ des Wassers gegen ein Element F_1, Fig. 687, der Gefäßwand ist, da die Horizontalprojection G_1 des Elementes als Querschnitt und die Druckhöhe h_1 als Höhe und also $G_1 h_1$ als das Volumen eines Prismas angesehen werden kann, gleich dem Gewichte einer über dem Elemente stehenden und bis zur Ebene HR des Wasserspiegels reichenden Wassersäule HF_1. Die einen endlichen Theil AB des Bodens oder der Gefäßwand ausmachenden Flächenelemente erleiden daher auch einen Verticaldruck, welcher dem Gewichte sämmtlicher darüberstehenden Wassersäulen, d. i. dem Gewichte der über dem ganzen Stücke stehenden Wassersäule gleich ist. Setzen wir dieses Volumen V_1, so erhalten wir hiernach für den verticalen Wasserdruck:

Fig. 687.



$$P = V_1 \gamma.$$

Für einen anderen Theil $A_1 B_1$ der Gefäßwand, welcher senkrecht über dem vorigen liegt und das Volumen $A_1 B_1 H = V_2$ begrenzt, hat man den entgegengesetzten Verticaldruck:

$$Q = V_2 \gamma;$$

sind aber beide Theile fest mit einander verbunden, so resultirt aus beiden Kräften die vertical abwärts wirkende Kraft:

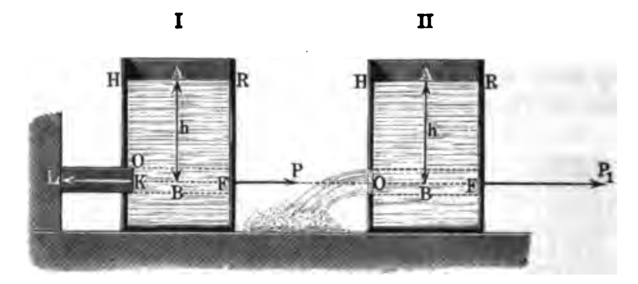
$$R = P - Q = (V_1 - V_2)\gamma = V\gamma$$

gleich dem Gewichte der zwischen beiden Flächentheilen enthaltenen Wassersäule. Wendet man endlich dieses Gesetz auf das ganze Gefäß an, so folgt, daß der gesammte Verticaldruck des Wassers gegen das Gefäß gleich ist dem Gewichte der eingeschlossenen Wassermasse.

Bringt man in der Seitenwand eines Gefäßes HBR, Fig. 688 I. u. II. (a. f. S.), eine Oeffnung O an, so fällt der Theil des Druckes, welcher dem Querschnitte dieser Oeffnung entspricht, weg, und es bleibt daher der Druck auf das gegenüber liegende Flächenstück F übrig. Wird nun die Oeffnung wie in I., durch einen Kolben K verschlossen, dessen Zurückgehen ein Widerstand L von außen verhindert, so findet eine gleichmäßige Vertheilung des Horizontaldruckes auf die Gefäßwand nicht mehr statt, sondern es wird das Gefäß mit einer Kraft $P = Fh\gamma$ fortgeschoben, welche der

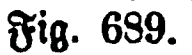
Kolben in entgegengesetzter Richtung aufnimmt. Gelangt nach der Entfernung des Kolbens das Wasser O zum Ausflusse, wie II. darstellt, so

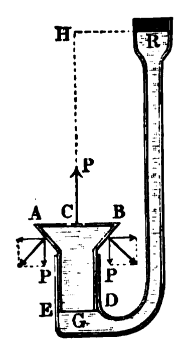
Fig. 688.



steigert sich in Folge der Reaction des ausfließenden Wassers dieser Druck P von $Fh\gamma$ auf $P_1 = 2\,Fh\gamma$, wie in der Folge gezeigt werden wird.

Anmerkung. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, daß die Kraft, welche der Dampf oder das Wasser bei Dampf- oder Wassersäulenmaschinen auf den Kolben ausübt, unabhängig von der Form des letzteren ist. Wie auch die Druckfläche durch Aushöhlung oder Abrundung vergrößert sein möge, immer bleibt der Druck nach der Richtung der Kolbenstange gleich dem Producte aus dem Querschnitte des Cylinders und dem Drucke p auf die Flächeneinheit (specifischer Druck). Bei dem trichterförmigen Kolben AB, Fig. 689, dessen größerer Halbmesser $CA = CB = r$ und dessen kleinerer Halbmesser $GD = GE = r_1$ ist, beträgt der Druck auf die Grundfläche AB die Größe $\pi r^2 p$ und der verticale Druck auf den Kegelmantel $\pi\,(r^2 - r_1^2)\,p$; so daß der restirende, nach oben wirksame Druck


Fig. 689.



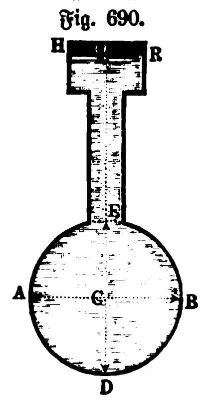
$$P = \pi r^2 p - \pi\,(r^2 - r_1^2)\,p = \pi r_1^2 p$$

beträgt, d. h. gleich dem Querschnitte des Cylinders mal dem specifischen Drucke ist. Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß der specifische Druck p für alle Oberflächentheile des Kolbens gleich groß sei, wie dies bei Dampfmaschinen immer genau und bei Wassersäulenmaschinen sehr annähernd der Fall ist, insofern die verticale Abmessung GC des Kolbens gegen die Druckhöhe CH verschwindend ist, sonach alle Kolbentheile nahezu in derselben Tiefe unter dem Wasserspiegel sich befinden.

Beispiel. Der Verticaldruck P_1 des Wassers auf die untere Halbkugelfläche ADB, Fig. 690, ist dem Gewichte einer Wassersäule gleich, welche oben von der Ebene des Wasserspiegels HR und unten von dieser Halbkugelfläche begrenzt wird. Ist r der Halbmesser $CA = CD$ dieser Fläche und h die Höhe CO des Wasserspiegels HR über der horizontalen Begrenzungsebene AB derselben,

so hat man das Volumen einer über ADB stehenden, bis zum Wasserspiegel reichenden Wassermasse:

Fig. 690.



$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h,$$

daher den Verticaldruck auf die Halbkugelfläche ADB:

$$P_1 = (h + \frac{2}{3} r)\, \pi r^2 \gamma.$$

Der nach oben gerichtete Verticaldruck auf die obere Halbkugelfläche AEB ist dagegen

$$P_2 = (h - \frac{2}{3} r)\, \pi r^2 \gamma;$$

daher folgt der gesammte Verticaldruck:

$$P = P_1 - P_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \gamma,$$

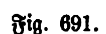
also gleich dem Gewichte des Wassers in der Kugel.

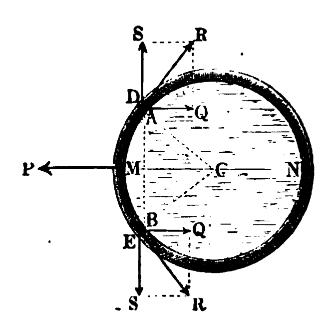
Der horizontale Druck auf eine der Halbkugeln DAE und DBE, welche in der Verticalebene DCE zusammenstoßen, wird dagegen durch das Gewicht des Prismas von der Grundfläche $DCE = \pi r^2$ und der Höhe $CO = h$ gemessen, ist folglich:

$$R = \pi r^2 h \gamma.$$

Röhrenstärke. Von besonderer Wichtigkeit ist die Anwendung der Lehre vom Wasserdrucke auf Röhren, Kessel u. s. w. Damit diese Gefäße dem Wasserdrucke hinreichend widerstehen und durch denselben nicht zersprengt werden, hat man ihnen eine gewisse, der Druckhöhe und der inneren Weite entsprechende Wandstärke zu geben. Das Zersprengen einer Röhre kann entweder in Quer- oder in Längenrissen vor sich gehen. Die letzteren entstehen jedoch leichter als die ersteren, wie aus Folgendem erhellen wird. §. 390.

Ist die Druckhöhe des Wassers in einer Röhre gleich h, also der Druck desselben auf die Flächeneinheit $p = h\gamma$, ferner die Weite dieser Röhre $MN = 2\,CM = 2r$, Fig. 691, also der Querschnitt des Wasserkörpers in derselben $F = \pi r^2$, so beträgt der auf die Endflächen der Röhre ausgeübte und von dem Querschnitte der Röhrenmasse aufzunehmende Wasserdruck:


Fig. 691.



$$P = Fp = \pi r^2 h \gamma = \pi r^2 p.$$

Hat nun die Röhrenwand eine Dicke $AD = BE = \delta$, so ist der Querschnitt derselben:

$$\pi (r + \delta)^2 - \pi r^2 \delta = 2\pi r \delta + \pi \delta^2$$
$$= 2\pi r \delta \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right).$$

Bezeichnet man nun die zulässige Spannung des Röhrenmaterials durch k, so läßt sich die Tragkraft der ganzen Röhre in der Axenrichtung

$$P = \left(1 + \frac{\delta}{2r}\right) 2\pi r \delta k$$

setzen, so daß nun die Gleichung

$$\left(1 + \frac{\delta}{2r}\right) 2\pi r \delta k = \pi r^2 p$$

oder

$$\left(1 + \frac{\delta}{2r}\right) 2\delta k = rp \text{ (s. §. 211)}$$

aufgestellt werden kann, deren Auflösung die gesuchte Röhrenstärke

$$\delta = \frac{rp}{2\left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)k},$$

oder meist genau genug,

$$\delta = \frac{rp}{2k} = \frac{rh\gamma}{2k} \text{ giebt.}$$

Der mittlere Druck, welchen das Wasser auf ein Wandstück AMB ausübt, dessen Länge gleich l und Centriwinkel $ACB = 2\alpha^0$ ist, beträgt, da die Projection dieses Stückes rechtwinkelig gegen die Mittellinie CM ein Rechteck vom Inhalte $\overline{AB} \,.\, l = 2rl\,sin.\,\alpha$ ist:

$$P = 2rl\,sin.\alpha \,.\, p = 2rlh\,sin.\alpha \,.\, \gamma.$$

Dieser Kraft wird durch die Cohäsionskräfte R, R in den Querschnitten $\overline{AD} \,.\, l$ und $\overline{BE} \,.\, l = \delta l$ der Röhrenwand das Gleichgewicht gehalten; sie ist daher der Summe $2\,Q$ derjenigen Componenten $\overline{DQ} = Q$ und $\overline{EQ} = Q$ der letzteren Kräfte gleich zu setzen, welche bei rechtwinkeliger Zerlegung mit der Mittellinie CM parallel gerichtet sind. Setzen wir nun $R = \delta l k$, so erhalten wir:

$$Q = R\,sin.\,ARQ = R\,sin.\,ACM = \delta l k\,sin.\alpha$$

und daher:

$$2\delta l k\,sin.\alpha = 2rlp\,sin.\alpha, \text{ d. i. } \delta k = rp.$$

Es ist hiernach die gesuchte Röhrenstärke:

$$\delta = \frac{rp}{k} = \frac{rh\gamma}{k},$$

also ganz unabhängig von der Lage und Länge der Risse.

Da die erste Entwickelung δ nur $= \frac{rp}{2k}$ giebt, so folgt, daß zur Verhinderung der Entstehung von Längenrissen die Wandstärke noch einmal so groß zu machen ist, als zur Verhinderung der Bildung eines Querrisses.

Aus der gefundenen Formel

$$\delta = \frac{rp}{k} = \frac{rh\gamma}{k},$$

folgt, daß sich die Wandstärken gleichartiger Röhren wie die Weiten und wie die Druckhöhen oder Drücke auf die Flächeneinheit verhalten müssen. Eine Röhre, welche dreimal so weit ist, als eine andere, und einen fünfmal so großen specifischen Druck auszuhalten hat, als diese, muß eine fünfzehnmal so starke Wand erhalten.

Hohlen Kugeln, welche von innen einen Druck p auf jede Flächeneinheit aushalten müssen, hat man die Stärke

$$\delta = \frac{rp}{2k}$$

zu geben, weil hier die Projection der Druckfläche der größte Kreis πr^2 und die Trennungsfläche der Ring $2\pi r\delta\left(1 + \frac{\delta}{2r}\right)$, oder annähernd bei kleinerer Dicke $= 2\pi r\delta$ ist.

Die gefundenen Formeln geben für $p = 0$ auch $\delta = 0$, deshalb müßten also Röhren, welche keinen inneren Druck auszuhalten haben, unendlich dünn gemacht werden; da aber jede Röhre schon in Folge ihres eigenen Gewichtes einen gewissen Druck aushalten und auch eine gewisse Dicke erhalten muß, damit sie wasserdicht hergestellt werden kann, so hat man zu der gefundenen Größe noch eine gewisse Dicke c hinzuzufügen, um die Stärke einer unter allen Umständen widerstehenden Röhre zu erhalten. Es ist solchem nach für cylindrische Röhren oder Kessel zu setzen:

$$\delta = c + \frac{rh\gamma}{k}$$

oder einfacher, wenn d die ganze innere Röhrenweite, n den Druck in Atmosphären, jede einer 10,336 Meter gleich 32,84 Fuß hohen Wassersäule entsprechend, und μ eine Erfahrungszahl bedeutet:

$$\delta = c + \mu n d.$$

Die folgende Tabelle giebt die Werthe der Erfahrungscoefficienten c und μ für Metermaß und Fußmaß:

Material	μ für jedes Maß	c (Millimeter)	c (Zoll)
Eisenblech	0,00086	3	0,12
Gußeisen	0,00238	9	0,33
Kupfer	0,00148	4	0,16
Blei	0,00507	5	0,20
Zink	0,00242	4	0,16
Holz	0,0323	27	1,04
Natürliche Steine . . .	0,0369	30	1,15
Künstliche Steine . .	0,0538	40	1,53

Beispiel. Wenn eine Wassersäulenmaschine senkrecht stehende, im Innern 0,25 Meter weite Einfallröhren aus Gußeisen hat, welche Wandstärken haben dieselben bei 100 Meter Tiefe zu erhalten?

Nach der angegebenen Formel ist diese Wandstärke:

$$\delta = 0{,}00238 \cdot \frac{100}{10{,}336} \cdot 250 + 9 = 5{,}76 + 9 = 14{,}76 \text{ Millimeter.}$$

Anmerkung 1. Die obigen Formeln für die Wandstärken der Röhren beruhen auf der Annahme, daß das Material in allen Punkten des Querschnittes gleich stark in Anspruch genommen wird. Wenn dies auch bei verhältnißmäßig geringen Pressungen und Wandstärken zulässig erscheint, so reichen diese Formeln doch in denjenigen Fällen nicht mehr aus, wo es sich, wie z. B. bei hydraulischen Preßcylindern, um bedeutende Druckkräfte handelt. Die Spannungen des Materials sind dann in verschiedenen concentrischen Schichten je nach deren Abstande vom Mittelpunkte des Querschnittes verschieden, so zwar, daß die innerste Faserschicht am meisten gespannt wird. Zur Bestimmung dieser verschiedenen Faserspannungen hat Brix die Voraussetzung gemacht, daß die Dicke δ der Wand während der Pressung unverändert groß bleibe und findet hiernach, der Annahme entsprechend, daß die maximale Spannung den zulässigen Werth k nicht übersteige:

$$\delta = r\left(e^{\frac{p}{k}} - 1\right) \text{ oder } p = k\, Log.nat.\left(\frac{\delta}{r} + 1\right).$$

Eine andere Hypothese legt Barlow der Rechnung zu Grunde, die nämlich, daß die Größe der Querschnittsfläche der Röhre während der Pressung einer Aenderung nicht unterworfen sei, und darnach ergiebt sich:

$$\delta = r\,\frac{p}{k-p} \text{ oder } p = \frac{k}{1 + \frac{r}{\delta}}.$$

Im zweiten Theile werden die Wandstärken der Röhren auch für den Fall ermittelt, wo die Röhren nicht bloß hydrostatischen Druck, sondern auch hydraulische Stöße auszuhalten haben. (S. „Ingenieur“ S. 422.)

Anmerkung 2. Von den Stärken der Dampfkesselwände wird im zweiten Theile gehandelt. Ueber die Theorie der Röhrenstärke ist eine Abhandlung von Herrn Geh. Regierungsrath Brix in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 1834, sowie Wiebe's Lehre von den einfachen Maschinentheilen, Band I., nachzulesen. Ebenso Rankine's Manuel of applied Mechanics, S. 289, und Scheffler's Monographien über die Gitter- und Bogenträger und über die Festigkeit der Gefäßwände, sowie Grashof's Festigkeitslehre. Von den technischen Verhältnissen und von den Prüfungen der Röhren wird gehandelt in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, Theil I., ferner in Geniey's Essai sur les moyens de conduire etc. les eaux, und im Traité théoretique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux, par Dupuit, Paris 1854.

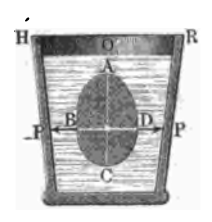
Zweites Capitel.

Vom Gleichgewichte des Wassers mit anderen Körpern.

Auftrieb. Ein unter das Wasser getauchter Körper wird durch das Wasser von allen Seiten her gedrückt und es entsteht nun die Frage nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte der Mittelkraft aus allen diesen Pressungen. Denken wir uns diese Mittelkraft aus einer verticalen und zwei horizontalen Componenten bestehend, und bestimmen wir diese Kräfte nach den Regeln des §. 389. Der Horizontaldruck des Wassers gegen eine Fläche ist gleich dem Horizontaldrucke gegen ihre Verticalprojection; nun ist aber jede Projection eines Körpers AC, Fig. 692, Projection vom Hintertheil ADC und Vordertheil ABC seiner Oberfläche zugleich, es fällt daher auch der horizontale Wasserdruck P gegen den Vordertheil der Oberfläche eines Körpers eben so groß aus als der Druck $-P$ gegen den Hintertheil, und es ist in Folge der entgegengesetzten Richtungen dieser gleichen, im Schwerpunkte der Verticalprojection AC angreifenden Drücke die Mittelkraft derselben gleich Null. Da dieses Verhältniß bei jeder beliebigen Horizontalrichtung und dieser entsprechenden Verticalprojection stattfindet, so folgt, daß die Resultirende aus allen Horizontalpressungen Null ist, daß also der unter dem Wasser befindliche Körper AC nach allen horizontalen Richtungen gleich stark gedrückt wird und deshalb kein Bestreben hat, sich in einer Horizontalrichtung fortzubewegen. §. 391.

Fig. 693.

Fig. 692.



Um den Verticaldruck des Wassers gegen den eingetauchten Körper ABD, Fig. 693 (a. v. S.), zu finden, denken wir uns denselben in verticale Elementarprismen AB, CD u. s. w. zerlegt, und bestimmen die Verticaldrücke auf die Endflächen A und B, C und D derselben u. s. w. Sind die Längen dieser Säulen $l_1, l_2 \ldots$, die Tiefen HB, KD ihrer oberen Enden $B, D \ldots$ unter dem Wasserspiegel OR gleich $h_1, h_2 \ldots$ und ihre horizontalen Querschnitte $F_1, F_2 \ldots$, so hat man die von oben nach unten wirkenden Verticaldrücke gegen die Enden $B, D \ldots$:

$$Q_1, Q_2 \ldots = F_1 h_1 \gamma, F_2 h_2 \gamma \ldots$$

und dagegen die von unten nach oben und gegen die Enden A, C u. s. w. wirkenden Drücke:

$$P_1, P_2 \ldots = F_1 (h_1 + l_1) \gamma, F_2 (h_2 + l_2) \gamma \ldots$$

Es folgt nun durch Vereinigung dieser Parallelkräfte die Mittelkraft:

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + \cdots - (Q_1 + Q_2 + \cdots) \\ &= F_1 (h_1 + l_1) \gamma + F_2 (h_2 + l_2) \gamma + \cdots - F_1 h_1 \gamma - F_2 h_2 \gamma - \cdots \\ &= (F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots) \gamma = V \gamma, \end{aligned}$$

wenn V das Volumen des eingetauchten Körpers oder des verdrängten Wassers bezeichnet.

Hiernach ist also der **Auftrieb, oder die Kraft, mit welcher das Wasser einen darin eingetauchten Körper von unten nach oben emporzutreiben sucht, gleich dem Gewichte des verdrängten Wassers oder einer Wassermenge, welche mit dem untergetauchten Körper einerlei Volumen hat.**

Um noch den Angriffspunkt dieser Mittelkraft zu finden, setzen wir die Abstände EF_1, $EF_2 \ldots$ der Elementarsäulen AB, $CD \ldots$ von einer Verticalebene OX gleich $a_1, a_2 \ldots$ und bestimmen die Momente der Kräfte in Hinsicht auf diese Ebene. Ist nun S der Angriffspunkt des Auftriebes und $ES = x$ der Abstand desselben von jener Grundebene, so hat man:

$$V\gamma \cdot x = F_1 l_1 \gamma \cdot a_1 + F_2 l_2 \gamma \cdot a_2 + \cdots$$

und daher:

$$x = \frac{F_1 l_1 a_1 + F_2 l_2 a_2 + \cdots}{F_1 l_1 + F_2 l_2 + \cdots} = \frac{V_1 a_1 + V_2 a_2 + \cdots}{V_1 + V_2 + \cdots},$$

wenn $V_1, V_2 \ldots$ die Inhalte der säulenförmigen Elemente bezeichnen. Da sich (nach §. 107) der Schwerpunkt des verdrängten Wassers genau nach derselben Formel bestimmt, so folgt, daß **der Angriffspunkt S des Auftriebes mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers zusammenfällt.**

Ein in das Wasser ganz oder theilweise eingetauchter Körper, auf welchen das Wasser den zuvor ermittelten Auftrieb ausübt, reagirt natürlich mit

einer gleich großen entgegengesetzt gerichteten Kraft (vertical abwärts) auf das Wasser und das Gefäß. Denkt man sich z. B. ein Gefäß mit Wasser auf einer Wagschale stehend und durch auf die andere Wagschale gelegte Gewichte abbalancirt, so wird das Gleichgewicht gestört werden, sobald man einen festen Körper ganz oder theilweise in das Wasser eintaucht, ohne ihn zu Boden fallen zu lassen, also etwa durch Einhängen. Beträgt das eingetauchte Volumen V, so ist das Wassergefäß um $V\gamma$ schwerer geworden. Um ebensoviel ist die Schnur, an welcher der Körper hängt, und deren Spannung vor dem Eintauchen gleich dem Gewichte des angehängten Körpers war, durch das Eintauchen entlastet worden. Man kann sich stets vorstellen, daß der von dem Körper innerhalb des Wassers eingenommene Raum von Wasser erfüllt wäre, dessen Gewicht dann von der umgebenden Flüssigkeit getragen würde, denn die umgebende Wassermasse trägt von dem Gewichte des eingetauchten Körpers einen genau eben so großen Theil.

Auftrieb bei theilweiser Umgebung mit Wasser. Wenn ein Körper, wie ABD, Fig. 694, nicht vollständig vom Wasser AHR umgeben ist, sondern mit der Gefäßwand in einer ebenen Fläche $\overline{AB}$ vom Inhalte F zusammenhängt, oder die Gefäßwand mit dem Querschnitte $\overline{AB} = F$ durchdringt, so fällt von der Wirkung des Wassers auf den Körper die Kraft weg, welche das Wasser auf die Fläche AB ausüben würde, wenn letztere frei, also ebenfalls mit dem Wasser in Berührung wäre. Bezeichnet nun h die Druckhöhe auf AB, d. i. die Tiefe des Schwerpunktes dieser Fläche unter dem Wasserspiegel HR, so wäre der Wasserdruck auf AB, $P = Fh\gamma$, und giebt V_1 das Volumen des von ABD verdrängten Wassers an, so ist der Auftrieb des Wassers, welcher den Körper senkrecht aufwärts zu bewegen suchen würde, wenn er ganz frei wäre, $P_1 = V_1\gamma$. §. 392.

Fig. 694.



Da nun aber der Druck auf AB wegfällt, so ist die Gesammtwirkung des Wassers auf den Körper nur die Mittelkraft R aus $P_1 = V_1\gamma$ und $-P = -Fh\gamma$. Um diese Mittelkraft zu bestimmen, hat man die verticale Schwerlinie des verdrängten Wasserkörpers und die in dem Mittelpunkte M des Druckes auf AB winkelrecht stehende Gerade bis zum Durchschnitte C zu verlängern, die Kräfte P_1 und $-P$ in diesem Punkte angreifend anzunehmen, und dieselben mittels des Parallelogrammes der Kräfte zu einer Mittelkraft $\overline{CR} = R$ zu vereinigen.

Ist die Neigung der Fläche AB gegen den Horizont, sowie die Abweichung der Kraft P von der Verticalen gleich α, so hat man folglich den Winkel, welchen die Richtungen der Kräfte P_1 und $-P$ zwischen sich einschließen, $MCP_1 = 180^0 - \alpha$ und daher die Größe der den gesammten Wasserdruck auf den Körper ABD messenden Mittelkraft:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P^2 - 2PP_1 \cos.\alpha}$$
$$= \gamma \sqrt{V_1^2 + (Fh)^2 - 2V_1 Fh \cos.\alpha}.$$

Nach dem Principe von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung findet eine gleiche Reaction $-R$ des Körpers gegen das Wasser statt. Will man also die Wirkung, die das Wasser und der eingetauchte Körper auf das Gefäß ausüben, ermitteln, so hat man nur die Mittelkraft zu bilden aus dem vertical abwärts wirkenden Gewichte G des in dem Gefäße enthaltenen Wassers und der der obigen Mittelkraft R entgegengesetzten Reaction $-R$. Setzt man für R ihre beiden Componenten P_1 und $-P$, so ergiebt sich die Kraft R_1, welche das Gefäß aufzunehmen hat, als Mittelkraft aus den beiden vertical abwärts gerichteten G und $-P_1$, sowie der schräg aufwärts in der Richtung MC wirkenden Kraft P. Bezeichnet daher V_0 das Volumen des in dem Gefäße enthaltenen Wassers, so daß $G = V_0\gamma$ ist, so findet man R_1 als Resultirende aus $P = Fh\gamma$ und der vertical abwärts wirkenden Componentensumme $Q = G + P_1 = V_0\gamma + V_1\gamma = V\gamma$, wenn $V = V_0 + V_1$ das vom Wasser und vom Körper ABD zusammen eingenommene Volumen bezeichnet. Man hat daher die auf das Gefäß wirkende Kraft:

$$R_1 = \sqrt{Q^2 + P^2 - 2QP\cos.\alpha}$$
$$= \gamma \sqrt{V^2 + (Fh)^2 - 2VFh\cos.\alpha}.$$

Wäre die Fläche AB horizontal, also $\alpha =$ Null, so hätte man

$$R = (V_1 - Fh)\gamma \text{ und } R_1 = (V - Fh)\gamma.$$

Wäre auch noch $V_1 = 0$, so würde $R = -Fh\gamma$ ausfallen (s. §. 382).

§. 393. **Gleichgewicht der schwimmenden Körper.** Zu dem Auftriebe P eines in oder unter Wasser getauchten Körpers gesellt sich noch das in entgegengesetzter Richtung wirkende Gewicht G des Körpers, und es ergiebt sich nun aus beiden eine Mittelkraft:

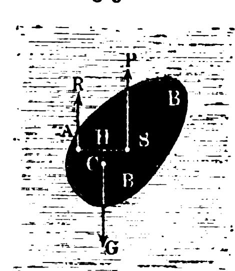
$$R = G - P = (\varepsilon - 1)V\gamma,$$

wenn ε die Dichte des Körpers bezeichnet.

Ist die Körpermasse homogen, so fällt der Schwerpunkt des verdrängten Wassers mit dem des Körpers zusammen, und es ist daher dieser Punkt zugleich der Angriffspunkt von der Mittelkraft $R = G - P$; findet aber eine Homogenität nicht statt, so fallen diese Schwerpunkte nicht zusammen,

und es weicht deshalb auch der Angriffspunkt der Mittelkraft R von beiden Schwerpunkten ab. Setzen wir den Horizontalabstand SH, Fig. 695, beider Schwerpunkte von einander gleich b und den Horizontalabstand SA des gesuchten Angriffspunktes A von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers gleich a, so haben wir die Gleichung:

Fig. 695.



$$Gb = Ra,$$

woraus sich

$$a = \frac{Gb}{R} = \frac{Gb}{G - P}$$

ergiebt. Wird der eingetauchte homogene Körper seiner eigenen Schwere überlassen, so sind drei Fälle von einander zu unterscheiden, je nachdem die Dichte des Körpers gleich, größer oder kleiner als die des Wassers ist. Während im ersten Falle Gleichgewicht zwischen dem Gewichte und dem Auftriebe eintritt, muß der Körper im zweiten Falle mit der Kraft

$$G - V\gamma = (\varepsilon - 1)\, V\gamma$$

sinken und im dritten Falle mit der Kraft

$$V\gamma - G = (1 - \varepsilon)\, V\gamma$$

steigen. Da die Masse des Körpers gleich $\frac{V\gamma\varepsilon}{g}$ ist, so findet sich die Beschleunigung des Sinkens zu:

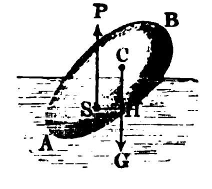
$$p = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\, g$$

und die Beschleunigung des Steigens zu:

$$p = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\, g.$$

Das Steigen geht aber nur so lange vor sich, bis die von der Ebene des Wasserspiegels abgeschnittene und von dem Körper verdrängte Wassermasse V_1 mit dem ganzen Körper einerlei Gewicht hat. Das Gewicht $G = V\varepsilon\gamma$ des Körpers AB, Fig. 696, und der Auftrieb $P = V_1\gamma$ bilden nun ein Kräftepaar, durch welches der Körper noch so weit umgedreht wird, bis die Richtungen beider Kräfte zusammenfallen, oder bis der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des verdrängten Wassers in eine und dieselbe Verticallinie fällt. Aus der Gleichheit der Kräfte P und G folgt der Ausdruck:

Fig. 696.



$$V_1 = \varepsilon V, \text{ oder } \frac{V_1}{V} = \frac{\varepsilon}{1}.$$

Man nennt die Linie durch den Schwerpunkt des schwimmenden Körpers und durch den des verdrängten Wassers die Schwimmaxe, und dagegen den durch die Ebene des Wasserspiegels gebildeten Schnitt des schwimmenden Körpers die Schwimmebene. Dem Vorstehenden zufolge kann jede Ebene, welche einen Körper so theilt, daß die Schwerpunkte beider Theile in einer Normallinie zu dieser Ebene liegen, und daß sich der eine Theil zum Ganzen wie die Dichte des Körpers zu der der Flüssigkeit verhält, Schwimmebene des Körpers sein.

§. 394. **Schwimmtiefe.** Kennt man die Gestalt und das Gewicht eines schwimmenden Körpers, so läßt sich mit Hülfe der vorstehenden Regel die Tiefe des Eintauchens im Voraus berechnen. Ist G das Gewicht des Körpers, so setze man das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V_1 = \frac{G}{\gamma};$$

Fig. 697.

verbindet man hiermit die stereometrische Formel für dieses Volumen V_1, so erhält man die gesuchte Bestimmungsgleichung.

Für ein Prisma ABC, Fig. 697, mit verticaler Axe ist z. B. $V_1 = Fy$, wenn F den Querschnitt und y die Tiefe CD des Eintauchens bezeichnet, es folgt daher:

$$Fy = \frac{G}{\gamma} \text{ und } y = \frac{G}{F\gamma} = \frac{Gh}{V\gamma} = \varepsilon h,$$

wenn V das Volumen, h die Länge und ε die Dichte des schwimmenden (homogenen) Prismas bezeichnet.

Für eine mit der Spitze unter Wasser schwimmende Pyramide ABC, Fig. 698, ist, da sich die Inhalte ähnlicher Pyramiden wie die Cuben ihrer Höhen verhalten:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{y^3}{h^3}, \text{ und folglich die Tiefe der Eintauchung:}$$

$$CD = y = h\sqrt[3]{\frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{\frac{G}{V\gamma}} = h\sqrt[3]{\varepsilon};$$

wo V das Volumen und h die Höhe der Pyramide bezeichnet.

Für eine mit der Basis unter Wasser schwimmende Pyramide ABC, Fig. 699, ergiebt sich hingegen der Abstand $CD = y_1$ der Spitze vom Wasserspiegel, aus der Höhe h der ganzen Pyramide, indem man setzt:

$\frac{V_1}{V} = \frac{h^3 - y_1^3}{h^3}$, wonach $y_1 = h\sqrt[3]{1 - \frac{V_1}{V}} = h\sqrt[3]{1 - \frac{G}{V\gamma}} = h\sqrt[3]{1 - \varepsilon}$ folgt.

Fig. 698.

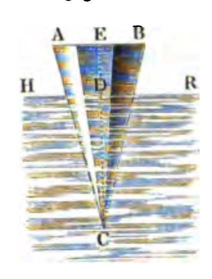
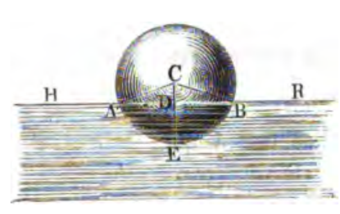


Fig. 699.



Für eine Kugel AB, Fig. 700, mit dem Halbmesser $CA = r$ ist:

Fig. 700.



$$V_1 = \pi y^2 \left(r - \frac{y}{3}\right).$$

Man erhält daher durch Auflösung der cubischen Gleichung

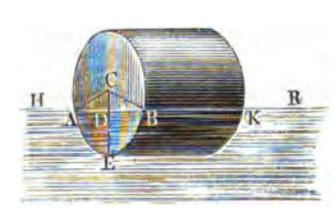
$$y^3 - 3ry^2 + \frac{3G}{\pi\gamma} = 0, \text{ oder}$$

$$y^3 - 3ry^2 + 4r^3\varepsilon = 0$$

die Tiefe der Eintauchung $DE = y$ der Kugel.

Für einen mit horizontaler Axe schwimmenden Cylinder AK, Fig. 701, vom Halbmesser $AC = BC = r$ ist, wenn α den Centriwinkel ACB des eingetauchten Bogens bezeichnet, die Tiefe DE der Eintauchung:

Fig. 701.



$$y = r\,(1 - cos.\ {}^1\!/_2\ \alpha).$$

Zur Bestimmung von α hat man Segment AEB = Sector $AEBC - \triangle ACB$ oder $AEB = \frac{r^2\alpha}{2} - \frac{r^2 sin.\ \alpha}{2}$, folglich das verdrängte Wasserquantum:

$$V_1 = l\left(\frac{r^2\alpha}{2} - \frac{r^2 sin.\ \alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{lr^2}{2}(\alpha - sin.\ \alpha).$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$\alpha - sin.\ \alpha = \frac{2\,G}{l\,r^2\gamma} = \frac{2\pi r^2 l\gamma\varepsilon}{l\,r^2\gamma} = 2\pi\varepsilon$$

auf dem Wege der Näherung findet man nun α.

Beispiele. 1) Wenn eine schwimmende Holzkugel von 0,3 Meter Durchmesser 0,18 Meter tief eintaucht, so ist das Volumen des von ihr verdrängten Wassers:

$$V_1 = \pi \,.\, 0{,}18^2\,(0{,}15 - 0{,}06) = 0{,}002916\,\pi \,.\, \text{Cubikmeter},$$

während die Kugel selbst ein Volumen von

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \,.\, 0{,}15^3 = 0{,}0045\,\pi \text{ Cubikmeter}$$

hat. Da sonach 0,0045 π Cubikmeter Kugelmasse ebensoviel wiegen wie 0,002916 π Cubikmeter Wasser, so ist die Dichte der Kugel

$$\varepsilon = \frac{2916}{4500} = 0{,}648.$$

2) Wie tief schwimmt ein Holzcylinder von 0,5 Meter Durchmesser bei einer Dichte $\varepsilon = 0{,}425$? Es ist

$$\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = \frac{\pi r^2 l \,.\, \varepsilon\gamma}{l r^2 \gamma} = \pi\varepsilon = 0{,}425 \,.\, \pi = 1{,}3352;$$

nun giebt die Segmententafel im „Ingenieur", S. 154, für den Inhalt $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}32766$ eines Kreissegmentes den Centriwinkel $\alpha^0 = 166^0$, und für $\frac{\alpha - \sin.\alpha}{2} = 1{,}34487$ denselben $= 167^0$, es läßt sich daher einfach der dem Abschnitte 1,3352 entsprechende Centriwinkel:

$$\alpha^0 = 166^0 + \frac{1{,}33520 - 1{,}32766}{1{,}34487 - 1{,}32766} \cdot 1^0 = 166^0 + \frac{754^0}{1721} = 166^0\,26'$$

und die Tiefe der Eintauchung:

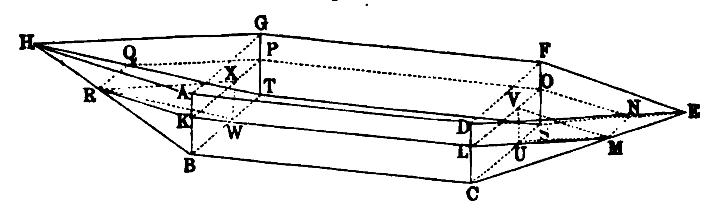
$$y = r\,(1 - \cos.\tfrac{1}{2}\alpha) = 0{,}25\,(1 - \cos.\,83^0\,13') = 0{,}25 \,.\, 0{,}8819 = 0{,}220 \text{ Meter}$$

setzen.

§. 395. Die Bestimmung der Eintauchungstiefe kommt vorzüglich bei **Kähnen** und **Schiffen** vor. Haben diese Fahrzeuge eine gesetzmäßige Form, so läßt sich diese Tiefe mittels geometrischer Formeln berechnen; fehlt aber die gesetzmäßige Form, oder ist das Gesetz der Gestaltung nicht bekannt, oder ist die Form sehr zusammengesetzt, so muß man die Tiefe des Eintauchens durch Experimentiren oder durch Probiren bestimmen.

Ein Beispiel für den ersten Fall gewährt der in Fig. 702 abgebildete,

Fig. 702.



von ebenen Flächen begrenzte Kahn $ACEGH$. Derselbe besteht aus einem Parallelepipede ACF und aus zwei, den Vorder- und Hintertheil

bildenden vierseitigen Pyramiden CFE und BGH, und seine Schwimmebene ist aus einem Parallelogramme $KLOP$ und aus zwei Trapezen $LONM$ und $KPQR$ zusammengesetzt, welche einen Wasserraum abschneiden, der sich in ein Parallelepiped $KCOT$, in zwei dreiseitige Prismen $UVMN$ und $WXRQ$ und in zwei vierseitige Pyramiden CVM und BXR zerlegen läßt. Setzen wir die Länge $AD = BC$ des Mittelstückes gleich l, die Breite $AG = b$ und die Höhe $AB = h$, ferner die Länge von jedem der beiden Schnäbel $= c$ und die Tiefe der Einsenkung unter Wasser, d. i. $BK = CL = y$. Es folgt zunächst der eingetauchte Theil $KCOT$ des Mittelstückes:

$$\overline{BC}\,.\,\overline{CS}\,.\,\overline{CL} = lby.$$

Setzen wir die Breite der Basis der Pyramide CVM, $CU = x$ und die Höhe dieser Pyramide $= z$, so haben wir:

$$\frac{x}{b} = \frac{z}{c} = \frac{y}{h}, \text{ daher:}$$

$$x = \frac{b}{h}\,y \text{ und } z = \frac{c}{h}\,y;$$

es folgt daher der Inhalt der beiden Pyramiden (CVM und BXR) zusammen:

$$2\,.\,{}^1\!/_3\,xyz = {}^2\!/_3\,\frac{bcy^3}{h^2}.$$

Der Querschnitt des dreiseitigen Prismas UVN ist:

$$ {}^1\!/_2\,yz = \frac{cy^2}{2h} \text{ und die Seite } MN = VO:$$

$$b - x = b - \frac{by}{h} = b\left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

daher folgt der Inhalt der beiden Prismen VUN und XWQ zusammen:

$$2\,.\,\frac{cy^2}{2h}\,.\,b\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \frac{bcy^2}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Nunmehr ergiebt sich durch Addition der gefundenen drei Räume das Volumen des verdrängten Wassers:

$$V = lby + {}^2\!/_3\,\frac{bcy^3}{h^2} + \frac{bcy^2}{h} - \frac{bcy^3}{h^2} = \left(l + \frac{cy}{h} - {}^1\!/_3\,\frac{cy^2}{h^2}\right) by.$$

Ist nun das Bruttogewicht des Schiffes gleich G, so hat man zu setzen:

$$\left(l + \frac{cy}{h} - {}^1\!/_3\,\frac{cy^2}{h^2}\right) by\gamma = G \text{ oder:}$$

$$y^3 - 3hy^2 - \frac{3lh^2}{c}\,y + \frac{3h^2G}{bc\gamma} = 0.$$

Durch die Auflösung der letzten cubischen Gleichung bestimmt sich aus dem Bruttogewichte G des Schiffes die Tiefe y der Einsenkung desselben.

Beispiele. 1) Wenn bei einem Schiffe die Länge des Mittelstückes $l = 16$ Meter, die Länge eines jeden Schnabels $c = 5$ Meter, die Breite $b = 4$ Meter und die Tiefe $h = 1,5$ Meter ist, so kann bei einer Einsenkungstiefe $y = 0,8$ Meter die ganze Belastung betragen:

$$G = \left[16 + 5 \cdot \frac{0,8}{1,5} - \frac{1}{3} 5 \cdot \left(\frac{0,8}{1,5}\right)^2\right] 4 \cdot 0,8 \cdot 1000 = 61250 \text{ Kilogramm.}$$

2) Wenn bei dem vorigen Schiffe das Bruttogewicht 30000 Kilogramm beträgt, so hat man für die Senkungstiefe:

$$y^3 - 3 \cdot 1,5\, y^2 - \frac{3 \cdot 16 \cdot 1,5^2}{5}\, y + \frac{3 \cdot 1,5^2\, 30\,000}{4 \cdot 5 \cdot 1000} = 0 \text{ oder}$$

$$y^3 - 4,5\, y^2 - 21,6\, y + 10,125 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$y = \frac{10,125 + y^3 - 4,5\, y^2}{21,6} = 0,469 + 0,0463\, y^3 - 0,2083\, y^2$$

oder annähernd:

$$y = 0,469 + 0,0463 \cdot 0,469^3 - 0,2083 \cdot 0,469^2$$
$$= 0,469 + 0,0048 - 0,0458 = 0,428, \text{ und nun genauer:}$$
$$y = 0,469 + 0,0463 \cdot 0,428^3 - 0,2083 \cdot 0,428^2 = 0,434 \text{ Meter.}$$

Anmerkung. Um das Gewicht der Ladung eines Schiffes anzugeben, versieht man dieses zu beiden Seiten mit einer Scala, der sogenannten Schiffsaiche. Die Eintheilung einer solchen Aiche wird in der Regel empirisch gefunden, indem man untersucht, welche Einsenkungen bestimmten Belastungen entsprechen. Ausführlicheres darüber im dritten Bande.

§. 396. **Stabilität schwimmender Körper.** Das Schwimmen der Körper erfolgt entweder in aufrechter oder in schiefer Stellung, ferner mit oder ohne Stabilität. Aufrecht schwimmt ein Körper, z. B. ein Schiff, wenn wenigstens eine durch die Schwimmaxe gehende Ebene Symmetrieebene des Körpers ist, schief schwimmt derselbe, wenn er durch keine der Ebenen, welche sich durch die Schwimmaxe legen lassen, in zwei symmetrische Theile getheilt wird. Ein Körper schwimmt mit Stabilität, wenn er seinen Gleichgewichtszustand zu behaupten sucht (vergl. §. 145), wenn also mechanische Arbeit aufzuwenden ist, um ihn aus dieser Lage zu bringen, oder wenn er von selbst in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, nachdem man ihn daraus gebracht hat. Ohne Stabilität schwimmt dagegen der Körper, wenn er in eine neue Gleichgewichtslage übergeht, nachdem er, etwa durch Erschütterung oder durch einen Stoß u. s. w., aus der ersten gebracht worden ist.

Wird ein vorher aufrecht schwimmender Körper ABC, Fig. 703, in eine schiefe Lage gebracht, so tritt der Schwerpunkt S des verdrängten Wassers aus der Symmetrieebene EF heraus und nimmt eine Stelle S_1 auf der mehr eingetauchten Hälfte des Schiffsraumes ein. Der in S_1

angreifende Auftrieb $P = V\gamma$ und das im Schwerpunkte C des Schiffes angreifende Gewicht $G = -P$ des Schiffes bilden nun ein Kräftepaar, durch welches (s. §. 95) stets eine Drehung hervorgebracht wird. Um welchen Punkt auch diese Drehung vor sich gehe, immer wird doch C, dem Gewichte G nachgebend, niedergehen, und S_1 oder ein anderer Punkt M der Verticalen $S_1 P$, der Kraft P folgend, aufsteigen, es wird also die Symmetrie- oder Axenebene EF des Schiffes in C nach unten und in M nach oben gezogen, und daher dieselbe sich aufrecht stellen, wenn M, wie in Fig. 703, über C liegt, und sich dagegen noch mehr neigen, wie in Fig. 704,

Fig. 703.

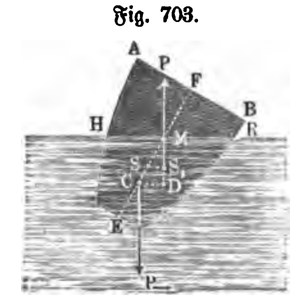
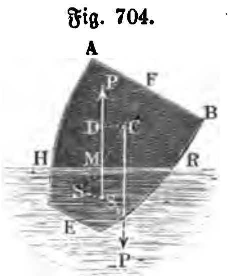


Fig. 704.



wenn sich M unter C befindet. Hiernach hängt denn die Stabilität eines schwimmenden Körpers oder Schiffes von dem Punkte M ab, in welchem die Verticale durch den Schwerpunkt S_1 des verdrängten Wassers die Symmetrieebene schneidet. Man nennt diesen Punkt das Metacentrum. Ein Schiff oder ein anderer Körper schwimmt also hiernach mit Stabilität, wenn sein Metacentrum über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, und ohne solche, wenn es darunter liegt; er ist endlich im indifferenten Gleichgewichte, wenn beide Punkte zusammenfallen.

Der Horizontalabstand CD des Metacentrums M von dem Schwerpunkte C des Schiffes ist der Hebelarm des von P und $G = -P$ gebildeten Kräftepaares, und daher das Moment des letzteren oder das Maß der Stabilität gleich $P \,.\, \overline{CD}$. Bezeichnen wir die Entfernung CM durch c und den Drehungswinkel SMS_1 des Schiffes oder seiner Axenebene) urch φ, so erhalten wir für das Maß der Stabilität des Schiffes:

$$S = P c \sin.\varphi;$$

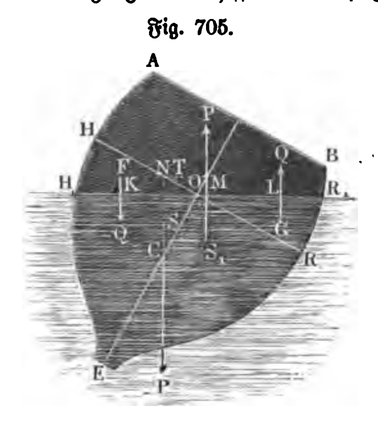
es ist also hiernach dieses um so größer, je größer das Gewicht, je größer die Entfernung des Metacentrums von dem Schwerpunkte des Schiffes und je größer der Neigungswinkel des letzteren ist.

Bestimmung des Stabilitätsmomentes. Nach der letzten Formel §. 397.

$$S = P c \sin.\varphi$$

hängt die Stabilität des Schiffes vorzüglich von der Entfernung des Metacentrums vom Schwerpunkte des Schiffes ab, es ist daher von Wichtigkeit, sich eine Formel zur Bestimmung dieser Entfernung zu verschaffen. Durch den Uebergang des Schiffes ABE, Fig. 705, aus der aufrechten in die schiefe Lage rückt der Schwerpunkt S nach S_1, es geht der keilförmige Raum HOH_1 aus dem Wasser hervor und zieht sich der keilförmige Raum ROR_1 unter das Wasser hinab. Dadurch wird der Auftrieb auf der einen Seite um eine im Schwerpunkte F des Raumes HOH_1 angreifende Kraft Q vermindert und auf der anderen Seite um eine im Schwerpunkte G des Raumes ROR_1 angreifende gleiche Kraft Q vergrößert. Hiernach ersetzt also der in S_1 angreifende Auftrieb P den anfänglich in S angreifenden Auftrieb sammt dem Kräftepaare $(Q, -Q)$, oder, was auf Eins hinauskommt, eine in S_1 angreifende Gegenkraft $-P$ hält der in S angreifenden Kraft P sammt Kräftepaar $(Q, -Q)$ das Gleichgewicht, oder einfacher, ein Kräftepaar $(P, -P)$ mit den Angriffspunkten S und S_1 ist mit dem Kräftepaare $(Q, -Q)$ im Gleichgewichte. Ist nun das Querprofil $HER = H_1ER_1$ des im Wasser befindlichen Schiffstheiles gleich F und das Querprofil $HOH_1 = ROR_1$ des Raumes, um welchen sich das Schiff auf der einen Seite herausgezogen und auf der anderen tiefer eingetaucht hat, gleich F_1, ist ferner der Horizontalabstand KL der Schwerpunkte dieser Räume gleich a und der Horizontalabstand MT der Schwerpunkte S und S_1 oder die Horizontalprojection des Weges SS_1, welchen S beim Kippen durchläuft, gleich s, so hat man in Folge des Gleichgewichtszustandes beider Kräftepaare:

Fig. 705.



$$Fs = F_1 a, \text{ daher } s = \frac{F_1}{F} a \text{ und:}$$

$$\overline{SM} = \frac{MT}{sin.\,\varphi} = \frac{s}{sin.\,\varphi} = \frac{F_1 a}{F\, sin.\,\varphi}.$$

Die als Factor in das Maß der Stabilität eintretende Linie $CM = c$ ist $= CS + SM$; bezeichnen wir daher noch den Abstand CS des Schwerpunktes C des Schiffes von dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers durch e, so erhalten wir das Stabilitätsmaß:

$$S = Pc\, sin.\,\varphi = P\left(\frac{F_1 a}{F} + e\, sin.\,\varphi\right).$$

Ist der Drehungswinkel klein, so lassen sich die Querschnitte HOH_1 und ROR_1 als gleichschenkelige Dreiecke ansehen; bezeichnet man die Breite $HR = H_1R_1$ des Schiffes an der Eintauchungsstelle durch b, so kann man

$F_1 = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} b . \frac{1}{2} b \varphi = \frac{1}{8} b^2 \varphi$ und $KL = a = 2 . \frac{2}{3} \frac{b}{2} = \frac{2}{3} b$,

sowie $sin. \varphi = \varphi$ setzen, weshalb die Stabilität

$$S = P \left(\frac{1}{12} \frac{b^3 \varphi}{F} + e\varphi\right) = \left(\frac{b^3}{12 F} + e\right) P\varphi \text{ folgt.}$$

Fällt der Schwerpunkt C des Schiffes mit dem Schwerpunkte S des verdrängten Wassers zusammen, so hat man $e = 0$, daher:

$$S = \frac{b^3}{12 F} . P\varphi,$$

und liegt der Schwerpunkt des Schiffes über dem des verdrängten Wassers, so ist e negativ, daher:

$$S = \left(\frac{b^3}{12 F} - e\right) P\varphi.$$

Auch folgt, daß die Stabilität eines Schiffes in Null übergeht, wenn e negativ und zugleich $e = \frac{b^3}{12 F}$ ist.

Man sieht aus dem gewonnenen Ergebnisse, daß die Stabilität um so größer ausfällt, je breiter das Schiff ist und je tiefer der Schwerpunkt desselben liegt.

Beispiel. Bei einem Parallelepipede AD, Fig. 706, von der Breite $AB = b$, Höhe $AE = h$ und Einsenkungstiefe $EH = y$ ist $F = by$ und $e = -\frac{h-y}{2}$, daher das Maß der Stabilität:

$$S = P\varphi\left(\frac{b^3}{12 by} - \frac{h}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

oder, wenn die Dichtigkeit der Masse des Parallelepipedes $= \varepsilon$ gesetzt wird:

$$S = P\varphi\left(\frac{b^2}{12 \varepsilon h} - \frac{h}{2}(1 - \varepsilon)\right).$$

Fig. 706.

A H B C R E D

Hiernach hört die Stabilität auf, wenn $b^2 = 6 h^2 \varepsilon (1 - \varepsilon)$, d. i. wenn $\frac{b}{h} = \sqrt{6 \varepsilon (1 - \varepsilon)}$ wird.

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\frac{b}{h} = \sqrt{\frac{6}{2} . \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,225;$$

wenn also die Breite noch nicht 1,225 der Höhe ist, so schwimmt das Parallelepiped ohne Stabilität.

§. 398. **Schiefes Schwimmen.** Die Formel

$$S = P\left(\frac{F_1 a}{F} \pm e \sin.\varphi\right)$$

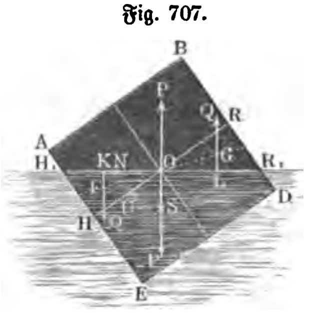
für die Stabilität eines schwimmenden Körpers läßt sich auch dazu anwenden, um die verschiedenen Lagen schwimmender Körper zu finden; denn setzen wir $S =$ Null, so erhalten wir die der Gleichgewichtslage entsprechende Gleichung, deren Auflösung auf die Bestimmung des bezüglichen Neigungswinkels führt. Es ist also die Gleichung

$$\frac{F_1 a}{F} \pm e \sin.\varphi = 0$$

in Hinsicht auf φ aufzulösen.

Für ein Parallelepiped $ABDE$, Fig. 707, ist der Querschnitt $F = HRDE = H_1 R_1 DE = by$, wenn b die Breite $AB = HR$ und y die Senktiefe $EH = DR$ bezeichnet, sowie der Querschnitt

Fig. 707.



$$F_1 = HOH_1 = ROR_1$$

als rechtwinkeliges Dreieck mit der Kathete

$$OH = OR = \tfrac{1}{2} b$$

und der Kathete

$$HH_1 = RR_1 = \tfrac{1}{2} b \tan.\varphi:$$

$$F_1 = \tfrac{1}{8} b^2 \tan.\varphi.$$

Nun steht ferner der Schwerpunkt F von der Basis HR um

$$FU = \tfrac{1}{3} HH_1 = \tfrac{1}{6} b \tan.\varphi$$

und von der Mitte O um

$$OU = \tfrac{2}{3} OH = \tfrac{1}{3} b$$

ab; es folgt daher der Horizontalabstand des Schwerpunktes F von der Mitte O:

$$OK = ON + NK = OU \cos.\varphi + FU \sin.\varphi$$
$$= \tfrac{1}{3} b \cos.\varphi + \tfrac{1}{6} b \tan.\varphi \sin.\varphi$$

und der Arm:

$$a = \overline{KL} = 2\,.\,OK = \tfrac{2}{3} b \cos.\varphi + \tfrac{1}{3} b \frac{\sin.\varphi^2}{\cos.\varphi}.$$

Diesemnach ist die Gleichung für die schiefe Gleichgewichtslage:

$$\frac{\tfrac{1}{8} b^2 \tan.\varphi \left(\tfrac{2}{3} b \cos.\varphi^2 + \tfrac{1}{3} b \sin.\varphi^2\right)}{b y \cos.\varphi} - e \sin.\varphi = 0,$$

oder, $\dfrac{\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \tan.\varphi$ eingeführt:

$$\sin.\varphi \left[\left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{24} \tan.\varphi^2\right) b^2 - ey\right] = 0;$$

welcher Gleichung durch

$$sin. \varphi = 0 \text{ und durch}$$

$$tang. \varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{12 e y}{b^2} - 1}$$

Genüge geleistet wird. Dem durch die erste Gleichung bestimmten Winkel $\varphi = 0$ entspricht das aufrechte, dem zweiten aber das schiefe Schwimmen. Die Möglichkeit des letzteren bedingt, daß $\frac{ey}{b^2} > 1/_{12}$ ausfällt. Ist nun h die Höhe des Parallelepipedes und ε dessen Dichtigkeit, so hat man:

$$y = \varepsilon h \text{ und } e = \frac{h - y}{2} = (1 - \varepsilon)\frac{h}{2},$$

daher folgt:

$$tang. \varphi = \sqrt{2}\sqrt{\frac{6 \varepsilon (1 - \varepsilon) h^2}{b^2} - 1},$$

und es ist die Bedingungsgleichung für das schiefe Schwimmen:

$$\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{6 \varepsilon (1 - \varepsilon)}}.$$

Beispiele. 1) Wenn das schwimmende Parallelepiped eben so hoch als breit ist und die Dichte $\varepsilon = 1/_2$ hat, so ist:

$$tang. \varphi = \sqrt{2}\sqrt{3 \,.\, 1/_2 - 1} = \sqrt{3 - 2} = 1, \text{ daher } \varphi = 45^0.$$

2) Wenn die Höhe $h = 0,9$ der Breite b, die Dichte aber wieder $1/_2$ ist, so hat man

$$tang. \varphi = \sqrt{3 \,.\, 0,81 - 2} = \sqrt{0,43} = 0,6557, \text{ daher } \varphi = 33^0\, 15'.$$

3) Bei der Dichte des Parallelepipeds $\varepsilon = 1/_2$ ist ein schiefes Schwimmen überhaupt nur möglich, so lange $\frac{h}{b} > \sqrt{\frac{1}{3 \,.\, 1/_2}}$ oder $h > 0,816 \,.\, b$ ist. Setzt man $h = 0,816 \,.\, b$, so wird $tang. \varphi = \sqrt{2 \,.\, 0} = 0$; d. h. das Parallelepiped kann nur aufrecht schwimmen. Wenn man durch eine Vierteldrehung b zu h und h zu b macht, so hat man nun $h = \frac{1}{0,816} b = 1,22\, b$, und die Möglichkeit des schiefen Schwimmens ist für diese Lage gegeben.

Specifisches Gewicht. Das Gesetz vom Auftriebe des Wassers läßt sich zur Bestimmung der Dichtigkeit und des specifischen Gewichtes von Körpern benutzen. Nach §. 391 ist der Auftrieb des Wassers gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit; bezeichnet daher V das Volumen des ganz eingetauchten Körpers und γ_1 das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so hat man den Auftrieb $P = V\gamma_1$. Ist ferner γ_2 das specifische Gewicht der Körpermasse, so hat man das Gewicht des Körpers $G = V\gamma_2$, es folgt daher das Verhältniß der specifischen Gewichte: §. 399.

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{G}{P},$$

d. h. **das specifische Gewicht des eingetauchten Körpers verhält sich zum specifischen Gewichte des Fluidums, wie das absolute Gewicht des Körpers zum Auftriebe oder Gewichtsverluste beim Untertauchen.**

Hiernach ist also $\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma_1$ und $\gamma_1 = \frac{P}{G}\gamma_2$. Ebenso hat man, wenn γ das specifische Gewicht des Wassers, ε_1 die Dichte der Flüssigkeit und ε_2 diejenige des Körpers bezeichnet, also $\gamma_1 = \varepsilon_1 \gamma$, sowie $\gamma_2 = \varepsilon_2 \gamma$ gesetzt wird:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P}\varepsilon_1 \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{P}{G}\varepsilon_2.$$

Wenn man also das Gewicht eines Körpers und den Gewichtsverlust desselben beim Untertauchen kennt, so läßt sich aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der Körpermasse, und umgekehrt, aus der Dichtigkeit oder dem specifischen Gewichte der letzteren die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht der ersteren finden.

Ist die Flüssigkeit, worin man den festen Körper abwiegt, Wasser, so hat man $\varepsilon_1 = 1$ und $\gamma_1 = \gamma = 1000$ Kilogramm oder 61,74 Pfund, je nachdem man das Cubikmeter oder den Cubikfuß zur Volumeneinheit annimmt, daher ist für diesen Fall das specifische Gewicht des Körpers:

$$\gamma_2 = \frac{G}{P}\gamma = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}} \text{ mal specifisches Gewicht des Wassers}$$

und die Dichte des Körpers:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{\text{absolutes Gewicht}}{\text{Gewichtsverlust}}.$$

Um den Auftrieb oder Gewichtsverlust zu ermitteln, bedient man sich, wie zur Bestimmung des Gewichtes G, einer gewöhnlichen Wage, nur befindet sich unten an der einen Schale dieser Wage noch ein Häkchen, um den Körper mittels eines Haares, Drahtes oder anderen feinen Fadens daran zu hängen, bevor er in das Wasser, welches in einem untergesetzten Gefäße enthalten ist, eingetaucht wird. Gewöhnlich nennt man eine zu diesem Abwägen unter Wasser eingerichtete Wage eine **hydrostatische Wage**.

Ist der Körper, dessen specifisches Gewicht man ermitteln will, weniger dicht als Wasser, so kann man ihn mit einem anderen schweren Körper mechanisch verbinden, damit die Verbindung im Wasser noch ein Bestreben zum Sinken behält. Verliert dieser schwere Körper im Wasser das Gewicht P_2 und die Verbindung P_1, so ist der Gewichtsverlust des leichteren Körpers:

$$P = P_1 - P_2.$$

Bezeichnet nun wieder G das absolute Gewicht des leichteren Körpers, so hat man dessen Dichtigkeit:

$$\varepsilon_2 = \frac{G}{P} = \frac{G}{P_1 - P_2}.$$

Kennt man die Dichtigkeit ε einer mechanischen Verbindung oder Zusammensetzung zweier Körper, und sind auch die Dichtigkeiten ε_1 und ε_2 der Bestandtheile derselben bekannt, so lassen sich nach dem sogenannten Archimedischen Principe auch aus dem Gewichte G des Ganzen die Gewichte G_1 und G_2 der Bestandtheile berechnen.

Jedenfalls ist $G_1 + G_2 = G$ und auch

$$\text{Volumen } \frac{G_1}{\varepsilon_1 \gamma} + \text{Volumen } \frac{G_2}{\varepsilon_2 \gamma} = \text{Volumen } \frac{G}{\varepsilon \gamma},$$

also:

$$\frac{G_1}{\varepsilon_1} + \frac{G_2}{\varepsilon_2} = \frac{G}{\varepsilon}.$$

Durch Vereinigung beider Gleichungen ergiebt sich nun:

$$G_1 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \text{ und}$$

$$G_2 = G\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) : \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Beispiele. 1) Wenn ein 310 Gramm schweres Stück Kalkstein unter dem Wasser um 121,5 Gramm leichter wird, so ist die Dichtigkeit dieses Körpers:

$$\varepsilon = \frac{310}{121,5} = 2,55.$$

2) Um das specifische Gewicht eines Stückes Eichenholz zu finden, hat man es mit einem Bleidrathe, welcher beim Abwägen im Wasser 10,5 Gramm an Gewicht verlor, umbunden. Wenn nun das Holzstück selbst 426,5 Gramm wog, und die Verbindung unter Wasser 484,5 Gramm leichter war als in der Luft, so ergiebt sich die Dichtigkeit der Holzmasse:

$$\varepsilon = \frac{426,5}{484,5 - 10,5} = \frac{426,5}{474} = 0,9.$$

3) Ein vollkommen mit Quecksilber angefülltes und dicht verschlossenes eisernes Gefäß hatte ein Bruttogewicht von 50 Kilogramm und verlor beim Abwägen unter Wasser 4 Kilogramm an Gewicht; wenn nun die Dichtigkeit des Gußeisens 7,2 und diejenige des Quecksilbers 13,6 ist, so ergiebt sich das Gewicht des leeren Gefäßes:

$$G_1 = 50\left(\frac{4}{50} - \frac{1}{13,6}\right) : \left(\frac{1}{7,2} - \frac{1}{13,6}\right) = 50\,(0,08 - 0,07353) : (0,1388 - 0,0735)$$
$$= 50 \,.\, 0,0991 = 4,95 \text{ Kilogramm}$$

und das Gewicht des eingeschlossenen Quecksilbers:

$$G_2 = 50\,(0,08 - 0,1388) : (0,07353 - 0,1388) = 50 \cdot 0,9009 = 45,05 \text{ Kilogr.}$$

Anmerkung 1. Zur Ausmittelung der specifischen Gewichte von Flüssigkeiten, lockeren Massen u. s. w. reicht auch das bloße Abwägen in freier Luft aus, weil man diesen Körpern durch Einfüllen in Gefäße jedes beliebige Volumen ertheilen kann. Wiegt eine leere Flasche G, wiegt ferner dieselbe mit Wasser angefüllt G_1 und hat dieselbe das Gewicht G_2, wenn sie eine andere Masse enthält, so hat man die Dichtigkeit dieser Masse:

$$\varepsilon = \frac{G_2 - G}{G_1 - G}.$$

Um z. B. das specifische Gewicht von Roggen (in Masse) zu finden, wurde ein Fläschchen mit Roggenkörnern angefüllt und nach starkem Schütteln gewogen. Nach Abzug des Gewichtes der leeren Flasche ergab sich das Gewicht dieser Roggenmasse zu 120,75 und das Gewicht einer gleichen Wassermenge zu 155,65 Gramm; es folgt demnach die Dichtigkeit der Roggenmasse:

$$\varepsilon = \frac{120{,}75}{155{,}65} = 0{,}776.$$

Es wiegt sonach ein Cubikmeter dieses Getreides:

$$\gamma = 0{,}776 . 1000 = 776 \text{ Kilogramm.}$$

Anmerkung 2. Das schon von Archimedes aufgelöste Problem, aus dem specifischen Gewichte einer Zusammensetzung und aus den specifischen Gewichten der Bestandtheile das Verhältniß der Bestandtheile zu finden, gestattet nur eine beschränkte Anwendung auf chemische Verbindungen, Metalllegirungen u. s. w., weil bei solchen meist eine Contraction, zuweilen aber auch eine Ausdehnung der Massen stattfindet, so daß das Volumen der Verbindung nicht mehr gleich ist der Summe der Volumina der Bestandtheile.

§. 400. **Aräometer.** Zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten werden vorzüglich auch die Aräometer oder Senkwagen gebraucht. Diese Instrumente sind hohle, in Beziehung auf eine Axe symmetrisch geformte Körper mit sehr tief liegendem Schwerpunkte, und geben, indem sie in einer Flüssigkeit aufrecht schwimmen, die Dichtigkeit dieser Flüssigkeit an. Man fertigt sie aus Glas, Messingblech u. s. w. an und nennt sie nach ihrem verschiedenen Gebrauche: hydrostatische Senkwagen, Soolwagen, Bierwagen, Branntweinwagen, Alkoholometer u. s. w. Es giebt zwei Arten von Senkwagen, nämlich Gewichtsaräometer und Scalenaräometer. Die ersteren werden auch oft zur Bestimmung der Gewichte und namentlich der specifischen Gewichte von festen Körpern in Anwendung gebracht.

1) Ist V das Volumen des unter Wasser befindlichen Theiles einer bis zu einer gewissen Marke O eingetauchten, übrigens schwimmenden Senkwage ABC, Fig. 708, G das Gewicht der ganzen Wage, P das auf den Teller A aufgelegte Gewicht beim Schwimmen im Wasser, dessen specifisches Gewicht $= \gamma$ sein möge, und P_1 das eben daselbst aufzulegende Gewicht beim Schwimmen in einer anderen Flüssigkeit von dem specifischen Gewichte γ_1, so hat man:

$$V\gamma = P + G \text{ und}$$
$$V\gamma_1 = P_1 + G,$$

daher das Verhältniß der Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten:

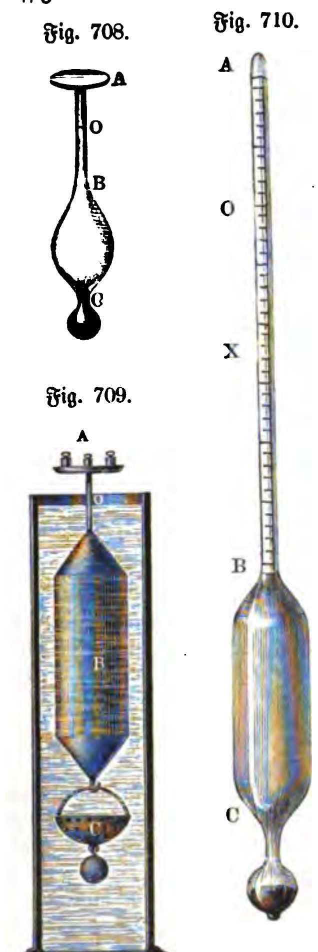


Fig. 708. Fig. 709. Fig. 710.

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{P_1 + G}{P + G}.$$

2) Ist P das Gewicht, welches auf den Teller gelegt werden muß, um die im Wasser schwimmende Senkwage ABC, Fig. 709, bis zu einer Marke O einzusenken, und ist P_1 das Gewicht, welches man mit dem abzuwägenden Körper gleichzeitig auf A zu legen hat, um dieselbe Einsenkung zu erhalten, so hat man das absolute Gewicht dieses Körpers einfach:

$$G_1 = P - P_1.$$

Ist aber die Auflage P_1 um P_2 zu vergrößern, wenn der abzuwägende Körper in das unter Wasser befindliche Schälchen C gelegt wird, um die Senkungstiefe unverändert zu behalten, so ist der Auftrieb $= P_2$ und daher die Dichtigkeit des Körpers:

$$\varepsilon = \frac{G_1}{P_2} = \frac{P - P_1}{P_2}.$$

Die Senkwagen mit unten angehängten Schälchen zur Bestimmung specifischer Gewichte von festen Körpern, wie z. B. von Mineralien, heißen Nicholson'sche Senkwagen.

3) Setzen wir das Gewicht einer Senkwage BC mit Scala AB, Fig. 710, $= G$ und das eingetauchte Volumen, wenn diese Wage im Wasser schwimmt, $= V$, so ist $G = V\gamma$. Steigt diese Wage um die Tiefe $OX = x$ empor, wenn dieselbe in eine schwerere Flüssigkeit eingetaucht wird, so ist bei dem Querschnitte F des Stäbchens das noch eingetauchte Volumen:

$$V - Fx \text{ und daher: } G = (V - Fx)\gamma_1.$$

57*

Beide Formeln durch einander dividirt, geben nun das specifische Gewicht der Flüssigkeit:

$$\gamma_1 = \frac{V}{V - Fx}\gamma = \gamma : \left(1 - \frac{F}{V}x\right) = \frac{\gamma}{1 - \mu x},$$

wenn der constante Quotient $\frac{F}{V}$ durch μ bezeichnet wird.

Ist die Flüssigkeit, worin man das Aräometer eintaucht, leichter als Wasser, so sinkt dasselbe in ihr um die Tiefe x, weshalb dann

$$G = (V + Fx)\gamma \text{ und daher}$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 + \mu x} \text{ zu setzen ist.}$$

Um den Coefficienten $\mu = \frac{F}{V}$ zu finden, wird die Wage durch ein Gewicht P, etwa durch oben (bei A) eingegossenes und den tiefsten Punkt (bei C) einnehmendes Quecksilber so weit beschwert, daß sie, im Wasser schwimmend, um eine bedeutende Länge des zum Anbringen einer Scala dienenden Halses tiefer einsinkt. Setzt man nun $P = Fl\gamma$, wobei l die durch P bewirkte Senkung bedeutet, so erhält man:

$$\mu = \frac{F}{V} = \frac{P}{Vl\gamma} = \frac{P}{Gl}.$$

Beispiele. 1) Wenn bei einem 65 Gramm schweren Gewichtsaräometer vom Teller 13,5 Gramm wegzunehmen sind, damit es beim Schwimmen in Alkohol ebenso tief einsinkt als beim Schwimmen im Wasser, so ist die Dichtigkeit dieses Alkohols

$$\varepsilon = \frac{65 - 13,5}{65} = 1 - 0,208 = 0,792.$$

2) Bei einer Nicholson'schen Wage ist das Normalgewicht 100 Gramm, d. h. man hat 100 Gramm aufzulegen, um das Instrument bis 0 einzusenken; hiervon mußten aber 66,5 Gramm weggenommen werden, als man ein abzuwägendes Stück Messing mit auf den oberen Teller gelegt hatte, und es waren wieder 7,85 Gramm zuzulegen, als dieser Körper in dem unteren Teller lag. Deshalb ist das absolute Gewicht dieses Messingstückes $G_1 = 66,5$ Gramm und die Dichte desselben

$$\varepsilon = \frac{66,5}{7,85} = 8,47.$$

3) Ein 75 Gramm schweres Scalenaräometer steigt, nachdem man seine Füllung um 31 Gramm vermindert hat, um $l = 150$ Millimeter und hat daher den Coefficienten:

$$\mu = \frac{31}{75 \cdot 150} = 0,002756.$$

Nach Ergänzung der Füllung und Wiederherstellung des Gewichtes von 75 Gramm stieg es, in einer Salzsoole schwimmend, um 60 Millimeter, daher ist die Dichte dieser Flüssigkeit

$$1 : (1 - 0{,}002756 \,.\, 60) = 1 : 0{,}835 = 1{,}2.$$

Anmerkung. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört in die Physik, Chemie und Technologie.

Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten. Befinden sich mehrere Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten in einem Gefäße zugleich, ohne daß sie eine chemische Einwirkung auf einander ausüben, so legen sich dieselben in Folge der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theile nach ihren specifischen Gewichten über einander, nämlich die dichteste unten, die weniger dichte darüber und die leichteste oben. Auch sind im Gleichgewichtszustande die Begrenzungsflächen, sowie die freie Oberfläche horizontal; denn so lange die Begrenzungsfläche EF zwischen den Massen M und N, Fig. 711, geneigt ist, so lange stehen auch über einer Horizontalschicht HR verschieden schwere Flüssigkeitssäulen wie GK, $G_1 K_1$ u. s. w.; es kann daher auch der Druck in dieser Schicht nicht überall derselbe sein und folglich auch kein Gleichgewichtszustand eintreten. §. 401.

Fig. 711.

In communicirenden Röhren AB und CD, Fig. 712, ordnen sich die Flüssigkeiten zwar ebenfalls nach ihren Dichtigkeiten über einander, allein ihre Oberflächen AO und DG liegen nicht in einem und demselben Niveau.

Fig. 712.

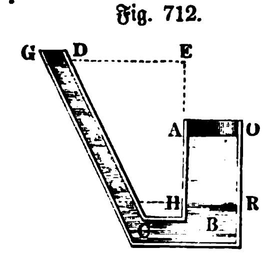
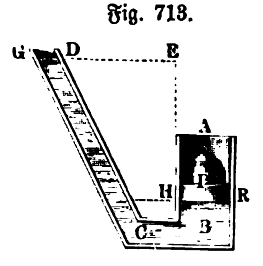


Fig. 713.



Ist F der Inhalt des Querschnittes HR eines Kolbens, Fig. 713, in dem einen Schenkel AB von zwei communicirenden Röhren und h die Druckhöhe oder die Höhe EH des Wasserspiegels in der zweiten Röhre CD über HR, so hat man den Druck gegen die Kolbenfläche:

$$P = Fh\gamma.$$

Ersetzt man dagegen die Kolbenkraft durch eine Flüssigkeitssäule $HAOR$, Fig. 712, von der Höhe $AH = h_1$ und der Dichtigkeit γ_1, so hat man:

$$P = Fh_1\gamma_1;$$

und es giebt nun das Gleichsetzen beider Ausdrücke die Gleichung:

$$h_1 \gamma_1 = h \gamma,$$

oder die Proportion:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Es verhalten sich also in communicirenden Röhren, im Zustande des Gleichgewichtes unter zwei verschiedenen Flüssigkeiten, die Druckhöhen oder die Höhen der Flüssigkeitssäulen, von der gemeinschaftlichen Berührungsebene aus gemessen, umgekehrt wie die Dichtigkeiten oder specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten.

Da das Quecksilber ungefähr 13,6 mal so schwer ist als Wasser, so hält hiernach in communicirenden Röhren eine Quecksilbersäule einer 13,6 mal so hohen Wassersäule das Gleichgewicht.

Drittes Capitel.

Von den Molekularwirkungen des Wassers.

§. 402. **Molekularkräfte.** Die Cohäsion des Wassers ist, obgleich sehr klein, doch nicht Null. Die Theile oder Moleküle hängen aber nicht allein unter einander, sondern auch mit anderen Körpern, z. B. mit den Gefäßwänden, zusammen, so daß ebenfalls eine Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang, den man Adhäsion des Wassers nennt, aufzuheben. Ein an einem festen Körper hängender Wassertropfen weist die Existenz der Cohäsion und Adhäsion des Wassers zugleich nach. Ohne die Cohäsion könnte das Wasser keinen Tropfen bilden, und ohne die Adhäsion könnte es an dem festen Körper nicht hängen bleiben; es wird hier die Schwerkraft nicht allein von der Cohäsion, sondern auch von der Adhäsion des Wassers überwunden. Die Wirkungen, welche aus der Vereinigung der Cohäsions- und Adhäsionskräfte hervorgehen, bezeichnet man zur Unterscheidung von den Wirkungen der Trägheit, der Schwerkraft u. s. w. mit dem Namen: die Molekularwirkungen. Die Capillarität, d. h. das Heben oder Senken des Wasser- oder Quecksilberspiegels in engen Röhren oder zwischen sehr nahe stehenden Wänden, ist ein vorzüglicher Fall der Molekularwirkung.

Adhäsionsplatten. Man hat die Cohäsion und Adhäsion des Wassers §. 403.
durch sogenannte Adhäsionsplatten zu bestimmen gesucht. Man hängt zu diesem Zwecke eine ebene Platte statt einer Wagschale an das Ende eines Wagbalkens, bringt die Wage durch ein Tarirgewicht zum Einspielen und nähert das Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit der Platte, bis ihre ebene Grundfläche mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung kommt. Nun vergrößert man durch allmäliges Zulegen das Gewicht der Wagschale am anderen Ende des Wagbalkens, bis die Platte vom Wasserspiegel abgerissen wird. Die Ergebnisse solcher Versuche sind besonders davon abhängig, ob die Berührungsfläche der Platte von dem Wasser benetzt wird oder nicht. Im ersteren Falle bleibt stets nach der Berührung eine dünne Wasserschicht an der Platte hängen, man hat daher beim Abreißen derselben vom Wasser nicht die Adhäsion des Wassers an der Platte, sondern die Cohäsion des Wassers überwunden. Deshalb hängt auch die Kraft zum Abreißen verschiedener Platten vom Wasserspiegel gar nicht von der materiellen Beschaffenheit der Platten ab. Andere Flüssigkeiten als Wasser erfordern dagegen auch andere Kräfte an den Adhäsionsplatten. Du Buat fand, daß die Adhäsion zwischen dem Wasser und einem überzinnten Eisenbleche auf einen Quadratzoll 65 bis 70 Gran beträgt. Dies giebt auf 1 Quadratmeter ungefähr eine Kraft von 5 Kilogramm, und auf 1 Quadratfuß eine Kraft von 1,05 Pfund. Hiervon nur wenig abweichende Werthe fand Achard für Scheiben aus Blei, Eisen, Kupfer, Messing, Zinn und Zink, ferner Gay-Lussac an einer Glasscheibe und Huth an verschiedenen Holztafeln.

Wenn dagegen die Fläche der Scheibe von der Oberfläche des Wassers nicht benetzt wird, so stellen sich ganz andere Ergebnisse heraus, weil dann nicht die Cohäsion des Wassers an sich, sondern die Adhäsion desselben an der Platte überwunden wird. Es scheint, als wenn in diesem Falle die Zeit der Berührung einen großen Einfluß auf die Kraft zum Losreißen der Scheibe ausübe. Gay-Lussac fand z. B. für eine Glasplatte von 120 Millimeter Durchmesser, um sie von der Oberfläche des Quecksilbers loszureißen, 150 bis 300 Gramm Kraft nöthig, je nachdem die Zeit der Berührung eine kurze oder eine längere war.

Anmerkung. In Frankenheim's Lehre der Cohäsion werden die Cohäsionserscheinungen, wie sie z. B. das Abziehen benetzter Platten von der Oberfläche des Wassers darbietet, Synaphie, und dagegen die Adhäsionserscheinungen, wie sie z. B. bei der Trennung unbenetzter Platten von der Oberfläche einer Flüssigkeit vorkommen, Prosaphie genannt.

Adhäsion an Seitenwänden. Wenn ein Wassertropfen auf der §. 404.
Oberfläche eines anderen Körpers zerfließt, und daher diese benetzt, so ist die Adhäsion überwiegend, bleibt dagegen der Wassertropfen in seiner kugeligen

Form auf der Fläche eines festen oder flüssigen Körpers liegen, ohne dieselbe zu benetzen, so herrscht die Cohäsion des Wassers vor.

Ein Zusammenwirken beider Kräfte macht sich besonders an der Oberfläche einer Flüssigkeit in der Nähe der Gefäßwand bemerklich; es steigt daselbst das Wasser in die Höhe und bildet eine concave Oberfläche, wenn die Cohäsion des Wassers von der Abhäsion übertroffen und daher die Gefäßwand benetzt wird; es krümmt sich hingegen der Wasserspiegel in der Nähe der Gefäßwand abwärts und bildet daselbst eine convexe Fläche, wenn keine Benetzung eintritt und daher die Cohäsion überwiegend ist.

Diese Erscheinungen lassen sich sehr leicht auf folgende Weise erklären.

Ein Element E in der Oberfläche HR des Wassers (Fig. 714) wird von seiner Umgebung nach allen Richtungen abwärts gezogen, und es resultirt aus allen diesen Anziehungen eine einzige, vertical abwärts wirkende Kraft A. Hingegen ein Element E an der verticalen Gefäßwand BE, Fig. 715,

Fig. 714.

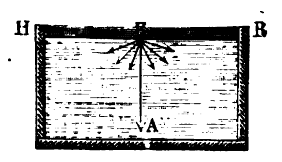
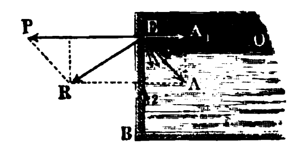
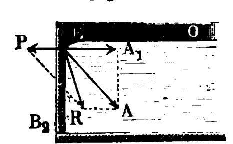


Fig. 715.



wird von dieser mit einer Horizontalkraft P und von dem den Quadranten EBO einnehmenden Wasser mit einer schräg abwärts wirkenden Mittelkraft A angezogen, so daß eine Mittelkraft R resultirt, gegen deren Richtung sich (s. §. 379) der Wasserspiegel in E rechtwinkelig stellt. Je nachdem nun die Anziehungskraft P der Gefäßwand größer oder kleiner ist als die horizontale Componente A_1 der mittleren Cohäsionskraft A des Wassers, nimmt die Mittelkraft R entweder eine Richtung von innen nach außen, oder eine solche von außen nach innen an. Im ersteren Falle (Fig. 715) zieht sich der Wasserspiegel bei E an der Wand in die Höhe, im zweiten Falle hingegen senkt sich, wie Fig. 716 vor Augen führt, der Wasserspiegel an der Gefäßwand BE herab.

Fig. 716.



Diese Verhältnisse gestalten sich noch anders, wenn das Wasser bis an den Rand des Gefäßes reicht, weil hier die Anziehungskraft der Gefäßwand eine andere Richtung annimmt.

Es sei z. B. das Gefäß BCD, Fig. 717, so weit mit Wasser gefüllt, daß der Wasserspiegel CEO gerade den Rand C des Gefäßes erreicht. Füllt man den Raum $CEOD$ durch langsamen Zufluß mit einer neuen Wassermenge an, so tritt deren Anziehung auf die an C haftenden Theilchen zu der vor-

herigen Cohäsionskraft A der Wassermasse $BCEO$ hinzu, und es wird hierdurch insbesondere die horizontale Componente A_1 vergrößert, so daß sie die Adhäsionskraft P erreicht und übertrifft. In Folge dessen ändert sich natürlich auch die Gestalt des Wasserspiegels bei E unaufhörlich, wobei die Concavität desselben allmälig in Convexität, und die Depression desselben unter dem Gefäßrande in eine Elevation übergeht, welche letztere eine gewisse Größe erreichen muß, bevor der Abfluß des Wassers über dem Gefäßrande erfolgt.

Fig. 717.

Spannung des Wasserspiegels. Da jedes Theilchen in der Oberfläche HR, Fig. 714, einer Flüssigkeit von der darunter befindlichen Masse mit einer Kraft A abwärts gezogen wird, so läßt sich annehmen, daß dadurch an der ganzen Oberfläche eine Verdichtung und ein Zusammenhang der Flüssigkeitstheile unter einander entsteht, und daß daher eine gewisse Kraft nöthig ist, um diesen Zusammenhang aufzuheben oder die Oberfläche der Flüssigkeit zu zerreißen. Dieses Zusammenhängen der Oberflächentheile einer Flüssigkeit macht sich nicht allein beim Eintauchen eines fremden Körpers in die Flüssigkeit bemerklich, sondern tritt überhaupt dann hervor, wenn die Oberfläche der Flüssigkeit eine Krümmung annimmt, wie z. B. in der Nähe der Gefäßwand. Wenn man mit Young annimmt, daß die Spannung oder Cohäsion der Oberfläche einer Flüssigkeit an allen Stellen eine und dieselbe ist, so lassen sich daraus, wie der Herr Geheime Oberbaurath Hagen nachgewiesen hat, sämmtliche mit der Erfahrung im Einklange stehenden Gesetze der Capillarität ableiten. §. 405.

Fig. 718.

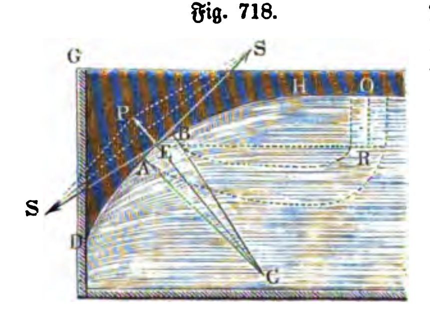
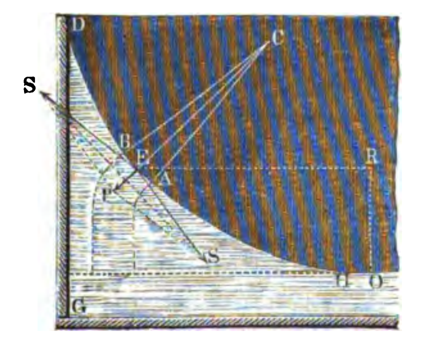


Fig. 719.



In der Nähe einer ebenen Wand DG, Fig. 718 und 719, bildet die Oberfläche einer Flüssigkeit eine entweder nach unten oder nach oben gebogene cylindrische Fläche DAH. Ist P die Normalkraft auf ein Element AEB

dieser Fläche, von der Länge $AB = \sigma$ und der Breite gleich Eins, S die Spannung in diesem Elemente, bezogen auf einen Streifen von der Breite Eins, und r der Krümmungshalbmesser $CA = CB$ desselben, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke EPS und ABC:

Fig. 720.

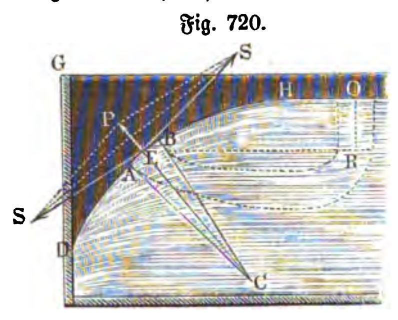
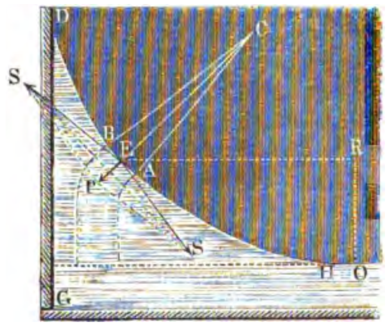


Fig. 721.



$$\frac{P}{S} = \frac{AB}{CA} = \frac{\sigma}{r}$$

und daher die Normal- oder Biegungskraft:

$$P = \frac{\sigma}{r} S.$$

Steht nun das Flächenelement AEB um die senkrechte Tiefe $OR = y$ unter oder über dem freien, von der Seitenwand DG nicht afficirten Wasserspiegel, und bedeutet γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist nach dem (aus §. 382) bekannten hydrostatischen Gesetze der Druck des Wassers auf das Element $\overline{AB} = \sigma$:

$$P = \sigma y \gamma,$$

und daher zu setzen:

$$\sigma y \gamma = \frac{\sigma}{r} S \text{ und}$$

$$y = \frac{S}{r\gamma}.$$

Es ist also hiernach sowohl die Depression, als auch die Elevation eines Elementes der Oberfläche einer Flüssigkeit in Rücksicht auf den freien oder unafficirten Theil dieser Fläche dem Krümmungshalbmesser derselben umgekehrt proportional.

§. 406. In der Nähe einer gekrümmten Seitenwand, z. B. in einem cylindrischen Glase, bildet der Wasserspiegel eine doppelt gekrümmte Fläche. Es sei $FGHK$, Fig. 722, ein sehr kleines, rectanguläres Element der doppelt gekrümmten Fläche von der Länge $FG = \sigma_1$ und der Breite $GH = \sigma_2$. OE sei die Normale zur Fläche im Punkte O und man denke durch O die beiden zu einander senkrechten Schnittebenen EBA und ECD gelegt, welche den größten, resp. kleinsten Krümmungshalbmesser der Fläche in sich enthalten. Sei r_1 der größte in EBA liegende und r_2 der kleinste in ECD enthaltene Krümmungshalbmesser. Bezeichnet wieder S die überall

gleiche Spannung für die Breite gleich Eins, so erhält man in der Ebene *EBA* die Spannungen:

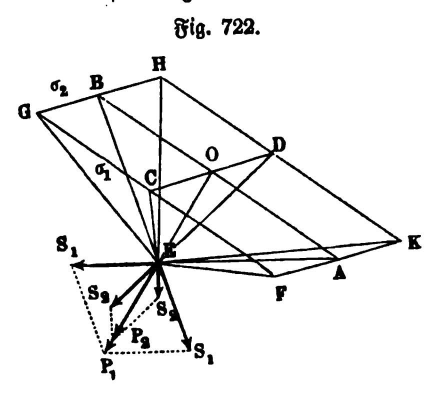


Fig. 722.

$S_1 = GH \,.\, S = \sigma_2 S$, deren Mittelkraft nach dem vorigen Paragraphen sich zu

$$P_1 = \frac{\sigma_1}{r_1} S_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{r_1} S$$

bestimmt. Ebenso berechnen sich die Spannungen S_2 in der Ebene *ECD* zu:

$$S_2 = FG \,.\, S = \sigma_1 S,$$

und deren Mittelkraft:

$$P_2 = \frac{\sigma_2}{r_2} S_2 = \frac{\sigma_2 \sigma_1}{r_2} S.$$

Diese beiden in die Normale *OE* fallenden Mittelkräfte haben eine Resultirende:

$$P = P_1 + P_2 = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

welche der unter dem Flächenelemente *FGHK* hängenden, resp. dagegen drückenden Wassersäule das Gleichgewicht hält. Bezeichnet wieder y die Höhe des betrachteten Elementes über oder unter dem allgemeinen Wasserspiegel, so ist der auf das Element $FGHK = \sigma_1 \sigma_2$ ausgeübte Normaldruck:

$$\sigma_1 \sigma_2 y \gamma.$$

Man hat daher:

$$P = S \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \sigma_1 \sigma_2 y \gamma, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{S}{\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \text{ folgt.}$$

Es ist also bei der cylindrischen Wand die Erhebung (Senkung) der Oberfläche des Wassers über (unter) dem allgemeinen Wasserspiegel an jeder Stelle der Summe von den umgekehrten Maximal- und Minimalkrümmungshalbmessern *) proportional. Diese Formel enthält auch die des vorigen

*) Man würde zu demselben Resultate gelangen, wenn die beiden durch die Normale *OE* gelegten Schnittebenen *EBA* und *ECD* auch nicht nach dem größten und kleinsten Krümmungshalbmesser, sondern beliebig, wenn nur zu einander rechtwinkelig angenommen würden. Denn wenn die diesen Normalschnitten zugehörigen Krümmungshalbmesser allgemein mit ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet werden, so lehrt die analytische Geometrie, daß: $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = Const.$; d. h. daß die Summe der reciproken Werthe der Krümmungshalbmesser von jeden zwei zu einander winkelrechten Normalschnitten für denselben Punkt einer Fläche constant ist.

Paragraphen in sich, denn wenn der Normalschnitt ECD gerade ist, so hat man:

$$r_2 = \infty, \text{ daher } \frac{1}{r_2} = 0 \text{ und:}$$

$$y = \frac{S}{\gamma}\frac{1}{r_1}.$$

§. 407. **Krumme Fläche des Wasserspiegels.** Die Curve, welche der verticale Durchschnitt des Wasserspiegels in der Nähe einer ebenen Wand bildet, läßt sich, nach Hagen wie folgt, finden. Es sei AR, Fig. 723, die Oberfläche des von der verticalen Wand BK angezogenen Wassers, HR der allgemeine Wasserspiegel, ferner der Durchschnitt H dieser Fläche mit der Gefäßwand der Coordinatenanfangspunkt. Man setze die Coordinaten eines Punktes O in der Oberfläche AOR, $HM = x$ und $MO = y$, ferner den Bogen $AO = s$ und den Tangentenwinkel $OTM = \alpha$, sowie die Elemente OQ, QP und OP resp.

Fig. 723.

$$\partial x, \partial y \text{ und } \partial s.$$

Da $y = \frac{S}{r\gamma}$ und nach §. 33 der analytischen Hülfslehren

$$r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}, \text{ sowie } \partial y = -\partial s \sin.\alpha \text{ ist, so hat man:}$$

$$y = -\frac{S\partial\alpha}{\gamma\partial s} = \frac{S \sin.\alpha\,.\,\partial\alpha}{\gamma\partial y} \text{ oder:}$$

$$y\partial y = \frac{S}{\gamma}\sin.\alpha\,.\,\partial\alpha.$$

Hieraus giebt die Integration:

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \frac{S}{\gamma}\int \sin.\alpha\,.\,\partial\alpha = Con. - \frac{S}{\gamma}\cos.\alpha.$$

Da für den Punkt R, α und y zugleich Null sind, ist

$$0 = Con. - \frac{S}{\gamma}\cos. 0, \text{ daher: } Con. = \frac{S}{\gamma} \text{ und:}$$

$$y^2 = \frac{2S}{\gamma}(1 - \cos.\alpha) = \frac{4S}{\gamma}\frac{(1-\cos.\alpha)}{2} = \frac{4S}{\gamma}(\sin.\tfrac{1}{2}\alpha)^2,$$

so daß:

$$y = 2 \sqrt{\frac{S}{\gamma}} \cdot sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \text{ folgt.}$$

Für $\alpha^0 = 90^0$ hat man $sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha = sin. \, 45^0 = \sqrt{{}^1\!/_2}$; daher ist die größte Erhebung der Oberfläche des Wassers unmittelbar an der Seitenwand,

$$h = 2 \sqrt{\frac{S}{\gamma}} \, . \, \sqrt{{}^1\!/_2} = \sqrt{\frac{2\,S}{\gamma}}, \text{ also umgekehrt:}$$

$$\frac{S}{\gamma} = {}^1\!/_2 \, h^2 \text{ und:}$$

1) $y = h \sqrt{2} \, . \, sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha.$

Durch Differenziren dieses Ausdruckes bekommt man:

$$\partial y = {}^1\!/_2 \, h \sqrt{2} \, cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \, . \, \partial \alpha = h \sqrt{{}^1\!/_2} \, cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \, . \, \partial \alpha,$$

und da auch $\partial y = - \partial x \, . \, tang. \, \alpha$ ist, so folgt:

$$\partial x = - h \sqrt{{}^1\!/_2} \cdot \frac{cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha}{tang. \, \alpha} \partial \alpha = - h \sqrt{{}^1\!/_2} \cdot \frac{cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \, cos. \, \alpha}{sin. \, \alpha} \partial \alpha,$$

$$= - h \sqrt{{}^1\!/_2} \cdot \frac{cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \, [(cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha)^2 - (sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha)^2]}{2 \, sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \, . \, cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha} \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{{}^1\!/_2} \cdot \frac{1 - 2 \, (sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha)^2}{2 \, sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha} \partial \alpha$$

$$= - h \sqrt{{}^1\!/_2} \cdot \left(\frac{{}^1\!/_2}{sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha} - sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \right) \partial \alpha.$$

Nun ist aber:

$$\int sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \, . \, \partial \alpha = - 2 \, cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha \text{ und:}$$

$$\int \frac{\partial \alpha}{sin. \, {}^1\!/_2 \, \alpha} = 2 \, Log. \, nat. \, tang. \, {}^1\!/_4 \, \alpha$$

(s. analyt. Hülfslehren §. 26);

daher hat man:

$$x = - h \sqrt{{}^1\!/_2} \, (Log. nat. tang. \, {}^1\!/_4 \, \alpha + 2 \, cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha) + Con.$$

Da für $x = 0$, $\alpha = 90^0$, $tang. \, {}^1\!/_4 \, \alpha = tang. \, 22^1\!/_2{}^0 = \sqrt{2} - 1$ und $cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha = \sqrt{{}^1\!/_2}$ ist, so folgt:

$$Con. = h \sqrt{{}^1\!/_2} \, [Log. nat. \, (\sqrt{2} - 1) + 2 \sqrt{{}^1\!/_2}] \text{ und:}$$

2) $x = h \sqrt{{}^1\!/_2} \left[Log. \, nat. \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{tang. \, {}^1\!/_4 \, \alpha} \right) + 2 \, (\sqrt{{}^1\!/_2} - cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha) \right]$

$$= h \, [1 - \sqrt{2} \, cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha - \sqrt{{}^1\!/_2} \, Log. nat. (\sqrt{2} + 1) \, tang. \, {}^1\!/_4 \, \alpha].$$

Für $\alpha = 0$ hat man:

$$cos. \, {}^1\!/_2 \, \alpha = 1 \text{ und } Log. nat. tang. \, {}^1\!/_4 \, \alpha = - \infty,$$

daher:

$$x = +\infty;$$

es ist also *HR* die Asymptote, welcher sich der Durchschnitt *AOR* der Oberfläche des Wassers ohne Ende nähert.

Anmerkung. Wenn man die Formel (1) umkehrt, also

$$\sin. \tfrac{1}{2}\, \alpha = \frac{y}{h} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

setzt, so kann man für jeden beliebigen Werth von y erst α und hieraus wieder mittelst (2) den entsprechenden Werth von x berechnen.

Die Messungen, welche Hagen hierüber angestellt hat, weisen eine sehr gute Uebereinstimmung dieser Theorie mit der Erfahrung nach. Dieselben sind mittelst einer matt geschliffenen Messingtafel an Brunnenwasser angestellt worden und haben auf folgende Ergebnisse geführt:

y in Lin., gemessen	1,37	0,70	0,49	0,34	0,24	0,18	0,12	0,07	0,04	0,016
x „ gemessen	0,00	0,31	0,63	0,94	1,26	1,57	1,88	2,50	3,13	3,74
x „ berechnet	0,00	0,33	0,64	0,96	1,28	1,56	1,95	2,47	3,01	3,90

Diese Zahlenwerthe beziehen sich auf Pariser Linien. Aus $h = 1{,}37$ Linien berechnet sich $\frac{S}{\gamma} = 0{,}94$, also, da eine Cubiklinie Wasser 0,01148 Gramm wiegt:

$$S = 0{,}94 \,.\, 0{,}01148 = 0{,}0108 \text{ Gramm.}$$

Da ferner 1 Par. Linie gleich 2,255 Millimeter ist, so hat man für Millimeter:

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{1}{2}\, 2{,}255^2 \,.\, 1{,}37^2 = 4{,}7823 \text{ und } S = 0{,}0048 \text{ Gramm}$$

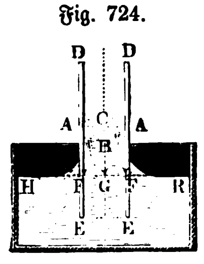
als die Spannung eines Streifens Oberfläche von 1 Millimeter Breite. Der kleinste Krümmungshalbmesser folgt zu

$$r = 0{,}68 \text{ Linien} = 1{,}53 \text{ Millimeter.}$$

Tafeln von Buchsbaum, Thonschiefer und Glas gaben dieselben Resultate.

§. 408. **Paralleltafeln.** Zwischen zwei sehr nahe gestellten Tafeln *DE*, *DE*, Fig. 724, erhebt sich das Wasser nicht allein an den Rändern, sondern auch in der Mitte, und es bildet die Oberfläche desselben nahe den halben Mantel eines elliptischen Cylinders. Die eine Halbaxe des elliptischen Durchschnittes ist der halben Weite $CA = a$ und die andere Halbaxe $CB = b$ der Differenz $AF - BG = h_2 - h_1$ zwischen der größten und kleinsten Erhebung (h_2 und h_1) der elliptischen Oberfläche *ABA* über dem allgemeinen Wasserspiegel gleich. Nach dem Ingenieur S. 171 ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse in *A*:

Fig. 724.



$$r_1 = \frac{b^2}{a} = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}$$ und der in B:

$$r_2 = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{(h_2 - h_1)},$$

daher hat man nach §. 405 die Erhebung der Oberfläche des Wassers in A:

$$h_2 = \frac{S}{r_1 \gamma} = \frac{a\,S}{(h_2 - h_1)^2 \gamma}$$ und in B:

$$h_1 = \frac{S}{r_2 \gamma} = \frac{(h_2 - h_1)\,S}{a^2 \gamma}.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{h_2 - h_1}{a^2}\right)$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{1}{a^2}\right);$$

daher folgt:

$$1)\quad h_2 - h_1 = a\sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}},$$

$$2)\quad h_2 = \frac{1}{a}\sqrt[3]{\frac{S}{\gamma}\left(\frac{S}{\gamma} + a^2\right)^2},$$

$$3)\quad h_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}\sqrt[3]{\frac{S}{S + a^2\gamma}}$$

und endlich das Verhältniß:

$$n = \frac{h_2 - h_1}{h_1} = \frac{a^2\gamma}{S} = a^2 : \frac{S}{\gamma}.$$

Ist a sehr klein, so kann man

$$h_2 = h_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}$$

setzen, dann wächst also die Erhebung der Oberfläche des Wassers umgekehrt wie der Abstand der Tafeln von einander.

Genauer ist aber

$$h_2 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}\left(1 + \tfrac{2}{3}\,\frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} + \tfrac{2}{3}\,a$$ und

$$h_1 = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma}\left(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{a^2\gamma}{S}\right) = \frac{1}{a}\cdot\frac{S}{\gamma} - \tfrac{1}{3}\,a.$$

Umgekehrt folgt hiernach:

$$\frac{S}{\gamma} = a h_1 + \frac{a^2}{3}.$$

Diese Formeln stimmen, wenn der Abstand der Tafeln sehr klein, namentlich $\frac{a}{h_1}$ noch nicht $1/2$ ist, sehr gut mit den Beobachtungen überein.

Hagen fand bei Versuchen mit zwei parallelen Plantafeln in Brunnenwasser im Mittel durch Beobachtungen:

$h_1 = 1{,}55$, $h_2 = 2{,}09$ und $h = 1{,}38$ Pariser Linien

und durch Rechnung:

$\frac{S}{\gamma} = 1{,}04$, $h_2 = 2{,}12$ und $h = 1{,}44$ Pariser Linien.

Neuere Versuche (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 77) gaben für

$a = 0{,}360;\ 0{,}5875;\ 0{,}7575$ Linien,

$h_1 = 2{,}562;\ 1{,}429;\ 1{,}068$ „ und

$\frac{S}{\gamma} = 0{,}949;\ 0{,}907;\ 0{,}917$ „

also im Mittel

für Pariser Maß: $\frac{S}{\gamma} = 0{,}9243$ und $S = 0{,}0106$ Gramm,

für Metermaß: $\frac{S}{\gamma} = 4{,}702$ und $S = 0{,}0047$ Gramm.

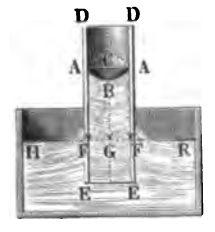
(Vergl. den vorigen Paragraphen.)

§. 409. **Haarröhrchen.** Die Erhebung der Oberfläche des Wassers in senkrechten engen Röhren, oder sogenannten Haarröhrchen läßt sich bei Zugrundelegung der Formel

$$y = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

des §. 406 leicht finden, wenn man annimmt, daß die Oberfläche (der Meniscus) ein halbes Sphäroid ABA, Fig. 725, bilde, dessen kreisförmige Basis AA mit dem Querschnitte der Röhre zusammenfällt. Behalten wir die Bezeichnung des vorigen Paragraphen bei, setzen wir also wieder die halbe Röhrenweite $CA = a$ und die Minimal- und Maximalerhebung BG und AF des Wassers in der Röhre über dem allgemeinen Wasserspiegel HR gleich h_1 und h_2, so haben wir in

Fig. 725.



$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, $r_1 = a$ und $r_2 = \frac{(h_2 - h_1)^2}{a}$, und in

$h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, $r_1 = r_2 = \frac{a^2}{h_2 - h_1}$ zu setzen, weshalb nun

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2}\right) \text{ und}$$

$$h_1 = \frac{2\,S}{\gamma} \cdot \frac{(h_2 - h_1)}{a^2} \text{ folgt.}$$

Durch Subtraction der letzten Gleichungen von einander erhält man:

$$h_2 - h_1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^2} - \frac{2\,(h_2 - h_1)}{a^2}\right)$$

oder:

$$1 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a\,(h_2 - h_1)} + \frac{a}{(h_2 - h_1)^3} - \frac{2}{a^2}\right),$$

auch:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}\,(h_2 - h_1)^2 = a.$$

Ist a klein, so kann man auch

$$\frac{2}{a^2}\,(h_2 - h_1)^3 - \frac{1}{a}\,(h_2 - h_1)^2 = a$$

setzen, woraus dann

$$h_2 - h_1 = a$$

folgen würde. Nimmt man aber $h_2 - h_1 = a + \delta$ an, und setzt

$$(h_2 - h_1)^2 = a^2 + 2\,a\,\delta, \text{ sowie } (h_2 - h_1)^3 = a^3 + 3\,a^2\,\delta,$$

so erhält man:

$$\left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right)(a^3 + 3\,a^2\,\delta) - \frac{1}{a}\,(a^2 + 2\,a\,\delta) = a$$

oder:

$$\frac{\gamma}{S}\,a^3 + \left(\frac{\gamma}{S} + \frac{2}{a^2}\right) . \, 3\,a^2\,\delta - 2\,\delta = 0,$$

und es folgt:

$$\delta = -\frac{\gamma\,a^3}{3\,\gamma\,a^2 + 4\,S} \text{. oder annähernd, } \delta = -\frac{\gamma\,a^3}{4\,S}.$$

Hiernach ist nun

$$h_2 - h_1 = a - \frac{\gamma\,a^3}{4\,S},$$

daher:

$$h_1 = \frac{2\,S}{\gamma} \cdot \frac{1}{a^2}\left(a - \frac{\gamma\,a^3}{4\,S}\right) = \frac{2}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} - \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$h_2 = \frac{S}{\gamma}\left(\frac{1}{a} + \frac{a}{\left(a - \frac{\gamma a^3}{4S}\right)^2}\right) = \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{a}{a^2}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{4S}\right)^2\right]$$

$$= \frac{S}{\gamma}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\left(1 + \frac{\gamma a^2}{2S}\right)\right] = \frac{2}{a} \cdot \frac{S}{\gamma} + \frac{a}{2}.$$

Es wächst also bei den Haarröhrchen die mittlere Erhebung umgekehrt wie die Röhrenweite.

Auch hat man zur Bestimmung von S:

$$\frac{S}{\gamma} = \frac{1}{2} a h_1 + \frac{a^2}{4}.$$

Beobachtungen, welche Hagen mit Brunnenwasser an Haarröhrchen angestellt hat, gaben Folgendes:

Röhrenweite a, Linien . . .	0,295	0,336	0,413	0,546	0,647	0,751	0,765
Erhebung h_1, Linien	10,08	8,50	6,87	5,17	4,28	3,72	3,59
Spannungsmaß $\frac{S}{\gamma}$, Gramme	1,508	1,455	1,458	1,478	1,473	1,512	1,494

Nach diesen Versuchen ist also im Mittel

für Pariser Linien: $\frac{S}{\gamma} = 1,482$ und $S = 0,017$ Gramm,

für Millimeter: $\frac{S}{\gamma} = 7,54$ und $S = 0,0075$ Gramm.

Es ist also anzunehmen, daß die Spannung des Wassers an der Oberfläche in jedem Streifen von 1 Millimeter Breite S zwischen 0,0047 und 0,0075 Gramm beträgt. Die Abweichungen dieser Werthe sollen ihren Grund darin haben, daß die Spannung S der Oberfläche des Wassers mit der Zeit abnimmt, und bei dem gekochten Wasser viel kleiner ausfällt als bei dem frischen Wasser.

§. 410. Die vorstehende Theorie findet auch in dem Falle ihre Anwendung, wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird; es findet hier keine Erhöhung, sondern eine Senkung der Oberfläche statt, und es ist die letztere auch nicht concav, sondern convex. Die aus dem Niveauabstande BG, Fig. 726, entstehende und von unten nach oben wirkende Verticalkraft P wird auch hier durch die Spannungen S und S der Oberfläche ABA der Flüssigkeit in der Röhre aufgehoben. Die Adhäsionskraft des festen Körpers kommt hierbei, der vorstehenden Theorie zu Folge, nicht weiter in Betracht.

Setzt man die Kraft, mit welcher die Röhrenwand die Flüssigkeitssäule BG, Fig. 727, an sich zieht, dem Röhrenumfange proportional, setzt also

Fig. 726.

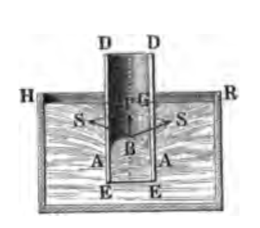
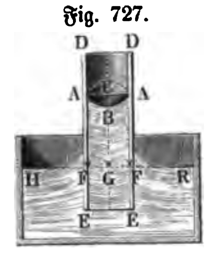


Fig. 727.



für eine cylindrische Röhre diese Kraft $P = \mu \, . \, 2\pi a$, wo μ einen Coefficienten ausdrückt, so hat man:

$$\pi a^2 h \gamma = 2 \mu \pi a,$$

und daher die mittlere Erhebung des Wassers in der Röhre:

$$h = \frac{2\mu}{a\gamma}.$$

Für zwei parallele Tafeln ist dagegen $P = 2\mu l$ und $P = 2ahl\gamma$, wo l die unbestimmte Länge der Wassersäule bezeichnet, und daher:

$$h = \frac{\mu}{a\gamma},$$

d. i. halb so groß wie bei der Röhre, wenn der Abstand $2a$ der Tafeln der Röhrenweite gleich ist. Dieses stimmt auch mit den Resultaten der letzten Paragraphen vollkommen.

Nach den Hagen'schen Versuchen hängt die Festigkeit oder Spannung der Oberfläche einer Flüssigkeit nicht von dem Grade ihrer Flüssigkeit ab, ist aber um so größer, je schwerer die Flüssigkeit an anderen Körpern haftet. Nach Anderen, namentlich nach Brunner und Frankenheim (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 70 und 72), nimmt aber die Steighöhe h in den Haarröhren und folglich auch S ab, wenn die Temperatur der Flüssigkeit eine größere wird.

Für Alkohol ist S ungefähr die Hälfte und für Quecksilber das Achtfache von der Festigkeit der Oberfläche des Wassers.

Anmerkung 1. Hagen findet durch Messung und Wägung von Flüssigkeitstropfen, welche sich von den Grundflächen kleiner Cylinder losreißen, ziemlich dieselben Werthe wie durch die Beobachtungen an Capillartafeln. Ebenso haben die Versuche mit Adhäsionsplatten eine gute Uebereinstimmung geliefert, unter der Voraussetzung, daß der Kraft zum Losreißen einer Platte durch das Gewicht des gehobenen Flüssigkeitscylinders und durch die Spannung in dem Mantel dieses Cylinders das Gleichgewicht gehalten wird.

Anmerkung 2. Die Anzahl der Schriften über die Capillarität ist zu groß, als daß hier eine vollständige Mittheilung derselben erfolgen könnte. Es haben sich mit diesem Gegenstande die größten Mathematiker, wie Laplace, Poisson, Gauß u. s. w. beschäftigt. Eine vollständige Mittheilung der älteren Literatur findet man in Frankenheim's Lehre von der Cohäsion. Die Schrift, welche bei Bearbeitung dieses Capitels vorzüglich benutzt wurde, ist folgende: Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten von Hagen, eine in der Königl. Akademie der Wissenschaften gelesene Abhandlung, Berlin 1842. Eine neue physikalische Theorie der Capillarität von J. Mile enthält Bd. 45 von Poggendorff's Annalen (1838). Es gehören hierher auch Boutigny's Studien über die Körper im sphäroidalen Zustande, deutsch von Arendt. Leipzig 1858.

Viertes Capitel.

Vom Gleichgewichte und Drucke der Luft.

§. 411. **Spannkraft der Gase.** Die uns umgebende atmosphärische Luft, sowie auch alle übrigen Luftarten oder Gase besitzen, in Folge der Repulsivkraft ihrer Theile oder Moleküle, ein Bestreben, einen größeren und größeren Raum einzunehmen. Man erhält daher eine begrenzte Luftmasse nur durch Absperren derselben in vollkommen verschlossenen Gefäßen. Die Kraft, mit welcher sich die Gase auszudehnen suchen, heißt ihre Elasticität, Spannkraft oder Expansivkraft. Sie äußert sich durch einen Druck, welchen das Gas gegen die Wände des dasselbe einschließenden Gefäßes ausübt, und ist insofern von der Elasticität der festen oder tropfbar flüssigen Körper verschieden, als sie in jedem Zustande der Dichtigkeit sich wirksam zeigt, wogegen die Expansivkraft der letztgenannten Körper bei einem gewissen Zustande der Ausdehnung Null ist. Man mißt den Druck oder die Spannkraft der Luft und anderer Gase durch Barometer, Manometer und Ventile. Das Barometer wird vorzüglich angewendet, um den Druck der Atmosphäre zu bestimmen. Das gewöhnliche oder sogenannte Gefäßbarometer, Fig. 728, besteht in einer, an einem Ende A verschlossenen und am anderen Ende

Fig. 728.



B offenen Glasröhre, welche, nachdem sie mit Quecksilber gefüllt ist, umgestürzt und mit ihrem offenen Ende in ein ebenfalls Quecksilber enthaltendes Gefäß *CD* eingetaucht wird. Nach dem Umkehren dieses Instrumentes bleibt in der Röhre eine Quecksilbersäule *BS* zurück, welcher (s. §. 401) durch den Druck der Luft gegen die Oberfläche *HR* des Quecksilbers das Gleichgewicht gehalten wird. Der über der Quecksilbersäule befindliche Raum *AS* ist luftleer; es erleidet daher diese Säule von oben keinen Druck, weshalb denn auch die Höhe dieser Säule, oder vielmehr die Höhe des Quecksilbers in derselben über dem Quecksilberspiegel *HR* im Gefäße als Maß des Luftdruckes dienen kann. Um diese Höhe bequem und scharf messen zu können, ist eine genau eingetheilte Scala angebracht, welche längs der Röhre hinläuft und nach Befinden noch mit einem verschiebbaren Zeiger *S* versehen ist.

Anmerkung. Die ausführliche Beschreibung der verschiedenen Barometer, die Anleitung zum Gebrauche derselben u. s. w. gehört in die Physik. Siehe Lehrbuch der Physik und Meteorologie von Müller, Bd. I, u. a. a. O.

Atmosphärendruck. Durch Barometer hat man gefunden, daß bei einem mittleren Zustande der Atmosphäre und an wenig über dem Meere gelegenen Orten dem Luftdrucke durch eine ungefähr 0,760 Meter oder nahe 28 Pariser Zoll = 29 preuß. Zoll hohe Quecksilbersäule von Null Grad Wärme das Gleichgewicht gehalten wird. Da das specifische Gewicht des Quecksilbers bei Null Grad 13,6 ist, so folgt, daß der Luftdruck auch gleich ist dem Gewichte einer 0,76 . 13,6 = 10,336 Meter = 31,73 Par. Fuß = 32,84 preuß. Fuß hohen Wassersäule. §. 412.

Man mißt die Spannung der Luft auch oft durch den Druck, welchen dieselbe auf die Flächeneinheit ausübt, und es ist also der Atmosphärendruck oder das Gewicht einer 0,76 Meter hohen Quecksilbersäule bei 1 Quadratmeter Basis:

$$p = 0{,}76\ .\ 13{,}6\ .\ 1000 = 10\,336 \text{ Kilogramm.}$$

Da nun 1 Quadratzoll gleich 0,000684 Qudratmeter ist, so beträgt der mittlere Druck der Atmosphäre auf 1 Quadratzoll (preuß.):

$$0{,}000684\ .\ 10\,336 = 7{,}071 \text{ Kilogramm} = 14{,}142 \text{ Pfund.}$$

Den mittleren Barometerstand genau zu 28 Par. Zoll angenommen, erhält man den Atmosphärendruck pro 1 Quadratzoll (preuß.) zu 14,103 Pfund.

Es ist sehr gewöhnlich in der Mechanik, den mittleren Atmosphärendruck als Einheit anzunehmen und andere Expansivkräfte auf diesen zu beziehen, also in Atmosphärendrücken oder Atmosphären, wie man schlechtweg sagt, anzugeben. Hiernach entspricht dem Drucke von *n* Atmosphären eine Quecksilbersäule von 0,76 . *n* Meter Höhe, oder ein Gewicht von 10336 . *n* Kilo-

gramm auf jeden Quadratmeter gedrückter Fläche. Zur Vergleichung der verschiedenen Angaben kann die folgende Tabelle dienen.

Atmosphären.	Quecksilbersäule in Metern.	Quecksilbersäule in Par. Zollen.	Wassersäule in preuß. Fußen.	Druck pr. 1 □Meter in Kilogramm.	Druck pr. 1□"(prß.) in Pfunden.
1	0,760	28	32,84	10336	14,14
1,316	1	36,84	43,21	13600	18,947
0,0357	0,0272	1	1,173	369,14	0,505
0,0304	0,0231	0,853	1	314,74	0,431
0,000097	0,000074	0,0027	0,00318	1	0,00139
0,0707	0,0538	1,93	2,322	730,97	1

Beispiele: 1) Wenn bei einer Wassersäulenmaschine das Wasser 250 Fuß hoch über der Kolbenfläche steht, so ist der Druck gegen diese Fläche:

$$250 \, . \, 0{,}0304 = 7{,}6 \text{ Atmosphären.}$$

2) Wenn der Wind eines Cylindergebläses 1,2 Atmosphären Spannung hat, so ist der Druck desselben auf einen Kolben von 1,5 Meter Durchmesser:

$$P_1 = 1{,}5^2 \, . \, \frac{\pi}{4} \, . \, 1{,}2 \, . \, 10336 = 21916 \text{ Kilogramm.}$$

Da die Atmosphäre auf die Rückfläche des Kolbens den Gegendruck

$$P_2 = 1{,}5^2 \, \frac{\pi}{4} \, . \, 10336 = 18263 \text{ Kilogramm}$$

ausübt, so folgt die Kolbenkraft:

$$P = P_1 - P_2 = 21916 - 18263 = 3653 \text{ Kilogramm.}$$

3) Wenn in dem Condensator einer Dampfmaschine eine Spannung stattfindet von 3 Par. Zoll Quecksilbersäule, so entspricht dieselbe einem inneren Drucke von

$$3 \, . \, 369{,}14 = 1107{,}42 \text{ Kilogramm}$$

auf jeden Quadratmeter. Da die atmosphärische Luft auf dieselbe Fläche einen Druck von 10336 Kilogramm ausübt, so haben die Wandungen des Condensators einem auf Zerdrücken (von außen nach innen) wirkenden Drucke zu widerstehen, welcher pro Quadratmeter 10336 — 1107,4 = 9228,6 Kilogramm beträgt.

§. 413. **Manometer.** Um die Spannung der in Gefäßen eingeschlossenen Gase oder Dämpfe zu finden, werden barometerähnliche Instrumente, welche man Manometer nennt, angewendet. Diese Instrumente werden mit Quecksilber oder mit Wasser angefüllt, und sind oben entweder offen oder verschlossen, im letzteren Falle aber wieder im oberen Theile entweder luftleer oder mit Luft erfüllt. Das Manometer mit dem luftleeren Raume, Fig. 729, ist von dem gewöhnlichen Barometer nicht verschieden. Um mit Hülfe desselben

die Spannung der Luft in einem Behälter messen zu können, wird eine Röhre *CE* angebracht, die mit einem Ende *C* in dem Behälter und mit dem anderen Ende *E* über dem Quecksilberspiegel *HR* im Gehäuse *HDR* des Instrumentes ausmündet. Der Raum *HER* über dem Quecksilber wird dadurch mit dem Luftbehälter in Communication gesetzt; es nimmt daher die in ihm befindliche Luft die Spannung der Luft im Behälter an und drückt eine Quecksilbersäule *BS* in die Röhre, welche sich mit dem zu messenden Luftdrucke ins Gleichgewicht setzt.

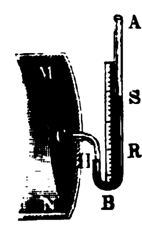
Fig. 729.



Derartige Instrumente, die sich besonders zur Messung von Spannungen eignen, welche kleiner sind, als der äußere Atmosphärendruck, werden öfter bei den Condensatoren der Dampfmaschinen &c. angewandt und führen dann wohl den Namen Vacuummeter. Man kann die letzteren auch so einrichten, daß das Gefäß *HR* wie in Fig. 728 der äußeren Luft zugänglich ist, während man die Röhre *BA* bei *A* mit dem Condensor in Verbindung setzt. Erhebt sich in diesem Falle die Flüssigkeit um $BS = h$ über *HR*, und bezeichnet *b* den Barometerstand, so findet man in $h_1 = b - h$ die Höhe derjenigen Flüssigkeitssäule, welche dem Drucke im Condensator entspricht. Man müßte daher die Scala von oben nach unten antragen und den Nullpunkt in eine Höhe gleich *b* über *HR* verlegen, was für die Praxis wegen der barometrischen Schwankungen aber unbequem ist (*b* variirt etwa zwischen 27 und 29 Par. Zoll).

Das oben offene Hebermanometer *ABC*, Fig. 730, giebt den Ueberschuß der Spannung in einem Gefäße *MN* über den Atmosphärendruck, den sogenannten Ueberdruck, an, weil dieser Spannung durch die Vereinigung des Luftdruckes über *S* mit der Quecksilbersäule *RS* das Gleichgewicht gehalten wird. Ist *b* der Barometerstand und *h* der Manometerstand oder der Höhenabstand *RS* der Quecksilberspiegel *H* und *S* in den beiden Schenkeln des Manometers, so hat man die durch die Höhe einer Quecksilbersäule gemessene Spannung der mit dem kleinen Schenkel communicirenden Luft:

Fig. 730.



$$h_1 = b + h,$$

also den Druck auf 1 Quadratmeter:

$$p = 369{,}14\,(b + h) \text{ Kilogramm},$$

oder den Ueberdruck:

$$p_1 = 369{,}14\,h \text{ Kilogramm}.$$

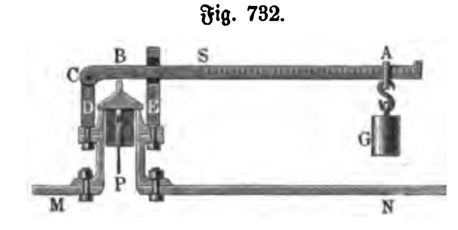
Gewöhnlicher als die Hebermanometer sind die Gefäßmanometer, wie $ABCD$, Fig. 731. Da hier die Luft durch eine größere Quecksilber- oder nach Befinden Wassermasse auf die Flüssigkeitssäule wirkt, so werden die Schwankungen der Spannung nicht so schnell auf die Flüssigkeitssäule übertragen, und es wird das Messen dieser mehr in Ruhe befindlichen Säule leichter und sicherer. Der Bequemlichkeit des Messens oder Ablesens an der Scala wegen bringt man oft noch in der Röhre einen von dem Quecksilber getragenen Schwimmer an, welcher durch eine über eine Rolle geführte Schnur mit einem über der abwärts aufgetragenen Scala weggleitenden Zeiger verbunden ist.

Fig. 731.

Die Manometer lassen sich natürlich auch zum Messen des Druckes von Wasser und anderen tropfbaren Flüssigkeiten anwenden; man nennt sie aber dann Piezometer.

Mit Hülfe eines Ventils DE, Fig. 732, bestimmt sich ebenfalls, jedoch weniger scharf, die Expansivkraft des in MN abgeschlossenen Gases oder Dampfes, wenn man das Laufgewicht G so stellt, daß es eben dem Luft- oder Dampfdrucke das Gleichgewicht hält.

Fig. 732.



Ist $CS = s$ die Entfernung des Schwerpunktes des Hebels von der Drehaxe C, $CA = a$ der Hebelarm des Laufgewichtes, $CB = b$ der Abstand des Ventils von C, ferner Q das Gewicht des Hebels und V das Gewicht des Ventils, so hat man, wenn noch P den Gas- oder Dampfdruck gegen die untere Fläche des Ventils und P_1 den Atmosphärendruck auf die obere Ventilfläche bedeuten, für den Zustand des Gleichgewichtes:

$$(P - P_1)\, b = Vb + Qs + Ga;$$

folglich:

$$P = P_1 + V + \frac{Qs + Ga}{b}.$$

Bezeichnet r den Halbmesser des Ventils DE (d. h. derjenigen Kreislinie, in welcher das Ventil dichtschließend den Ventilsitz berührt), p die innere und p_1 die äußere Spannung, so hat man:

$$P = \pi r^2 p \text{ und } P_1 = \pi r^2 p_1, \text{ daher:}$$

$$p = p_1 + \frac{Vb + Qs + Ga}{\pi r^2 b}.$$

Die Bestimmung von p durch Ventile ist deswegen unsicher, weil die Reibungswiderstände der Axe C und des Ventils sich einer genauen Bestimmung entziehen, und weil, besonders bei einer breiten Auflagerfläche des Ventils, der in Rechnung zu stellende Halbmesser r sich nicht mit Bestimmtheit angeben läßt. Aus letzterem Grunde ist es gerathen, das Ventil auf einer möglichst schmalen Fläche aufruhen zu lassen.

Beispiele: 1) Wenn der Quecksilberstand eines oben offenen Manometers 3,5 Par. Zoll und der Barometerstand 27 Zoll beträgt, so ist die entsprechende Expansivkraft:

$p = 369,14\,(b + h) = 369,14\,.\,30,5 = 11258,8$ Kilogr. pro 1 Quadratmeter.

2) Der Wassermanometerstand eines Windregulators in einem Hüttenwerke beträgt 3,5 Fuß. Wenn man den Wind unter einen unten in Wasser tauchenden, oben geschlossenen Cylinder (Glocke) leitet, um eine auf der Glocke ruhende Belastung von 600 Kilogramm zu erheben (pneumatischer Gichtaufzug), wie groß muß der Durchmesser dieses Cylinders wenigstens sein, wenn das Eigengewicht desselben 200 Kilogramm beträgt?

Der Ueberdruck der Gebläseluft über die äußere Atmosphäre beträgt pro Quadratmeter:

$$p = 314,74\,.\,3,5 = 1101,6 \text{ Kilogramm.}$$

Damit die Last von 800 Kilogramm durch die Spannkraft der Luft getragen werde, muß der Cylinderquerschnitt mindestens $\frac{800}{1101,6} = 0,726$ Quadratmeter oder der Durchmesser 0,961 Meter betragen. Nimmt man dafür 1 Meter Durchmesser, so beträgt der Ueberdruck der Luft über das Gewicht der Last:

$$0,785\,.\,1101,6 - 800 = 64,8 \text{ Kilogramm,}$$

welcher Ueberdruck, abgesehen von schädlichen Widerständen, eine Beschleunigung der zu hebenden Last von $\frac{64,8}{800}\;9,81 = 0,78$ Meter erzeugen würde.

3) Der obere abgeschliffene Rand eines gußeisernen unten geschlossenen Cylinders von 0,3 Meter lichter Weite ist mit einer aufgeschliffenen Platte bedeckt. Wenn nun die Luft aus dem Cylinder so weit ausgepumpt wird, daß ein Vacuummeter eine Spannung der Luft im Innern von 10 Zoll (Par.) Quecksilber zeigt, wie groß ist die Kraft zum Abreißen des Deckels bei einem Barometerstande von 27 Par. Zoll? Der äußere und der innere Druck betragen pro Quadratmeter resp.:

$p = 369,14\,.\,27 = 9966,8$ und $p_1 = 369,14\,.\,10 = 3691,4$ Kilogramm.

Der Deckel wird daher von der atmosphärischen Luft mit einem Ueberdrucke von

$$0,3^2\,\frac{\pi}{4}\,.\,(9966,8 - 3691,4) = 0,07\,.\,6275,4 = 439,3 \text{ Kilogramm}$$

auf den Cylinder gepreßt. Wenn der Cylinder nicht auf dem Fundamente befestigt wäre und ein Eigengewicht von 300 Kilogramm hätte, so würde schon ein Ueberdruck von $\frac{300}{0,07} = 4285,7$ Kilogramm per Quadratmeter genügen, um den Cylinder durch eine am Deckel angreifende Kraft emporzuheben. Diesem Ueberdrucke entspricht eine Quecksilbersäule von $0,0027\,.\,4285,7 = 11,57$ Par.

Zoll, so daß der gedachte Zustand eintreten muß, sobald im Innern des Cylinders die Spannung der Luft

$$27 - 11{,}57 = 15{,}43 \text{ Par. Zoll Quecksilbersäule}$$

beträgt.

4) Ein Sicherheitsventil von 0,05 Meter Durchmesser und 1,2 Kilogramm Eigengewicht soll durch ein Laufgewicht von 10 Kilogramm so belastet werden, daß es bei einem Ueberdrucke des Dampfes über den äußeren Luftdruck von 3 Atmosphären sich öffnet. In welcher Entfernung vom Drehpunkte des Hebels ist der Schwerpunkt des Belastungsgewichtes anzubringen, wenn der Hebel ein Eigengewicht von 1,5 Kilogramm und sein Schwerpunkt einen Abstand von 0,3 Meter vom Drehpunkte, das Ventil aber einen solchen von 80 Millimeter davon hat?

Ist l die gesuchte Länge, so hat man:

$$10336 \,.\, 3 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}025^2 \,.\, 0{,}080 = 1{,}2 \,.\, 0{,}080 + 1{,}5 \,.\, 0{,}3 + 10 \,.\, l;$$

woraus $l = \frac{4{,}858 - 0{,}546}{10} = 0{,}431$ Meter folgt.

§. 414. Mariotte'sches Gesetz. Die Spannung der Gase wächst mit der Verdichtung derselben; je mehr man ein gewisses Luftquantum zusammendrückt oder verdichtet, desto größer wird auch dessen Spannkraft, und je mehr man dasselbe sich ausdehnen oder verdünnen läßt, desto kleiner zeigt sich auch seine Expansivkraft. Das Verhältniß, in welchem die Spannkraft und die Dichtigkeit oder das Volumen der Gase zu einander stehen, wird durch das von Mariotte (oder Boyle) entdeckte und nach ihm benannte Gesetz ausgedrückt. Es behauptet, daß die Dichtigkeit einer und derselben Luftmenge der Spannkraft derselben proportional, oder, da die Räume, welche von einer und derselben Masse eingenommen werden, den Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind, daß sich die Volumina einer und derselben Gasmasse umgekehrt wie deren Expansivkräfte verhalten. Wird demnach eine gewisse Luftmenge bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt, ihre Dichtigkeit also verdoppelt, so stellt sich auch ihre Spannung doppelt so groß heraus als anfänglich, und wird ein gewisses Luftquantum bis auf das Dreifache seines anfänglichen Raumes ausgedehnt, also seine Dichtigkeit bis auf den dritten Theil herabgezogen, so bleibt auch die Expansivkraft desselben nur ein Drittel von der anfänglichen Spannkraft. Ist z. B. unter dem Kolben EF eines Cylinders AC, Fig. 733, gewöhnliche atmosphärische Luft, welche anfänglich auf jeden Quadratzoll mit 14 Pfd. drückt, so wird dieselbe mit 28 Pfd. drücken, wenn man den Kolben nach $E_1 F_1$ geschoben und dadurch die eingeschlossene Luft bis auf die Hälfte ihres anfänglichen Volumens zusammengedrückt hat, und es wird diese Kraft $3 \,.\, 14 = 42$ Pfund betragen, wenn der Kolben nach $E_2 F_2$ gekommen ist

Fig. 733.

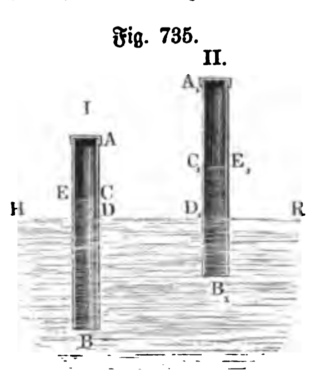
und zwei Drittel der ganzen Höhe zurückgelegt hat. Ist der Inhalt der Kolbenfläche 1 Quadratmeter, so beträgt der Atmosphärendruck gegen dieselbe 10336 Kilogramm; um daher den Kolben um die halbe Cylinderhöhe niederzudrücken, sind nach und nach 10336 Kilogramm, und um ihn um zwei Drittel dieser Höhe niederzuschieben, 20672 Kilogramm auf denselben aufzusetzen u. s. w.

Ebenso läßt sich durch Zugießen von Quecksilber in die mit dem Luftcylinder AC, Fig. 734, communicirende Röhre $G_2 H$ das Mariotte'sche Gesetz prüfen. Hat man anfänglich durch die Quecksilbermasse $DEFH$ eine Luftsäule AC abgesperrt, welche mit der äußeren Luft gleiche Spannkraft besitzt, und später durch zugegossenes Quecksilber den Luftcylinder bis auf die Hälfte, auf das Viertel u. s. w. des anfänglichen Volumens zusammengedrückt, so wird man finden, daß die Niveauabstände $G_1 H_1$, $G_2 H_2$ u. s. w. der Oberflächen des Quecksilbers der einfachen, dreifachen Barometerhöhe b u. s. w. gleich sind, daß also, wenn man hierzu die dem äußeren Luftdrucke entsprechende einfache Höhe addirt, die Spannkraft zweimal, viermal u. s. w. so groß ist als beim anfänglichen Volumen.

Fig. 734.

Sehr leicht läßt sich auch die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes bei der Ausdehnung der Luft nachweisen, wenn man eine cylindrische (gut calibrirte) Röhre AB, Fig. 735, senkrecht in das Quecksilber (Wasser) taucht und, nach gehörigem Verschlusse des oberen Endes A, das abgeschlossene Luftvolumen AE (I.) durch behutsames Aufziehen dieser Röhre ausdehnt, so daß es nun ein Volumen $A_1 E_1$ (II.) annimmt. Die Dichtigkeiten der Luft in diesen Räumen AE und $A_1 E_1$ sind jedenfalls den Höhen AC und $A_1 C_1$ derselben umgekehrt, und ihre Spannungen den Differenzen zwischen dem Barometerstande b und den Höhen CD und $C_1 D_1$ der über der Oberfläche HR des Quecksilbers stehenden Quecksilbersäulen DE und $D_1 E_1$ direct proportional. Es ist folglich nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 735.



$$\frac{AC}{A_1 C_1} = \frac{b - C_1 D_1}{b - CD},$$

was auch durch die Beobachtung bei jeder beliebigen Eintauchung der Röhre AB bestätigt wird.

Sind h und h_1 oder p und p_1 die Spannkräfte, γ und γ_1 die entsprechenden specifischen Gewichte und V und V_1 die zugehörigen Volumina einer und derselben Luftmenge, so hat man nach dem angegebenen Gesetze:

$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V} = \frac{h}{h_1} = \frac{p}{p_1}$; oder $V_1 \gamma_1 = V \gamma$, sowie $V_1 p_1 = V p$; daher

$\gamma_1 = \frac{h_1}{h} \gamma = \frac{p_1}{p} \gamma$, sowie $V_1 = \frac{h}{h_1} V = \frac{p}{p_1} V$.

Hiernach läßt sich die Dichtigkeit und auch das Volumen der Luft von einer Spannung auf die andere reduciren.

Anmerkung. Nur bei sehr großen Pressungen der Luft kommen bemerkbare Abweichungen von dem Mariotte'schen Gesetze vor. Nach Regnault ist z. B. für atmosphärische Luft, wenn das Luftvolumen V_0 von 1 Meter Pressung in V übergeht, die Pressung desselben:

$$p = \frac{V_0}{V}\left[1 - 0{,}0011054\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) + 0{,}000019381\left(\frac{V_0}{V} - 1\right)^2\right] \text{ Meter,}$$

so daß für $\frac{V_0}{V}$ =	5	10	15	20
p =	4,97944	9,91622	14,82484	19,71988 Met. ausfällt.

Beispiele. 1) Wenn bei einer Gebläsemaschine der Manometerstand 80 Millimeter Quecksilber beträgt, so ist die Dichtigkeit des Windes $\frac{0{,}760 + 0{,}080}{0{,}760} = 1{,}105$ mal so groß, als diejenige der atmosphärischen Luft bei 0,760 Meter Barometerstand, und da ein Cubikmeter der letzteren ein Gewicht von $\frac{1}{770} \cdot 1000 = 1{,}299$ Kilogr. hat, so wiegt ein Cubikmeter Gebläseluft hier 1,299 . 1,105 = 1,435 Kilogramm.

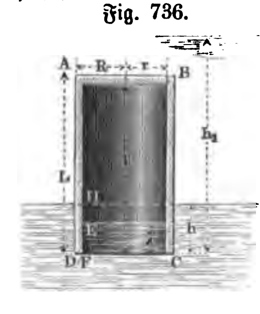


Fig. 736.

2) Ein cylindrisches Gefäß $ABCD$, Fig. 736, dessen äußerer Halbmesser R, innerer Halbmesser r und dessen Höhen außen und innen resp. L und l sind, wird in verticaler Richtung mit dem unteren Rande um die Größe h ins Wasser getaucht, wie hoch steht das Wasser im Innern des Gefäßes über dem Rande?

Die bei beginnendem Eintauchen in dem Gefäße abgesperrte Luft von atmosphärischer Spannung b (in Wassersäule gemessen), hat ein Volumen $\pi r^2 l$. Ist das Wasser nach geschehener Eintauchung bis zur Tiefe h im Innern um die Größe $EF = \lambda$ erhoben, so beträgt das Luftvolumen nunmehr $\pi r^2 (l - \lambda)$. Da der Druck, unter welchem die Luft im Innern des Gefäßes steht, durch eine Wassersäule $b + HE = b + h - \lambda$ ausgedrückt ist, so hat man nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$\pi r^2 l : \pi r^2 (l - \lambda) = b + h - \lambda : b$$

oder:

$$\lambda^2 - \lambda\,(b + h + l) + h\,l = 0, \text{ woraus}$$

$$\lambda = \frac{b + h + l}{2} - \sqrt{\left(\frac{b + h + l}{2}\right)^2 - h\,l} \text{ folgt.}$$

Der Auftrieb A, welchen der eingetauchte Cylinder durch das Wasser erfährt, und welcher nach §. 391 gleich dem Gewichte der verdrängten Wassermenge ist, berechnet sich zu:

$$\pi R^2 h \gamma - \pi r^2 \lambda \gamma = \pi\,(R^2 h - r^2 \lambda)\,\gamma.$$

Ist z. B. $R = 1$ Meter, $r = 0{,}98$ Meter, $L = 1{,}5$ Meter, $l = 1{,}47$ Meter und $h' = 1{,}2$ Meter, so hat man bei einem Barometerstande $b = 10{,}336$ Meter (Wassersäule):

$$\lambda = \frac{10{,}336 + 1{,}2 + 1{,}47}{2} - \sqrt{\left(\frac{10{,}336 + 1{,}2 + 1{,}47}{2}\right)^2 - 1{,}2\,.\,1{,}47} = 0{,}134 \text{ Met.}$$

Der Auftrieb beträgt bei dieser Eintauchung:

$$A = 3{,}14\,(1^2\,.\,1{,}2 - 0{,}98^2\,.\,0{,}134)\,1000 = 3364{,}2 \text{ Kilogramm.}$$

Wenn also der gußeiserne Cylinder ein Gewicht von

$$G = (\pi\,.\,1^2\,1{,}5 - \pi\,.\,0{,}98^2\,.\,1{,}47)\,7{,}5\,.\,1000 = 2091{,}2 \text{ Kilogramm}$$

hat, so würde die vorausgesetzte Eintauchuug noch eine Belastung des Cylinders von

$$A - G = 3364{,}2 - 2091{,}2 = 1273 \text{ Kilogramm}$$

erfordern, wenn von dem geringen Gewichte der eingeschlossenen Luft abgesehen wird.

Wenn der Cylinder vollständig unter Wasser getaucht wird, so ist der Auftrieb ausgedrückt durch:

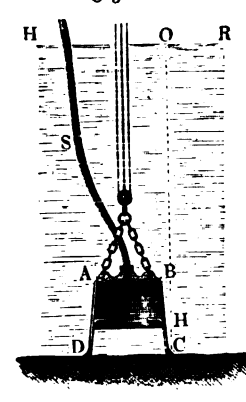
$$A_1 = \pi R^2 L \gamma - \pi r^2 \lambda \gamma = \pi\,(R^2 L - r^2 \lambda)\,\gamma.$$

Diese Kraft wird um so kleiner, je größer λ ist, d. h. je tiefer der Cylinder eingetaucht wird, und es giebt eine bestimmte Tiefe der Eintauchung, für welche der Auftrieb A_1 gerade gleich dem Eigengewichte G sein muß. Um diese Lage, in welcher der Cylinder schwimmen würde, zu ermitteln, setze man $G = A_1$ oder:

$$G = 2091{,}2 = \pi\,(1^2\,1{,}5 - 0{,}98^2\,\lambda)\,1000; \text{ hieraus folgt:}$$

$$\lambda = \frac{1{,}5 - 0{,}666}{0{,}98^2} = 0{,}869 \text{ Meter.}$$

Fig. 737.



Die Tiefe h_1, bei welcher das Wasser im Innern des Cylinders um diese Größe λ erhoben ist, findet sich nun nach dem **Mariotte**'schen Gesetze durch:

$$l : l - \lambda = b + h_1 - \lambda : b \text{ zu:}$$

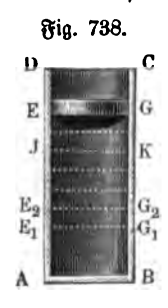
$$h_1 = b\,\frac{\lambda}{l - \lambda} + \lambda = \frac{10{,}336\,.\,0{,}869}{1{,}47 - 0{,}869} + 0{,}869 = 15{,}813 \text{ Meter.}$$

In dieser Tiefe würde die Glocke im **labilen** Gleichgewichtszustande schwimmen, denn jede Vergrößerung der Tiefe sowohl wie des Barometerstandes würde λ vergrößern, also den Auftrieb vermindern, so daß die Glocke nunmehr zu Boden sinken würde, während jede Verminderung der Tiefe oder des Barometerstandes eine Vergrößerung des Auftriebes erzeugt, in Folge deren das Gefäß bis zur Oberfläche emporsteigt.

Bei Taucherglocken, Fig. 737 (a. v. S.), pflegt das Eigengewicht der Glocke den Auftrieb zu übertreffen, und wird das Steigen des Wassers im Innern der Glocke durch Einpumpen atmosphärischer Luft durch den Schlauch S verhindert. Die Dichtigkeit der Luft in der Glocke ist $\frac{b+h}{b}$ mal so groß, als diejenige der äußeren Luft.

§. 415. **Arbeit der comprimirten Luft.** Die Arbeit, welche aufzuwenden ist, um ein gewisses Luftquantum bis zu einem gewissen Grade zu verdichten, sowie die Arbeit, welche die Luft bei ihrem Ausdehnen zu verrichten vermag, bestimmt sich in folgender Art. Es sei in einem Cylinder AC, Fig. 738, durch einen dichtschließenden Kolben EG ein Quantum Luft $AEGB$ abgesperrt, deren Spannung gleich p sei, und es bezeichne p_1 die Spannung, welche dieselbe Luft angenommen hat, nachdem der Kolben aus der Lage EG in diejenige $E_1 G_1$ gebracht worden ist. Setzt man $AE = l$ und $AE_1 = l_1$, so ist nach dem Mariotte'schen Gesetze, wenn man die Temperatur als unveränderlich voraussetzt:

Fig. 738.



$$p_1 : p = l : l_1 \text{ oder } p_1 = \frac{pl}{l_1}.$$

Während der Bewegung des Kolbens durch das sehr kleine Wegtheilchen $E_2 E_1 = \lambda$ darf die Spannung der Luft constant gleich p_1 angenommen werden, und es berechnet sich die diesem Wegtheilchen entsprechende Elementararbeit, wenn F den Kolbenquerschnitt bedeutet, zu:

$$F p_1 \lambda = F \,.\, pl \frac{\lambda}{l_1}.$$

Da λ und also auch $\frac{\lambda}{l_1}$ immer als eine sehr kleine Größe anzunehmen ist, so darf man $\frac{\lambda}{l_1} = Log. nat. \left(1 + \frac{\lambda}{l_1}\right)$ setzen*), folglich ist die obige Elementararbeit:

$$Fpl \frac{\lambda}{l_1} = Fpl \,.\, Log.\ nat. \left(1 + \frac{\lambda}{l_1}\right) = Fpl \,.\, Log.\ nat. \frac{l_1 + \lambda}{l_1}$$
$$= Fpl \left[Log.\ nat. (l_1 + \lambda) - Log.\ nat.\ l_1\right].$$

*) Nach §. 19, analyt. Hülfslehren, ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \cdots$, daher für ein kleines x gesetzt werden kann:

$$e^x = 1 + x, \text{ oder } x = Log.\ nat. (1 + x).$$

Denkt man sich den ganzen Weg EE_1 aus n sehr kleinen Theilen λ zusammengesetzt, so daß also $EE_1 = l - l_1 = n\lambda$ gesetzt werden kann, so findet man die zum Verdichten erforderliche Gesammtarbeit als die Summe aller derjenigen Elementararbeiten, welche man erhält, wenn man in dem letzterhaltenen Ausdrucke nach und nach

$l_1,\ l_1 + \lambda,\ l_1 + 2\lambda,\ l_1 + 3\lambda, \ldots l_1 + (n-1)\lambda$ anstatt l_1 und $l_1 + \lambda, l_1 + 2\lambda, l_1 + 3\lambda, l_1 + 4\lambda, \ldots l_1 + n\lambda$ anstatt $\lambda_1 + l$ einsetzt.

Durch Ausführung der angedeuteten Summation erhält man die Gesammtarbeit:

$$A = Flp \left\{ \begin{array}{l} Log.nat.(l_1 + \lambda) \quad - Log.nat.\, l_1 + \\ Log.nat.(l_1 + 2\lambda) - Log.nat.(l_1 + \lambda) + \\ Log.nat.(l_1 + 3\lambda) - Log.nat.(l_1 + 2\lambda) + \\ \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \\ \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \\ \quad\quad \cdot \quad\quad\quad\quad \cdot \\ Log.nat.(l_1 + n\lambda) - Log.nat.[l_1 + (n-1)\lambda] \end{array} \right\}$$

$$= Flp\,[Log.nat.(l_1 + n\lambda) - Log.nat.\, l_1] = Flp\; Log.nat. \frac{l}{l_1},$$

da sich immer das vorstehende Glied einer Reihe mit dem nachstehenden Gliede der folgenden Reihe aufhebt.

Bezeichnet man mit V das ursprüngliche Volumen $A\,G$ und mit V_1 das nachherige Volumen $A\,G_1$, so hat man, da $V = Fl$ und $V_1 = Fl_1$ ist:

$$A = Vp\; Log.nat. \frac{l}{l_1} = Vp\; Log.nat. \frac{V}{V_1} = Vp\,.\,Log.nat. \frac{p_1}{p}.$$

Um also eine Luftmasse von dem Volumen V und der Spannung p durch Verdichtung auf das Volumen V_1 und auf die Spannung $p_1 = \frac{V}{V_1}\, p$ zu bringen, ist eine mechanische Arbeit $A = Vp\; Log.\; nat.\; \frac{V}{V_1}$ aufzuwenden nöthig, und wenn diese Luftmenge aus dem Volumen V_1 wieder auf das Volumen V sich ausdehnt, ist sie im Stande, den gleichen Betrag an mechanischer Arbeit zu verrichten. Wenn die Rückfläche des Kolbens $E\,G$ hierbei der atmosphärischen Luft ausgesetzt ist, so hat man natürlich die Arbeit des äußeren Luftdruckes entsprechend zu berücksichtigen, welche im vorliegenden Falle sowohl beim Zusammendrücken, wie bei der Ausdehnung sich zu

$$A_0 = Fp_0\,(l - l_1) = Flp_0 \left(1 - \frac{l_1}{l}\right) = Vp_0 \left(1 - \frac{p}{p_1}\right)$$

bestimmt, unter p_0 die Größe des äußeren Luftdruckes verstanden.

Mit Hülfe der Integralrechnung bestimmt sich die zur Compression der Luft erforderliche Arbeit folgendermaßen. Wenn x den Abstand des Kolbens EG von AB in irgend einer Kolbenstellung JK bedeutet, für welche die Spannung des Gases $p_x = p\,\frac{l}{x}$ beträgt, so ist die elementare Arbeit während des unendlich kleinen Kolbenweges ∂x durch $F \,.\, p_x \partial x = Fp\,\frac{l}{x}\,\partial x$ gegeben. Die Gesammtarbeit zwischen den Grenzen $x = l$ und $x = l_1$ beträgt daher:

$$A = Fpl \int_{l_1}^{l} \frac{\partial x}{x} = Fpl \,.\, Log.\, nat.\, \frac{l}{l_1} \text{ wie oben.}$$

Anmerkung. Bei mäßigen Spannungsdifferenzen $(p_1 - p)$ oder kleinen Volumenveränderungen $(V_1 - V)$ kann man annähernd die erforderliche Arbeit

$$A = F\,\frac{p+p_1}{2}\,(l - l_1) = Fl\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\frac{p+p_1}{2} = V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\frac{p+p_1}{2}$$

setzen, oder genauer, mit Hülfe der Simpson'schen Regel, wenn z den Druck bei mittlerer Kolbenstellung $\frac{l + l_1}{2}$ bezeichnet:

$$A = V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\frac{p + 4z + p_1}{6}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{z}{p} = \frac{l}{\frac{1}{2}(l + l_1)} = \frac{2l}{l + l_1} = \frac{2}{1 + \frac{p}{p_1}} = \frac{2p_1}{p + p_1},$$

daher folgt:

$$A = \frac{1}{6}\,V\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)\left(p + \frac{8pp_1}{p + p_1} + p_1\right) = \frac{1}{6}\,Vp\left(\frac{p_1}{p} + \frac{8(p_1 - p)}{p + p_1} - \frac{p}{p_1}\right).$$

Beispiele. 1) Der Kolben AB einer Gebläsemaschine, Fig. 739 I., hat 1 Meter Durchmesser, der ganze Kolbenhub AD beträgt $l = 1{,}5$ Meter. Wie groß ist die zu einem Kolbenhube erforderliche mechanische Arbeit, wenn der Barometerstand 0,750 Meter beträgt, und wenn im Windregulator eine Manometerspannung von 0,800 Meter (Quecksilbersäule) stattfindet?

Fig. 739.

Es ist hier $F = \frac{1^2 \,.\, 3{,}14}{4} = 0{,}785$ Quadratmeter, $l = 1{,}5$ Meter, $p = 13600 \,.\, 0{,}750 = 10200$ Kilogramm, $p_1 = 13600 \,.\, 0{,}800 = 10880$ Kilogramm und $l_1 = l\,\frac{p}{p_1} = 1{,}5\,\frac{0{,}750}{0{,}800} = 1{,}406$ Meter. Wenn der Kolben aus der Lage AB in diejenige EF gekommen ist, also den Weg $AF = l - l_1 = 0{,}094$ Meter zurückgelegt hat, so ist von ihm die Arbeit verrichtet:

$$A_1 = Vp\ Log.\ nat.\ \frac{p_1}{p} = 0{,}785\,.\,1{,}5\,.\,10200\,.\,2{,}3026\ Log.\ \frac{800}{750}$$
$$= 12010{,}5\ .\ 2{,}3026\ .\ 0{,}0280287 = 775{,}14 \text{ Meterkilogramm.}$$

Während hierauf der Kolben die Strecke $FD = l_1 = 1{,}406$ Meter zurücklegt, hat er den constanten Druck $p_1 = 10880$ Kilogramm zu überwinden, und verrichtet daher während dieses Weges die mechanische Arbeit:

$$A_2 = Fp_1 l_1 = 0{,}785\ .\ 10880\ .\ 1{,}406 = 12010{,}5 \text{ Meterkilogramm.}$$

Da die Rückfläche des Kolbens während der ganzen Bewegung der atmosphärischen Luft ausgesetzt ist, so hat der Luftdruck eine Arbeit verrichtet:

$$A_0 = Fpl = 0{,}785\ .\ 10200\ .\ 1{,}5 = 12010{,}5 \text{ Meterkilogramm} = A_2.$$

Es ist daher die von dem Motor auszuübende mechanische Arbeit für jeden Kolbenschub, abgesehen von den Nebenhindernissen, gegeben durch:

$$A = A_1 + A_2 - A_0 = A_1 = 775{,}14 \text{ Meterkilogramm.}$$

Das in Fig. 729 II. gezeichnete Diagramm giebt eine Vorstellung von den einzelnen mechanischen Arbeiten. Macht man $GL = l$, $JL = l_1$, $GH = p$ und $JK = p_1$, so stellt die Fläche $GHKJ$ die zur Compression erforderliche Arbeit A_1 vor, die Fläche $JKML$ repräsentirt die Arbeit A_2, welche der Kolben unter dem constanten Drucke p_1 zu verrichten hat, und $GHNL$ stellt die Arbeit A_0 des äußeren Luftdruckes dar. Die beiden Flächenräume $JKML$ und $GHNL$ müssen übrigens wegen $A_2 = A_0$ gleiche Größe haben, so daß hieraus auch $KMNO = GHOJ$ folgt. Die von dem Motor aufzuwendende mechanische Arbeit ist also durch die Fläche $HKMNH$ ausgedrückt, welche nach Vorstehendem mit $HKJGH$ übereinstimmt. Die krumme Linie HQK ist so zu bestimmen, daß für irgend welche Abscisse $GP = x$ die zugehörige Ordinate $PQ = y$ gegeben ist durch:

$$y : p = l : l - x, \text{ also } y = \frac{pl}{l - x}.$$

2) Wenn bei einer Dampfmaschine unter dem Kolben von 0,3 Meter Durchmesser ein Quantum Dampf von 0,15 Meter Höhe und 3 Atmosphären Spannung steht, welcher den Kolben bei seiner Ausdehnung um 0,35 Meter fortschiebt, so würde die hierbei von dem Dampfe auf den Kolben übertragene mechanische Arbeit, unter der Voraussetzung, daß die Temperatur dieselbe bliebe und der Dampf dem Mariotte'schen Gesetze folgte, sich berechnen zu:

$$A = 0{,}3^2\,\frac{3{,}14}{4}\,.\,3\,.\,10336\ .\ 0{,}15\ Log.\ nat.\ \frac{0{,}15 + 0{,}35}{0{,}15} = 395{,}6 \text{ Meterkilogr.}$$

Die mittlere Kolbenkraft beträgt, ohne Rücksicht auf die Kolbenreibung und den Gegendruck:

$$P = \frac{395{,}6}{0{,}35} = 1130{,}5 \text{ Kilogramm oder pro Quadratmeter:}$$

$$\frac{1130{,}5}{{}^1\!/_4\ 0{,}3^2\ .\ 3{,}14} = \frac{1130{,}5}{0{,}0707} = 15990 \text{ Kilogramm.}$$

§. 416. **Druck in den verschiedenen Luftschichten.** Die in einem Gefäße eingeschlossene Luft ist in verschiedenen Tiefen von verschiedener Dichtigkeit und Spannung, denn die oberen Luftschichten drücken die unteren, auf welchen sie ruhen, zusammen; es ist deshalb nur in einer und derselben

Horizontalschicht einerlei Dichtigkeit und einerlei Spannung, und es nehmen beide mit der Tiefe zu. Um das Gesetz dieser Zunahme der Dichtigkeit von oben nach unten oder der Abnahme derselben von unten nach oben zu finden, schlagen wir einen Weg ein, der dem des vorigen Paragraphen sehr ähnlich ist.

Denken wir uns eine verticale Luftsäule AE, Fig 740, vom Querschnitte $AB = 1$ und von der Höhe $AF = h$. Setzen wir für die untere Luftschicht das specifische Gewicht $= \gamma$ und die Spannung $= p$, und für die obere Luftschicht EF das specifische Gewicht $= \gamma_1$ und die Spannkraft $= p_1$, so haben wir zunächst $\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p}$. Bezeichnet λ die Höhe EE_1 der Schicht E_1F, so ist das Gewicht derselben, sowie auch die dieser Höhe λ entsprechende Abnahme der Spannkraft:

Fig. 740.

$$v = 1 \,.\, \lambda \,.\, \gamma_1 = \frac{\lambda \gamma p_1}{p},$$

und umgekehrt:

$$\lambda = \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{v}{p_1}$$

oder, wie im vorigen Paragraphen:

$$\lambda = \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat. \left(1 + \frac{v}{p_1}\right) = \frac{p}{\gamma} [Log.\, nat.\, (p_1 + v) - Log.\, nat.\, p_1].$$

Setzen wir hierin statt p_1, nach und nach p_1, $p_1 + v$, $p_1 + 2v$, $p_1 + 3v$ u. s. w. bis $p_1 + (n - 1)\, v$, und addiren wir die entsprechenden Luftschichthöhen oder Werthe von λ, so bekommen wir die Höhe der ganzen Luftsäule, ganz wie im vorigen Paragraphen:

$$h = \frac{p}{\gamma} (Log.\, nat.\, p - Log.\, nat.\, p_1) = \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat.\, \frac{p}{p_1}$$

oder auch:

$$h = \frac{p}{\gamma}\, Log.\, nat.\, \frac{b}{b_1} = 2{,}3026\, \frac{p}{\gamma}\, Log.\, \frac{b}{b_1},$$

wenn b und b_1 die den Spannkräften p und p_1 entsprechenden Barometerstände in A und in F bezeichnen.

Ist umgekehrt die Höhe h gegeben, so läßt sich die ihr entsprechende Expansivkraft und Dichtigkeit der Luft berechnen. Es ist nämlich:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = e^{\frac{h\gamma}{p}}, \text{ also } \gamma_1 = \gamma e^{-\frac{h\gamma}{p}},$$

wobei $e = 2{,}71828$ die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes bezeichnet.

Mit Hülfe der Integralrechnung findet man diese Formel folgendermaßen: Wenn δ und π resp. das specifische Gewicht und die Spannung einer Luftschicht in der Höhe von x über AB bezeichnen, so hat man:

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\pi}{p} \text{ oder } \delta = \frac{\gamma}{p}\,\pi.$$

Die Zunahme der Spannung π in einer um ∂x tiefer gelegenen Schicht beträgt ferner:

$$\partial\pi = \delta\,.\,\partial x = \frac{\gamma}{p}\,\pi\,.\,\partial x, \text{ woraus } \partial x = \frac{p}{\gamma}\,\frac{\partial\pi}{\pi}.$$

Durch Integration zwischen den Grenzen $x = l$ und $x = 0$, für welche Werthe π respective gleich p_1 und p ist, erhält man wie oben:

$$h = \frac{p}{\gamma}\int_{p_1}^{p}\frac{\partial\pi}{\pi} = \frac{p}{\gamma}\,Log.nat.\,\frac{p}{p_1} = 2{,}3026\,\frac{p}{\gamma}\,Log.\,\frac{b}{b_1}.$$

Anmerkung. Diese Formel findet ihre Anwendung beim barometrischen Höhenmessen, welches im „Ingenieur", Seite 273, abgehandelt wird. Da 1 Cubikmeter atmosphärische Luft bei Null Grad Temperatur und 0,760 Meter Barometerstand 1,2935 Kilogramm wiegt, so hat man, ohne Berücksichtigung der Temperatur:

$$h = 2{,}3026\,\frac{10336}{1{,}2935}\,Log.\,\frac{b}{b_1} = 18399\,Log.\,\frac{b}{b_1}\text{ Meter} = 58624\,Log.\,\frac{b}{b_1}\text{ Fuß}.$$

Beispiele. 1) Wenn man den Barometerstand am Fuße eines Berges zu 0,770 und am Gipfel desselben zu 0,715 Meter gefunden hat, so ergiebt sich die Höhe des Berges zu:

$$h = 18399\ Log.\ \frac{770}{715} = 592\text{ Meter}.$$

2) Für die Dichtigkeit der Luft auf einem 3000 Meter hohen Berge hat man:

$$Log.\,\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{3000}{18399} = 0{,}163048,\text{ daher:}$$

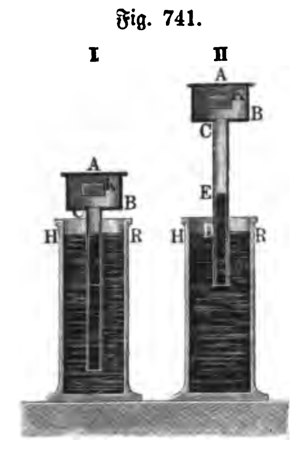
$\frac{\gamma}{\gamma_1} = 1{,}456$ und $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 0{,}687$. Es ist also die Dichte in der genannten Höhe nur 68,7 Procent von der Dichtigkeit am Fuße des Berges.

Stereometer und Volumenometer. Das Mariotte'sche Gesetz findet eine praktische Anwendung bei der Bestimmung der Volumina gewisser, namentlich pulverförmiger, faseriger Körper u. s. w. mittels der sogenannten Stereometer oder Volumenometer. §. 417.

1) Das Stereometer von Say. Wird die mit dem verschlossenen Gefäße AB, Fig. 741 I. (a. f. S.), in Verbindung stehende und ins Quecksilber HR eingetauchte Glasröhre CD emporgezogen, ohne ganz aus dem Quecksilber zu kommen (II.), so tritt in Folge der Ausdehnung der abgesperrten Luft,

von oben eine gewisse Luftsäule *CE* in die Röhre, und es bleibt unten eine gewisse Quecksilbersäule *DE* in derselben zurück, wobei sich die nun verminderte Spannkraft der eingeschlossenen Luft mit dem um den Druck der Quecksilbersäule *DE* verminderten Atmosphärendrucke ins Gleichgewicht setzt. Ist nun V_0 das Volumen des Raumes *ABC*, V_1 das zu bestimmende Volumen des in denselben gebrachten Körpers *K* und *V* das Volumen der Luftsäule *CE*, sowie *b* der Barometerstand und *h* die Höhe der eingedrungenen Quecksilbersäule *DE*, so hat man, da eine und dieselbe Luftmenge erst das Volumen $V_0 - V_1$ bei der Pressung *b*, und dann das Volumen $V_0 - V_1 + V$ bei der Pressung $b - h$, annimmt, nach dem Mariotte'schen Gesetze:

Fig. 741.



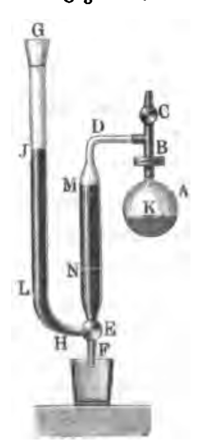
$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 + V} = \frac{b - h}{b},$$

wonach dann das gesuchte Körpervolumen

$$V_1 = V_0 - \left(\frac{b - h}{h}\right) V \text{ folgt.}$$

Wenn man das Volumen V_0 kennt und die Röhre bei der Bestimmung so weit herauszieht, daß die Länge und folglich auch das Volumen *V* der Luftsäule in der Röhre *CD* ein bestimmtes ist, und man beobachtet außer dem Barometerstande *b* noch die Höhe *h* der Flüssigkeitssäule *DE*, so kann man mittels dieser Formel das Volumen V_1 des Körpers *K* berechnen.

Fig. 742.



2) Das Volumenmeter von Regnault. Der Apparat, Fig. 742, wird durch das Füllrohr *G* bei geöffnetem Hahne *C* so weit mit Quecksilber gefüllt, daß dasselbe in den beiden Röhren *HG* und *ED* in der Höhe der Marke *N* steht. Der Körper *K*, dessen Volumen V_1 man messen will, ist in die Kugel *A* gebracht. Wird hierauf der Hahn *C* geschlossen, und durch *G* so viel Quecksilber nachgefüllt, bis dasselbe in *ED* die Marke *M* erreicht hat, so kann man aus der Höhe $MJ = h_1$, um welche das Quecksilber in *HG*

höher steht, als in ED, das Volumen V_1 bestimmen. Bezeichnet nämlich V_0 das Volumen des Raumes $ABCDM$ und V das Volumen MN, so hat man nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$\frac{V_0 + V - V_1}{V_0 - V_1} = \frac{b + h_1}{b},$$

woraus $V_1 = V_0 - \frac{b}{h_1} V$ folgt.

Man kann die Messung auch so vornehmen, daß man bei geöffnetem Hahne C so viel Quecksilber einfüllt, bis dasselbe in beiden Röhren bis zur Marke M reicht, und dann nach Verschließen von C durch den Hahn E so viel Quecksilber ausfließen läßt, daß dasselbe in ED bis zur Marke N sinkt. Steht dann das Quecksilber in HG um die Größe $NL = h_2$ unter N, so hat man:

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 + V - V_1} = \frac{b - h_2}{b},$$

also: $V_1 = V_0 - \frac{b - h_2}{h_2} V$.

Wenn man die beiden hier angegebenen Messungen anstellt, so ist eine gleichzeitige Beobachtung des Barometerstandes nicht nöthig, denn aus der ersten Formel für V_1 folgt:

$$b = \frac{V_0 - V_1}{V} h_1$$

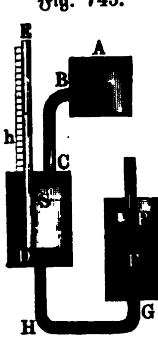
und aus der zweiten Formel:

$$b = \frac{V_0 + V - V_1}{V} h_2.$$

Durch Gleichsetzung der beiden Werthe von b ergiebt sich sodann:

$$V_1 = V_0 - V \frac{h_2}{h_1 - h_2}.$$


Fig. 743.



3) Das Volumenometer von Kopp. Die im Raume $ABCD$, Fig. 743, eingeschlossene Luft hat die äußere Pressung, wenn das Quecksilber in DG die untere Mündung D der Manometerröhre DE berührt. Drückt man aber durch einen Kolben P das Quecksilber in DG bis zu einer gewissen Höhe empor, wobei seine Oberfläche die Spitze S berührt, so wird die abgesperrte Luft zusammengedrückt, und es steigt auch das Quecksilber in der Manometerröhre auf eine an einer Scala abzulesenden Höhe h. Ist nun wieder V_0 das Volumen des Luftraumes $ABCD$,

V_1 das gesuchte Volumen des in denselben gebrachten Körpers und V das Volumen des zugeflossenen Quecksilbers, so hat man dies Mal

$$\frac{V_0 - V_1}{V_0 - V_1 - V} = \frac{b + h}{b},$$

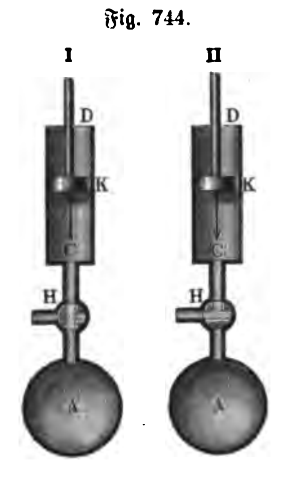
und daher das gesuchte Körpervolumen:

$$V_1 = V_0 - \frac{b + h}{h} V.$$

Die constanten Volumina V_0 und V sind durch Einfüllung von Quecksilber und Abwägen der eingenommenen Quecksilbermenge für jedes Instrument besonders zu bestimmen.

§. 418. **Die Luftpumpe.** Wenn man den Kolben K, Fig. 744, einer Luftpumpe bei der Hahnstellung (I) aufzieht und bei der Hahnstellung (II) niederdrückt, so wirkt dieselbe als Verdünnungspumpe; wenn man dagegen denselben bei Hahnstellung (II) aufzieht und bei der Hahnstellung (I) zurückschiebt, so wirkt sie als Verdichtungspumpe. Bei wiederholtem Auf- und Niederziehen des Kolbens K im Cylinder CD wird dadurch die Luft im Recipienten A, im ersten Falle immer mehr und mehr verdünnt, im zweiten dagegen immer dichter und dichter.

Fig. 744.



1) Die Verdünnungspumpe. Ist V der Recipientenraum, bis zum Hahne H gemessen, ferner V_1 der schädliche Raum, von H bis zum tiefsten Kolbenstande gerechnet, und bezeichnet C den vom Kolben K durchlaufenen Raum, welcher auch durch das Product Fs von Kolbenfläche F und Kolbenweg s gemessen wird, so geht nach dem Mariotte'schen Gesetze die Pressung b der anfangs im Recipienten eingeschlossenen Luft am Ende des Kolbenschubes in die Pressung:

$$b_1 = \frac{V + V_1}{V + V_1 + C} \; b \text{ über.}$$

Da beim Rückgange des Kolbens der schädliche Raum mit Luft von der äußeren Pressung b gefüllt bleibt, so ist ferner für die Pressung b_2 der Luft im Recipienten am Ende des zweiten Zuges:

$$(V + V_1 + C) b_2 = V b_1 + V_1 b$$

$$= \frac{V^2 b}{V + V_1 + C} + \frac{V V_1 b}{V + V_1 + C} + V_1 b, \text{ daher:}$$

$$b_2 = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^2 + \frac{V V_1 b}{(V + V_1 + C)^2} + \frac{V_1 b}{V + V_1 + C}.$$

Ebenso ist für die Spannung b_3 am Ende des dritten Zuges:

$(V + V_1 + C) b_3 = V b_2 + V_1 b$, und daher:

$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^3 b + \frac{V^2 V_1 b}{(V + V_1 + C)^3} + \frac{V V_1 b}{(V + V_1 + C)^2}$$
$$+ \frac{V_1 b}{V + V_1 + C} = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^3 b$$
$$+ \left[\left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^2 + \frac{V}{V + V_1 + C} + 1\right] \frac{V_1 b}{V + V_1 + C},$$

und es läßt sich hiernach leicht ermessen, daß die Pressung b_n am Ende des $n$ten Zuges:

$$b_n = \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^n b$$
$$+ \left[\left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{V + V_1 + C}\right)^{n-2} + \cdots + 1\right] \frac{V_1 b}{V + V_1 + C}$$

zu setzen ist.

Bezeichnet man $\frac{V}{V + V_1 + C}$ durch p und $\frac{V_1}{V + V_1 + C}$ durch q, so so hat man hiernach:

$$b_n = p^n b + (1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1}) q b,$$

oder, da die Summe der in der Parenthese eingeschlossenen geometrischen Reihe $= \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{1 - p^n}{1 - p}$ ist (s. „Ingenieur“ Seite 82), so folgt einfach die gesuchte Endpressung:

$$b_n = \left(p^n + \frac{1 - p^n}{1 - p} q\right) b.$$

Für $n = \infty$ fällt $p^n = 0$ und folglich die möglich kleinste Spannung $b_n = \frac{q b}{1 - p} = \frac{V_1 b}{C + V_1}$ aus.

2) Die Verdichtungspumpe. Gelten dieselben Bezeichnungen wie für die Verdünnungspumpe, so hat man hier für die Luftpressung b_1 am Ende des ersten Schubes:

$$(V + V_1) b_1 = (V + V_1 + C) b, \text{ daher } b_1 = \frac{V + V_1 + C}{V + V_1} b;$$

ferner für die Pressung b_2 am Ende des zweiten Schubes:

$$(V + V_1) b_2 = V b_1 + (V_1 + C) b, \text{ daher:}$$

$$b_2 = \frac{(V + V_1 + C) V b}{(V + V_1)^2} + \frac{V_1 + C}{V + V_1} b$$

$$= \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 b + \left(\frac{V}{V + V_1} + 1\right) \frac{V_1 + C}{V + V_1} b.$$

Ebenso folgt für die Pressung am Ende des dritten Schubes:

$(V + V_1) b_3 = V b_2 + (V_1 + C) b$, und daher:

$$b_3 = \left(\frac{V}{V + V_1}\right)^3 b + \left[\left(\frac{V}{V + V_1}\right)^2 + \frac{V}{V + V_1} + 1\right] \frac{V_1 + C}{V + V_1} b$$

oder, wenn man

$\frac{V}{V + V_1} = p_1$ und $\frac{V_1 + C}{V + V_1} = q_1$ setzt:

$$b_3 = [p_1^3 + (1 + p_1 + p_1^2) q_1] b.$$

Allgemein hat man die Pressung am Ende des $n$ten Kolbenspieles:

$b_n = [p_1^n + (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1}) q_1] b$, oder da

$1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n-1} = \frac{p_1^n - 1}{p_1 - 1} = \frac{1 - p_1^n}{1 - p_1}$ ist,

$$b_n = \left(p_1^n + \frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} q_1\right) b.$$

Für $n = \infty$, wobei $p_1^n = 0$ ist, stellt sich

$$b_n = \frac{q_1 b}{1 - p_1} = \frac{V_1 + C}{V_1} b$$

heraus. Dies ist natürlich auch die größte Spannung, welche durch diese Compressionspumpe erzeugt werden kann.

Wäre der schädliche Raum V_1 = Null, so hätte man bei der Verdünnungspumpe $q = 0$, daher:

$$b_n = p^n b = \left(\frac{V}{V + C}\right)^n b;$$

dagegen bei der Verdichtungspumpe $p_1 = 1$ und $\frac{1 - p_1^n}{1 - p_1} = n$, folglich:

$$b_n = (1 + n q_1) b = \left(1 + n \frac{C}{V}\right) b.$$

Beispiel. Wenn bei einer Luftpumpe der Recipient das Volumen V = 0,02 Cubikmeter und der schädliche Raum die Größe von 0,0002 Cubikmeter einnimmt, während der Cylinderraum 0,006 Cubikmeter beträgt, wie groß ist die Spannung der eingeschlossenen Luft nach 20 Spielen?

1) Beim Verdünnen ist:

$$p = \frac{0{,}02}{0{,}0262} = 0{,}763 \text{ und } q = \frac{0{,}0002}{0{,}0262} = 0{,}00763,$$

daher folgt:

$$b_n = b_{20} = \left(0{,}763^{20} + \frac{1 - 0{,}763^{20}}{1 - 0{,}763} \,.\, 0{,}00763\right) b$$
$$= (0{,}0045 + 0{,}0321)\, b = 0{,}0366\, b.$$

2) Beim Verdichten ist:

$$p_1 = \frac{0{,}02}{0{,}0202} = 0{,}99 \text{ und } q_1 = \frac{0{,}0062}{0{,}0202} = 0{,}307,$$

folglich hat man:

$$b_n = b_{20} = \left(0{,}99^{20} + \frac{1 - 0{,}99^{20}}{1 - 0{,}99} \,.\, 0{,}307\right) b$$
$$= (0{,}818 + 5{,}594)\, b = 6{,}412\, b.$$

Gay-Lussac'sches Gesetz. Einen wesentlichen Einfluß auf die Dichtigkeit und Expansivkraft der Gase hat die Temperatur derselben. Je mehr die in einem Gefäße eingeschlossene Luft erwärmt wird, desto größer zeigt sich auch die Expansivkraft derselben, und je mehr die Temperatur der in einem Gefäße durch einen Kolben abgeschlossenen Luft erhöht wird, desto mehr dehnt sich auch die Luft aus und schiebt den Kolben auswärts. Versuche von Gay-Lussac, welche in neueren Zeiten von Rudberg, Magnus und Regnault wiederholt worden sind, haben ergeben, daß bei gleicher Dichtigkeit die Expansivkraft, und bei gleicher Expansivkraft das Volumen einer und derselben Luftmenge wie die Temperatur wächst. Man kann dieses Gesetz dem Mariotte'schen an die Seite setzen, und es zur Unterscheidung das Gay-Lussac'sche Gesetz nennen. Nach den neuesten Versuchen nimmt die Expansivkraft eines gewissen Luftvolumens bei Erwärmung vom Frost- bis Siedepunkte um 0,367 ihres anfänglichen Werthes zu, oder es wächst bei dieser Temperaturerhöhung das Volumen einer gewissen Luftmasse bei unveränderlicher Spannung um 36,7 Procent. Giebt man die Temperatur nach Centesimalgraden an, so folgt die Ausdehnung für jeden Grad zu 0,00367 und für t^0 Temperatur zu 0,00367 . t; bedient man sich dagegen der Réaumur'schen (80theiligen) Scala, so hat man die Ausdehnung für jeden Grad 0,00459, also für t^0 gleich 0,00459 . t. §. 419.

Diese Verhältnißzahl oder der sogenannte Ausdehnungscoefficient $\delta = 0{,}00367$, gilt eigentlich nur für die atmosphärische Luft; den übrigen Gasen entsprechen im Allgemeinen etwas größere Werthe, auch nimmt selbst bei der atmosphärischen Luft dieser Coefficient mit der Temperatur wenig zu.

Wird eine Luftmasse vom anfänglichen Volumen V_0 und von der Temperatur Null um t Grad erwärmt, ohne eine andere Spannung anzunehmen, so ist das neue Volumen:

$$V = (1 + 0{,}00367\, t)\, V_0,$$

und erhält es die Temperatur t_1, so entsteht das Volumen:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\, t_1)\, V_0.$$

Es folgt durch Division daher das Volumen-, resp. Dichtigkeitsverhältniß:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,t}{1 + 0{,}00367\,t_1} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1}.$$

Geht außerdem noch eine Veränderung in der Spannung vor, ist p_0 die Spannung bei Null, p die bei t und p_1 die bei t_1 Wärme, so hat man:

$$V = (1 + 0{,}00367\ t)\,\frac{p_0}{p}\,V_0,$$

ferner:

$$V_1 = (1 + 0{,}00367\ t_1)\,\frac{p_0}{p_1}\,V_0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1} \cdot \frac{p_1}{p} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1} \cdot \frac{b_1}{b}, \text{ oder:}$$

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_1}.$$

Beispiel. Wenn atmosphärische Luft von 10° Wärme und einem Barometerstande von 0,760 Meter durch das Gebläse und den Lufterhitzungsapparat eines Hohofens in 200° heißen Wind von 0,96 Meter Quecksilbersäule verwandelt wird, so nimmt jeder Cubikmeter Luft nachher das Volumen an:

$$V_1 = \frac{1 + 0{,}00367 \,.\, 200}{1 + 0{,}00367 \,.\, 10} \cdot \frac{0{,}760}{0{,}960} \,.\, 1 = 1{,}673 \,.\, 0{,}792 = 1{,}325 \text{ Cubikmeter.}$$

Anmerkung. Die Formel:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1}$$

läßt sich auf feste und einige liquide Körper anwenden, nur ist hierin für jeden festen Stoff ein besonderes Ausdehnungsverhältniß einzuführen; z. B.

für Gußeisen: $\delta = 0{,}0000336$,
für Glas: $\delta = 0{,}0000258$,
für Quecksilber: $\delta = 0{,}0001802$.

§. 420. **Dichtigkeit der Luft.** Mit Hülfe der Formel am Ende des vorigen Paragraphen läßt sich nun auch die einer gegebenen Temperatur und Spannung der Luft entsprechende Dichtigkeit γ berechnen. Durch neuere Wägungen und Messungen von Seiten Regnault's hat man das Gewicht von einem Cubikmeter atmosphärische Luft bei Null Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerstaad zu 1,2935 Kilogramm gefunden. Da ein Cubikfuß (preuß.) = 0,030916 Cubikmeter ist, so wiegt bei den angegebenen Verhältnissen ein Cubikfuß Luft:

$$2 \,.\, 0{,}030916 \,.\, 1{,}2935 = 0{,}07998 \text{ Pfund.}$$

Ist nun die Temperatur gleich t^0 C., so folgt das specifische Gewicht derselben bei derselben Spannung (0,760 Meter) für Metermaß:

$$\gamma = \frac{1,2935}{1 + 0,00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

für das preußische Maß:

$$\gamma = \frac{0,07998}{1 + 0,00367\ t} \text{ Pfund.}$$

Weicht auch die Expansivkraft von der mittleren ab, so erhält man, unter b den Barometerstand (Meter Quecksilber) verstanden:

$$\gamma = \frac{1,2935}{1 + 0,00367\ t} \frac{b}{0,760} = \frac{1,702\ b}{1 + 0,00367\ t} \text{ Kilogramm.}$$

Für preußisches Maß hat man, wenn b in Pariser Zollen gegeben ist (0,760 Meter = 28,075 Pariser Zoll):

$$\gamma = \frac{0,07998}{1 + 0,00367\ t} \frac{b}{28,075} = \frac{0,002849\ b}{1 + 0,00367\ t} \text{ Pfund.}$$

Wird die Expansivkraft durch den Druck p per Quadratmeter oder per Quadratzoll ausgedrückt, so hat man zu setzen:

$$\gamma = \frac{1,2935}{1 + 0,00367\ t} \frac{p}{10336} = \frac{0,00012514\ p}{1 + 0,00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

oder:

$$\gamma = \frac{0,07998}{1 + 0,00367\ t} \frac{p}{14,14} = \frac{0,005656\ p}{1 + 0,00367\ t} \text{ Pfund.}$$

Bei gleicher Temperatur und Expansivkraft ist die Dichtigkeit des Wasserdampfes nahe $^5/_8$ von der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, weshalb man für Wasserdampf

$$\gamma = {}^5/_8 \frac{0,00012514\ p}{1 + 0,00367\ t} = \frac{0,00007821\ p}{1 + 0,00367\ t} \text{ Kilogramm,}$$

oder:

$$\gamma = {}^5/_8 \frac{0,005656\ p}{1 + 0,00367\ t} = \frac{0,003535\ p}{1 + 0,00367\ t} \text{ Pfund}$$

erhält.

Beispiele. 1) Welches Gewicht hat der in einem cylindrischen Regulator von 12 Meter Länge und 2 Meter Durchmesser enthaltene Wind bei 10° Wärme und 13000 Kilogramm Pressung?

Das specifische Gewicht dieses Windes ist:

$$\gamma = \frac{0,00012514\ .\ 13000}{1 + 0,00367\ .\ 10} = 1,569 \text{ Kilogramm,}$$

folglich beträgt das Gewicht der gedachten Windmasse:

$$G = 2^2 \frac{\pi}{4}\ 12\ .\ 1,569 = 59,16 \text{ Kilogramm.}$$

2) Eine Dampfmaschine gebraucht in der Minute 10 Cubikmeter Dampf von 145° Wärme und 4 Atmosphären Spannung; wie viel Pfund Wasser bedarf sie zur Erzeugung dieser Dampfmenge?

Das specifische Gewicht dieses Dampfes ist:

$$\gamma = \frac{0{,}00007821 \,.\, 4 \,.\, 10336}{1 + 0{,}00367 \,.\, 145} = 2{,}11 \text{ Kilogramm},$$

daher das Gewicht der entsprechenden Wassermenge:

$$G = 21{,}1 \text{ Kilogramm}.$$

§. 421. **Luftmanometer.** Mit Hülfe der in den letzten Paragraphen gewonnenen Ergebnisse läßt sich nun auch die Theorie des Luftmanometers entwickeln. Dasselbe besteht aus einer gut calibrirten, oben mit Luft und unten mit Quecksilber angefüllten Barometerröhre AB, Fig. 745, und aus einem ebenfalls Quecksilber enthaltenden Gefäße CER, welches mit dem Gase oder Dampfe, dessen Spannkraft man messen will, durch ein Rohr CE in Communication gesetzt wird. Aus den Höhen der Luft- und Quecksilbersäulen in AB läßt sich diese Spannkraft wie folgt berechnen. Gewöhnlich ist das Instrument so eingerichtet, daß das Quecksilber in der Röhre mit dem Quecksilber im Gefäße auf gleicher Höhe steht, wenn die Temperatur der eingeschlossenen Luft $t = 10$ Grad und die Spannung im Raume ER dem mittleren Atmosphärendrucke $b = 0{,}76$ Meter oder 28 Zoll gleich ist.

Fig. 745.



Ist aber bei der Spannung b_1 im Raume ER eine Quecksilbersäule h_1 in die Röhre gestiegen und die Länge AS der übrig bleibenden Luftsäule gleich h_2, so hat man die Spannung derselben:

$$z = \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot b$$

und daher den Manometerstand der Luft in ER:

$$b_1 = h_1 + z = h_1 + \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot b.$$

Findet noch ein Temperaturwechsel statt, ist die Temperatur bei der Beobachtung von h_1 und h_2 nicht, wie anfänglich, t, sondern t_1, so hat man die Spannung der Luftsäule AS:

$$z = \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot b,$$

und daher den in Frage stehenden Manometerstand:

$$b_1 = h_1 + \frac{1 + 0{,}00367\, t_1}{1 + 0{,}00367\, t} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_2} \cdot b$$

Für $b = 0{,}760$ Meter $= 28$ Zoll (Pariser) und $t = 10^0$ C. folgt:

$$b_1 = h_1 + 0{,}733\,(1 + \delta t_1)\frac{h}{h_2}\ \text{Meter} = h_1 + 27(1 + \delta t_1)\frac{h}{h_2}\ \text{Zoll (Par.)},$$

worin $h = h_1 + h_2$ die ganze Röhrenlänge, vom oberen Ende A bis zum Quecksilberspiegel HR gemessen, bezeichnet.

Aus dem Manometerstande b_1 folgt die Pressung pro Quadratmeter:

$$p_1 = \frac{10336}{0{,}760}\, b_1 = 13600\, h_1 + 9969\,(1 + 0{,}00367\, t_1)\frac{h}{h_2}\ \text{Kilogramm},$$

oder:

$$p_1 = \frac{14{,}14}{28}\, b_1 = 0{,}505\, h_1 + 13{,}635\,(1 + 0{,}00367\, t_1)\frac{h}{h_2}\ \text{Pfund}.$$

Setzt man $\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \mu$, so hat man auch:

$$(b_1 - h_1)\,(h - h_1) = \mu\, h\, b,$$

und es ergiebt sich durch Auflösung dieser Gleichung:

$$h_1 = \frac{b_1 + h}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + h}{2}\right)^2 + (\mu\, b - b_1)\, h}.$$

Nach dieser Formel läßt sich eine Scala berechnen, welche die Pressung b_1 durch die Quecksilberhöhe h_1 angiebt.

Beispiel. Wenn ein Luftmanometer von 0,600 Meter Röhrenlänge bei 21^0 C. eine Luftsäule von 0,250 Meter zeigt, so ist der entsprechende Barometerstand:

$$b_1 = 0{,}600 - 0{,}250 + 0{,}733\,(1 + 0{,}00367\,.\,21)\,\frac{0{,}600}{0{,}250} = 2{,}244\ \text{Meter},$$

entsprechend einem Drucke von:

$$\frac{2{,}244}{0{,}760} = 2{,}95\ \text{Atmosphären}.$$

Auftrieb der Luft. Das aus §. 391 bekannte Gesetz vom Auftriebe des Wassers gegen die in dasselbe eingetauchten festen Körper läßt sich natürlich auch auf die in der Luft befindlichen Körper anwenden. Ist V das Volumen eines Körpers und γ das Gewicht einer Cubikeinheit Luft, so beträgt, diesem Gesetze zufolge, der Auftrieb $P = V\gamma$; hat folglich der Körper das scheinbare Gewicht G (in der Luft), so ist sein wahres Gewicht (im luftleeren Raume): §. 422.

$$G_1 = G + V\gamma.$$

Ist ferner γ_1 das specifische Gewicht dieses Körpers, so hat man auch:

$$G_1 = V\gamma_1, \text{ daher:}$$

$$V = \frac{G_1}{\gamma_1}, \text{ so daß nun:}$$

$$G_1 = G + \frac{G_1 \gamma}{\gamma_1} \text{ oder } G_1 (\gamma_1 - \gamma) = G\gamma_1, \text{ also:}$$

$$G_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma}\, G \text{ folgt.}$$

Wird der Körper an der Wage durch ein Gewichtsstück G_2 gewogen, dessen specifisches Gewicht γ_2 ist, so gilt für dasselbe die Gleichung:

$$G_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma}\, G.$$

Es folgt daher mittels Division der letzten Gleichungen durch einander das Gewichtsverhältniß:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma} = \frac{1 - \frac{\gamma}{\gamma_2}}{1 - \frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

oder annähernd und meist genügend scharf:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \frac{\gamma}{\gamma_1} - \frac{\gamma}{\gamma_2} = 1 + \gamma\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}\right),$$

oder auch:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right),$$

wenn ε, ε_1 und ε_2 die Dichtigkeiten der Luft, des abgewogenen Körpers und der Gewichtsmasse bezeichnen.

In vielen Fällen der Anwendung sind $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ und $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_2}$ so kleine Brüche, daß man sie ganz außer Acht und das wahre Gewicht G_1 dem scheinbaren Gewichte G gleichsetzen kann.

Anmerkung. Das Gesetz vom Auftriebe der Luft findet auch seine Anwendung bei der Bestimmung der Steigkraft und Steighöhe eines Luftballons AB, Fig. 746. Ist V das Volumen des Ballons, G das ganze scheinbare Gewicht desselben sammt Schiff u. s. w., γ_1 das specifische Gewicht der äußeren und γ_2 das der eingeschlossenen Luft, so hat man den Auftrieb:

$$P = V\gamma_1,$$

und es muß, damit der Ballon noch durch den Auftrieb getragen wird:

$$V\gamma_1 = V\gamma_2 + G$$

sein, oder:

$$V(\gamma_1 - \gamma_2) = G.$$

Der nöthige Fassungsraum des Ballons bestimmt sich daher zu:

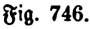


Fig. 746.



$$V = \frac{G}{\gamma_1 - \gamma_2}$$

und das specifische Gewicht der äußeren Luft beim höchsten Stande des Ballons:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V}.$$

Hieraus läßt sich noch mittelst der in §. 416 gefundenen Formel:

$$h = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\,\frac{b}{b_1} = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\,\frac{\gamma}{\gamma_1}$$

die größte Steighöhe h des Ballons bestimmen, wenn hierin für γ das nach §. 420 zu ermittelnde specifische Gewicht der Luft am Aufgangspunkte eingesetzt wird.

Beispiele. 1) Wie verhält sich das wahre Gewicht des trockenen Nadelholzes zum scheinbaren Gewichte desselben, wenn das letztere mittelst messingner Gewichte bei 0° C. und 0,740 Meter Barometerstand bestimmt worden ist?

Das specifische Gewicht der Luft ist nach §. 420:

$$\gamma = 1{,}702\ b = 1{,}702 \cdot 0{,}740 = 1{,}259 \text{ Kilogramm},$$

das des Holzes:

$$\gamma_1 = 0{,}453\ .\ 1000 = 453 \text{ Kilogramm}$$

und das des Messings:

$$\gamma_2 = 8{,}55\ .\ 1000 = 8550 \text{ Kilogramm (s. §. 63).}$$

Es ist folglich das gesuchte Gewichtsverhältniß:

$$\frac{G_1}{G_2} = 1 + 1{,}259\left(\frac{1}{453} - \frac{1}{8550}\right) = 1{,}00261.$$

Es verlieren also hiernach 1000 Kilogramm Holz durch den Auftrieb der Luft ungefähr 2,6 Kilogramm an Gewicht.

2) Wenn ein Luftballon eine Kugel von 10 Meter Durchmesser bildet, die Füllung desselben ein specifisches Gewicht $\gamma_2 = 0{,}28$ Kilogramm hat und das Gewicht des ganzen Ballons sammt Schiff und Last $G = 250$ Kilogramm beträgt, so ist das specifische Gewicht der äußeren Luft an der Stelle, wo das Luftschiff zu steigen aufhört:

$$\gamma_1 = \gamma_2 + \frac{G}{V} = \gamma_2 + \frac{6\,G}{\pi d^3} = 0{,}28 + \frac{1500}{3{,}14\ .\ 1000} = 0{,}758 \text{ Kilogramm.}$$

Ist nun das specifische Gewicht der äußeren Luft am Fußpunkte $\gamma = 1{,}30$ Kilogramm, so hat man:

$$Log.\ nat.\ \frac{\gamma}{\gamma_1} = 2{,}3026\ Log.\,\frac{1{,}3}{0{,}758} = 0{,}5394.$$

Beträgt nun die Spannung der äußeren Luft am Fußpunkte $p = 10500$ Kilogramm, so erhält man die größte Steighöhe des Ballons:

$$h = \frac{p}{\gamma} Log.\,nat.\,\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{10500}{1{,}3}\ 0{,}5394 = 4357 \text{ Meter.}$$

Siebenter Abschnitt.

Dynamik flüssiger Körper.

Erstes Capitel.

Die allgemeinen Lehren über den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen.

§. 423. **Ausfluss.** Die Lehre vom Ausflusse der Flüssigkeiten aus Gefäßen macht den ersten Haupttheil der Hydrodynamik aus. Wir unterscheiden den Ausfluß des Wassers von dem der Luft und den Ausfluß bei unveränderlichem von dem bei veränderlichem Drucke. Zunächst betrachten wir den Ausfluß des Wassers unter constantem Drucke. Constant ist der Druck des Wassers anzunehmen, wenn einerseits dem Gefäße eben soviel Wasser zufließt, als andererseits daraus abfließt, oder wenn die in der betrachteten Zeit ausfließende Wassermenge gegen den Fassungsraum des Gefäßes so klein ist, daß eine Veränderung des Wasserspiegels während dieser Zeit außer Acht gelassen werden darf. Es handelt sich hierbei zunächst um die Bestimmung der Wassermenge, welche unter gegebenem Drucke in einer bestimmten Zeit durch eine Oeffnung von bekannten Abmessungen zum Ausflusse gelangt.

Ist die in einer Secunde ausfließende Wassermenge gleich Q, so hat man das im Laufe von t Secunden unter unverändertem Drucke zum Ausflusse kommende Wasserquantum:

$$V = Qt.$$

Die Ausflußmenge pro Secunde ist abhängig von der Größe der Ausflußöffnung und von der Geschwindigkeit der durch letztere fließenden Wasserelemente. Der Einfachheit der Untersuchung wegen sei zunächst angenommen,

daß die einzelnen Wasserelemente in geraden und parallelen Linien ausströmen und deshalb einen prismatischen Wasserstrahl bilden. Ist nun F der Querdurchschnitt des Wasserstrahles und v die Geschwindigkeit eines jeden Wasserelementes, so bildet die Ausflußmenge pro Secunde ein Prisma von der Basis F und Höhe v, es ist also:

$$Q = Fv \text{ Raumeinheiten}$$

und

$$G = Fv\gamma \text{ Gewichtseinheiten},$$

wofern γ das specifische Gewicht des Wassers oder der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Beispiele. 1) Wenn durch eine Schützenöffnung von 0,6 Quadratmeter das Wasser mit 4 Meter Geschwindigkeit ausfließt, so beträgt die stündliche Ausflußmenge:

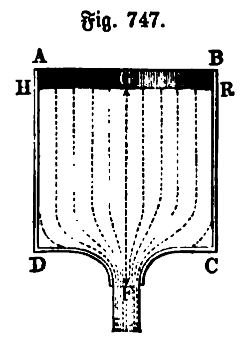
$$Q = 60 \,.\, 60 \,.\, 0{,}6 \,.\, 4 = 8640 \text{ Cubikmeter}.$$

2) Wenn durch eine Mündung von 0,005 Quadratmeter in $2\frac{1}{2}$ Minute 6 Cubikmeter Wasser ausgeflossen sind, so betrug die durchschnittliche Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{V}{Ft} = \frac{6}{0{,}005 \,.\, 2{,}5 \,.\, 60} = 8 \text{ Meter}.$$

Ausflussgeschwindigkeit. Denken wir uns ein mit Wasser angefülltes Gefäß AC, Fig. 747, mit einer innen abgerundeten horizontalen Ausmündung F, welche nur einen sehr kleinen Theil von der Oberfläche HR des Wassers einnimmt. Setzen wir die während des Ausflusses als unveränderlich anzusehende Druckhöhe $FG = h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ und die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= Q$, also ihr Gewicht $= Q\gamma$. Die mechanische Arbeit, welche diese Wassermasse beim Herabsinken von der Höhe h zu verrichten vermag, ist $= Qh\gamma$, und die mechanische Arbeit, welche die ausfließende Masse $Q\gamma$ in sich aufnimmt, indem sie aus der Ruhe in die Geschwindigkeit v übergeht, ist $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (§. 76). Findet nun ein Arbeitsverlust beim Durchgange durch die Oeffnung nicht statt, so sind beide Arbeiten einander gleich, es ist also $h\,Q\gamma = \frac{v^2}{2g} Q\gamma$, d. i.: §. 424.

Fig. 747.



$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}051\, v^2 \text{ Meter} = 0{,}016\, v^2 \text{ Fuß}$$

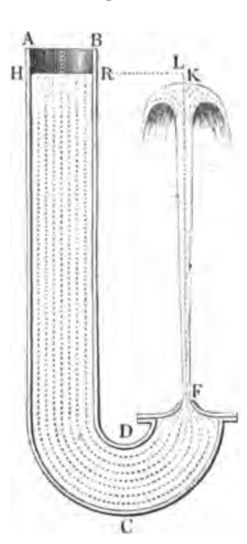
und umgekehrt:

$$v = \sqrt{2gh} = 4{,}429 \sqrt{h} \text{ Meter} = 7{,}906 \sqrt{h} \text{ Fuß}.$$

Es ist also die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers gleich der Endgeschwindigkeit eines von der Druckhöhe frei herabfallenden Körpers.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes läßt sich auch durch folgenden Versuch erweisen. Wenn man im Gefäße ACF, Fig. 748, eine nach oben gerichtete Oeffnung anbringt, so steigt der Wasserstrahl FK vertical in die Höhe und erreicht beinahe das Niveau HR des Wassers im Gefäße, und es läßt sich annehmen, daß er es vollkommen erreichen würde, wenn alle Hindernisse, wie z. B. Widerstand der Luft, Reibung an den Gefäßwänden, Störung durch das zurückfallende Wasser u. s. w. beseitigt wären. Da aber ein auf eine senkrechte Höhe h aufsteigender Körper die Anfangsgeschwindigkeit

Fig. 748.



$$v = \sqrt{2gh}$$

hat (§. 15), so folgt hiernach auch, daß die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

sein muß.

Für eine andere Druckhöhe h_1 ist die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1},$$

man hat daher:

$$v : v_1 = \sqrt{h} : \sqrt{h_1};$$

es verhalten sich also die Ausflußgeschwindigkeiten einer und derselben Flüssigkeit wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beispiele. 1) Die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch eine 0,003 Quadratmeter große Oeffnung unter dem Drucke von 2 Meter ausströmt, ist:

$$Q = Fv = 0{,}003 \,.\, 4{,}429 \sqrt{2} = 0{,}0188 \text{ Cubikmeter} = 18{,}8 \text{ Liter}.$$

2) Damit durch eine Oeffnung von 0,002 Quadratmeter in der Secunde 0,005 Cubikmeter Wasser ausfließen, ist die Druckhöhe erforderlich:

$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}051 \left(\frac{0{,}005}{0{,}002}\right)^2 = 0{,}319 \text{ Meter}.$$

§. 425. **Zu- und Ausflussgeschwindigkeit.** Wenn das Wasser mit einer gewissen Geschwindigkeit c zufließt, so kommt zur Arbeit $hQ\gamma$ noch

die der Geschwindigkeitshöhe $h_1 = \frac{c^2}{2g}$ entsprechende und dem zufließenden Wasser innewohnende Arbeit $\frac{c^2}{2g}\, Q\gamma$ hinzu, weshalb nun zu setzen ist:

$$(h + h_1)\, Q\gamma = \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma, \text{ oder } h + h_1 = \frac{v^2}{2g}$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\,(h + h_1)} = \sqrt{2gh + c^2}.$$

Da bei einem beständig voll erhaltenen Gefäße die zufließende Wassermasse ebenso groß ist, wie die ausfließende Masse Q, so läßt sich $Gc = Fv$ setzen, wofern G den Inhalt des Querschnittes HR (Fig. 747) vom zuströmenden Wasser bezeichnet. Setzen wir hiernach $c = \frac{F}{G}\, v$, so erhalten wir:

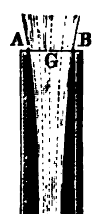
$$h = \frac{v^2}{2g} - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

und daher:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}}.$$

Dieser Formel zufolge nimmt die Geschwindigkeit um so mehr zu, je größer das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{G}$ ist, nach ihr fällt ferner die Geschwindigkeit am kleinsten, nämlich $= \sqrt{2gh}$ aus, wenn der Querschnitt F der Ausflußöffnung sehr klein gegen den Querdurchschnitt G der Zuflußöffnung ist und es nähert sich dieselbe immer mehr und mehr dem Unendlichen, je kleiner der Unterschied zwischen diesen Mündungen ist. Wenn $F = G$, also $\frac{F}{G} = 1$ ist, so fällt $v = \frac{\sqrt{2gh}}{0} = \infty$ und also auch $c = \infty$ aus. Dieses Resultat ist so zu verstehen, daß bei einem bodenlosen Gefäße AC, Fig. 749, das Wasser mit einer unmeßbar großen Geschwindigkeit zu- und abfließen muß, damit der Wasserstrahl GF die Ausmündung CD ausfüllt. Setzt man $v = \frac{Gc}{F}$ ein, so erhält man:

Fig. 749.



$$h = \left[\left(\frac{G}{F}\right)^2 - 1\right] \frac{c^2}{2g}, \text{ daher } F = \frac{G}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{c^2}}},$$

welcher Ausdruck anzeigt, daß der Querschnitt F des ausfließenden Strahles bei einer endlichen Zuflußgeschwindigkeit stets kleiner ist als der Querschnitt

G des zufließenden Strahles, und daß er daher die Ausmündung gar nicht ausfüllt, wenn dieselbe größer ist als $\frac{G}{\sqrt{1+\frac{2gh}{c^2}}}$.

Anmerkung. Die Richtigkeit der schon von Daniel Bernoulli aufgestellten Formel

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

ist später von Vielen in Zweifel gezogen worden; wie unbegründet aber die gemachten Ausstellungen sind, habe ich in der allgemeinen Maschinenencyklopädie von Hülsse, Artikel „Ausfluß", zu beweisen gesucht.

Beispiel. Wenn aus einem prismatischen Gefäße von 0,05 Quadratmeter Querschnitt das Wasser durch eine kreisrunde Bodenöffnung von 0,2 Meter Durchmesser unter einer Druckhöhe ausfließt, welche durch Zufluß constant auf 1 Meter erhalten wird, so ist die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2\,.\,9{,}81\,.\,1}{1-\left(\frac{0{,}02^2\;3{,}14}{4\,.\,0{,}05}\right)^2}} = \sqrt{\frac{19{,}62}{0{,}606}} = 5{,}690 \text{ Meter.}$$

Wäre der Querschnitt der Ausflußöffnung verschwindend klein gegen den Querschnitt des Gefäßes, so würde die Ausflußgeschwindigkeit nur

$$v = \sqrt{2\,.\,9{,}81\,.\,1} = 4{,}429 \text{ Meter betragen.}$$

§. 426. **Ausflussgeschwindigkeit, Druck und Dichtigkeit.** Die gefundenen Formeln gelten nur dann, wenn der Luftdruck auf den Wasserspiegel ebenso groß ist, wie der Druck der Luft gegen die Ausmündung; sind aber diese Drücke verschieden von einander, so bedürfen diese Formeln noch einer Ergänzung. Wird die Oberfläche HR, Fig. 750, durch einen Kolben K mit einer Kraft P_1 gedrückt, welcher Fall z. B. bei Feuerspritzen vorkommt, so denke man sich diese Kraft durch den Druck einer Wassersäule ersetzt. Ist h_1 die Höhe LK dieser Säule und γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so setze man also:

Fig. 750.

$$P_1 = G h_1 \gamma.$$

Führt man nun statt h die um $h_1 = \frac{P_1}{G\gamma}$ vergrößerte Druckhöhe

$$h + h_1 = h + \frac{P_1}{G\gamma}$$

ein, so bekommt man für die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{P_1}{G\gamma}\right)},$$

wobei wir überdies $\frac{F}{G}$ sehr klein voraussetzen. Bezeichnen wir noch den Druck auf jede Flächeneinheit der Oberfläche G durch p_1, so daß also $p_1 = \frac{P_1}{G}$ ist, so haben wir einfacher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)}.$$

Bezeichnen wir endlich den Wasserdruck im Niveau der Ausmündung durch p, so können wir auch setzen:

$$p = h\gamma + p_1 = \left(h + \frac{p_1}{\gamma}\right)\gamma,$$

weshalb

$$v = \sqrt{2g\frac{p}{\gamma}} \text{ folgt.}$$

Hiernächst wächst also die Ausflußgeschwindigkeit wie die Quadratwurzel aus der Pressung auf die Flächeneinheit der Mündung, und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Flüssigkeit. Bei gleichem Drucke fließt also z. B. die 4mal so schwere Flüssigkeit $\frac{1}{2}$mal so schnell aus, als die einfach schwere Flüssigkeit. Da die Luft 770mal leichter als Wasser ist, so würde sie, wenn sie unelastisch wäre, unter gleichem Drucke $\sqrt{770} = 27^3/_4$mal so schnell ausfließen, als Wasser.

Obige Rechnung findet auch ihre Anwendung in den Fällen, wo das ausfließende Wasser noch durch eine andere Flüssigkeitssäule gedrückt wird. Steht über der Oberfläche HR des Wassers HEF in einem Gefäße ACD, Fig. 751, noch eine Flüssigkeitssäule HR_1, deren Höhe $GG_1 = h_1$ und specifisches Gewicht γ_1 ist, so kann man dieselbe, unter γ das specifische Gewicht des Wassers verstanden, durch eine Wassersäule von der Höhe $\frac{\gamma_1}{\gamma}\,h_1$ ersetzen, ohne dadurch den Druck auf HR und die Geschwindigkeit v des durch die Mündung F fließenden Wassers zu ändern. Ist h die Druckhöhe des Wassers, d. h. die Höhe der Trennungsfläche HR über der Mündung F, so hat man die Geschwindigkeitshöhe:

Fig. 751.

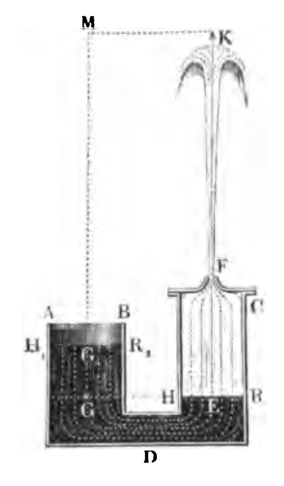
$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{\gamma_1}{\gamma}\,h_1$$

und daher:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{\gamma_1}{\gamma}\,h_1\right)}.$$

Steht die Trennungsfläche HR, Fig. 752, nicht über, sondern um eine gewisse Höhe $EF = h$ unter der Mündung F des Ausflußgefäßes ADC, während die Oberfläche $H_1 R_1$ der Flüssigkeit $H_1 DR$ um die Höhe $G G_1 = h_1$ über der Trennungsfläche HR liegt, so hat man:

Fig. 752.



$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 - h\right)}.$$

Dieser Fall setzt voraus, daß $\frac{\gamma_1}{\gamma} h_1 > h$, oder daß $h_1 \gamma_1 > h\gamma$ sei.

Die Höhe, um welche sich der senkrecht aufsteigende Wasserstrahl FK über die Trennungsfläche HR der beiden Flüssigkeiten erhebt, beträgt im ersten Falle (Fig. 751):

$$\frac{v^2}{2g} - h = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$$

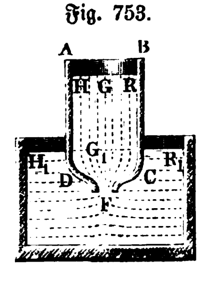
und im zweiten Falle (Fig. 752):

$$\frac{v^2}{2g} + h = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1.$$

Man erkennt hieraus, daß der Strahl das Niveau $H_1 R_1$ nicht erreicht, sobald $\gamma_1 < \gamma$ ist, und daß er das Niveau $H_1 R_1$ übersteigt, wenn $\gamma_1 > \gamma$ ist. Ist $GM = \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1$ die auf Wasser reducirte Höhe der Flüssigkeit, so giebt M das Niveau an, welches der Strahl erreichen müßte, wenn dem Aufsteigen kein Widerstand entgegen wirkte.

Fließt das Wasser nicht frei, sondern unter Wasser aus, so tritt wegen des Gegendruckes eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ein. Liegt die Mündung F des Gefäßes AC, Fig. 753, um die Höhe $FG = h_1$ unter dem Wasserspiegel HR des Oberwassers und um die Höhe $FG_1 = h$ unter dem Wasserspiegel $H_1 R_1$ des Unterwassers, so hat man von oben nach unten die Pressung:

Fig. 753.



$$p_1 = h_1 \gamma$$

und von unten nach oben die Gegenpressung:

$$p = h\gamma,$$

daher die Kraft des Ausflusses:

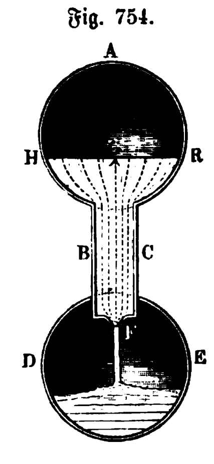
$$p_1 - p = (h_1 - h)\,\gamma$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\frac{p_1 - p}{\gamma}} = \sqrt{2g\cdot(h_1 - h)}.$$

Beim Ausflusse unter Wasser ist also der Niveauabstand $h_1 - h$ zwischen den Wasserspiegeln als Druckhöhe anzusehen.

Fig. 754.



Wird das Wasser auf der Seite der Ausmündung durch die Kraft p und auf der Seite der Einmündung oder des Wasserspiegels durch die Kraft p_1 gepreßt, so hat man nun allgemein:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}.$$

Dieser Fall kommt z. B. vor, wenn das Wasser aus einem verschlossenen Gefäße ABC in ein anderes verschlossenes Gefäß DE, Fig. 754, fließt. Es ist hier h die Tiefe FG der Mündung F unter dem Wasserspiegel HR, p_1 die Pressung der Luft in AHR und p die Pressung der Luft, oder, nach Befinden, des Dampfes in DE.

Beispiele. Wenn der Kolben im 0,3 Meter weiten Cylinder oder Stiefel einer Feuerspritze mit 2000 Kilogramm Kraft niedergedrückt wird, und Hindernisse in den Röhren und Schläuchen nicht vorkämen, so würde das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma}} = \sqrt{2g\frac{P_1}{G\gamma}} = 4{,}429\sqrt{\frac{2000}{0{,}15^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1000}} = 23{,}56 \text{ Meter}$$

durch das Mundstück am Schlauche ausströmen und, vertical gerichtet, auf die Höhe

$$h = 0{,}051\, v^2 = 28{,}30 \text{ Meter steigen.}$$

2) Wenn das Wasser in einen luftverdünnten Raum einströmt, z. B. in den Condensator einer Dampfmaschine, während es von oben oder an seiner freien Oberfläche von der Atmosphäre gedrückt wird, so ist die letzte Formel

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_1 - p}{\gamma}\right)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit in Anwendung zu bringen. Ist die Druckhöhe des Wassers $h = 0{,}8$ Meter, der äußere Barometerstand 0,750 und der innere 0,10 Meter, so hat man, wenn die Quecksilbersäulen auf Wassersäulen reducirt werden:

$$\frac{p_1 - p}{\gamma} = 13{,}6\,(0{,}750 - 0{,}10) = 8{,}84 \text{ Meter;}$$

daher folgt die Geschwindigkeit des in den inneren oder luftverdünnten Raum einströmenden Wassers:

$$v = 4{,}429\sqrt{0{,}8 + 8{,}84} = 13{,}75 \text{ Meter.}$$

3) Steht das Wasser in der Speiseröhre eines Dampfkessels 5 Meter über dem Wasserspiegel im Kessel, und beträgt der Dampfdruck 14000 Kilogramm, der Luftdruck aber 10300 Kilogramm auf einen Quadratmeter, so fließt das Wasser mit einer Geschwindigkeit in den Kessel von:

$$v = 4{,}429\sqrt{5 + \frac{10300 - 14000}{1000}} = 4{,}429\sqrt{5 - 3{,}7} = 5{,}05 \text{ Meter.}$$

§. 427. **Hydraulischer Druck.** Wenn das in einem Gefäße befindliche Wasser in Bewegung ist, so drückt dasselbe, wie aus dem Folgenden sich ergiebt, auf die Gefäßwände weniger stark, als wenn es in Ruhe ist. Man nennt den Druck des bewegten Wassers den hydrodynamischen oder hydraulischen Druck, zur Unterscheidung von dem hydrostatischen Drucke, d. h. demjenigen, welchen das Wasser im Zustande der Ruhe gegen die Gefäßwände ausübt.

Fig. 755.

Es sei, Fig. 755, der Wasserspiegel $HR = G$ dem specifischen Drucke p_0 (etwa dem Atmosphärendrucke) ausgesetzt, entsprechend einer Wassersäule von der Höhe $\frac{p_0}{\gamma}$. Ebenso sei mit p der Druck auf die Mündung F bezeichnet, welche um h unter dem Wasserspiegel liegt, so ist nach §. 425 die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

wenn vorausgesetzt wird, daß der Wasserspiegel G durch Zufluß auf constanter Höhe erhalten wird, d. h. daß das Wasser in HR mit einer Geschwindigkeit c zufließt, welche sich aus $G . c = F . v$ bestimmt.

Bezeichnet man ferner mit v_1 die Geschwindigkeit und p_1 den Druck in einem anderen Querschnitte $H_1 R_1$, dessen Größe G_1 und dessen verticaler Abstand vom Oberwasserspiegel h_1 ist, so hat man ebenso:

$$h - h_1 + \frac{p_1 - p}{\gamma} = \left[1 - \left(\frac{F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Durch Subtraction des ersten Ausdruckes vom zweiten folgt nunmehr:

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_1 + \frac{p_0}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{G_1}\right)^2 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Da nun $Fv = Gc = G_1 v_1$ ist, so hat man:

$$\frac{F}{G}v = c \text{ und } \frac{F}{G_1}v = v_1,$$

folglich auch:

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_1 + \frac{p_0}{\gamma} - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right).$$

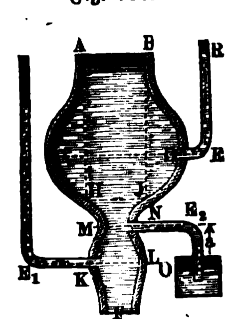
Es ist also hiernach die hydraulische Druckhöhe $\frac{p_1}{\gamma}$ an irgend einer Stelle $H_1 R_1$ gleich der hydrostatischen Druckhöhe daselbst $h_1 + \frac{p_0}{\gamma}$, vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen des Wassers an dieser und an der Eintrittsstelle.

Ist die freie Oberfläche G des Wassers groß, so kann man die Zuflußgeschwindigkeit c außer Acht lassen, und daher:

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_1 + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{v_1^2}{2g}$$

setzen, d. h. die hydraulische Druckhöhe ist um die Geschwindigkeitshöhe kleiner als die hydrostatische Druckhöhe. Je schneller also das Wasser in einer Röhrenleitung fließt, desto schwächer ist der Druck gegen die Röhrenwand. Aus diesem Grunde zerspringen die Röhren oft erst dann, oder lassen erst dann Wasser durch, wenn die Bewegung desselben in ihnen gehemmt wird, wenn sich die Röhren verstopfen u. s. w.

Fig. 756.



Durch den in Fig. 756 abgebildeten Ausflußapparat kann man die Abhängigkeit des hydraulischen Druckes von der Geschwindigkeit anschaulich machen, indem man an verschiedenen Stellen mit dem Gefäße ABF die damit communicirenden Röhrchen E, E_1, E_2 verbindet.

Ist an einer Stelle CD der Querschnitt $G_1 > G$, so hat man $v_1 < c$, daher:

$$\frac{p_1}{\gamma} > h_1 + \frac{p_0}{\gamma}.$$

Wenn also der Wasserspiegel R in dem Röhrchen E demselben Drucke p_0 ausgesetzt ist, welcher auf die freie Oberfläche G wirkt, so wird der Wasserspiegel R in E über dem Wasserspiegel G liegen. Ebenso bleibt das Wasser in dem bei KL abgeführten Röhrchen E_1 unter dem Wasserspiegel G, sobald der Querschnitt G_1 bei KL kleiner als G, daher $v_1 > c$ ist, denn alsdann ist $\frac{p_1}{\gamma} < h_1 + \frac{p_0}{\gamma}$.

Für einen Querschnitt HJ, welcher gleich G ist, hat man:

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_1 + \frac{p_0}{\gamma},$$

d. h. in einem daselbst angesetzten Röhrchen würde das Wasser sich gerade bis zum freien Wasserspiegel G des Gefäßes erheben.

Ist an einer Stelle, z. B. MN, der Querschnitt G_1 so klein, und also v_1 so groß, daß

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} > h_1$$

ist, so hat man, wenn

$$h_1 - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right) = -a$$

gesetzt wird:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - a.$$

Diese Gleichung besagt, daß der hydraulische Druck p_1 an dieser Stelle um die Größe $a\gamma$ kleiner ist, als der äußere Druck p_0 auf die Wasserspiegel. Würde man bei N daher ein Loch in der Gefäßwand anbringen, so würde nicht nur kein Wasser austreten, sondern atmosphärische Luft angesaugt werden, und wenn man in N ein nach unten gekrümmtes Rohr E_2 anordnen würde, welches mit der Mündung in den um a unter MN liegenden Wasserspiegel taucht, so müßte dieses Rohr aus dem Gefäße O sich mit Wasser füllen, indem der auf O wirkende äußere Druck p_0 dann gerade durch den hydraulischen Druck p_1 und das Gewicht $a\gamma$ der emporgehobenen Wassersäule in E_2 im Gleichgewichte gehalten würde. Wenn die Höhe NO kleiner als a, etwa gleich a_1 ist, so steigt durch das Röhrchen E_2 beständig Wasser mit einer Geschwindigkeit entsprechend der Druckhöhe $a-a_1$ empor, tritt bei N in das Gefäß und gelangt bei F mit zum Ausflusse, wovon man sich durch Färbung der Flüssigkeit in O leicht überzeugen kann. Hieraus erklärt sich die in der Technik mehrfach zur Anwendung kommende saugende Wirkung der Flüssigkeitsstrahlen.

Die im Vorstehenden ermittelte Saughöhe $a = \frac{p_0}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}$ erreicht ihren Maximalwerth $a = \frac{p_0}{\gamma}$, wenn der hydraulische Druck p_1 an der betreffenden Stelle Null wird, und es ist also die höchste Saughöhe gleich der Höhe derjenigen Wassersäule, deren Gewicht dem äußeren Luftdrucke p_0 entspricht, also im Durchschnitte gleich 10,336 Meter. Die Bedingung hierfür ist durch $p_1 = 0$ gegeben, man hat daher für diesen Fall:

$$0 = \frac{p_1}{\gamma} = h_1 + \frac{p_0}{\gamma} - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}\right), \text{ woraus}$$

$$v_1 = \sqrt{2g\left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right) + c^2} = \sqrt{2g\left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right)} : \sqrt{1 - \left(\frac{G_1}{G}\right)^2}$$

folgt.

Diese Geschwindigkeit v_1 ist nach §. 425 ebenso groß, wie diejenige, mit welcher Wasser durch die Oeffnung G_1 in einen absolut luftleeren Raum ausfließt, wenn es unter der hydrostatischen Druckhöhe $h_1 + \frac{p_0}{\gamma}$ steht und mit der Geschwindigkeit c durch den Querschnitt G zufließt. Größer kann die Geschwindigkeit v_1 nicht werden, da sonst der hydraulische Druck p_1 negativ werden müßte, was niemals möglich ist.

Setzt man diesen größtmöglichen Werth von v_1 in die Gleichung $G_1 v_1 = Fv$ ein, so erhält man:

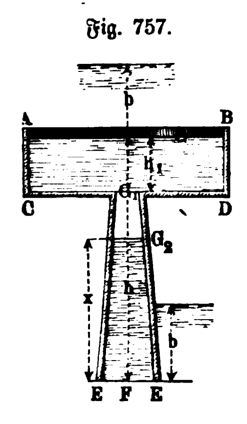
$$G_1 \sqrt{\frac{2g\left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{G_1}{G}\right)^2}} = F \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}},$$

woraus

$$G_1 = FG \sqrt{\frac{h + \frac{p_0 - p}{\gamma}}{(G^2 - F^2)\left(h_1 + \frac{p_0}{\gamma}\right) + F^2\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}} \text{ folgt.}$$

Wenn also dem Gefäße bei MN dieser Querschnitt G_1 gegeben wird, so fließt das Wasser durch denselben mit einer Geschwindigkeit, die ebenso groß ist, als wenn bei MN ein luftleerer Raum sich anschlösse, also mit einer größeren Geschwindigkeit, als diejenige ist, welche das Wasser annehmen würde, wenn das Gefäß bei MN abgeschnitten, und der Querschnitt G_1 dem äußeren Luftdrucke p_0 ausgesetzt wäre. Man erkennt hieraus, wie es möglich ist, das Ausflußquantum, das durch eine Oeffnung G_1, Fig. 757, zum Austritte gelangt, dadurch zu vergrößern, daß man durch das Rohr $G_1 EE$ den äußeren Luftdruck zur Mitwirkung veranlaßt. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, der äußere Luftdruck auf den oberen Wasserspiegel p_0 sei gleich demjenigen p auf die Mündung F, und setzen die Höhe einer diesem Drucke entsprechenden Wassersäule $\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} = b$ (im Mittel: $b = 10{,}336$ Meter), setzen wir ferner den Wasserspiegel G im Verhältniß zu F und G_1 so groß voraus, daß man die Zuflußgeschwindigkeit c oder die Verhältnisse $\frac{F}{G} = \frac{G_1}{G}$ vernachlässigen kann, so geht die obige Bedingungsgleichung über in:

Fig. 757.



$$G_1 \sqrt{2g(h_1 + b)} = F\sqrt{2gh},$$

woraus

$$G_1 = F\sqrt{\frac{h}{h_1 + b}}$$

folgt.

Giebt man dem Querschnitte G_1 diese Größe $F\sqrt{\frac{h}{h_1 + b}}$, so fließt durch denselben in jeder Secunde ein Quantum Wasser $G_1 \sqrt{2g(h_1 + b)}$ aus*); läßt man aber das Rohr $G_1 EE$ fort, so gelangt das Wasser in G_1 nur mit einer Geschwindigkeit $\sqrt{2gh_1}$ zum Ausflusse, es beträgt daher dann das Wasserquantum nur $G_1 \sqrt{2gh_1}$. Wenn der Querschnitt G_1 größer ist als der Werth $F\sqrt{\frac{h}{h_1 + b}}$, so fließt das Wasser durch denselben mit einer entsprechend kleineren Geschwindigkeit v_1, welche sich jedenfalls durch $G_1 v_1 = F\sqrt{2gh}$ bestimmt, da das durch F austretende Wasserquantum constant $F\sqrt{2gh}$ bleibt. Man erkennt aus obiger Formel, daß G_1 kleiner ist als F, so lange $h < h_1 + b$, d. h. so lange $h - h_1 < b$ ist. Für den Fall, daß $h - h_1 = b$, also die Höhe des Querschnittes G_1 über der Mündung gerade gleich der Wasserbarometerhöhe (10,336 Meter) ist, hat man $G_1 = F$. Ist daher das Rohr $G_1 F$ durchweg cylindrisch, so darf die Höhe $G_1 E$ jedenfalls die Wasserbarometerhöhe b nicht übersteigen, wenn für die Ausflußgeschwindigkeit in F die Formel gültig sein soll:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Wenn an irgend einer Stelle der Querschnitt G_1 kleiner ist, als der durch $G_1 = F\sqrt{\frac{h}{h_1 + b}}$ bestimmte Werth angiebt, so kann das durch die Mündung F austretende Wasserquantum auch die Größe $F\sqrt{2gh}$ nicht erreichen, da die gemachte Voraussetzung eines genügenden Zuflusses oberhalb jetzt nicht mehr zutrifft. Das Ausflußquantum durch F ist jetzt vielmehr nur gleich dem maximalen Durchflußquantum durch G_1 zu setzen,

*) Es ist hierbei vorausgesetzt, daß das Rohr $G_1 F$ stets gänzlich vom Wasser ausgefüllt ist. Dies ist erfahrungsmäßig nur dann der Fall, wenn der Uebergang des Querschnittes G_1 in denjenigen F hinreichend allmälig stattfindet. Bei einer zu schnellen oder plötzlichen Veränderung der Querschnitte (zu starker Divergenz der Wandungen $G_1 E$) tritt Luft von unten in das Rohr, und der Ausfluß geschieht so durch G_1, als ob das Rohr $G_1 EE$ gar nicht da wäre.

also hat man zwar dieselbe Gleichung wie früher: $G_1 v_1 = Fv$; nur hat hier v nicht die Größe $\sqrt{2gh}$, sondern bestimmt sich durch:

$$v = \frac{G_1 v_1}{F} = \frac{G_1}{F}\sqrt{2g(h_1 + b)}.$$

Dieser geringeren Geschwindigkeit v entsprechend, bildet sich jetzt in dem Rohre $G_1 F$ ein neuer Wasserspiegel*) bei G_2 von solcher Lage, daß die durch die Druckhöhe $G_2 F$ erzeugte Geschwindigkeit jenen berechneten Werth von v erreicht. Man hat daher für diese Höhe x, da zwischen G_1 und G_2 ein luftleerer Raum zu denken ist, nach §. 425:

$$v = \frac{G_1}{F}\sqrt{2g(h_1 + b)} = \sqrt{\frac{2g(x - b)}{1 - \left(\frac{F}{G_2}\right)^2}},$$

woraus

$$x - b = \left(\frac{G_1}{F G_2}\right)^2 (G_2^2 - F^2)(h_1 + b)$$

folgt.

Ist das Rohr $G_1 E E$ cylindrisch, also $G_2 = F$, so folgt: $x - b = 0$; das Wasser wird daher in einem cylindrischen Rohre in einer Höhe gleich dem Wasserbarometerstande durch den äußeren Luftdruck erhalten.

Rectanguläre Seitenöffnung. Mit Hülfe der Formel §. 428.

$$Q = Fv = F\sqrt{2gh}$$

läßt sich die in einer Secunde ausfließende Wassermenge nur dann unmittelbar berechnen, wenn die Mündung horizontal ist, weil nur hier im ganzen Querschnitte F einerlei Geschwindigkeit vorkommt. Hat aber der Querschnitt der Mündung eine Neigung gegen den Horizont, befindet sich z. B. die Oeffnung in einer Seitenwand des Gefäßes, so fließen die in verschiedenen Tiefen befindlichen Wasserelemente mit verschiedenen Geschwindigkeiten aus, daher kann die Wassermenge Q nicht als ein Prisma angesehen werden und auch die Formel $Q = Fv = F\sqrt{2gh}$ nicht unmittelbar zur Anwendung kommen. Es ist allgemein

$$Q = F_1\sqrt{2gh_1} + F_2\sqrt{2gh_2} + F_3\sqrt{2gh_3} + \cdots$$
$$= \sqrt{2g}\,(F_1\sqrt{h_1} + F_2\sqrt{h_2} + F_3\sqrt{h_3} + \cdots)$$

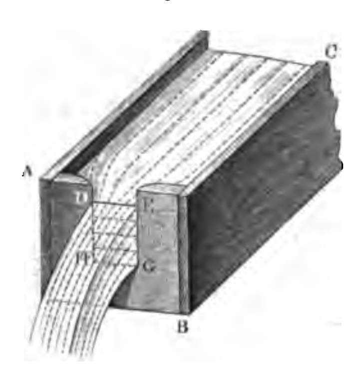
zu setzen, wobei $F_1, F_2, F_3 \ldots$ die Inhalte und $h_1, h_2, h_3 \ldots$ die Druckhöhen der Theile der Mündung bezeichnen.

---

*) Hier ist immer die Voraussetzung einer vollständigen Erfüllung des Rohres $G_1 F$ mit Wasser zu machen. Würden die Rohrwände zu stark divergiren, so ist es auch möglich, daß durch G_1 ein Wasserstrahl herabfällt, ohne die Rohrwand zu berühren.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß durch einen **Wandeinschnitt** oder der sogenannte **Ueberfall**, Fig. 758, dar. Dieser Wandeinschnitt bildet eine rectanguläre Ausflußöffnung $DEGH$, deren Breite $DE = GH$ durch b und Höhe $DH = EG$ durch h bezeichnet werden möge. Zerlegen wir diese Fläche bh durch Horizontallinien in eine sehr große Anzahl n gleich breiter Streifen, so können wir innerhalb eines jeden einerlei Geschwindigkeit voraussetzen. Da, von oben nach unten gegangen, die Druckhöhen dieser Streifen

Fig. 758.



$$\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n} \cdots$$

sind, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten:

$$\sqrt{2g \cdot \frac{h}{n}}, \sqrt{2g \cdot \frac{2h}{n}}, \sqrt{2g \cdot \frac{3h}{n}} \cdots,$$

und da ferner der Inhalt eines Streifens $\frac{bh}{n}$ ist, so hat man die zugehörigen Wassermengen:

$$\frac{bh}{n}\sqrt{2g\frac{h}{n}}, \frac{bh}{n}\sqrt{2g\frac{2h}{n}}, \frac{bh}{n}\sqrt{2g\frac{3h}{n}} \text{ u. s. w.};$$

folglich das Wasserquantum durch den ganzen Querschnitt:

$$Q = \frac{bh}{n}\left(\sqrt{2g\frac{h}{n}} + \sqrt{2g\frac{2h}{n}} + \sqrt{2g\frac{3h}{n}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}\right).$$

Nun ist aber, wie im „Ingenieur“, Seite 88, angegeben wird:

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}$$

oder:

$$1^{1/2} + 2^{1/2} + 3^{1/2} + \cdots + n^{1/2}, = \frac{n^{1+1/2}}{1+1/2} = {}^2/_3\, n^{3/2} = {}^2/_3\, n\sqrt{n};$$

daher folgt die in Frage stehende Wassermenge:

$$Q = \frac{bh\sqrt{2gh}}{n\sqrt{n}} \cdot {}^2/_3\, n\sqrt{n} = {}^2/_3\, bh\sqrt{2gh} = {}^2/_3\, b\sqrt{2gh^3}.$$

Versteht man unter der mittleren Geschwindigkeit v diejenige, welche an allen Stellen vorhanden sein müßte, damit ebenso viel Wasser ausfließt, als bei den verschiedenen Ausflußgeschwindigkeiten innerhalb des ganzen Querprofiles, so läßt sich setzen:

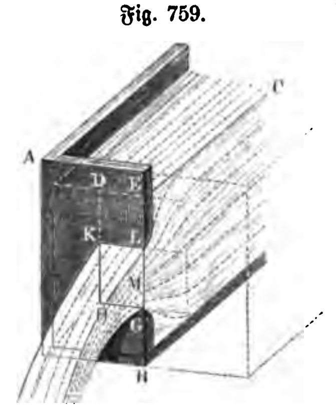
$$Q = bh \,.\, v, \text{ und es folgt sonach:}$$

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2gh},$$

d. h. es ist die mittlere Geschwindigkeit des durch einen rectangulären Wandeinschnitt ausfließenden Wassers zwei Drittel von der Geschwindigkeit an der Schwelle oder unteren Kante des Einschnittes.

Reicht die rectanguläre Ausflußöffnung KG, Fig. 759, mit horizontaler Schwelle GH nicht bis zum Wasserspiegel CE, so findet man die Ausflußmenge, wenn man die Oeffnung als die Differenz zweier Wandeinschnitte $DEGH$ und $DELK$ ansieht. Ist h_1 die Tiefe EG der unteren und $h_2 = EL$ die der oberen Kante, so hat man die Ausflußmenge dieser Einschnitte:

Fig. 759.



$$^2/_3\, b \sqrt{2 g h_1^3}$$

und

$$^2/_3\, b \sqrt{2 g h_2^3},$$

daher das Wasserquantum für die rectanguläre Oeffnung KG:

$$Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2 g h_1^3} - {}^2/_3\, b \sqrt{2 g h_2^3} = {}^2/_3\, b \sqrt{2 g}\, (h_1^{3/2} - h_2^{3/2})$$

und die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{b\,(h_1 - h_2)} = {}^2/_3 \sqrt{2g} \cdot \frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}.$$

Ist h die mittlere Druckhöhe $EM = \frac{h_1 + h_2}{2}$, oder die Tiefe des Mittelpunktes der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und a die Oeffnungshöhe $KH = LG = h_1 - h_2$, so kann man setzen:

$$v = {}^2/_3 \sqrt{2g} \cdot \frac{\left(h + \frac{a}{2}\right)^{3/2} - \left(h - \frac{a}{2}\right)^{3/2}}{a} \text{ oder annähernd:}$$

$$v = \left(1 - \frac{a^2}{96\, h^2}\right) \sqrt{2gh}.$$

Anmerkung. Ist der Querschnitt G des Ausflußreservoirs, parallel zur Mündung genommen, nicht bedeutend größer, als der Querschnitt der Mündung, so hat man noch die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers $v_1 = \frac{F}{G}\, v$ zu berücksichtigen und deshalb zu setzen:

$$Q = \frac{2}{3}\, b \sqrt{2g} \cdot \left[\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Wenn die Seitenwand AB, Fig. 760, unter dem Winkel δ gegen den Horizont geneigt ist, so hat man die Querschnittsdimension ED der Mündung gleich $\frac{h_1 - h_2}{sin.\, \delta}$ zu setzen und daher:

$$Q = \frac{2}{3}\, \frac{b h_1}{sin.\, \delta} \sqrt{2 g h_1} - \frac{2}{3}\, \frac{b h_2}{sin.\, \delta} \sqrt{2 g h_2} = \frac{2}{3}\, \frac{b \sqrt{2g}}{sin.\, \delta} \left(\sqrt{h_1^3} - \sqrt{h_2^3}\right).$$

Fig. 760.

Bezeichnet h die Tiefe irgend eines Elementes der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und ∂h die Breite des Elementes, so hat man allgemein;

$$Q = \int_{h_2}^{h_1} b\, \partial h \sqrt{2 g h} = \sqrt{2g} \int_{h_2}^{h_1} b\, h^{1/2}\, \partial h.$$

Dies giebt für das Rechteck, wo b constant ist:

$$Q = \frac{2}{3}\, b \sqrt{2g}\, \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right).$$

Beispiel. Wenn die untere Kante einer rectangulären, 1 Meter breiten, 0,4 Meter hohen Ausflußöffnung 0,9 Meter unter dem Wasserspiegel liegt, so ist die entsprechende Wassermenge:

$$Q = {}^2/_3 \,.\, 1 \,.\, 4{,}429\, (0{,}9^{3/2} - 0{,}5^{3/2}) = 1{,}4771 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach der Annäherungsformel beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

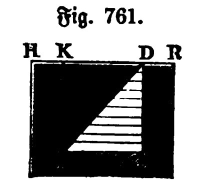
$$v = \left[1 - \frac{1}{96} \left(\frac{0{,}4}{0{,}7}\right)^2\right] 4{,}429 \sqrt{0{,}7} = 3{,}6933 \text{ Meter,}$$

daher die Ausflußmenge:

$$Q = 1 \,.\, 0{,}4 \,.\, 3{,}6933 = 1{,}4773 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 429. **Trianguläre Seitenöffnung.** Außer rectangulären Seitenöffnungen kommen noch trianguläre und kreisförmige Mündungen in der Praxis vor. Handeln wir zunächst von dem Ausflusse durch eine trianguläre Mündung DEG, Fig. 761, mit horizontaler Basis EG und der im Wasserspiegel HR befindlichen Spitze D. Setzen wir die Basis $EG = b$ und die Höhe $DE = h$, theilen wir die letztere in n gleiche Theile und führen durch die Theilpunkte Parallellinien zur Basis, so zerlegen wir die ganze Fläche in schmale Elemente von den Inhalten $\frac{b}{n} \cdot \frac{h}{n}, \frac{2b}{n} \cdot \frac{h}{n}, \frac{3b}{n} \cdot \frac{h}{n} \ldots$, und den Druckhöhen $\frac{h}{n}, \frac{2h}{n}, \frac{3h}{n}$ u. s. w.

Fig. 761.



Für diese folgen die Ausflußmengen:

$$\frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}},\ \frac{2bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{2h}{n}},\ \frac{3bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{3h}{n}}\cdots,$$

und es ergiebt sich durch Summation derselben die Ausflußmenge für die ganze trianguläre Mündung:

$$Q = \frac{bh}{n^2}\sqrt{2g\frac{h}{n}}(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n})$$
$$= \frac{bh\sqrt{2gh}}{n^2\sqrt{n}}(1^{3/2} + 2^{3/2} + 3^{3/2} + \cdots + n^{3/2}),$$

oder da die Reihe in der Parenthese $\frac{n^{3/2}+1}{3/2+1} = {}^2/_5\, n^{5/2}$ giebt:

$$Q = {}^2/_5\, bh\sqrt{2gh} = {}^2/_5\, b\sqrt{2gh^3}.$$

Liegt die Basis DK der Mündung DGK im Wasserspiegel und die Spitze G um h tiefer, so hat man, da durch das Rechteck $DEGK$ ${}^2/_3\, bh\sqrt{2gh}$ ausfließt, die entsprechende Wassermenge:

$$Q = {}^2/_3\, bh\sqrt{2gh} - {}^2/_5\, bh\sqrt{2gh} = {}^4/_{15}\, bh\sqrt{2gh}.$$

Für das Trapez $ABCD$, Fig. 762, dessen obere im Wasserspiegel liegende Basis $AB = b_1$, dessen untere Basis $CD = b_2$ und dessen Höhe $DE = h$ ist, findet man die Wassermenge durch Zusammensetzung aus einem Rechtecke und zwei Dreiecken, nämlich:

$$Q = {}^2/_3\, b_2 h\sqrt{2gh} + {}^4/_{15}\,(b_1 - b_2)\, h\sqrt{2gh}$$
$$= {}^2/_{15}\,(2b_1 + 3b_2)\, h\sqrt{2gh}.$$

Fig. 762.

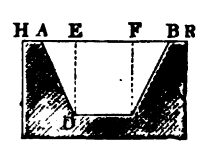
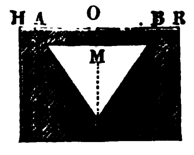


Fig. 763.



Ferner folgt die Ausflußmenge für ein Dreieck CDE, Fig 763, dessen Spitze C um h_1 und dessen horizontale Basis $DE = b$ um $OM = h_2$ unter dem Wasserspiegel liegt, als die Differenz der Wassermengen, welche durch das Dreieck ABC und durch das Trapez $ABED$ fließen würden. Man hat daher, wenn $AB = b_0$ gesetzt wird:

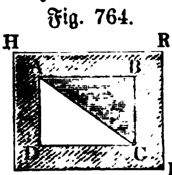
$$Q = {}^4/_{15}\, b_0 h_1\sqrt{2gh_1} - {}^2/_{15}\,(2b_0 + 3b)h_2\sqrt{2gh_2}$$
$$= {}^2/_{15}\sqrt{2g}\,[2b_0(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) - 3bh_2^{3/2}].$$

Für b_0 hat man nun $b_0 : b = h_1 : h_1 - h_2$, also $b_0 = \frac{b h_1}{h_1 - h_2}$ und folglich:

$$Q = {}^2/_{15} \sqrt{2g} \left[\frac{2 b h_1}{h_1 - h_2} (h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) - 3 b h_2^{3/2}\right]$$
$$= {}^2/_{15}\, b \sqrt{2g} \frac{2 h_1^{5/2} - 5 h_1 h_2^{3/2} + 3 h_2^{5/2}}{h_1 - h_2}.$$

Für das Dreieck ACD, Fig. 764, folgt die Ausflußmenge als Differenz der dem Rechteck DB und dem Dreieck ABC entsprechenden Ausflußquanten zu:

Fig. 764.



$$Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2g} (h_1^{3/2} - h_2^{3/2})$$
$$- {}^2/_{15}\, b \sqrt{2g} \frac{2 h_1^{5/2} - 5 h_1 h_2^{3/2} + 3 h_2^{5/2}}{h_1 - h_2}$$
$$= {}^2/_{15}\, b \sqrt{2g} \frac{3 h_1^{5/2} - 5 h_2 h_1^{3/2} + 2 h_2^{5/2}}{h_1 - h_2}.$$

Anmerkung. Bezeichnet in dem letzten Falle x die Tiefe eines horizontalen Streifens der Ausflußöffnung ADC, Fig. 764, unter dem Wasserspiegel, ∂x die Breite und y die Länge dieses Streifens, so hat man:

$$Q = \int y \partial x \,.\, \sqrt{2gx} = \sqrt{2g} \int y x^{1/2} \partial x.$$

Da nun aus der Proportion $y : b = x - h_2 : h_1 - h_2$ für y der Werth $\frac{b}{h_1 - h_2}(x - h_2)$ sich ergiebt, so folgt:

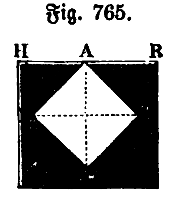
$$Q = \frac{b}{h_1 - h_2}\sqrt{2g} \int_{h_2}^{h_1} (x - h_2) x^{1/2} \partial x = \frac{b}{h_1 - h_2}\sqrt{2g} \int_{h_2}^{h_1} (x^{3/2} \partial x - h_2 x^{1/2} \partial x)$$
$$= \frac{b}{h_1 - h_2} \sqrt{2g} \left[{}^2/_5 (h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) - {}^2/_3 (h_2 h_1^{3/2} - h_2^{5/2})\right]$$
$$= {}^2/_{15} \frac{b\sqrt{2g}}{h_1 - h_2} (3 h_1^{5/2} - 5 h_2 h_1^{3/2} + 2 h_2^{5/2}).$$

Beispiel. Welche Wassermasse fließt durch das Quadrat $ABCD$, Fig. 765, mit verticaler Diagonale AC von 1 Meter Länge, wenn der Eckpunkt A bis zum Wasserspiegel reicht? Die obere Hälfte des Quadrats giebt die Ausflußmenge:

$$Q_1 = {}^4/_{15}\, b \sqrt{2 g h^3} = {}^4/_{15} \,.\, 1 \,.\, 4{,}429 \,.\, \sqrt{{}^1/_8} = 0{,}626 \text{ Cubikmeter}$$

und die untere:

Fig. 765.



$$Q_2 = {}^4/_{15}\, b \sqrt{2g} \frac{2 h_1^{5/2} - 5 h_1 h_2^{3/2} + 3 h_2^{5/2}}{h_1 - h_2}$$
$$= {}^4/_{15} \,.\, 1 \,.\, 4{,}429 \frac{2 - 5 \,.\, 1 \,.\, ({}^1/_2)^{3/2} + 3 \,.\, ({}^1/_2)^{5/2}}{1 - {}^1/_2}$$
$$= 1{,}181 (2 - 1{,}768 + 0{,}530) = 0{,}900 \text{ Cubikmeter},$$

folglich fließt durch die ganze Mündung die Wassermenge:

$$Q = 0{,}626 + 0{,}900 = 1{,}526 \text{ Cubikmeter}.$$

Kreisförmige Seitenöffnung. Für eine kreisförmige Mündung AB, Fig. 766, bestimmt sich die Ausflußmenge nur durch eine auf folgende Weise zu ermittelnde Näherungsformel. Zerlegen wir den Kreis durch concentrische Kreise in gleich schmale Ringe und jeden Ring in lauter gleiche, als Parallelogramme anzusehende Elemente. Ist nun r der Halbmesser eines solchen Ringes, b dessen Breite und n die Anzahl seiner Elemente, folglich $\frac{2\pi r}{n}$ die Länge eines Ringelementes, so hat man die Größe desselben: §. 430.

Fig. 766.

$$K = \frac{2\pi r b}{n}.$$

Ist ferner h die Tiefe CG des Mittelpunktes C unter dem Wasserspiegel HR und φ der Winkel ACK, um welchen ein Element K vom höchsten Punkte A des Ringes absteht, so hat man die Druckhöhe dieses Elementes:

$$KN = CG - CL = h - r\cos.\varphi$$

und daher die Ausflußmenge dieses Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2g(h - r\cos.\varphi)}.$$

Nun ist aber:

$$\sqrt{h - r\cos.\varphi}$$

$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{h}\right)^2\cos.\varphi^2 - \cdots\right]$$

$$= \sqrt{h}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2(1 + \cos.2\varphi) - \cdots\right],$$

daher folgt die Ausflußmenge eines Elementes:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{2}\frac{r}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2(1 + \cos.2\varphi) - \cdots\right].$$

Die Ausflußmenge des ganzen Ringes ergiebt sich, wenn man in der Parenthese statt 1, $n \,.\, 1 = n$, statt $\cos.\varphi$ die Summe aller Cosinus φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$, und statt $\cos.2\varphi$ die Summe aller Cosinus 2φ von $2\varphi = 0$ bis $2\varphi = 4\pi$ nimmt. Da aber die Summe aller Cosinus eines Vollkreises = Null ist, so fallen diese Cosinus ganz aus, und es folgt die Ausflußmenge für den Ring:

$$= \frac{2\pi r b}{n}\sqrt{2gh}\left[n - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot n - \cdots\right]$$

$$= 2\pi r b\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right].$$

Setzt man jetzt $\frac{r}{m}$ statt b und statt r nach einander $\frac{r}{m}$, $\frac{2r}{m}$, $\frac{3r}{m}$ bis $\frac{mr}{m}$, so erhält man die Ausflußmenge aller die ganze Kreisfläche ausmachenden Ringe, und es folgt zuletzt das Ausflußquantum des ganzen Kreises:

$$Q=2\pi r\sqrt{2gh}\left(\frac{r}{m^2}(1+2+3+\cdots+m)-{}^1/_{16}\frac{r^3}{m^4h^2}(1^3+2^3+3^3+\cdots+m^3)\right)$$

$$=2\pi r\sqrt{2gh}\left(\frac{r}{m^2}\cdot\frac{m^2}{2}-{}^1/_{16}\frac{r^3}{m^4h^2}\cdot\frac{m^4}{4}\right)$$

$$=\pi r^2\sqrt{2gh}\left[1-{}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2-\cdots\right], \text{ oder genauer}$$

$$Q=\pi r^2\sqrt{2gh}\left[1-{}^1/_{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2-{}^5/_{1024}\left(\frac{r}{h}\right)^4-\cdots\right].$$

Reicht der Kreis bis zum Wasserspiegel, so ist

$$Q={}^{987}/_{1024}\,\pi r^2\sqrt{2gh}=0{,}964\,F\sqrt{2gh},$$

wenn $F=\pi r^2$ den Inhalt der ganzen Kreisfläche bezeichnet.

Uebrigens ist leicht zu erachten, daß man in allen den Fällen, wenn die Druckhöhe im Mittelpunkte gleich oder größer ist als der Durchmesser der Mündung, den Werth der ganzen Reihe $=1$ setzen und

$$Q=F\sqrt{2gh}$$

annehmen kann. Auch läßt sich diese Regel auf andere Mündungen anwenden, und also in allen den Fällen, wenn der Schwerpunkt einer Mündung mindestens ebenso tief unter dem Wasserspiegel liegt, als die Mündung hoch ist, die Tiefe h dieses Punktes als Druckhöhe ansehen und

$$Q=F\sqrt{2gh} \text{ setzen.}$$

Anmerkung. Bezeichnet r den Halbmesser der kreisförmigen Oeffnung $ADBE$, Fig. 767, ϱ den Halbmesser irgend eines Ringes von der Breite $\partial\varrho$, so fließt durch ein Element K, welches von dem Scheitel A um den Winkel φ absteht, die Wassermenge:

$$\partial q=\partial\varrho\,.\,\varrho\,\partial\varphi\sqrt{2g(h-\varrho\cos.\varphi)}=\varrho\,\partial\varrho\sqrt{2gh}\,.\left(1-\frac{\varrho}{h}\cos.\varphi\right)^{1/2}\partial\varphi$$

$$=\varrho\,\partial\varrho\,.\sqrt{2gh}\,.\left[1-{}^1/_2\frac{\varrho}{h}\cos.\varphi-{}^1/_{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2(1+\cos.2\varphi)-\cdots\right]\partial\varphi.$$

Betrachtet man zunächst ϱ als constant, so giebt die Integration die Ausflußmenge durch die ringförmige Fläche:

$$q=\varrho\,\partial\varrho\sqrt{2gh}\int_0^{2\pi}\left[1-{}^1/_2\frac{\varrho}{h}\cos.\varphi-{}^1/_{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2(1+\cos.2\varphi)\right]\partial\varphi$$

$$=\varrho\,\partial\varrho\sqrt{2gh}\left[2\pi-0-{}^1/_2\frac{\varrho}{h}(\sin.2\pi-\sin.0)\right.$$
$$\left.-{}^1/_{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2(2\pi-0+{}^1/_2\sin.4\pi-\sin.0)\right]$$

$$=\varrho\,\partial\varrho\sqrt{2gh}\,.\,2\pi\left[1-{}^1/_{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right].$$

Wird nun zwischen den Grenzen $\varrho = r$ und $\varrho = 0$ integrirt, so folgt das gesammte Ausflußquantum für den vollen Kreis:

$$Q = 2\pi \sqrt{2gh} \int\limits_0^r \left[1 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right] \varrho\, \partial \varrho = 2\pi \sqrt{2gh} \left[\frac{r^2}{2} - \tfrac{1}{16}\,\frac{r^4}{4h^2}\right]$$

$$= \pi r^2 \sqrt{2gh} \left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right] = F\sqrt{2gh}\left[1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 - \cdots\right].$$

Für den oberen Halbkreis hat man die erste Integration zwischen den Grenzen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ auszuführen, dann folgt:

$$q = \varrho\,\partial\varrho\,.\sqrt{2gh} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{\varrho}{h}\cos.\varphi - \tfrac{1}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2 (1 + \cos.2\varphi)\right] \partial\varphi$$

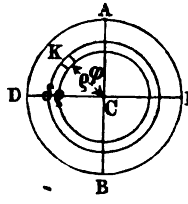
$$= \varrho\,\partial\varrho\,.\sqrt{2gh}\left[\pi - \frac{\varrho}{h} - \frac{\pi}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right]$$

und daher folgt die Wassermenge Q_1 für den oberen Halbkreis DAE:

$$Q_1 = \sqrt{2gh} \int\limits_0^r \left[\pi - \frac{\varrho}{h} - \frac{\pi}{16}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2\right]\varrho\,\partial\varrho = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{2}{3\pi}\,\frac{r}{h} - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right].$$

In gleicher Weise findet man für den unteren Halbkreis, wenn man zwischen den Grenzen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ integrirt:

Fig. 767.



$$Q_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2gh}\left[1 + \frac{2}{3\pi}\,\frac{r}{h} - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2\right].$$

Uebrigens gelten diese Formeln für Q, Q_1 und Q_2 auch bei elliptischen Mündungen mit horizontaler Axe, da die Ausflußmengen unter übrigens gleichen Verhältnissen den Breiten der Mündungen proportional sind, und die Breiten einer Ellipse den Breiten eines gleich hohen Kreises proportional wachsen (s. analyt. Hülfslehren §. 12).

Beispiel. Welche Wassermenge fließt stündlich durch eine kreisförmige Oeffnung von 0,1 Meter Durchmesser, über deren oberem Rande der Wasserspiegel 5 Millimeter hoch steht?

Es ist hier:

$$\frac{r}{h} = \frac{0{,}05}{0{,}055} = \frac{10}{11} = 0{,}909, \text{ daher } \left(\frac{r}{h}\right)^2 = 0{,}826,$$

ferner $1 - \tfrac{1}{32}\left(\frac{r}{h}\right)^2 = 0{,}974$, folglich die Ausflußmenge per Stunde:

$$Q = 60\,.\,60\;\frac{3{,}14\,.\,0{,}1^2}{4}\;4{,}429\,\sqrt{0{,}055}\,.\,0{,}974 = 28{,}590 \text{ Cubikmeter.}$$

Bewegte Ausflussgefässe. Die Ausflußgeschwindigkeit ändert sich, wenn ein vorher in Ruhe befindliches Gefäß in Bewegung übergeht, §. 431.

oder ein in gleichförmiger Bewegung befindliches seinen Bewegungszustand ändert, weil in diesem Falle jedes Wassertheilchen außer seinem Gewichte auch noch durch seine Trägheit gegen die Umgebung wirkt.

Bewegt man das Gefäß AC, Fig. 768, beschleunigt vertical aufwärts, während das Wasser durch die Bodenöffnung F abfließt, so findet eine Vergrößerung, und bewegt man es beschleunigt vertical abwärts, so findet eine Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit statt. Ist die Acceleration p, so drückt jedes Wassermassenelement M nicht bloß durch sein Gewicht Mg, sondern auch durch seine Trägheit Mp, es ist folglich die Kraft eines jeden Elementes im ersten Falle $(g + p) M$ und im zweiten $(g - p) M$, also statt g, $g \pm p$ zu setzen. Hiernach folgt

Fig. 768.

$$\frac{v^2}{2} = (g \pm p) h$$

und sonach für die Ausflußgeschwindigkeit:

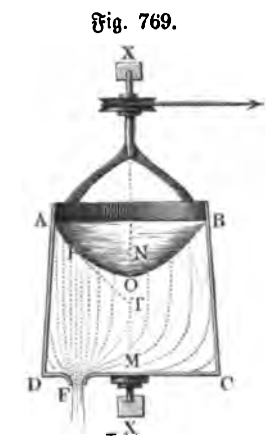
$$v = \sqrt{2 (g \pm p) h}.$$

Steigt das Gefäß mit der Acceleration g empor, so ist

$$v = \sqrt{2 . 2 g h} = 2 \sqrt{g h},$$

also die Ausflußgeschwindigkeit 1,414 mal so groß als beim stillstehenden Gefäße. Fällt das Gefäß durch sein eigenes Gewicht, also mit der Acceleration g, so ist $v = 0$, dann fließt also kein Wasser aus. Bewegt sich das Gefäß gleichförmig auf- oder abwärts, so bleibt $v = \sqrt{2 g h}$, steigt es aber verzögert, so wird $v = \sqrt{2 (g - p) h}$, und fällt es verzögert, so fällt $v = \sqrt{2 (g + p) h}$ aus.

Fig. 769.



Bewegt man das Ausflußgefäß horizontal oder unter einem schiefen Winkel gegen den Horizont, so stellt sich (s. §. 380) der Wasserspiegel schief gegen den Horizont und es findet daher auch eine Veränderung der Ausflußgeschwindigkeit statt.

Bei Umdrehung eines Gefäßes AC, Fig. 769, um seine verticale Axe $\overline{XX}$ bildet der Wasserspiegel einen paraboloidischen Trichter AOB, es steht daher über der Mitte M des Bodens eine kleinere Druckhöhe MO, als nahe am Rande desselben, und es fließt daher auch durch eine Mündung in der Axe das Wasser langsamer,

als durch jede andere gleich große Bodenöffnung F. Bezeichnet h die Druckhöhe MO in der Mitte M, so wäre die Ausflußgeschwindigkeit durch eine Mündung daselbst $= \sqrt{2gh}$; bezeichnet aber y die Entfernung $MF = NP$ einer Mündung F von der Axe $X\overline{X}$ und ω die Winkelgeschwindigkeit, so hat man, da die Subtangente TN des Parabelbogens OP der doppelten Abscisse ON gleich ist, die entsprechende Erhebung des Wassers über der Mitte O:

$$ON = \frac{1}{2}\, TN = \frac{1}{2}\, PN\,.\, tang.\, NPT,$$

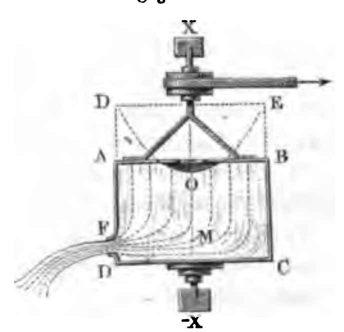
folglich, wenn man noch $tang. NPT = tang. \varphi = \frac{\omega^2 y}{g}$ (s. §. 380) einführt, und die Umdrehungsgeschwindigkeit von F, d. i. ωy, durch w bezeichnet,

$$ON = x = \frac{1}{2} y \cdot \frac{\omega^2 y}{g} = \frac{\omega^2 y^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}.$$

Hiernach ist denn die Ausflußgeschwindigkeit für die Mündung F:

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{w^2}{2g}\right)} = \sqrt{2gh + w^2}.$$

Fig. 770.



Diese Formel gilt für jedes beliebig gestaltete Gefäß, und auch dann noch, wenn es oben verschlossen ist, wie z. B. für AC, Fig. 770, so daß sich der Trichter DOE gar nicht vollständig bilden kann. Es ist auch hier h die Tiefe MO der Mündung unter dem Scheitel O des Trichters, und w die Umdrehungsgeschwindigkeit von der Mündung. Sie findet bei den Reactionsrädern und Turbinen in der Folge ihre Anwendung.

Beispiele. 1) Wenn das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 768, 350 Kilogramm wiegt und mittelst eines über Leitrollen K gehenden Seiles durch ein Gewicht G von 450 Kilogramm aufgezogen wird, so steigt es mit einer Acceleration:

$$p = \frac{450 - 350}{450 + 350} \cdot g = \frac{100}{800}\, g = \frac{1}{8}\, g,$$

und es ist deshalb die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\,(g + p)\, h} = \sqrt{2 \,.\, \frac{9}{8} \,.\, g\, h} = \sqrt{\frac{9}{4}\, g\, h}.$$

Wäre die Druckhöhe $h = 1$ Meter, so würde folglich die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{9}{4}\, g} = \frac{3}{2}\sqrt{9{,}81} = 4{,}698 \text{ Meter betragen.}$$

2) Wenn sich das mit Wasser angefüllte Gefäß AC, Fig. 770, so umdreht, daß es in der Minute 100 Umdrehungen macht, während die Tiefe der Mündung

F unter dem Wasserspiegel in der Mitte 0,6 Meter und die Entfernung von der Axe $X\overline{X}$ 1 Meter beträgt, so ist die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2gh + w^2} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}6 + \left(\frac{2 \,.\, \pi \,.\, 100}{60}\right)^2} = 11{,}02 \text{ Meter.}$$

Steht das Gefäß still, so ist

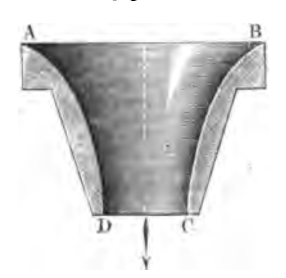
$$v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}6} = 3{,}43 \text{ Meter.}$$

Zweites Capitel.

Von der Contraction der Wasserstrahlen beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand.

§ 432. **Geschwindigkeitscoefficient.** Die in dem vorstehenden Capitel entwickelten Ausflußgesetze stimmen mit den Erfahrungen fast ganz überein, so lange die Druckhöhe in Ansehung der Mündungsweite nicht sehr klein ist, und so lange sich die Ausflußöffnung nach innen allmälig erweitert und sich, ohne Ecken und Kanten zu bilden, an die Boden- oder Seitenfläche des Gefäßes anschließt. Die hierüber an glattpolirten metallenen Mundstücken angestellten Versuche von Michelotti, Eytelwein und Anderen, sowie auch die Versuche des Verfassers haben nachgewiesen, daß die effective oder wirklich ausfließende Wassermenge 96 bis 99 Procent von dem theoretisch bestimmten Wasserquantum ist. Das in der halben natürlichen Größe abgebildete Mundstück AD, Fig. 771, gab die effective Ausflußmenge, bei einer Druckhöhe von 10 Fuß, 98 Procent, bei 5 Fuß, 97 Procent und bei 1 Fuß, 96 Procent des theoretisch bestimmten Ausflußquantums (Versuche mit größeren Mündungen s. Untersuchungen in dem Gebiete der Mechanik und Hydraulik, zweite Abtheil.).

Fig. 771.



Damit der Ausfluß durch ein solches Mundstück möglichst ungestört erfolge, muß die Abrundung desselben nicht nach einem Kreise, sondern nach einer Curve $AD = BC$ erfolgen, deren Krümmung von innen nach außen (von A nach D) allmälig abnimmt. Da ferner

bei diesem Ausflusse der Strahl mit der Mündung gleichen Querschnitt F hat, so ist anzunehmen, daß diese Verminderung der Wassermenge aus einem Verluste an Geschwindigkeit hervorgeht, der in der Reibung oder Adhäsion des Wassers an dem inneren Umfange der Mündung und in der Klebrigkeit des Wassers seinen Grund hat. Wir nennen in der Folge das Verhältniß der effectiven Ausflußgeschwindigkeit zur theoretischen Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ den Geschwindigkeitscoefficienten und bezeichnen denselben durch φ. Hiernach ist also die effective Ausflußgeschwindigkeit im einfachsten Falle:

$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$$

und die effective Ausflußmenge:

$$Q = F v_1 = \varphi F v = \varphi F \sqrt{2gh}.$$

Führen wir für φ den mittleren Werth 0,975 ein, so erhalten wir:

$$Q = 0{,}975 F \sqrt{2gh} = 0{,}975 \;.\; 4{,}429 F \sqrt{h} = 4{,}318 F \sqrt{h}.$$

Einer mit der Geschwindigkeit v_1 ausfließenden Wassermenge Q wohnt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} v_1^2$ inne, vermöge welcher sie die mechanische Arbeit $Q\gamma \frac{v_1^2}{2g}$ zu leisten vermag. Da aber beim Niedersinken von der Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ das Gewicht $Q\gamma$ die Arbeit $Q\gamma h = Q\gamma \frac{v^2}{2g}$ verrichtet, so folgt, daß durch den Ausfluß das Wasser den Arbeitsverlust

$$L = Q\gamma \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right) = (1 - \varphi^2)\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = (1 - 0{,}975^2)\, Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

d. i.

$$L = 0{,}049 \; Q\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ oder } 4{,}9 \text{ Procent}$$

erleidet. Es wird also das ausfließende Wasser durch seine lebendige Kraft 4,9 Procent weniger Arbeit verrichten, als durch sein Gewicht beim Herabsinken von der Höhe h.

Anmerkung. Der Verfasser hat das durch die Formel $v = \sqrt{2gh}$ ausgedrückte Ausflußgesetz auch unter sehr verschiedenem, namentlich unter sehr hohem Drucke von 100 Metern und unter sehr kleinem Drucke von 0,02 Meter geprüft. Ein innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Weite gab bei den Druckhöhen:

h_2 = 0,02 Meter	0,50 Meter	3,5 Meter	17 Meter	103 Meter
φ = 0,959	0,967	0,975	0,994	0,994

s. Civilingenieur, Neue Folge, Band V, erstes und zweites Heft.

§. 433. **Contractscoefficient.** Fließt das Wasser durch eine Mündung in der dünnen Wand, so tritt unter übrigens gleichen Umständen eine bedeutende Verminderung der Ausflußmenge ein, indem die Wasserelemente in convergenten Richtungen durch die Mündung hindurch gehen und dadurch einen zusammengezogenen oder contrahirten Wasserstrahl hervorbringen. Die von Mehreren, namentlich auch die in der neuesten Zeit von dem Verfasser angestellten Strahlenmessungen haben ergeben, daß der Strahl in einer Entfernung, die ungefähr der halben Mündungsweite gleich kommt, die stärkste Zusammenziehung und eine Dicke hat, die 0,8 des Durchmessers der Mündung beträgt. Ist F_1 der Querschnitt des zusammengezogenen Wasserstrahles, sowie F der Querschnitt der Mündung, so hat man hiernach:

$$F_1 = (0{,}8)^2\, F = 0{,}64\, F.$$

Man nennt das Verhältniß $\frac{F_1}{F}$ dieser Querschnitte den Contractionscoefficienten. Bezeichnet man ihn mit α, so ist sonach der mittlere Werth für den Ausfluß des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand $\alpha = 0{,}64$ zu setzen.

So lange man keine nähere Kenntniß über das Gesetz der Contraction der Wasserstrahlen hat, kann man annehmen, daß der durch eine kreisrunde Oeffnung AB, Fig. 772, fließende Strahl einen Rotationskörper $AEEA$ bilde, dessen Umfläche durch Umdrehung eines Kreisbogens AE um die Axe CD des Strahles entsteht. Setzen wir den Durchmesser AA der Mündung $= d$ und die Entfernung CD des contrahirten Querschnittes EE von der Mündung $= \frac{1}{2} d$, so erhalten wir für den Halbmesser

Fig. 772.

$$MA = ME = r$$

des Erzeugungsbogens AE mittels der Gleichung

$$\overline{AN}^2 = EN\,(2\,ME - EN)$$

oder

$$\frac{d^2}{4} = \frac{d}{10}\left(2\,r - \frac{d}{10}\right)$$

den Werth:

$$r = 1{,}3\, d.$$

Mündungen, nach dieser Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformt, geben so ziemlich die Ausflußgeschwindigkeit:

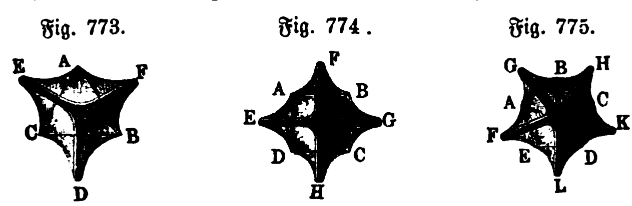
$$v_1 = 0{,}97\, v.$$

Die Contraction des Wasserstrahles hat ihren Grund darin, daß nicht allein das Wasser, welches unmittelbar über der Mündung befindlich ist, ausfließt, sondern auch das zur Seite befindliche Wasser herbeiströmt und

mit zum Ausflusse gelangt. Es findet also schon im Inneren des Gefäßes eine Convergenz der Wasserfäden, ähnlich wie sie die Figur andeutet, statt, und es besteht die Contraction des Wasserstrahles in einer bloßen Fortsetzung dieser Convergenz. Von dieser Bewegung des Wassers in der Nähe der Mündung kann man sich mit Hülfe eines gläsernen Ausflußapparates überzeugen, wenn man kleine Körper, welche wenig leichter oder schwerer als Wasser sind, wie z. B. Sägespäne von Eichenholz, Stücke von Siegellack u. s. w., in das Wasser bringt und mit zum Ausflusse gelangen läßt.

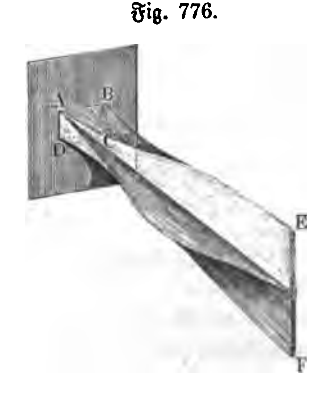
Contrahirte Wasserstrahlen. Fließt das Wasser durch dreiseitige, vierseitige Mündungen u. s. w. in dünnem Bleche, so nimmt der Wasserstrahl besondere Gestalten an. In die Augen fallend ist zumal die Umkehrung des Strahles, oder die veränderte Stellung seines Querschnittes in Hinsicht auf den Querschnitt der Mündung, vermöge welcher eine Ecke dieses Querschnittes mit der Mitte einer Seite der Mündung gleichzuliegen kommt. Hiernach bildet bei einer dreiseitigen Mündung *ABC*, Fig. 773, der Querschnitt des Strahles in einem gewissen Abstande von der Mündung einen dreistrahligen Stern *DEF*, bei einer vierseitigen Mündung *ABCD*, Fig. 774, einen vierstrahligen Stern *EFGH*, ebenso bei einer fünfseitigen §. 434.

Fig. 773. Fig. 774. Fig. 775.



Mündung *ABCDE*, Fig. 775, einen Stern *FGHKL* mit fünf Strahlen u. s. w. Diese Querschnitte sind aber in verschiedenen Abständen von der Mündung sehr verschieden, sie nehmen auf einer gewissen Strecke ab und auf einer folgenden wieder zu u. s. w.; es besteht daher der Strahl aus Blättern oder Rippen von veränderlicher Breite und bildet dadurch, was namentlich beim Ausflusse unter sehr großem Drucke zu beobachten ist, Bäuche und Knoten, ähnlich wie die Cacteen. Ist die Mündung *ABCD*, Fig. 776, rectangulär, so bildet in kleinerer Entfernung von der Mündung der Querschnitt zwar ebenfalls ein Kreuz oder einen Stern, allein

Fig. 776.



in größerer Entfernung nimmt derselbe wieder mehr die Gestalt eines verwendeten Rechtecks EF an.

Den Ausfluß bei den verschiedenartigsten Mündungen hat Bidone beobachtet; genaue Strahlenmessungen bei quadratischen Mündungen sind aber nur von Poncelet und Lesbros angestellt worden (s. Allgemeine Maschinenencyklopädie, Artikel „Ausfluß"). Die letzten Messungen haben auf einen kleinen Contractionscoefficienten 0,563 geführt. Wassermessungen beim Ausflusse durch kleinere Mündungen führen aber auf größere Contractionscoefficienten, sie weisen sogar nach, daß dieselben bei langgezogenen Rechtecken größer sind als bei Rechtecken, die sich mehr den Quadraten nähern.

§. 435. **Ausflusscoefficient.** Wäre beim Ausflusse des Wassers durch Mündungen in der dünnen Wand die effective Geschwindigkeit gleich der theoretischen $v = \sqrt{2gh}$, so hätte man die effective Ausflußmenge:

$$Q = \alpha F . v = \alpha F \sqrt{2gh},$$

weil αF den Querschnitt des Strahles an der Stelle der größten Zusammenziehung, wo sich die Wasserelemente in parallelen Richtungen bewegen, bezeichnet. Dies ist aber keineswegs der Fall, es zeigt sich vielmehr in der Erfahrung, daß Q noch kleiner als $\alpha F \sqrt{2gh}$ ist, daß man also die theoretische Wassermenge $F\sqrt{2gh}$ durch einen Coefficienten multipliciren muß, der kleiner als der Contractionscoefficient ist, um die effective Ausflußmenge zu erhalten. Wir müssen daher annehmen, daß beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand noch ein gewisser Geschwindigkeitsverlust eintrete, deshalb auch einen Geschwindigkeitscoefficienten φ einführen und daher die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$$

setzen. Hiernach ist also die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = F_1 . v_1 = \alpha F . \varphi v = \alpha \varphi F v = \alpha \varphi F \sqrt{2gh}.$$

Nennen wir endlich noch das Verhältniß der effectiven Ausflußmenge Q_1 zum theoretischen oder hypothetischen Ausflußquantum Q den Ausflußcoefficienten und bezeichnen wir ihn in der Folge durch μ, so haben wir:

$$Q_1 = \mu Q = \mu F v = \mu F \sqrt{2gh}$$

und daher:

$$\mu = \alpha \varphi,$$

d. h. der Ausflußcoefficient ist das Product aus dem Contractions- und dem Geschwindigkeitscoefficienten.

Vielfältige Beobachtungen, namentlich aber auch die Messungen des Verfassers, haben darauf geführt, daß der Ausflußcoefficient für Mündungen in der dünnen Wand nicht constant ist, daß er bei kleinen Mündungen und

kleinen Ausflußgeschwindigkeiten größer ist, als bei großen Mündungen und bei großen Geschwindigkeiten, daß er auch bei langen und schmalen Mündungen bedeutend größer ausfällt als bei Mündungen, die sich einer regelmäßigen Form oder dem Kreise nähern.

Für quadratische Mündungen von 1 bis 9 Quadratzoll Inhalt bei 7 bis 21 Fuß Druckhöhe ist, nach den Versuchen von Bossut und Michelotti der mittlere Ausflußcoefficient $\mu = 0,610$, für kreisförmige von $^1/_2$ bis 6 Zoll Durchmesser bei 4 bis 21 Fuß Druckhöhe aber fällt derselbe $\mu = 0,615$ oder ungefähr $^8/_{13}$ aus. Die einzelnen Beobachtungswerthe von Bossut und Michelotti weichen unter einander nicht unbedeutend ab, doch läßt sich aus ihnen eine Abhängigkeit von der Größe der Mündung und der Größe der Druckhöhe nicht entnehmen. Nach den Versuchen des Verfassers ist bei einem Drucke von 0,6 Meter der Ausflußcoefficient für eine kreisrunde Mündung

von 1	Centimeter	Durchmesser	. . .	μ	$= 0,628$
„ 2	„	„	. . .		$= 0,621$
„ 3	„	„	. . .		$= 0,614$
„ 4	„	„	. . .		$= 0,607$.

Dagegen bei einem Drucke von $^1/_4$ Meter für dieselbe Mündung

von 1	Centimeter	Durchmesser	. . .	μ	$= 0,637$
„ 2	„	„	. . .		$= 0,629$
„ 3	„	„	. . .		$= 0,622$
„ 4	„	„	. . .		$= 0,614$.

Man sieht aus diesen Versuchsresultaten deutlich, daß der Ausflußcoefficient zunimmt, wenn die Mündungsgröße und die Druckhöhe abnehmen.

Nehmen wir für μ den mittleren Werth 0,62 und $\alpha = 0,64$ an, so bekommen wir den Geschwindigkeitscoefficienten beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha} = 0,97,$$

also ziemlich so groß wie beim Ausflusse durch abgerundete oder conoidische Mündungen.

Anmerkungen. 1) Versuche von Buff (s. Poggendorff's Annalen, Bd. XLVI.) zeigen, daß die Ausflußcoefficienten bei kleinen Mündungen und kleinen Druckhöhen oder Geschwindigkeiten bedeutend größer sind als bei großen und mittleren Mündungen und Geschwindigkeiten. Eine Mündung von 2,084 Linien Durchmesser gab bei $1^1/_2$ Zoll Druck $\mu = 0,692$, bei 35 Zoll aber $\mu = 0,644$; dagegen eine Mündung von 4,848 Linien Weite bei $4^1/_2$ Zoll Druck $\mu = 0,682$ und bei 29 Zoll $\mu = 0,653$. Aehnliches hat auch der Verfasser gefunden.

2) Beim Ausflusse unter Wasser fallen, nach den Versuchen des Verfassers, die Ausflußcoefficienten nahe um $1^1/_3$ Procent kleiner aus als beim Ausflusse in die Luft.

§. 436. **Versuche.** Es läßt sich der Ausflußcoefficient μ, welcher einer gewissen Ausflußmündung entspricht, finden, wenn man das Wasserquantum V kennt, welches in einer gewissen Zeit t bei einer bekannten Druckhöhe h durch den bekannten Querschnitt F der Mündung ausströmt; es ist nämlich:

$$V = \mu F \sqrt{2gh} \,.\, t,$$

also umgekehrt,

$$\mu = \frac{V}{Ft \,.\, \sqrt{2gh}}.$$

Um aber die beiden Factoren desselben, nämlich den Contractions- und den Geschwindigkeitscoefficienten zu ermitteln, bedarf es entweder noch einer Ausmessung des Strahlenquerschnittes $F_1 = \alpha F$, oder einer Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ mittels der Sprungweite des Strahles. Beide Messungen lassen sich jedoch nur bei dünnen Strahlen mit kreisförmigen Querschnitten erträglich genau bewerkstelligen.

Der kreisförmige Querschnitt F_1 eines Strahles bestimmt sich sehr sicher mit Hülfe eines in Fig. 777 abgebildeten, aus einem Ringe und vier spitz zulaufenden Schrauben A, B, C, D bestehenden Apparates. Die Schrauben sind nach dem Mittelpunkte des Strahlenquerschnittes gerichtet und werden so gestellt, daß ihre Spitzen die Oberfläche des Strahles berühren. Nach diesem wird der Ring von dem Strahle abgezogen und es werden die Abstände der gegenüberstehenden Schraubenspitzen von einander gemessen; zuletzt wird das Mittel d_1 dieser Abstände als Durchmesser des Strahles angenommen. Ist noch d der Durchmesser des Mündungsquerschnittes, so hat man nun:

Fig. 777.

$$\alpha = \frac{F_1}{F} = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2$$

und dann:

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha}.$$

Mißt man die Sprungweite $BC = b$ eines aus dem Mundstücke SA horizontal ausfließenden Strahles AB, Fig. 778, welche einer gewissen Höhe $AC = a$ zukommt, so hat man nach §. 38 die Ausflußgeschwindigkeit:

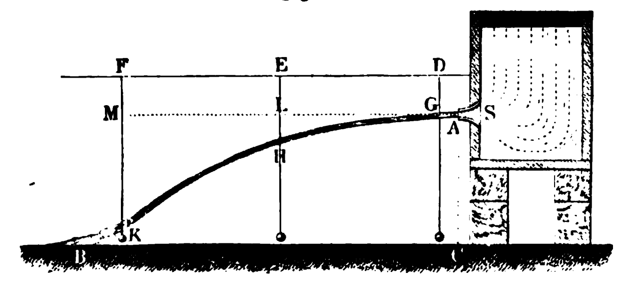
$$v_1 = \sqrt{\frac{gb^2}{2a}},$$

und da nun $v_1 = \varphi v = \varphi \sqrt{2gh}$ ist, so erhält man dann:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \sqrt{\frac{b^2}{4ah}} = \frac{b}{2\sqrt{ah}}$$

und hieraus: $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{2\mu\sqrt{ah}}{b}$.

Fig. 778.



Die Bestimmung von v ist jedoch noch sicherer, wenn man statt a und b die horizontalen und verticalen Coordinaten dreier Punkte der parabolischen Axe AB des Strahles ausmißt, weil dann auch die Axe des Mundstückes eine unbekannte Neigung gegen den Horizont haben kann. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man eine horizontale Schnur DF über dem Strahle ausspannt, von drei gleichweit von einander abstehenden Punkten D, E, F derselben Lothe herabläßt, und an diesen die Abstände DG, EH und FK der Axe des Strahles von DF abmißt. Ist $DF = x$ die horizontale Entfernung der äußersten Punkte von einander, sind ferner die Verticalabstände DG, EH und $FK = z$, z_1 und z_2, und nimmt man G als Coordinatenanfangspunkt an, so hat man die Coordinaten für den Punkt H:

$x_1 = GL = DE = \frac{1}{2}DF = \frac{x}{2}$ und $y_1 = LH = EH - DG = z_1 - z$;

ferner die für den Punkt K:

$x_2 = GM = DF = x$ und $y_2 = MK = FK - DG = z_2 - z$.

Nach §. 41 ist nun, wenn α den Neigungswinkel der Strahlenaxe in G bezeichnet:

$$y_1 = x_1 \, tang.\, \alpha + \frac{g x_1^2}{2 v_1^2 \cos.\alpha^2} \text{ und auch:}$$

$$y_2 = x_2 \, tang.\, \alpha + \frac{g x_2^2}{2 v_1^2 \cos.\alpha^2}, \text{ oder:}$$

$$y_1 - x_1 \, tang.\, \alpha = \frac{g x_1^2}{2 v_1^2 \cos.\alpha^2} \text{ und:}$$

$$y_2 - x_2 \, tang.\, \alpha = \frac{g x_2^2}{2 v_1^2 \cos.\alpha^2}.$$

Es folgt durch Division, da $x_2 = 2x_1$ ist:

$$\frac{y_1 - x_1 \, tang.\, \alpha}{y_2 - x_2 \, tang.\, \alpha} = \frac{1}{4}; \text{ hieraus aber } tang.\, \alpha = \frac{4y_1 - y_2}{x}.$$

Setzt man in eine der vorigen Formeln $1 + tang.\,\alpha^2$ statt $\frac{1}{cos.\,\alpha^2}$, und führt man statt $tang.\,\alpha$ den letzten Ausdruck ein, so erhält man für die in Frage stehende Ausflußgeschwindigkeit die Formel:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g x^2}{2\,(y_2 - x\,tang.\,\alpha)\,cos.\,\alpha^2}} = \sqrt{\frac{(1 + tang.\,\alpha^2)\,g x^2}{2\,(2\,y_2 - 4\,y_1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{g}{4} \cdot \frac{x^2 + (4\,y_1 - y_2)^2}{y_2 - 2\,y_1}}.$$

Der Geschwindigkeitscoefficient ist hiernach:

$$\varphi = \frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{x^2 + (4\,y_1 - y_2)^2}{8\,h\,(y_2 - 2\,y_1)}}.$$

Beispiele. 1) Bei einem Strahle, welcher aus einem gut abgerundeten Mundstücke von 1 Centimeter Weite ohne Contraction ausfloß, wurden folgende Messungsresultate gefunden:

$x = 2{,}480$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}267 - 0{,}1135 = 0{,}1535$ Meter,
$y_2 = z_2 - z = 0{,}669 - 0{,}1135 = 0{,}5555$ „

und die Druckhöhe $h = 3{,}359$ Meter. Hiernach ist der Geschwindigkeitscoefficient:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}48^2 + 0{,}059^2}{8\,.\,3{,}359\,.\,0{,}2485}} = \sqrt{\frac{6{,}1539}{26{,}872\,.\,0{,}2485}} = 0{,}960.$$

Da keine Contraction stattfand, so ist $\alpha = 1$ und daher $\mu = \varphi$. Hiermit stimmen die in der Anmerkung zu §. 432 mitgetheilten Messungsresultate ganz gut überein.

2) Messungen an einem vollständig contrahirten Strahle, welcher durch eine 1 Centimeter weite kreisrunde Mündung in der ebenen dünnen Wand floß, gaben bei der Druckhöhe $h = 3{,}396$ Meter Folgendes:

$x = 2{,}70$ Meter,
$y_1 = z_1 - z = 0{,}2465 - 0{,}1115 = 0{,}1350$ Meter und
$y_2 = z_2 - z = 0{,}6620 - 0{,}1115 = 0{,}5505$ Meter.

Es folgt hieraus:

$$\varphi = \sqrt{\frac{2{,}70^2 + 0{,}01^2}{8\,.\,3{,}396\,.\,0{,}2805}} = \sqrt{\frac{7{,}2901}{27{,}168\,.\,0{,}2805}} = 0{,}978.$$

Aus der gemessenen Ausflußmenge berechnete sich aber $\mu = 0{,}617$, daher ist der Contractionscoefficient $\alpha = \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}631$, womit auch die Strahlenquerschnittsmessungen gut übereinstimmen.

§. 437. **Rectanguläre Seitenöffnungen.** Die genauesten Versuche über den Ausfluß durch größere rectanguläre Seitenmündungen sind in Metz von Poncelet und Lesbros angestellt worden. Die Weiten dieser Mündungen waren 0,2 und in einigen Fällen 0,6 Meter und die Höhen derselben sehr verschieden, nämlich 0,01 bis 0,2 Meter. Um eine vollständige Contraction

herbeizuführen, wurden zur Herstellung dieser Mündungen 4 Millimeter dicke Messingbleche verwendet. Aus den Ergebnissen dieser Versuche haben diese Experimentatoren vermittelst Interpolation die am Ende des Paragraphen folgenden Tabellen für die Ausflußcoefficienten gefunden, die man zur Berechnung der Ausflußmenge benutzen kann.

Ist b die Breite der Ausflußöffnung KL, Fig. 779, und sind h_1 und h_2 die Wasserstände EG und EL über der untersten und über der obersten horizontalen Kante der Mündung, so hat man nach §. 428 die Ausflußmenge:

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}\right).$$

Führt man aber die Oeffnungshöhe $GL = a = h_1 - h_2$ und die mittlere Druckhöhe $EM = h = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ein, so hat man annähernd:

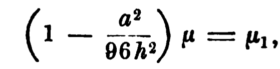
$$Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) ab \sqrt{2gh}$$

und daher die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu Q = \left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu a b \sqrt{2gh}.$$

Fig. 779.

Setzt man noch



$$\left(1 - \frac{a^2}{96 h^2}\right) \mu = \mu_1,$$

so erhält man einfach:

$$Q_1 = \mu_1 a b \sqrt{2gh},$$

und um mit dieser einfachen oder gewöhnlichen Ausflußformel rechnen zu können, sind in den folgenden Tabellen nicht erst die Werthe für μ, sondern die für μ_1 angegeben.

Da das Wasser in der Nähe der Oeffnung in Bewegung ist, so steht es unmittelbar vor der Oeffnung tiefer als in größerer Entfernung von der Wand, in welcher sich die Mündung befindet; es sind deshalb auch zwei Tabellen zusammengestellt worden, die eine für die in größerer Entfernung von der Mündung und die andere für die unmittelbar an der Mündungswand gemessenen Druckhöhen. Man ersieht übrigens aus beiden Tabellen, daß, wenn auch mit einigen Schwankungen, die Ausflußcoefficienten wachsen, wenn die Oeffnung niedriger und die Druckhöhe kleiner wird.

Haben die Mündungen andere Breiten, so bleibt, so lange man keine anderen Versuche zu Grunde legen kann, nichts übrig, als die Coefficienten

dieser Tabellen ebenfalls anzuwenden, um die Ausflußmenge zu berechnen. Daß man hierbei nicht auf große Differenzen stößt, geht aus der Vergleichung der Coefficienten für die Mündungen 0,6 Meter mit denen für die Mündungen 0,2 Meter Breite, bei gleicher Druckhöhe u. s. w. hervor. Sind ferner die Oeffnungen nicht rectangulär, so bestimme man ihre mittlere Breite und mittlere Höhe und führe die diesen Dimensionen entsprechenden Coefficienten in der Rechnung ein. Endlich ist es immer vorzuziehen, die Druckhöhe in einer größeren Entfernung vor der Mündungswand zu messen und die erste Tabelle anzuwenden, da unmittelbar an der Mündung der Wasserspiegel gekrümmt und weniger ruhig ist als mehr oberhalb der Mündung

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt durch eine rectanguläre Oeffnung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn der Wasserspiegel $1\frac{1}{2}$ Meter über der oberen Kante steht? Hier ist:

$$b = 0{,}2,\ \ a = 0{,}1,\ \ h = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{1{,}6 + 1{,}5}{2} = 1{,}55 \text{ Meter},$$

daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}1 \,.\, 0{,}2 \sqrt{2g} \sqrt{1{,}55} = 0{,}02 \,.\, 4{,}429 \,.\, 1{,}245 = 0{,}1103 \text{ Cubikmeter.}$$

Nun giebt aber die Tabelle I. für $a = 0{,}1$ und $h_2 = 1{,}5$ $\mu_1 = 0{,}611$, daher ist die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = 0{,}611 \,.\, 0{,}1103 = 0{,}0674 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Wenn die Breite 0,25, die Höhe 0,15 und der Wasserstand $h_2 = 0{,}045$ Meter beträgt, so ist

$$Q = 0{,}25 \,.\, 0{,}15 \,.\, 4{,}429 \,.\, \sqrt{0{,}12} = 0{,}166 \,.\, 0{,}3464 = 0{,}0575 \text{ Cubikmeter}$$

Der Höhe 0,15 entspricht für $h_2 = 0{,}04$ der Mittelwerth:

$$\mu_1 = \frac{0{,}582 + 0{,}603}{2} = 0{,}5925$$

und für $h_2 = 0{,}05$:

$$\mu_1 = \frac{0{,}585 + 0{,}605}{2} = 0{,}595;$$

da nun aber $h_2 = 0{,}045$ gegeben ist, so setzen wir das neue Mittel

$$\frac{0{,}5925 + 0{,}5950}{2} = 0{,}594$$

als Ausflußcoefficient ein und erhalten so die gesuchte Wassermenge:

$$Q_1 = 0{,}594 \,.\, 0{,}0575 = 0{,}03415 \text{ Cubikmeter.}$$

Anmerkung. Die Ausflußcoefficienten ändern sich nicht wesentlich, wenn man bei einer rectangulären Mündung die Breite mit der Höhe derselben verwechselt, wie aus folgenden Versuchen des Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques, Paris 1851) hervorgeht.

Eine Mündung von 0,60 Meter Breite und 0,02 Meter Höhe gab für die Druckhöhe $h = 0{,}30$ bis 1,50 Meter:

$$\mu_1 = \mu = 0{,}635 \text{ bis } 0{,}622$$

und dagegen, wenn man die Breite 0,60 Meter zur Höhe und die Höhe 0,02 Meter zur Breite machte:

$$\mu_1 = 0{,}610 \text{ bis } 0{,}626, \text{ und}$$
$$\mu = 0{,}638 \text{ bis } 0{,}627.$$

Tabelle I.

Die Ausflußcoefficienten (μ_1) für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer dünnen verticalen Wand, nach Poncelet und Lesbros.

(Die Druckhöhen sind oberhalb der Mündung an einer Stelle gemessen, wo das Wasser als stillstehend angesehen werden kann. — Die Zahlenwerthe unterhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern h_2.	Mündungshöhen a in Metern.							
	Mündungsbreite $b = 0{,}2$ Meter.						Mündungsbreite $b = 0{,}6$ Meter.	
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,20	0,02
0,000	—	—	—	—	—	—	—	—
0,005	—	—	—	—	—	0,705	—	—
0,010	—	—	0,607	0,630	0,660	0,701	—	0,644
0,015	—	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697	—	0,644
0,020	0,572	0,596	0,615	0,631	0,659	0,694	—	0,643
0,030	0,578	0,600	0,620	0,638	0,659	0,688	0,593	0,642
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,658	0,683	0,595	0,642
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679	0,597	0,641
0,060	0,587	0,607	0,627	0,640	0,657	0,676	0,599	0,641
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673	0,600	0,640
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670	0,601	0,640
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668	0,601	0,639
0,100	0,592	0,611	0,630	0,637	0,654	0,666	0,602	0,639
0,120	0,593	0,612	0,630	0,636	0,653	0,663	0,603	0,638
0,140	0,595	0,613	0,630	0,635	0,651	0,660	0,603	0,637
0,160	0,596	0,614	0,631	0,634	0,650	0,658	0,604	0,637
0,180	0,597	0,615	0,630	0,634	0,649	0,657	0,605	0,636
0,200	0,598	0,615	0,630	0,633	0,648	0,655	0,605	0,635
0,250	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,606	0,634
0,300	0,600	0,616	0,629	0,632	0,644	0,650	0,607	0,633
0,400	0,602	0,617	0,628	0,631	0,642	0,647	0,607	0,631
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,644	0,607	0,630
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,642	0,607	0,629
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,607	0,628
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,606	0,628
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,606	0,627
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,605	0,626
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,604	0,626
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,604	0,625
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,603	0,624
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603	0,624
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620*	0,619*	0,615*	0,602	0,623
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602*	0,623
1,700	0,602*	0,610*	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602	0,622
1,800	0,601	0,609	0,615*	0,615	0,614	0,612	0,602	0,621*
1,900	0,601	0,603	0,614	0,613	0,612	0,611	0,602	0,621
2,000	0,601	0,607	0,613	0,612	0,612	0,611	0,602	0,620
3,000	0,601	0,603	0,606	0,6 8	0,610	0,609	0,601	0,615

Anmerkung. Tabellen dieser Art für das preuß. Fußmaß theilt der „Ingenieur" Seite 432 mit.

Tabelle II.

Die Ausflußcoefficienten (μ_1) für den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in einer verticalen dünnen Wand, nach Poncelet und Lesbros.

(Die Druckhöhen sind unmittelbar an der Mündung gemessen. — Die Werthe unterhalb der Sterne (*) sind nur durch Interpolation bestimmt worden.)

Druckhöhe oder Abstand des Wasserspiegels von der oberen Seite der Mündung, in Metern h_2.	Mündungshöhen a in Metern.						
	Mündungsbreite b = 0,2 Meter.						Mündungsweite b = 0,6 Meter.
	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,20
0,000	0,619	0,667	0,713	0,766	0,783	0,795	0,586
0,005	0,597	0,630*	0,668*	0,725*	0,750*	0,775*	0,587
0,010	0,595	0,618	0,642	0,687	0,720	0,762	0,589
0,015	0,594	0,615	0,639	0,674	0,707	0,745	0,590
0,020	0,594*	0,614	0,638	0,668	6,697	0,729	0,591
0,030	0,593	0,613	0,637	0,659	0,685	0,708	0,592
0,040	0,593	0,612	0,636	0,654	0,678	0,695	0,594*
0,050	0,593	0,612	0,636	0,651	0,672	0,686	0,595
0,060	0,594	0,613	0,635	0,647	0,668	0,681	0,596
0,070	0,594	0,613	0,635	0,645	0,665	0,677	0,597
0,080	0,594	0,613	0,635	0,643	0,662	0,675	0,598
0,090	0,595	0,614	0,634	0,641	0,659	0,672	0,599
0,100	0,595	0,614	0,634	0,640	0,657	0,669	0,600
0,120	0,596	0,614	0,633	0,637	0,655	0,665	0,601
0,140	0,597	0,614	0,632	0,636	0,653	0,661	0,602
0,160	0,597	0,615	0,631	0,635	0,651	0,659	0,602
0,180	0,598	0,615	0,631	0,634	0,650	0,657	0,603
0,200	0,599	0,615	0,630	0,633	0,649	0,656	0,603
0,250	0,600	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653	0,604
0,300	0,601	0,616	0,629	0,632	0,644	0,651	0,605
0,400	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,647	0,606
0,500	0,603	0,617	0,628	0,630	0,640	0,645	0,607
0,600	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,643	0,607
0,700	0,604	0,616	0,627	0,629	0,637	0,640	0,607
0,800	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637	0,607
0,900	0,605	0,615	0,626	0,628	0,634	0,635	0,607
1,000	0,605	0,615	0,626	0,628	0,633	0,632	0,606
1,100	0,604	0,614	0,625	0,627	0,631	0,629	0,606
1,200	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626	0,605
1,300	0,603	0,613	0,622	0,624	0,625	0,622	0,604
1,400	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618	0,603
1,500	0,602	0,611	0,620	0,620*	0,619*	0,615*	0,603
1,600	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613	0,602
1,700	0,602*	0,610*	0,617	0,616	0,615	0,612	0,602
1,800	0,601	0,609	0,615*	0,615	0,614	0,612	0,602
1,900	0,601	0,608	0,614	0,613	0,613	0,611	0,602
2,000	0,601	0,607	0,614	0,612	0,612	0,611	0,602
3,000	0,601	0,603	0,606	0,608	0,610	0,609	0,601

Ueberfälle. Fließt das Wasser durch Ueberfälle oder Einschnitte in §. 438.
einer dünnen Wand, wie z. B. FB, Fig. 780, so erleidet der Strahl an drei Seiten eine Contraction, wodurch ebenfalls eine Verminderung der Ausflußmenge herbeigeführt wird. Es ist daher das Ausflußquantum für diese Mündungen:

Fig. 780.

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu b h \sqrt{2gh}$$

zu setzen. Hier ist aber die Druckhöhe $EH = h$ oder der Wasserstand über der Ueberfallsschwelle F nicht unmittelbar an der Schwelle, sondern mindestens 1 Meter vor der Wand, in welcher sich die Mündung befindet, zu messen, weil der Wasserspiegel vor der Mündung eine Senkung erleidet, die nach der Mündung zu größer und größer wird und in der Mündungsebene selbst eine Größe GR von 0,1 bis 0,25 der Druckhöhe FR beträgt, so daß die Dicke FG des Wasserstrahles in dieser Ebene nur 0,9 bis 0,75 der Druckhöhe oder des Wasserstandes beträgt.

Ueber den Ausfluß des Wassers durch Ueberfällle in dünnen Wänden sind von Vielen Versuche angestellt worden, und es bieten deren Resultate eine große Mannigfaltigkeit, aber nicht überall die gewünschte Uebereinstimmung dar. Die Ergebnisse der Versuche von Poncelet und Lesbros an Ueberfällen von 2 und 6 Decimeter Breite enthalten folgende Tabellen.

1. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 0,2 Meter Breite, nach Poncelet und Lesbros.

Druckhöhe h in Metern.	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,22
Ausfluß-coefficient $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu$.	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	0,385

2. Tabelle der Ausflußcoefficienten für Ueberfälle von 0,6 Meter Breite.

Druckhöhe h in Metern.	0,06	0,08	0,10	0,12	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
Ausfluß-coefficient $\mu_1 = {}^2/_3\,\mu$.	0,412	0,409	0,406	0,403	0,400	0,395	0,391	0,391	0,391	0,390

Bei ungefähren Bestimmungen kann man hiernach $\mu_1 = 0{,}4$ setzen. Versuche an Ueberfällen mit größeren Breiten gaben Eytelwein im Mittel $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0{,}42$ und Bidone $\mu_1 = \frac{2}{3} \,.\, 0{,}62 = 0{,}41$ u. s. w. Die ausgedehntesten Versuche sind von d'Aubuisson und Castel ausgeführt worden. Aus ihnen folgert d'Aubuisson, daß für Ueberfälle, deren Breite nicht mehr als den dritten Theil der Breite des Canales oder der Wand beträgt, worin sich der Ueberfall befindet, μ im Mittel 0,60, also $\frac{2}{3}\mu = 0{,}40$ zu setzen sei, daß dagegen für Ueberfälle, welche über die ganze Wand weggehen, oder mit dem Canale einerlei Breite haben, $\mu = 0{,}665$ also $\mu_1 = 0{,}444$ angenommen werden müsse, daß endlich bei anderen Verhältnissen zwischen der Ueberfall- und Canalbreite die Ausflußcoefficienten sehr verschieden, und zwar zwischen 0,58 und 0,66 liegend, ausfallen. Die 1853 und 1854 in Hanswyk an Ueberfällen von 3 bis 6 Meter Breite und 0,1 bis 1,0 Meter Druckhöhe angestellten Versuche gaben $\mu = 0{,}64$ bis 0,65, also $\frac{2}{3}\mu = 0{,}427$ bis 0,433. S. die Zeitschrift des Archit.- und Ingen.-Vereins für Hannover 1857. Die vom Verfasser angestellten Untersuchungen über den Ausfluß des Wassers durch Ueberfälle bringen weiter unten (§. 444) die Veränderlichkeit dieser Ausflußcoefficienten auf Gesetze zurück.

Beispiele. 1) Ein Ueberfall von 0,25 Meter Breite und 0,15 Meter Wasserstand oder Druckhöhe giebt in der Secunde die Wassermenge:

$$Q = 0{,}393 \,.\, b\,h\,\sqrt{2gh} = 0{,}393 \,.\, 4{,}429 \,.\, 0{,}25 \,.\, (0{,}15)^{3/2} = 0{,}435 \,.\, 0{,}0581$$
$$= 0{,}0253 \text{ Cubikmeter.}$$

2) Welche Breite hat man einem Ueberfalle zu geben, der bei einem Wasserstande von 0,2 Meter pro Secunde 0,25 Cubikmeter Wasser durchlassen soll? Es ist:

$$b = \frac{Q}{\mu_1 \sqrt{2gh^3}} = \frac{0{,}25}{0{,}4 \,.\, 4{,}429\, \sqrt{0{,}2^3}} = 1{,}58 \text{ Meter.}$$

Nimmt man nach Eytelwein $\mu_1 = 0{,}42$ an, so folgt:

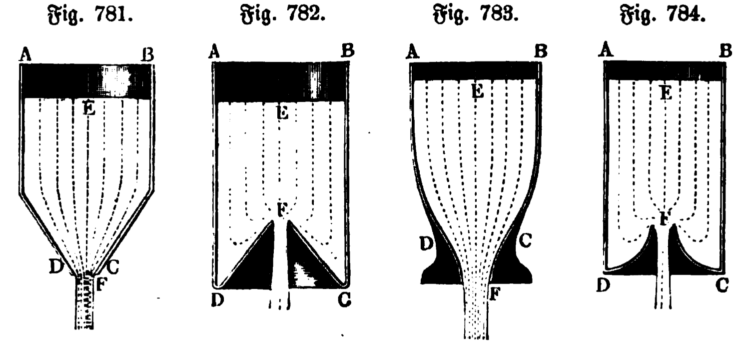
$$b = \frac{0{,}25}{0{,}42 \,.\, 4{,}429\, \sqrt{0{,}2^3}} = 1{,}50 \text{ Meter.}$$

§. 439. **Maximum und Minimum der Contraction.** Bei dem Ausflusse des Wassers durch Mündungen in einer ebenen Wand steht die Axe des Strahles rechtwinkelig auf der Wandfläche, und es ist deshalb die Größe der Contraction eine mittlere; bildet aber die Axe der Mündung oder des Strahles einen spitzen Winkel mit dem die Mündung enthaltenden Theile der Wand, so fällt die Contraction kleiner aus, und ist der Winkel zwischen dieser Axe und den inneren Randflächen der Oeffnung ein stumpfer, so stellt sich eine noch größere Contraction heraus. Den einen Fall repräsentirt Fig. 781, und den anderen Fig. 782. Jedenfalls hat diese Verschiedenheit

der Contraction darin ihren Grund, daß dort die von den Seiten zufließenden Wasserelemente weniger, hier aber mehr von ihrer Richtung abgelenkt werden, wenn sie durch die Mündung gehen und zu einem Strahle sich vereinigen.

Die Contraction ist ein Minimum, d. h. Null, wenn durch allmälige Zusammenziehung der die Mündung umfassenden Wand das Zufließen von der Seite ganz verhindert wird, und dagegen ein Maximum, wenn die Wand der Richtung des Strahles entgegen gerichtet ist, so daß gewisse Wasserelemente sich um 180° wenden müssen, um in die Mündung zu gelangen. Beide

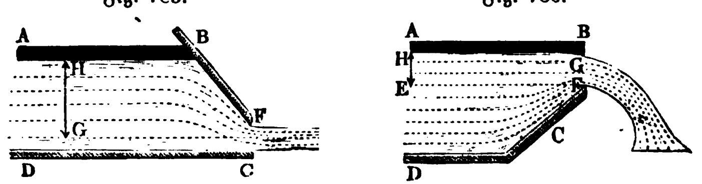
Fig. 781. Fig. 782. Fig. 783. Fig. 784.



Fälle sind in den Figuren 783 und 784 abgebildet. In dem ersten Falle ist der Ausflußcoefficient beinahe 1, nämlich 0,96 bis 0,98, und im zweiten hat er sich bei den Messungen von Borda, Bidone und von dem Verfasser im Mittel = 0,53 herausgestellt.

In der Praxis kommen, durch convergente Wände herbeigeführt, Veränderungen der Ausflußcoefficienten sehr oft vor, namentlich tritt der Fall bei Schützen ein, wenn diese gegen den Horizont geneigt sind, wie z. B. Fig. 785 vor Augen führt. Poncelet fand für eine derartige Schutzöffnung den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,80$, wenn das Schutzbret unter 45° geneigt war,

Fig. 785. Fig. 786.



und dagegen μ nur $= 0,74$ bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad, d. h. bei einer Böschung von $\frac{1}{2}$. Für derartige Ueberfälle, Fig. 786, wo ebenfalls wie bei der Poncelet'schen Schütze nur an einer Seite Contraction eintritt, fand der Verfasser $\mu = 0,70$, also $\mu_1 = \frac{2}{3}\mu = 0,467$ bei einer Neigung von 45°; und $\mu = 0,67$, also $\mu_1 = 0,447$, bei einer Neigung von $63\frac{1}{2}$ Grad.

Nach M. Boileau (s. dessen Traité de la mesure des eaux courants) läßt sich für einen Ueberfall, welcher aufwärts und zwar so geneigt ist, daß das Verhältniß seiner Verticalprojection zur Horizontalprojection 3, also der Neigungswinkel $71\frac{1}{2}$ Grad beträgt, der Ausflußcoefficient = 0,973mal dem Ausflußcoefficienten für einen senkrechten Ueberfall setzen. Ferner folgert Boileau aus seinen Versuchen für senkrechte, gegen den Strom schräg gestellte Ueberfälle, daß bei der Schräge von 45 Grad der Ausflußcoefficient 0,942, und bei der von 65 Grad gar nur 0,911 von dem Werthe des Ausflußcoefficienten des normalen Ueberfalles zu setzen ist, wobei natürlich die Länge der ganzen Ueberfallkante als Mündungslänge angesehen wird.

Beispiel. Wenn das unter dem Winkel von 50 Grad geneigte Schutzbrett, welches quer über ein 0,75 Meter breites Gerinne weggeht, um 0,15 Meter gezogen wird, und sich hierauf der Wasserspiegel um 1,2 Meter über den Gerinnboden stellt, so läßt sich die (vertical gemessene) Oeffnungshöhe:

$$a = 0{,}15 \,.\, sin.\, 50^0 = 0{,}115 \text{ Meter},$$

und die mittlere Druckhöhe:

$$h = 1{,}2 - \tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}115 = 1{,}1425 \text{ Meter}$$

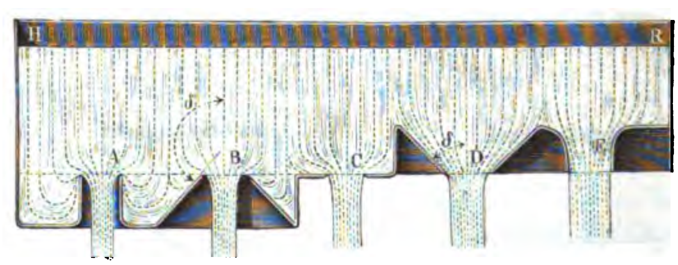
setzen.

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}78$ an, so folgt die Ausflußmenge in einer Secunde:

$$Q = 0{,}78 \,.\, 0{,}75 \,.\, 0{,}115 \,.\, 4{,}429 \sqrt{1{,}1425} = 0{,}318 \text{ Cubikmeter}.$$

§. 440. **Contractionsscala.** Die Contraction eines Wasserstrahles ist um so größer, je mehr die Richtung des von der Seite zuströmenden Wassers von der Bewegungsrichtung des Strahles abweicht. Bei dem Ausflusse durch die Mündung C, Fig. 787, in der ebenen dünnen Wand beträgt der Winkel δ, um welchen die Bewegungsrichtung der von

Fig. 787.



der Seite zuströmenden Wasserelemente von der Axen- oder Bewegungsrichtung des Strahles abweicht, den Rechtwinkel $\left(\frac{\pi}{2}\right)$, bei der Mündung A, welche von einer dünnen Röhrenwand gebildet wird, mißt dieser Winkel δ, 2 Rechte (π); bei dem Ausflusse durch ein conisch divergentes Mundstück B ist δ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, ferner bei dem Ausflusse durch ein conisch convergentes Ansatz-

stück D ist δ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und bei dem cylindrischen Mundstücke E mit innerer Abrundung ist er $= 0$ Grad zu setzen.

Um das Gesetz kennen zu lernen, nach welchem die Contraction mit dem Winkel δ abnimmt, hat der Verfasser an einer größeren Anzahl von Mundstücken von 2 Centimeter Mündungsweite unter verschiedenem Drucke (von 1 bis 10 Fuß) eine ganze Reihe von Versuchen angestellt und die Ergebnisse derselben in folgender Tabelle zusammengestellt:

δ	180^0	$157\frac{1}{2}^0$	135^0	$112\frac{1}{2}^0$	90^0	$67\frac{1}{2}^0$	45^0	$22\frac{1}{2}^0$	$11\frac{1}{4}^0$	$5\frac{3}{4}^0$	0^0
μ	0,541	0,546	0,577	0,606	0,632	0,684	0,753	0,882	0,924	0,949	0,966

Diese Tabelle giebt allerdings nur die Ausflußcoefficienten (μ) an, welche den verschiedenen Abweichungswinkeln δ zukommen; die Contractionscoefficienten sind noch ein bis zwei Procent größer, da bei jedem Ausflusse auch ein kleiner Verlust an Geschwindigkeit eintritt. Um bei dem Eintritte des Wassers in die Ansatzstücke D und E keinen Verlust an lebendiger Kraft zu erleiden, wurden diese Stücke bei der Einmündung abgerundet. Die Reibung, welche das Wasser bei der Bewegung an den Wänden dieser Mundstücke zu überwinden hat, wird im folgenden Capitel bestimmt werden.

Anmerkung. Nach den Berechnungen des Herrn Prof. Zeuner (s. „Civilingenieur", Band II., Seite 55) läßt sich, den angegebenen Versuchen zufolge,

$$\mu_\delta = \mu_{\frac{1}{2}\pi} (1 + 0,33214 \, (cos. \, \delta)^3 + 0,16672 \, (cos. \, \delta)^4)$$

setzen, wenn $\mu_{\frac{1}{2}\pi}$ den Ausflußcoefficienten für die Mündung in der dünnen ebenen Wand bezeichnet, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Ausflusse $\frac{1}{2}\pi = 90^0$ ist, und dagegen μ_δ den Ausflußcoefficienten für eine Mündung in der conischen dünnen Wand ausdrückt, wo die größte Ablenkung der Wasserfäden beim Eintritt in die Mündung $= \delta$ ist.

Partielle Contraction. Wir haben seither nur den Fall kennen §. 441 gelernt, wo das Wasser von allen Seiten her der Oeffnung zufließt und einen ringsherum contrahirten Strahl bildet, und müssen nun noch die Fälle in Untersuchung ziehen, wenn das Wasser nur von einer oder einigen Seiten her gegen die Oeffnung strömt und deshalb einen nur theilweise contrahirten Strahl hervorbringt. Um diese Contractionsverhältnisse von einander zu unterscheiden, wollen wir den Fall, wenn der Strahl auf allen Seiten contrahirt, die vollständige, und den Fall, wenn der Strahl nur auf einen Theil seines Umfanges zusammengezogen ist, die unvollständige oder partielle Contraction nennen. Die unvollständige Contraction wird herbei-

geführt, wenn eine Mündung in der ebenen dünnen Wand durch andere Wände in der Richtung des Strahles auf einer oder mehreren Seiten eingefaßt ist. In Fig. 788 sind vier gleich große Mündungen *a*, *b*, *c*, *d* im Boden *A C* eines Gefäßes abgebildet. Die Contraction beim Ausflusse durch die Mündung *a* in der Mitte des Bodens ist vollständig, weil bei ihr das Wasser von allen Seiten zuströmen kann; die Contraction beim Ausflusse durch *b*, *c* und *d* ist aber unvollständig, weil bei diesen das Wasser nur von drei, zwei oder einer Seite zuströmen kann. Ebenso ist, wenn eine rectanguläre Seitenöffnung bis zum Boden des Gefäßes geht, die Contraction partiell, weil dann dieselbe auf der Seite im Boden wegfällt; wenn ferner die Schutzöffnung bis zum Boden und bis an die Seitenwände des Gerinnes reicht, so bleibt nur noch an einer Seite Contraction übrig.

Die partielle Contraction macht sich auf zweierlei Weise bemerklich. Erstens giebt sie dem Strahl eine schiefe Richtung, und zweitens bewirkt sie einen stärkeren Ausfluß.

Fig. 788.

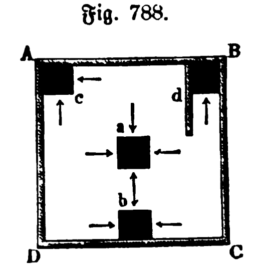
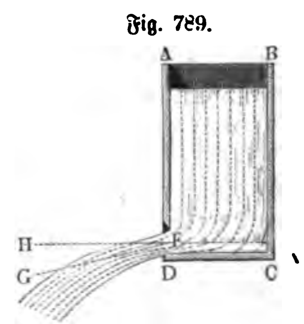


Fig. 789.



Reicht z. B. die Seitenöffnung *F*, Fig. 789, bis an den Boden *CD*, so daß daselbst eine Contraction nicht eintreten kann, so weicht die Axe *FG* des Strahles um einen Winkel *HFG* von ungefähr 9 Grad von der Normalen *FH* der Mündungsebene ab. Viel größer stellt sich aber noch die Schiefe des Strahles heraus, wenn zwei benachbarte Seiten der Mündung eingefaßt sind. Ist die Mündung an zwei gegenüber liegenden Seiten eingefaßt, und die Contraction an denselben aufgehoben, so tritt natürlich eine solche Abweichung nicht ein, wohl aber nimmt der Strahl auf den nicht eingefaßten Seiten in einiger Entfernung außerhalb der Mündung noch mehr Ausbreitung an, als wenn diese Einfassung nicht vorhanden wäre. Wenn auch durch die partielle Contraction eine größere Ausflußmenge erzielt wird, so muß man sie doch in der Regel zu vermeiden suchen, weil durch sie der Strahl eine abweichende Richtung und eine große Ausbreitung erleidet.

Versuche über den Ausfluß des Wassers bei partieller Contraction sind von Bidone und von dem Verfasser angestellt worden. Sie haben gezeigt, daß die Ausflußcoefficienten mit dem Verhältnisse des eingefaßten Theiles

zum ganzen Umfange fast gleichmäßig zunehmen; doch ist leicht zu ermessen, daß diese Beziehung eine andere wird, wenn der Umfang beinahe oder ganz eingefaßt und die Contraction beinahe oder ganz aufgehoben ist. Setzen wir das Verhältniß der Einfassung zum ganzen Umfange $= n$, und verstehen wir unter $\varkappa$ eine Erfahrungszahl, so können wir, wenn auch nur annähernd, das Verhältniß des entsprechenden Ausflußcoefficienten μ_n der partiellen Contraction zum Ausflußcoefficienten μ_0 bei vollständiger Contraction:

$$\frac{\mu_n}{\mu_0} = 1 + \varkappa n, \text{ und folglich } \mu_n = (1 + \varkappa n)\,\mu_0 \text{ setzen.}$$

Die Versuche Bidone's geben für kleine kreisförmige Mündungen $\varkappa = 0{,}128$ und für quadratische $\varkappa = 0{,}152$; die des Verfassers haben für kleine rectanguläre Mündungen $\varkappa = 0{,}134$, für größere (Poncelet-mündungen) bei 0,2 Meter Breite und 0,1 Meter Höhe aber $\varkappa = 0{,}157$ geliefert (s. die Zeitschrift: „der Ingenieur“, Bd. 2). In der Anwendung kommen fast nur rectanguläre Mündungen mit Einfassungen vor; wir werden für sie den mittleren Werth $\varkappa = 0{,}155$ annehmen und hiernach

$$\mu_n = (1 + 0{,}155 \,.\, n)\,\mu_0$$

setzen. Bei einer rectangulären Seitenöffnung von der Höhe a und Breite b ist $n = \frac{b}{2(a+b)}$, wenn die Contraction an einer Seite b wegfällt, wenn z. B. diese Seite in der Ebene des Bodens liegt, ferner $n = 1/2$, wenn eine Seite a und eine Seite b eingefaßt sind, und $n = \frac{2a+b}{2(a+b)}$, wenn auf einer Seite b und auf beiden Seiten a die Contraction verhindert wird, wenn z. B. die Mündung die ganze Breite des Reservoirs einnimmt und bis zur Bodenebene reicht.

Beispiel. Welches Wasserquantum liefert eine 0,8 Meter breite, 0,2 Meter hohe verticale Schutzöffnung bei einem Drucke von 0,45 Meter über der oberen Mündungsseite, wenn die Mündung bis zum Gerinnboden reicht und daher die Contraction am Boden wegfällt?

Die theoretische Ausflußmenge ist:

$$Q = 0{,}2 \,.\, 0{,}8 \,.\, 4{,}429\,\sqrt{0{,}45 + 0{,}1} = 0{,}525 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach der Poncelet'schen Tabelle ist bei vollständiger Contraction $\mu = 0{,}607$ zu setzen; nun hat man aber:

$$n = \frac{0{,}8}{2\,(0{,}8 + 0{,}2)} = 0{,}4,$$

daher ist für den vorliegenden Fall:

$$\mu_n = (1 + 0{,}155 \,.\, 0{,}4) \,.\, 0{,}607 = 0{,}645$$

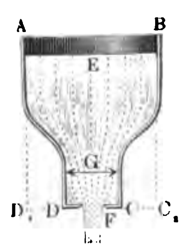
und das effective Ausflußquantum:

$$Q_1 = 0{,}645 \,.\, 0{,}525 = 0{,}339 \text{ Cubikmeter.}$$

Unvollkommene Contraction. Die Contraction des Wasserstrahles ist auch noch davon abhängig, ob das Wasser vor der Mündung ziem- §. 442.

lich in Ruhe steht, oder ob es mit einer gewissen Geschwindigkeit vor derselben ankommt. Je schneller das Wasser der Ausflußöffnung zuströmt, desto weniger ist der Strahl zusammengezogen, und desto größer fällt auch die Ausflußmenge aus. Die oben angegebenen und untersuchten Contractions- und Ausflußverhältnisse beziehen sich nur auf den Fall, wenn sich die Mündung in einer großen Wand befindet, und daher angenommen werden kann, daß das Wasser nur mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit der Mündung zufließt. Wir müssen nun auch die Contractions- und Ausflußverhältnisse kennen lernen, wenn der Mündungsquerschnitt nicht viel kleiner ist als der Querschnitt des zufließenden Wassers, und folglich das Wasser schon mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit an der Mündung ankommt. Um diese beiden Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir die Contraction bei stillstehendem Oberwasser die vollkommene und die bei bewegtem Oberwasser die unvollkommene Contraction nennen. Unvollkommen ist z. B. die Contraction beim Ausfluß aus dem Gefäße AC, Fig. 790,

Fig. 790.



weil der Querschnitt F der Mündung nicht viel kleiner ist als der Querschnitt G des ankommenden Wassers oder der Inhalt der Wand CD, in welcher sich diese Mündung befindet. Hätte dagegen das Gefäß die Form ABC_1D_1, wäre also der Inhalt der Bodenfläche C_1D_1 viel größer als der Mündungsquerschnitt F, so würde der Ausfluß mit vollkommener Contraction vor sich gehen. Uebrigens unterscheidet sich der unvollkommen contrahirte Wasserstrahl nicht bloß durch seine größere Stärke, sondern auch dadurch von dem vollkommen contrahirten Wasserstrahle, daß er nicht so durchsichtig und krystallähnlich ist wie dieser.

Setzt man das Verhältniß zwischen den Flächenräumen der Mündung F und der Mündungswand G, also $\frac{F}{G} = n$, den Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction $= \mu_0$ und den bei unvollkommener Contraction $= \mu_n$, so kann man mit großer Genauigkeit, den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen und Rechnungen zufolge, setzen:

1) für kreisförmige Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0\,[1 + 0,04564\,(14,821^n - 1)] \text{ und}$$

2) für rectanguläre Mündungen:

$$\mu_n = \mu_0\,[1 + 0,0760\,(9^n - 1)]\ ^*).$$

Zur Erleichterung der Rechnung in Fällen der Anwendung sind die Cor-

*) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers u. s. w. Leipzig 1843.

rectionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ der Ausflußcoefficienten wegen Unvollkommenheit der Contraction in folgenden kleinen Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für kreisrunde Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,007	0,014	0,023	0,034	0,045	0,059	0,075	0,092	0,112	0,134

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,161	0,189	0,223	0,260	0,303	0,351	0,408	0,471	0,546	0,631

Tabelle II.

Die Correctionen der Ausflußcoefficienten für rectanguläre Oeffnungen.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,009	0,019	0,030	0,042	0,056	0,071	0,088	0,107	0,128	0,152

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,178	0,208	0,241	0,278	0,319	0,365	0,416	0,473	0,537	0,608

In diesen Tabellen stehen oben verschiedene Werthe von den Querschnittsverhältnissen $n = \frac{F}{G}$ und unmittelbar darunter die entsprechenden Zusätze der Ausflußcoefficienten wegen der Unvollkommenheit der Contraction. Z. B. für das Querschnittsverhältniß $n = 0,35$, d. i. für den Fall, wenn der Inhalt der Mündung 35 Hundertel vom Inhalte der ganzen Mündungswand ist, hat man bei kreisförmigen Mündungen

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0,075,$$

und bei rectangulären Mündungen $= 0,088$; es ist also der Ausflußcoef-

ficient bei vollkommener Contraction im ersten Falle um 75 Tausendtel und im zweiten um 88 Tausendtel größer zu machen, um den entsprechenden Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction zu erhalten. Wäre der Ausflußcoefficient $\mu_0 = 0{,}615$, so hätte man daher im ersten Falle:

$$\mu_{0{,}85} = 1{,}075 \,.\, 0{,}615 = 0{,}661,$$

und im zweiten Falle:

$$\mu_{0{,}85} = 1{,}088 \,.\, 0{,}615 = 0{,}669.$$

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt die rectanguläre, 0,4 Meter breite, 0,15 Meter hohe Seitenmündung F, wenn dieselbe in einer rectangulären Wand CD, Fig. 791, von 0,6 Meter Breite und 0,3 Meter Höhe ausgeschnitten ist, und die Druckhöhe $EH = h$ im stillstehenden Wasser 0,6 Meter beträgt? Die theoretische Wassermenge ist:

Fig. 791.

$$Q = 0{,}4 \,.\, 0{,}15 \,.\, 4{,}429 \sqrt{0{,}6}$$
$$= 0{,}206 \text{ Cubikmeter.}$$

Der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction ist nach Poncelet:

$$\mu_0 = 0{,}610,$$

ferner das Querschnittsverhältniß:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{0{,}4 \,.\, 0{,}15}{0{,}6 \,.\, 0{,}3} = 0{,}333.$$

Hierfür folgt aus vorstehender Tabelle II.:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}071 + \frac{33}{50}(0{,}088 - 0{,}071) = 0{,}082,$$

weßhalb der Ausflußcoefficient der unvollkommenen Contraction im vorliegenden Falle $\mu_{0{,}333} = 1{,}082 \,.\, 0{,}610 = 0{,}660$ zu setzen ist.

Das effective Ausflußquantum ergiebt sich demnach zu:

$$Q_1 = 0{,}660 \,.\, 0{,}206 = 0{,}136 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 443. **Ausfluss des bewegten Wassers.** Wir haben seither angenommen, daß die Druckhöhe im stillstehenden Wasser gemessen worden ist, und müssen nun noch den Fall abhandeln, wenn nur der Wasserstand des bewegten, der Mündung mit einer gewissen Geschwindigkeit zufließenden Wassers gemessen werden kann. Setzen wir eine rectanguläre Seitenöffnung voraus, bezeichnen wir deren Breite durch b und die Wasserstände in Hinsicht auf die beiden horizontalen Kanten durch h_1 und h_2, die der Geschwindigkeit c des zufließenden Wassers entsprechende Höhe aber durch k, so haben wir die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = \tfrac{2}{3} b \sqrt{2g}\,[(h_1 + k)^{3/2} - (h_2 + k)^{3/2}].$$

Diese Formel läßt sich aber nicht unmittelbar anwenden zur Bestimmung der Wassermenge, weil die Geschwindigkeitshöhe

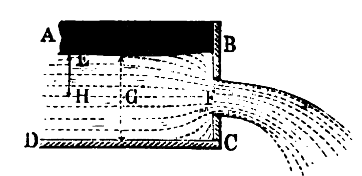
$$k = \frac{c^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2$$

wieder von Q abhängt, und die weitere Umformung auf eine complicirte höhere Gleichung führt; es ist daher weit einfacher, wenn man die effective Wassermenge

$$Q_1 = \mu_1 a b \sqrt{2gh}$$

setzt, und unter μ_1 nicht den bloßen Ausfluß-, sondern einen vorzüglich vom Querschnittsverhältnisse abhängigen Coefficienten versteht. Am häufigsten kommt dieser Fall vor, wenn es darauf abgesehen ist, das in Gerinnen und Canälen fließende Wasser zu messen, weil es hier nur selten möglich ist, das Wasser durch eine die Ausflußöffnung enthaltende Querwand BC, Fig. 792, so hoch aufzustauen, daß die Mündungsfläche F nur einen kleinen Theil von dem Querschnitte des zufließenden Wasserstromes ausmacht und daher die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein gegen die mittlere Geschwindigkeit ausfällt.

Fig. 792.



Aus den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen mit den Poncelet'schen Mündungen, wobei die Druckhöhe ein Meter oberhalb der Mündungsebene gemessen wurde, hat sich ziemlich genau

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}641 \left(\frac{F}{G}\right)^2 = 0{,}641 \,.\, n^2$$

ergeben, wobei $n = \frac{F}{G}$ das Querschnittsverhältniß, welches jedoch nicht viel über $^1/_2$ sein soll, ferner μ_0 den aus der Poncelet'schen Tabelle genommenen Ausflußcoefficienten bei vollkommener Contraction und μ_n den derselben Mündung im vorliegenden Falle entsprechenden Ausflußcoefficienten bezeichnet. Ist b die Breite, a die Höhe der Mündung, b_1 die Breite und a_1 die Höhe des Wasserstromes und bezeichnet h die Höhe des Wasserspiegels über der Mitte der Mündung, so hat man hiernach die effective Ausflußmenge:

$$Q_1 = \mu_0 \,.\, ab \left[1 + 0{,}641 \left(\frac{ab}{a_1 b_1}\right)^2\right] \sqrt{2gh}.$$

Folgende Tabelle dient zur Abkürzung der Rechnung in Fällen der Anwendung.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,002	0,006	0,014	0,026	0,040	0,058	0,079	0,103	0,130	0,160

Beispiel. Um das durch ein 0,9 Meter breites Gerinne zugeführte Wasserquantum zu finden, hat man eine Spundwand mit einer 0,6 Meter weiten und

0,3 Meter hohen rectangulären Mündung eingesetzt und dadurch das Wasser so aufgestaut, daß es beim Eintritte des Beharrungszustandes um eine Höhe von 0,75 Meter über der Sohle und 0,5 Meter über der unteren Kante der Mündung stand. Wie viel Wasser ging durch das Gerinne?

Die theoretische Wassermenge ist:

$$Q = a\,b\,\sqrt{2gh} = 0{,}3\,.\,0{,}6\,.\,4{,}429\sqrt{0{,}5 - 0{,}15} = 0{,}472 \text{ Cubikmeter.}$$

Der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction läßt sich nach der Poncelet'schen Tabelle $\mu_0 = 0{,}60$ setzen, und da das Querschnittsverhältniß

$$n = \frac{F}{G} = \frac{0{,}3\,.\,0{,}6}{0{,}9\,.\,0{,}75} = 0{,}267$$

ist, so folgt der Ausflußcoefficient für den vorliegenden Fall:

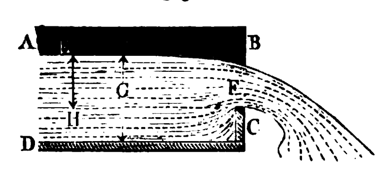
$$\mu_{0{,}267} = (1 + 0{,}641\,.\,0{,}267^2)\,0{,}60 = 1{,}046\,.\,0{,}60 = 0{,}628$$

und das effective Ausflußquantum:

$$Q_1 = 0{,}628\,.\,0{,}472 = 0{,}296 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 444. Die unvollkommene Contraction kommt auch beim Ausflusse durch Ueberfälle, wie Fig. 793 vor, wenn der Querschnitt F des über der Schwelle bei C wegfließenden Wassers ein ansehnlicher Theil vom Querschnitte G des zufließenden Wassers ist. Die Ueberfälle können aber entweder nur einen Theil der Breite des Reservoirs oder Canales einnehmen, oder sie können über die ganze Breite des Gerinnes weggehen. In dem letzten Falle ist auch die Contraction an den Seiten der Mündung Null, und es fließt also aus diesem Grunde mehr Wasser durch, als bei den Ueberfällen der ersten Art. Auch über diese Ausflußverhältnisse hat der Verfasser Versuche angestellt, und aus den Ergebnissen derselben Formeln abgeleitet, wodurch sich mit ziemlicher Sicherheit mit Hülfe des Querschnittsverhältnisses $n = \frac{F}{G}$ der entsprechende Ausflußcoefficient berechnen läßt.

Fig. 793.



Ist h die Druckhöhe EH über der Ueberfallschwelle, a_1 die ganze Wasserhöhe, b die Breite des Ueberfalles und b_1 die des zufließenden Wassers, so haben wir hier:

$$n = \frac{F}{G} = \frac{hb}{a_1\,b_1}$$

und 1) für die Poncelet'schen Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 1{,}718\left(\frac{F}{G}\right)^4 = 1{,}718\,.\,n^4,$$

dagegen 2) für die die ganze Gerinnbreite einnehmenden Ueberfälle:

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}041 + 0{,}3693\,n^2.$$

Es ist daher im ersten Falle die Ausflußmenge:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \, . \, b \left[1 + 1{,}718 \left(\frac{h b}{a_1 b_1}\right)^4\right] \sqrt{2 g h^3}$$

und im zweiten Falle:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \, . \, b \left[1{,}041 + 0{,}3693 \left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right] \sqrt{2 g h^3},$$

wo h den etwa 1 Meter vor dem Ueberfall gemessenen Wasserstand EH über der Ueberfallschwelle F bezeichnet.

In folgenden Tabellen sind die Correctionen $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ für die einfachsten Werthe von n zusammengestellt.

Tabelle I.

Correctionen der Ausflußcoefficienten für die Poncelet'schen Ueberfälle.

n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,000	0,000	0,001	0,003	0,007	0,014	0,026	0,044	0,070	0,107

Tabelle II.

Correctionen für Ueberfälle über die ganze Wand, oder ohne Seitencontraction.

n	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,041	0,042	0,045	0,049	0,056	0,064	0,074	0,086	0,100	0,116	0,133

Beispiel. Um das in einem 1,5 Meter breiten Canale fortgeführte Wasserquantum zu bestimmen, hat man eine Spundwand mit einer nach außen abgeschrägten Kante eingezogen, und das Wasser über diese wegfließen lassen. Nachdem das Steigen des Oberwassers aufgehört hatte, ergab sich der Wasserstand über dem Gerinnboden 1,1 Meter und über der Schwelle 0,45 Meter; es war daher die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = \frac{2}{3} . 1{,}5 . 4{,}429 . 0{,}45^{3/2} = 1{,}337 \text{ Cubikmeter.}$$

Der Ausflußcoefficient fällt hier, da $\frac{h}{a_1} = \frac{0{,}45}{1{,}1} = 0{,}409$ ist, und nach §. 438, Tabelle 2, $\mu_0 = \frac{3}{2} . 0{,}391 = 0{,}586$ genommen werden kann, zu

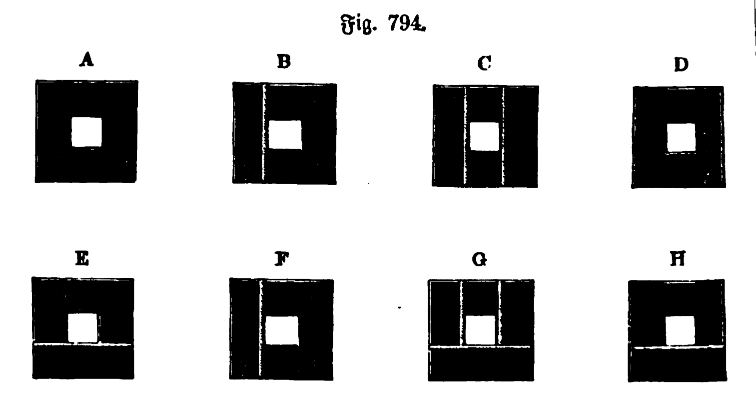
$$\mu_{0{,}409} = (1{,}041 + 0{,}3693 . 0{,}409^2) . 0{,}586 = 1{,}103 . 0{,}586 = 0{,}646$$

aus, daher ist die effective Wassermenge:

$$Q_1 = 0{,}646 . 1{,}337 = 0{,}864 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 445. **Versuche von Lesbros.** Eine große Anzahl von Versuchen über den Ausfluß des Wassers durch rectanguläre Mündungen in der dünnen Wand mit verschiedenartigen inneren und äußeren Einfassungswänden (bei partieller und unvollkommener Contraction des Wasserstrahles) sind von dem Herrn Lesbros (s. dessen Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau) ausgeführt worden. Wir theilen hiervon im Folgenden nur die Hauptresultate der an einer rectangulären Mündung von 2 Decimeter Weite angestellten Versuche mit. Die so verschieden eingefaßten Mündungen sind in der Fig. 794 durch die Buchstaben *A*, *B*, *C* u. s. w. von einander unterschieden, und zwar bezeichnet:

Fig. 794.



A eine gewöhnliche Mündung ohne alle Einfassung (wie in §. 437);

B eine solche Mündung innen an einer Seite mit einer verticalen Wand bekleidet, welche 2 Centimeter von der einen Seitenkante der Mündung absteht, und rechtwinkelig gegen die Mündungsebene gerichtet ist;

C die erste Mündung auf jeder Seite mit einer solchen Wand eingefaßt;

D die Mündung *A* innen auf beiden Seiten mit verticalen Wänden eingefaßt, welche unter einem Winkel von 90 Grad gegen einander convergiren und hierbei unter einem Winkel von 45 Grad, und zwar in dem Abstande = 2 Centimeter von den Seitenkanten der Mündung, an die Mündungsebene anstoßen;

E die Mündung *A* mit einer horizontalen Wand, welche quer über dem Ausflußreservoir weggeht und genau bis an die untere Mündungskante reicht;

F die Mündung *B*,

G die Mündung *C*, und

H die Mündung *D* mit einer horizontalen Wand wie in *E*, welche die Contraction an der unteren Mündungskante ganz aufhebt.

I.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für den freien Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. s. w.

Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen.	Mündungshöhe.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:							
		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
Meter.	Meter.								
0,020		0,572	0,587	—	0,589	0,599	—	—	—
0,050		0,585	0,593	0,631	0,595	0,608	0,622	—	0,636
0,100		0,592	0,600	0,631	0,601	0,615	0,628	—	0,639
0,200		0,598	0,606	0,632	0,607	0,621	0,633	0,708	0,643
0,500	0,200	0,603	0,610	0,631	0,611	0,623	0,636	0,680	0,644
1,000		0,605	0,611	0,628	0,612	0,624	0,637	0,676	0,642
1,500		0,602	0,611	0,627	0,611	0,624	0,637	0,672	0,641
2,000		0,601	0,610	0,626	0,611	0,619	0,636	0,668	0,640
3,000		0,601	0,609	0,624	0,610	0,614	0,634	0,665	0,638
0,020		0,616	0,627	0,647	0,631	0,664	0,663	—	0,678
0,050		0,625	0,630	0,646	0,632	0,667	0,669	0,690	0,677
0,100		0,630	0,633	0,645	0,633	0,669	0,674	0,688	0,677
0,200		0,631	0,635	0,642	0,633	0,670	0,676	0,687	0,675
0,500	0,050	0,628	0,634	0,637	0,632	0,668	0,676	0,682	0,671
1,000		0,625	0,628	0,635	0,627	0,666	0,672	0,680	0,670
1,500		0,619	0,622	0,634	0,621	0,665	0,670	0,678	0,670
2,000		0,613	0,616	0,634	0,615	0,664	0,670	0,674	0,669
3,000		0,606	0,609	0,632	0,608	0,662	0,669	0,673	0,668

II.

Tabelle der Ausflußcoefficienten für den Ausfluß durch die Mündungen *A*, *B*, *C* u. s. w. mit äußeren Ansatzgerinnen.

Die Gerinne schlossen sich genau an die Mündungen an, die dadurch ihre Abschrägungen an den Seiten und am Boden verloren. Sie waren entweder horizontal und 3 Meter lang oder, und zwar bei den mit * bezeichneten Versuchen, um $^1/_{10}$ ihrer nur 2,5 Meter betragenden Länge geneigt.

Druckhöhe über der oberen Mündungskante, oberhalb der Mündungsebene gemessen.	Mündungshöhe.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:									
		A	*B*	*C*	*E*	*E**	*F*	*F**	*G*	*G**	*H*
Meter.	Meter.										
0,020	0,200	0,480	0,489	0,496	0,480	0,527	—	—	—	—	0,488
0,050	0,200	0,511	0,517	0,531	0,510	0,553	0,509	0,546	0,528	—	0,520
0,100	0,200	0,542	0,545	0,563	0,538	0,574	0,534	0,569	0,560	0,593	0,552
0,200	0,200	0,574	0,576	0,591	0,566	0,592	0,562	0,589	0,589	0,617	0,582
0,500	0,200	0,599	0,602	0,621	0,592	0,607	0,591	0,608	0,591	0,632	0,613
1,000	0,200	0,601	0,609	0,628	0,600	0,610	0,601	0,615	0,601	0,638	0,623
1,500	0,200	0,601	0,610	0,627	0,602	0,610	0,604	0,617	0,604	0,641	0,624
2,000	0,200	0,601	0,610	0,626	0,602	0,609	0,604	0,617	0,604	0,642	0,624
3,000	0,200	0,601	0,609	0,624	0,601	0,608	0,602	0,616	0,602	0,641	0,622
0,020	0,050	0,488	0,555	0,557	0,487	0,585	0,483	0,579	0,512	—	0,494
0,050	0,050	0,577	0,600	0,603	0,571	0,614	0,570	0,611	0,582	0,625	0,577
0,100	0,050	0,624	0,625	0,628	0,605	0,632	0,609	0,628	0,621	0,639	0,616
0,200	0,050	0,631	0,633	0,637	0,617	0,645	0,623	0,643	0,637	0,649	0,629
0,500	0,050	0,625	0,630	0,635	0,626	0,652	0,630	0,650	0,647	0,656	0,636
1,000	0,050	0,624	0,627	0,635	0,628	0,651	0,633	0,651	0,649	0,656	0,638
1,500	0,050	0,619	0,622	0,634	0,627	0,650	0,632	0,651	0,647	0,656	0,637
2,000	0,050	0,613	0,616	0,634	0,623	0,650	0,631	0,651	0,644	0,656	0,635
3,000	0,050	0,606	0,609	0,632	0,618	0,649	0,628	0,651	0,639	0,656	0,632

Beispiel. Welches Ausflußquantum giebt eine rectanguläre Mündung von 2 Decimeter Breite und 1 Decimeter Höhe, wenn die untere Kante derselben 0,35 Meter unter dem Wasserspiegel und mit dem Boden des Ausflußgefäßes in einerlei Höhe steht, und zwar 1) beim freien Ausflusse und 2) beim Ausflusse durch ein kurzes horizontales Ansatzgerinne? Man hat es hier mit der Mündung E zu thun, wobei die Druckhöhe über der oberen Kante = 0,35 — 0,10 = 0,25 Meter ist. Die Tabelle I. giebt für den Werth 0,20 Meter dieser Höhe bei der Mündungshöhe = 0,20 Meter, den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}621$, und dagegen bei der Mündungshöhe = 0,05 Meter, $\mu = 0{,}670$; daher möchte für den ersten Fall der Aufgabe

$$\mu_1 = \frac{0{,}621 + 0{,}670}{2} = 0{,}645 \text{ zu setzen sein.}$$

Die Tabelle II. giebt dagegen bei der Wasserhöhe 0,25 Meter über der oberen Mündungskante durch Interpolation für μ die Werthe:

$$0{,}566 + {}^5/_{30}\,(0{,}592 - 0{,}566) = 0{,}570, \text{ und}$$
$$0{,}617 + {}^5/_{30}\,(0{,}626 - 0{,}617) = 0{,}619,$$

folglich ist für den zweiten Fall

$$\mu_2 = \frac{0{,}570 + 0{,}619}{2} = 0{,}594 \text{ zu setzen.}$$

Der Querschnitt der Mündung ist:

$$F = a\,b = 0{,}20 \,.\, 0{,}10 = 0{,}020 \text{ Quadratmeter,}$$

und die mittlere Druckhöhe ist:

$$h = 0{,}350 - 0{,}050 = 0{,}300 \text{ Meter,}$$

folglich die theoretische Ausflußmenge:

$$Q = F\sqrt{2gh} = 0{,}02\,\sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}3} = 0{,}02\,\sqrt{5{,}886}$$
$$= 0{,}02 \,.\, 2{,}425 = 0{,}0485 \text{ Cubikmeter;}$$

sowie die effective Ausflußmenge, im ersten Falle:

$$Q_1 = \mu_1\,Q = 0{,}645 \,.\, 0{,}0485 = 0{,}0313 \text{ Cubikmeter,}$$

und dagegen im zweiten Falle, d. i. bei einem Ansatzgerinne:

$$Q_2 = \mu_2\,Q = 0{,}594 \,.\, 0{,}0485 = 0{,}0288 \text{ Cubikmeter.}$$

Nach der Formel $\mu_n = (1 + 0{,}155\,n)\,\mu_0$ in §. 441 für den Ausfluß bei partieller Contraction läßt sich, da hier vom ganzen Mündungsumfang ${}^2/_6 = {}^1/_3$ eingefaßt ist, $\mu_n = \mu_{1/3} = (1 + 0{,}052)\,\mu_0 = 1{,}052\,\mu_0$ setzen. Nun ist aber für eine solche Mündung bei vollständiger Contraction nach Tabelle I., §. 437, $\mu_0 = 0{,}616$, daher folgt hiernach:

$$\mu_{1/3} = 1{,}052 \,.\, 0{,}616 = 0{,}648 \text{ und}$$
$$Q_1 = \mu_{1/3}\,Q = 0{,}648 \,.\, 0{,}0485 = 0{,}0314 \text{ Cubikmeter,}$$

also wenig größer als nach der Lesbros'schen Tabelle.

Herr Lesbros hat auch noch mittels der Mündungen A, B, C u. s. w. Versuche über den Ausfluß bei Ueberfällen, wobei der Wasserspiegel die obere Kante der Mündung nicht erreicht, angestellt, und es sind die Hauptergebnisse derselben in folgenden Tabellen zusammengestellt worden. §. 446.

I. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den freien Ausfluß durch Ueberfälle oder Wandeinschnitte.

Druckhöhe über der Schwelle im stillstehenden Wasser gemessen.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:						
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
Meter.							
0,015	0,421	0,450	0,450	0,441	0,395	0,371	0,305
0,020	0,417	0,446	0,444	0,437	0,402	0,379	0,318
0,030	0,412	0,437	0,435	0,430	0,410	0,388	0,337
0,040	0,407	0,430	0,429	0,424	0,411	0,394	0,352
0,050	0,404	0,425	0,426	0,419	0,411	0,398	0,362
0,070	0,398	0,416	0,422	0,412	0,409	0,402	0,375
0,100	0,395	0,409	0,420	0,405	0,408	0,405	0,382
0,150	0,393	0,406	0,423	0,403	0,407	0,407	0,383
0,200	0,390	0,402	0,424	0,403	0,405	0,408	0,383
0,250	0,379	0,396	0,422	0,401	0,404	0,407	0,381
0,300	0,371	0,390	0,418	0,398	0,403	0,406	0,378

II. Tabelle der Ausflußcoefficienten ($^2/_3\,\mu$) für den Ausfluß durch Ueberfälle mit kurzen Ansatzgerinnen.

Druckhöhe über der Schwelle, im stillstehenden Wasser gemessen.	Ausflußcoefficienten für die Mündungen:							
	A	*B*	*C*	*C**	*E*	*F*	*G*	*H*
Meter.								
0,015	—	0,375	0,388	0,400	—	—	—	—
0,020	0,196	0,368	0,383	0,395	0,208	0,201	0,175	0,190
0,030	0,234	0,358	0,373	0,385	0,232	0,228	0,205	0,222
0,040	0,263	0,351	0,365	0,379	0,251	0,250	0,234	0,250
0,050	0 278	0,346	0,360	0,375	0,268	0,267	0,260	0,272
0,070	0,292	0,343	0,352	0,371	0,288	0,289	0,285	0,296
0,100	0,304	0,340	0,345	0,369	0,302	0,304	0,299	0,313
0,150	0,315	0,335	0,340	0,367	0,314	0,316	0,313	0,327
0,200	0,319	0,331	0,338	0,366	0,323	0,322	0,322	0,335
0,250	0,321	0,328	0,336	0,364	0,329	0,326	0,329	0,341
0,300	0,324	0,326	0,334	0,361	0,332	0,329	0,332	0,345

Die Vergleichung der Coefficienten in Tabelle I. und Tabelle II. zeigt, daß die Ausflußmenge bei Mündungen mit dem kurzen Ansatzgerinne kleiner ausfällt als bei Mündungen ohne dieses Gerinne, und zwar um so kleiner, je kleiner die Druckhöhe ist; auch ist aus der Vergleichung zwischen den Columnen unter C und C^*, sowie unter E, E^*, F, F^* und G, G^* in den Tabellen des vorigen Paragraphen zu ersehen, daß die geneigten Ansatzgerinne den Ausfluß weniger stören als die horizontalen.

Anmerkung. 1. Eine abweichende Theorie über den Ausfluß entwickelt G. Boileau in seinem Traité sur la mesure des eaux courantes. Hiernach ist die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers an allen Stellen des Querschnittes eine und dieselbe, und zwar entsprechend der Tiefe der oberen Begrenzungslinie des Strahles in der Ebene der Mündung unter dem Wasserspiegel im Ausflußreservoir. Dieselbe Formel wendet Boileau auch auf Ueberfälle an; wobei er natürlich stets die Kenntniß der Strahlhöhe in der Mündungsebene nöthig hat. Später, im 12. Bande der 5. Reihe von den Annales des mines, 1857, hat Herr Clarinval eine andere Formel für den Ausfluß durch Ueberfälle entwickelt, in welcher gar keine Erfahrungszahl μ vorkommt, sondern statt $^2/_3\,\mu$ der Factor $\frac{a\sqrt{1-\frac{a}{h}}}{\sqrt{2(h^2-a^2)}}$, worin h die Druckhöhe und a die Strahldicke über der Ueberfallschwelle bezeichnen, einzusetzen ist. S. den „Civilingenieur“ Band V. Ich halte die Begründung dieser Formel nicht für richtig.

Anmerkung 2. Herr J. Francis giebt in seinem Werke: „The Lowell Hydraulic Experiments, Boston 1855“, für den Ausfluß durch breite Ueberfälle folgende Formel an:

$$Q = 3{,}33\,(l - 0{,}1\,n\,h)\,h^{3/2} \text{ Cubikfuß engl.},$$

worin h die Druckhöhe über der Schwelle, l die Länge der letzteren und n entweder 0 oder 1 oder 2 ist, je nachdem die Contraction des Wasserstrahles an beiden, an einer, oder an keiner Seite aufgehoben ist. Da für das englische Maß

$$\sqrt{2g} = 8{,}025$$

ist, so hat man folglich hiernach:

$$^2/_3\,\mu = \frac{3{,}33}{8{,}025} = 0{,}415.$$

Die Versuche, worauf sich diese Formel gründet, sind an 10 Fuß breiten Ueberfällen und bei 0,6 bis 1,6 Fuß Druckhöhe angestellt worden. Die Ueberfallkante wurde durch eine stromabwärts abgeschrägte eiserne Platte gebildet, das Reservoir hatte eine Breite von 13,96 Fuß, und die Schwelle stand 4,6 Fuß über dem Boden desselben. Siehe den „Civilingenieur“, Band II., 1856.

Bakewell's Versuche über den Ausfluß durch Ueberfälle (s. polytechn. Centralblatt 18. Jahrgang 1852) liefern zum Theil ziemlich abweichende Resultate.

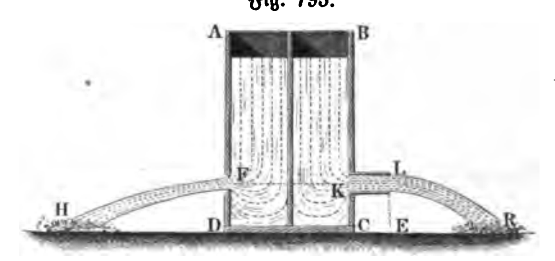
Anmerkung 3. An den Schützen der Hammerräder zu Remscheid hat Herr Röntchen $\mu = 0{,}90$ bis $0{,}93$ gefunden. S. Dingler's Journal, Bd. 158.

Drittes Capitel.

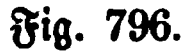
Von dem Ausflusse des Wassers durch Röhren.

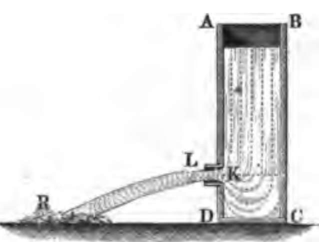
§. 447. **Kurze Ansatzröhren.** Läßt man das Wasser durch eine kurze Ansatzröhre ausfließen, so treten ganz andere Verhältnisse ein, als wenn es durch Mündungen in der dünnen, oder durch nach außen abgeschrägte Mündungen in der dicken Wand ausfließt. Ist die Ansatzröhre prismatisch und ihre Länge $2^1/_2$ bis 3mal so groß als ihre Weite, so giebt sie einen uncontrahirten und undurchsichtigen Strahl, welcher eine kleinere Sprungweite und daher auch eine kleinere Geschwindigkeit hat, als der durch eine Mündung in der dünnen Wand unter übrigens gleichen Umständen ausfließende Strahl. Hat also die Röhre *KL* mit der Mündung *F*, Fig. 795, gleichen Querschnitt, und ist auch die Druckhöhe von beiden eine und dieselbe, so erhält

Fig. 795.



man in *LR* einen trüben und uncontrahirten, also dickeren und in *FH* einen klaren und contrahirten, also schwächeren Strahl, und es läßt sich auch wahrnehmen, daß die Sprungweite *ER* kleiner ist als die Sprungweite *DH*. Dieses Ausflußverhältniß tritt aber nur dann ein, wenn die Röhre die angegebene Länge hat; ist die Röhre kürzer, vielleicht nur so lang als weit, so legt sich der Strahl *KR* Fig. 796, gar nicht an die Röhrenwand an, es bleibt die Röhre ganz ohne Einwirkung auf den Ausfluß und der Strahl fällt wie beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand aus.

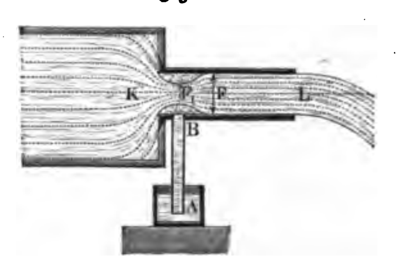

Fig. 796.



Zuweilen findet auch bei Röhren von größerer Länge ein Ausfüllen der Röhre durch den Strahl nicht statt, nämlich dann, wenn dem Wasser keine

Gelegenheit gegeben worden ist, mit der Röhrenwand in Berührung zu kommen; verschließt man aber in diesem Falle die äußere Mündung durch die Hand oder durch ein Brett auf einige Augenblicke, so bildet sich nachher ein die Röhre vollkommen füllender Strahl, und es findet ein sogenannter voller Ausfluß statt. Die Contraction des Wasserstrahles findet auch beim Ausfluß durch Röhren statt, nur fällt hier der contrahirte Theil in das Innere der Röhre. Man kann sich hiervon überzeugen, wenn man sich gläserner Ansatzröhren, wie *KL*, Fig. 797, bedient, und kleine Körper im Wasser schwimmen läßt, denn man bemerkt in diesem Falle, daß nur in der Mitte des Querschnittes F_1 nahe hinter der Eintrittsstelle *K*, nicht aber am Umfange desselben progressive Bewegung vorhanden ist, daß hier vielmehr nur eine wirbelnde Bewegung stattfindet.

Fig. 797.



Es ist aber die Capillarität oder die Adhäsion des Wassers an der Röhrenwand, welche bewirkt, daß das Wasser das Ende *FL* der Röhre ganz ausfüllt. Das aus der Röhre fließende Wasser hat nur den der Atmosphäre gleichen Druck. Da nun der contrahirte Querschnitt F_1 nur α mal so groß als der Querschnitt F der Röhre, und deshalb die Geschwindigkeit v_1 in ihm $\frac{1}{\alpha}$ mal so groß ist, als die Ausflußgeschwindigkeit v, so muß auch (§. 427) der Druck des Wassers in der Nähe von F_1 kleiner als beim Austritte, oder als der Atmosphärendruck sein. Bohrt man bei F_1 ein enges Loch in die Röhre, so findet auch wirklich kein Ausfluß durch dasselbe, sondern vielmehr ein Einsaugen von Luft statt, auch hört endlich der volle Ausfluß und die Einwirkung der Ansatzröhre ganz auf, wenn man das Loch weiter macht, oder mehrere Löcher anbringt. Ebenso kann man auch das Wasser in der Röhre *AB* zum Steigen und zum Ausfluß durch die Röhre *KL* bringen, wenn man die erstere bei F_1 in die letztere einmünden läßt. Der volle Ausfluß hört bei der einfachen cylindrischen Röhre ganz auf, wenn die Druckhöhe eine gewisse Größe erreicht, siehe §. 466, Capitel IV.

Cylindrische Ansatzröhren. Ueber den Ausfluß des Wassers durch kurze cylindrische Ansatzröhren sind von Vielen Versuche angestellt worden, doch weichen die Resultate derselben ziemlich viel von einander ab. Namentlich sind es die Bossut'schen Ausflußcoefficienten, welche durch ihre Kleinheit (0,785) von den von Anderen gefundenen bedeutend abweichen. Aus den Versuchen von Michelotti mit $1\frac{1}{2}$ bis 3 Zoll weiten Röhren §. 448.

und bei 3 bis 20 Fuß Druckhöhe folgt im Mittel dieser Ausflußcoefficient $\mu = 0,813$. Die Versuche von Bidone, Eytelwein und d'Aubuisson weichen hiervon nur wenig ab. Im Mittel läßt sich aber, namentlich auch den Versuchen des Verfassers entsprechend, der Ausflußcoefficient für kurze cylindrische Ansatzröhren $\mu = 0,815$ setzen. Da wir denselben für runde Mündungen in der dünnen Wand 0,615 gefunden haben, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen durch kurze Ansatzröhren $^{815}/_{615} = 1,325$ mal so viel Wasser ausfließt als durch runde Mündungen in der dünnen Wand. Uebrigens wachsen diese Ausflußcoefficienten, wenn die Röhrenweite kleiner wird und nehmen auch wenig zu bei Abnahme der Druckhöhe oder Ausflußgeschwindigkeit. Nach den bei einem Drucke von 0,23 bis 0,60 Meter angestellten Versuchen des Verfassers ist für Röhren, welche 3 mal so lang als weit sind:

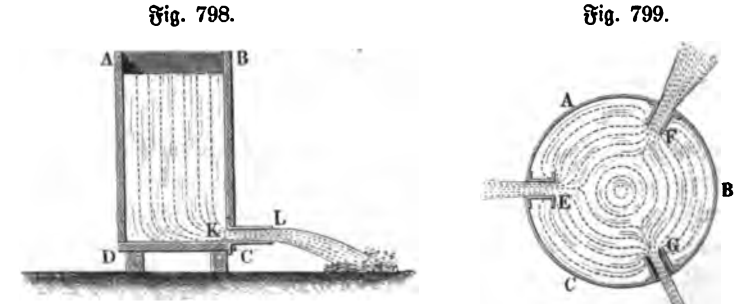
bei	1	2	3	4 Centimeter Weite
$\mu =$	0,843	0,832	0,821	0,810

Dieser Tabelle zufolge nehmen also die Ausflußcoefficienten merklich zu, wenn die Röhrenweite kleiner wird. Ebenso fand Buff bei einer 2,79 Linien weiten und 4,3 Linien langen Röhre die Ausflußcoefficienten allmälig von 0,825 bis 0,855 zunehmend, wenn die Druckhöhe von 33 bis $1^1/_2$ Zoll nach und nach herabsank.

Beim Ausflusse des Wassers durch kurze parallelepipedische Ansatzröhren fand der Verfasser einen Ausflußcoefficienten von 0,819.

Sind die Ansatzröhren KL, Fig. 798, inwendig theilweise eingefaßt, stoßen sie z. B. mit der einen Seite an den Boden CD des Gefäßes an, und wird dadurch eine partielle Contraction herbeigeführt, so steigt, nach den Versuchen des Verfassers, der Ausflußcoefficient nicht ansehnlich, wohl aber fließt das Wasser an verschiedenen Stellen des Querschnittes mit ver-

Fig. 798. Fig. 799.



schiedenen Geschwindigkeiten, und zwar auf der Seite C schneller aus, als auf der gegenüberliegenden.

Wenn die innere Stirnfläche einer Ansatzröhre nicht in die Wandfläche fällt, sondern vorsteht, wie E, F, G, Fig. 799, so nennt man diese Röhre eine innere Ansatzröhre. Ist die Stirnfläche dieser Röhre mindestens $\frac{1}{5}$ mal so breit als die Röhre weit, wie z. B. E, so bleibt der Ausflußcoefficient derselbe, als wenn die Stirnfläche in der Ebene der Wand läge, ist aber die Stirnfläche schmaler, wie z. B. F und G, so fällt der Ausflußcoefficient kleiner aus. Bei einer sehr schmalen fast verschwindenden Stirnfläche wird derselbe den Versuchen Bidone's und des Verfassers zufolge 0,71, wenn der Strahl die Röhre ausfüllt; dagegen 0,53 (vergl. §. 447), wenn er sich gar nicht an die innere Röhrenwand anlegt. Im ersten Falle (F) ist der Strahl ganz zerrissen und besenförmig divergirend, im zweiten (G) aber stark zusammengezogen und ganz krystallrein.

Widerstandscoefficient. Da das Wasser ohne Contraction aus der prismatischen Ansatzröhre tritt, so folgt, daß bei dem Ausflusse durch diese Mundstücke der Contractionscoefficient α = Eins und der Geschwindigkeitscoefficient φ = dem Ausflußcoefficienten μ ist. Eine mit der Geschwindigkeit v ausströmende Wassermenge Q besitzt die lebendige Kraft $\frac{Q\gamma}{g} v^2$ und kann dadurch die mechanische Arbeit $\frac{v^2}{2g} Q\gamma$ (s. §. 76) verrichten. Nun ist aber bei dem Ausflusse die theoretische Geschwindigkeit gleich $\frac{v}{\varphi}$, daher entspricht der ausfließenden Wassermasse die Leistung $\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot Q\gamma$, und es verliert sonach die Wassermenge Q durch den Ausfluß die mechanische Arbeit: §. 449.

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g} Q\gamma.$$

Beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand ist φ im Mittel gleich 0,975, daher beträgt hier der Arbeitsverlust:

$$\left[\left(\frac{1}{0,975}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0,052 \frac{v^2}{2g} Q\gamma;$$

beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansätze ist dagegen $\varphi = 0,815$ und es stellt sich der entsprechende Verlust an Arbeit zu:

$$\left[\left(\frac{1}{0,815}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g} Q\gamma = 0,505 \frac{v^2}{2g} Q\gamma,$$

d. i. nahe 10 mal so groß heraus, wie beim Ausflusse durch Mündungen in der dünnen Wand. Bei Benutzung der lebendigen Kraft des ausfließenden Wassers ist es folglich besser, das Wasser durch Mündungen in der dünnen

Wand als durch prismatische Ansatzröhren ausfließen zu lassen. Wenn man aber die inneren Kanten, womit die Röhre an die Gefäßwand stößt, abrundet und dadurch einen allmäligen Uebergang aus dem Gefäße in die Röhre hervorbringt, so wird der Ausflußcoefficient auf 0,96 gesteigert und zugleich der Arbeitsverlust auf $8^1/_2$ Procent herabgezogen. Bei kürzeren, genau abgerundeten oder nach der Form des contrahirten Wasserstrahles gebildeten Mundstücken ist $\mu = \varphi = 0{,}975$ und daher der Arbeitsverlust wie bei Mündungen in der dünnen Wand 5 Procent.

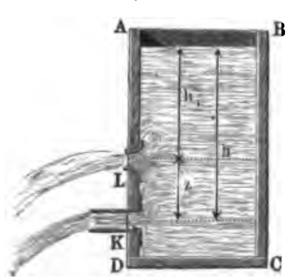
Dem Arbeitsverluste $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}\, Q\gamma$ entspricht eine Druckhöhe $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$; man kann sich daher auch vorstellen, daß durch die Hindernisse des Ausflusses die Druckhöhe den Verlust $\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ erleide, und annehmen, daß nach Abzug dieses Verlustes der übrigbleibende Theil der Druckhöhe auf die Erzeugung der Geschwindigkeit verwendet werde. Diesen mit dem Quadrate der Ausflußgeschwindigkeit proportional wachsenden Verlust $z = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{v^2}{2g}$ kann man **Widerstandshöhe** und den Coefficienten $\frac{1}{\varphi^2} - 1$, womit die Geschwindigkeitshöhe zu multipliciren ist, um die Widerstandshöhe zu erhalten, den **Widerstandscoefficienten** nennen. Wir werden in der Folge diesen, auch das Verhältniß der Widerstandshöhe zur Druckhöhe ausdrückenden Coefficienten durch den Buchstaben ζ bezeichnen, also die Widerstandshöhe selbst durch $z = \zeta \,.\, \frac{v^2}{2g}$ ausdrücken. Durch die Formeln

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \text{ und}$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}}$$

läßt sich aus dem Geschwindigkeitscoefficienten der Widerstandscoefficient, und aus diesem wieder jener berechnen.

Fig. 800.



Bei derselben Ausflußgeschwindigkeit v ist die Druckhöhe für eine Mündung K, Fig. 800, welcher der Geschwindigkeitscoefficient φ entspricht, $h = \frac{v^2}{2g\varphi^2}$, und die

Druckhöhe der Mündung L, durch welche das Wasser mit der theoretischen Geschwindigkeit ausfließt, $h_1 = \frac{v^2}{2g}$, folglich muß die erste Mündung um die Größe $KL = z = h - h_1 = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{v^2}{2g} = \zeta \frac{v^2}{2g}$, welche wir die Widerstandshöhe genannt haben, tiefer liegen als die letztere. Wenn beide einen gleichen Querschnitt F haben, und das Wasser durch beide ohne Contraction ausfließt, so ist auch die Ausflußmenge $Q = Fv$ für beide Mündungen eine und dieselbe.

Beispiele. 1) Welche Wassermenge fließt unter einer Druckhöhe von 1,2 Meter durch eine 0,050 Meter weite Röhre aus, welcher der Widerstandscoefficient $\zeta = 0,4$ entspricht? Es ist

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1,4}} = 0,845, \text{ daher:}$$

$$v = 0,845 \;.\; 4,429\; \sqrt{1,2} = 4,098 \text{ Meter, ferner:}$$

$$F = 3,14 \;.\; 0,025^2 = 0,00196 \text{ Quadratmeter,}$$

folglich das gesuchte Ausflußquantum:

$$Q = 0,00196 \;.\; 4,098 = 0,00803 \text{ Cubikmeter} = 8,03 \text{ Liter.}$$

2) Wenn eine Röhre von 50 Millimeter Weite unter einem Drucke von 0,5 Meter pro Minute 300 Liter Wasser liefert, so ist ihr Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient:

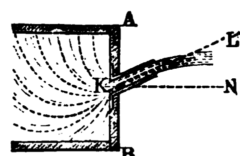
$$\varphi = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} = \frac{0,300}{60 \;.\; 3,14 \;.\; 0,025^2 \;.\; 4,429\; \sqrt{0,5}} = 0,814.$$

Hieraus folgt der Widerstandscoefficient: $\zeta = \left(\frac{1}{0,814}\right)^2 - 1 = 0,509$, und der durch die Hindernisse der Röhre bewirkte Verlust an Druckhöhe:

$$z = \zeta\, \frac{v^2}{2g} = 0,509 \;.\; 0,051 \left(\frac{Q}{F}\right)^2 = 0,026 \;.\; \left(\frac{0,3}{60 \;.\; 0,00196}\right)^2 = 0,170 \text{ Meter.}$$

Schiefe Ansatzröhren. Schief angesetzte oder schief abgeschnittene Ansatzröhren geben ein kleineres Wasserquantum als rechtwinkelig angesetzte oder rechtwinkelig abgeschnittene Ansatzröhren, weil die Richtung des Wassers in denselben eine Aenderung erleidet. §. 450.

Fig. 801.



Die hierüber in nicht unbedeutender Ausdehnung angestellten Versuche haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Ist δ der Winkel LKN, welchen die Röhrenaxe KL, Fig. 801, mit der Normale KN zur Ebene AB der Einmündung einschließt, und bezeichnet ζ den Widerstandscoefficienten für die winkelrecht abgeschnittene Röhre, so hat man den Widerstandscoefficienten der schiefen Ansatzröhre:

$$\zeta_1 = \zeta + 0,303\; sin.\, \delta + 0,226\; sin.\, \delta^2.$$

Nehmen wir für ζ den mittleren Werth 0,505 an, so erhalten wir:

bei δ^0 =	0	10	20	30	40	50	60 Grad.
den Widerstandscoefficienten ζ_1 =	0,505	0,565	0,635	0,713	0,794	0,870	0,937
den Ausflußcoefficienten μ_1 =	0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

Hiernach ist z. B. der Widerstandscoefficient einer kurzen Ansatzröhre bei 20 Grad Axenabweichung $\zeta_1 = 0,635$ und der Ausflußcoefficient

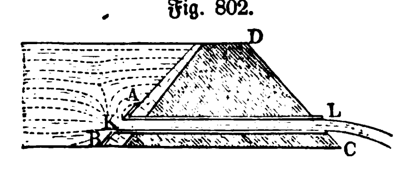
$$\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1,635}} = 0,782,$$

dagegen bei 35° Axenabweichung der erstere = 0,753 und der letztere = 0,755.

In der Regel sind diese schiefen Ansatzröhren länger, als wir seither angenommen haben, auch müssen dieselben länger sein, wenn sie vom Wasser vollkommen ausgefüllt werden sollen. Die vorstehende Formel giebt nur denjenigen Theil des Widerstandes an, welcher dem Röhrenstück an der Einmündung entspricht, das dreimal so lang als die ganze Röhre weit ist. Der Widerstand, welchen das übrige Röhrenstück der Bewegung des Wassers entgegensetzt, wird in der Folge angegeben.

Beispiel. Wenn die Einmündungsebene AB eines horizontal liegenden Teichgerinnes KL, Fig. 802, sowie die Innenfläche des Teichdammes 40 Grad gegen den Horizont geneigt ist, so schließt die Röhrenaxe mit der Normale dieser Ebene einen Winkel von 50 Grad ein, und es ist daher der Widerstandscoefficient für den Ausfluß durch das Einmündungsstück dieser Röhre, $\zeta_1 = 0,870$, und wenn nun dem übrigen und längeren Röhrenstücke der Widerstandscoefficient 0,650 entspräche, so wäre der Widerstandscoefficient für die ganze Röhre

Fig. 802.



$$\zeta = 0,870 + 0,650 = 1,520$$

und daher der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 1,520}} = \frac{1}{\sqrt{2,520}} = 0,630.$$

Bei 4 Meter Druckhöhe und 0,3 Meter Röhrenweite ergäbe sich folglich die Ausflußmenge per Secunde:

$$Q = 0,630 \,.\, 3,14 \,.\, 0,15^2 \,.\, 4,429 \sqrt{4} = 0,394 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 451. **Unvollkommene Contraction.** Mündet eine kurze cylindrische Ansatzröhre KL, Fig. 803, in einer ebenen Wand AB ein, deren Inhalt G den Querschnitt F der Röhre nicht vielmal übertrifft, so kommt

das Wasser mit einer nicht zu vernachlässigenden Geschwindigkeit an der Einmündungsstelle an, und es tritt deshalb nur mit unvollkommener Contraction in das Rohr, weshalb wieder die Ausflußgeschwindigkeit eine größere ist, als wenn das Wasser als stillstehend vor dem Eintritt in die Röhre angenommen werden kann. Ist wieder $\frac{F}{G} = n$ das Verhältniß des Röhrenquerschnittes zum Inhalte der Wandfläche, ferner μ_0 der Ausflußcoefficient bei vollkommener Contraction, wo $\frac{F}{G}$ der Null gleich gesetzt werden kann, so hat man, den Versuchen des Verfassers zufolge, den Ausflußcoefficienten bei unvollkommener Contraction oder dem Querschnittsverhältnisse n zu setzen:

Fig. 803.

$$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0} = 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3, \text{ oder}$$

$$\mu_n = \mu_0\,(1 + 0{,}102\,n + 0{,}067\,n^2 + 0{,}046\,n^3).$$

Nimmt z. B. der Röhrenquerschnitt den sechsten Theil der ganzen Wandfläche ein, so ist:

$$\mu_{1/6} = \mu_0\,(1 + 0{,}102 \,.\, 1/6 + 0{,}067 \,.\, 1/36 + 0{,}046 \,.\, 1/216)$$
$$= \mu_0\,(1 + 0{,}017 + 0{,}0019 + 0{,}0002) = 1{,}019\,\mu_0,$$

oder $\mu_0 = 0{,}815$ gesetzt:

$$\mu_{1/6} = 0{,}815 \,.\, 1{,}019 = 0{,}830.$$

Etwas genauer giebt die Correctionswerthe $\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$ folgende, zum Gebrauche bequeme Tabelle an.

Tabelle

der Correctionen der Ausflußcoefficienten wegen der unvollkommenen Contraction, beim Ausflusse durch kurze cylindrische Ansatzröhren.

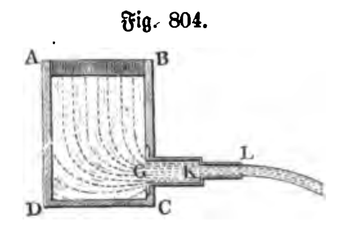
n	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,006	0,013	0,020	0,027	0,035	0,043	0,052	0,060	0,070	0,080

n	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$\frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_0}$	0,090	0,102	0,114	0,127	0,138	0,152	0,166	0,181	0,198	0,227

Beim Ausflusse durch kurze parallelepipedische Röhren sind diese Correctionen ziemlich die nämlichen.

Diese Coefficienten finden ihre Anwendung vorzüglich beim Ausflusse des Wassers durch zusammengesetzte Röhren, wie z. B. in dem durch die Fig. 804 dargestellten Falle, wo die kurze Ansatzröhre KL in einer weiteren kurzen Ansatzröhre GK und diese wieder in dem Gefäße AC einmündet. Hier ist beim Eintritte des Wassers aus der weiteren Röhre in die engere unvollkommene Contraction vorhanden und daher der Ausflußcoefficient nach der letzten Regel zu bestimmen. Setzen wir den diesem Ausflußcoefficienten entsprechenden Widerstandscoefficienten $= \zeta_1$, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt aus dem Gefäße in die weitere Röhre $= \zeta$, die Druckhöhe $= h$, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$ und das Verhältniß $\frac{F}{G}$ der Röhrenquerschnitte $= n$, also die Geschwindigkeit des Wassers in der weiteren Röhre $= nv$, so gilt die Formel:

Fig. 804.



$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{(n\,v)^2}{2g} + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ d. i.}$$

$$h = (1 + n^2\zeta + \zeta_1)\,\frac{v^2}{2g}, \text{ und es ist daher:}$$

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + n^2\zeta + \zeta_1}}.$$

Beispiel. Welche Wassermenge liefert der in Fig. 804 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe $h = 1{,}5$ Meter, die Weite der engeren Röhre 50 Millimeter und die der weiteren 80 Millimeter beträgt? Es ist:

$$n = (5/8)^2 = 0{,}39, \text{ daher } \mu_{0{,}39} = 1{,}059 \,.\, 0{,}815 = 0{,}863$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{0{,}863}\right)^2 - 1 = 0{,}343. \text{ Nun hat man ferner:}$$

$$\zeta = 0{,}505,\ n^2\zeta = 0{,}39^2 \,.\, 0{,}505 = 0{,}077, \text{ daher:}$$

$$1 + n^2\zeta + \zeta_1 = 1 + 0{,}077 + 0{,}343 = 1{,}42$$

und die Ausflußgeschwindigkeit:

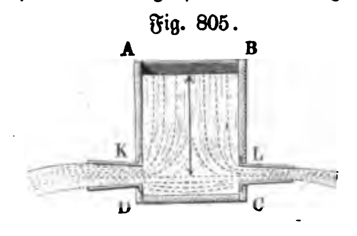
$$v = \frac{4{,}429\,\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{1{,}42}} = 4{,}552 \text{ Meter.}$$

Hieraus folgt die Ausflußmenge pro Secunde:

$$Q = 3{,}14 \,.\, 0{,}025^2 \,.\, 4{,}552 = 0{,}00892 \text{ Cubikmeter} = 8{,}92 \text{ Liter.}$$

Conische Ansatzröhren. Conische Ansatzröhren geben andere Ausflußmengen als prismatische oder cylindrische Ansatzröhren. Die Röhren heißen convergent, L, Fig. 805, oder divergent, K, Fig. 805, je nachdem die Ausmündung kleiner oder größer als die Einmündung ist. Convergenten Röhren kommen größere und divergenten Röhren kommen kleinere Ausflußcoefficienten zu, als cylindrischen Röhren von derselben Weite der Ausmündung. Eine und dieselbe conische Röhre giebt allerdings, wenn das weitere Ende die Ausmündung bildet, mehr Wasser, als wenn man das engere Ende zur Ausmündung macht, aber sie giebt nicht in dem Verhältnisse mehr, in welchem die weitere Mündung die engere übertrifft. §. 452.

Fig. 805.



Wenn daher Manche, wie z. B. Venturi und Eytelwein, für conisch divergente Röhren größere Ausflußcoefficienten angeben, als für conisch convergente, so ist zu berücksichtigen, daß sie immer den engeren Querschnitt als Mündung behandeln. Den Einfluß der conischen Form der Röhren auf die Ausflußmenge führen folgende, unter Druckhöhen von 0,25 bis 3,3 Meter angestellte Versuche mit einer 9 Centimeter langen Röhre AD, Fig. 806, vor Augen. Die Weite dieser Röhre betrug 2,468 Centimeter an einem Ende DE und 3,228 Centimeter am anderen Ende AB, und der Convergenzwinkel, d. i. der Winkel AOB, unter dem die gegenüberliegenden Seiten AE und BD eines Längenaxenschnittes zusammenlaufen, war 40° 50′. Beim Ausflusse durch die engere Mündung war der Ausflußcoefficient 0,920; bei dem Ausflusse durch die weitere Mündung aber 0,553; und wenn man die engere Einmündung als Querschnitt in die Rechnung einführt, ergab er sich daher zu 0,946.

Fig. 806.

Der Strahl war im ersten Falle, wo die Röhre als conisch convergentes Mundstück gebraucht wurde, wenig contrahirt, dicht und glatt, im zweiten Falle aber, wo sie als conisch divergentes Mundstück diente, war er stark divergent, zerrissen und stark pulsirend. Ueber den Ausfluß durch conisch divergente Röhren haben noch Venturi und Eytelwein experimentirt. Beide Hydrauliker haben diese conischen Röhren an cylindrische und conoidische, nach der Form des contrahirten Wasserstrahles geformte Mundstücke angesetzt. Durch eine solche Verbindung, wie Fig. 807 (a. f. S.) darstellt, wo das divergente Ausmündungsstück KL innen 12 und außen $21\frac{1}{2}$ Linien weit und $8\frac{13}{16}$ Zoll lang war, wobei der Convergenzwinkel 5° 9′ maß,

fand Eytelwein $\mu = 1,5526$, wenn er das engere Ende als Mündung behandelte, und dagegen $\mu = 0,483$, wenn er, wie recht, das weitere Ende als Mündung ansah. Allerdings fließt durch dieses combinirte Mundstück $\frac{1,5526}{0,615} = 2,5$ mal so viel, als durch die einfache Mündung in der dünnen Wand, und $\frac{1,5526}{0,815} = 1,9$ mal so viel, als durch die kurze cylindrische Ansatzröhre. Bei großen Geschwindigkeiten und bei größerer Divergenz ist es übrigens gar nicht möglich, selbst durch vorhergegangenes Zuhalten der Röhren, den vollen Ausfluß herbeizuführen.

Fig. 807.

K G L

Auch fand der Verfasser für eine kurze conisch divergente Ansatzröhre von 4 Centimeter Länge, 1 Centimeter innerer und 1,54 Centimeter äußerer Weite, wobei der Divergenzwinkel 8 Grad 4 Minuten maß, bei 0,4 Meter Druckhöhe, je nachdem die Röhre innen abgerundet war oder nicht, entweder

$$\mu = 0,738 \text{ oder } \mu = 0,395.$$

§. 453. Die ausführlichsten Versuche über den Ausfluß durch conisch convergente Ansatzröhren sind von d'Aubuisson und Castel angestellt worden. Die hierzu in Anwendung gekommenen Röhren waren von großer Mannigfaltigkeit, verschieden in den Längen, Weiten und in den Convergenzwinkeln. Am ausgedehntesten waren die Versuche mit Röhren von 0,0155 Meter Weite in der Ausmündung und von 2,6 mal so großer, d. i. von 0,04 Meter Länge, weswegen wir ihre Ergebnisse auch in folgender Tabelle hier mittheilen. Die Druckhöhe war durchgängig 3 Meter. Die Ausflußmengen wurden durch ein besonderes Aichgefäß gemessen, um aber außer den Ausflußcoefficienten auch noch die Geschwindigkeits- und Contractionscoefficienten zu erhalten, wurden die gegebenen Höhen entsprechenden Sprungweiten der Wasserstrahlen gemessen und hieraus die Ausflußgeschwindigkeiten (s. §. 436) berechnet.

Das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ der effectiven Geschwindigkeit v zur theoretischen Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ gab den Geschwindigkeitscoefficienten φ, sowie das Verhältniß $\frac{Q}{F\sqrt{2gh}}$ der effectiven Ausflußmenge Q zur theoretischen Ausflußmenge $F\sqrt{2gh}$ auf den Ausflußcoefficienten μ führte und das Verhältniß zwischen beiden Coefficienten, d. i. $\frac{\mu}{\varphi}$, endlich den Contractionscoefficienten α bestimmte.

Diese Bestimmung ist aber bei großen Ausflußgeschwindigkeiten nicht hinreichend genau, weil hier der Widerstand der Luft zu groß ausfällt.

Tabelle
der Ausfluß- und Geschwindigkeitscoefficienten für den Ausfluß durch conisch convergente Röhren.

Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geschwindigkeitscoefficienten.	Convergenzwinkel.	Ausflußcoefficienten.	Geschwindigkeitscoefficienten.
0° 0′	0,829	0,829	13° 24′	0,946	0,963
1° 36′	0,866	0,867	14° 28′	0,941	0,966
3° 10′	0,895	0,894	16° 36′	0,938	0,971
4° 10′	0,912	0,910	19° 28′	0,924	0,970
5° 26′	0,924	0,919	21° 0′	0,919	0,972
7° 52′	0,930	0,932	23° 0′	0,914	0,974
8° 58′	0,934	0,942	29° 58′	0,895	0,975
10° 20′	0,938	0,951	40° 20′	0,870	0,980
12° 4′	0,942	0,955	48° 50′	0,847	0,984

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß die Ausflußcoefficienten bei einer Röhre von $13\frac{1}{2}{}^0$ Seitenconvergenz ihr Maximum 0,946 erreicht haben, daß dagegen die Geschwindigkeitscoefficienten immer größer und größer ausfallen, je größer der Convergenzwinkel ist. Wie in vorkommenden Fällen der Praxis diese Tabelle zu gebrauchen ist, mag folgendes Beispiel lehren.

Beispiel. Welche Wassermenge liefert eine kurze conische Ansatzröhre von 0,04 Meter Weite in der Ausmündung und von 10 Grad Convergenz bei einem Drucke von 5 Meter? Nach des Verfassers Versuchen giebt eine cylindrische Röhre von dieser Weite $\mu = 0{,}810$, die Röhre von d'Aubuisson aber gab $\mu = 0{,}829$, also um $0{,}829 - 0{,}810 = 0{,}019$ mehr; nun ist aber der Tabelle zufolge für die Röhre von 10° Convergenz $\mu = 0{,}937$, daher möchte es angemessen sein, für die gegebene Röhre $\mu = 0{,}937 - 0{,}019 = 0{,}918$ zu setzen, wonach dann die Ausflußmenge:

$$Q = 0{,}918 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}02^2 \,.\, 4{,}429 \sqrt{5} = 0{,}0114 \text{ Cubikmeter} = 11{,}4 \text{ Liter}$$

folgt.

Reibungswiderstand. Lange prismatische oder cylindrische Ansatzröhren verzögern den Ausfluß um so mehr, je länger dieselben sind; es ist daher anzunehmen, daß die Röhrenwände durch Reibung, Adhäsion oder Klebrigkeit des Wassers an denselben der Bewegung des Wassers in den Röhren ein Hinderniß entgegensetzen. Vernunftgründen und vielfachen Beobachtungen und Messungen zufolge läßt sich annehmen, daß dieser Reibungswiderstand ganz unabhängig ist vom Drucke, daß er aber direct wie die §. 454.

Länge l und umgekehrt wie die Weite d derselben wächst, daß er also dem Verhältnisse $\frac{l}{d}$ proportional ist. Außerdem hat sich auch noch herausgestellt, daß dieses Hinderniß größer ist bei größeren und kleiner bei kleineren Geschwindigkeiten des Wassers, und daß es beinahe mit dem Quadrate der Geschwindigkeit v des Wassers selbst wächst. Messen wir dieses Hinderniß durch die Höhe einer Wassersäule, die nachher von der ganzen Druckhöhe abzuziehen ist, um die zur Erzeugung der Geschwindigkeit nöthige Höhe zu erhalten, so können wir diese Höhe, die wir in der Folge Reibungswiderstandshöhe nennen wollen, setzen:

$$h = \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

Hierin ist unter ζ eine Erfahrungszahl, welche wir den Reibungscoefficienten nennen können, zu verstehen. Man verliert also hiernach durch die Reibung des Wassers in der Röhre um so mehr an Druck oder Druckhöhe, je größer das Verhältniß $\frac{l}{d}$ der Länge zur Weite und je größer die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ ist. Aus der Wassermenge Q und dem Röhrenquerschnitte

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

folgt die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

und daher die Reibungshöhe:

$$h = \zeta \frac{l}{d} \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2 = \zeta \frac{1}{2g} \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{lQ^2}{d^5}.$$

Um durch das Fortleiten einer gewissen Wassermenge Q in einer Röhre möglichst wenig Verlust an Druckhöhe oder Gefälle zu erhalten, soll man die Röhre möglichst weit und nicht unnöthig lang machen. Die doppelte Weite beansprucht z. B. zur Ueberwindung der Reibung nur $(1/2)^5 = 1/32$ mal so viel Gefälle als die einfache Weite.

Ist der Querschnitt einer Röhre ein Rechteck von der Höhe a und der Breite b, so hat man statt

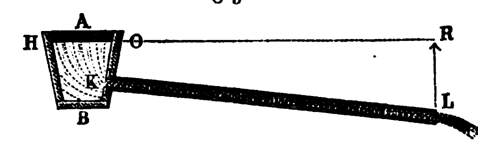
$$\frac{1}{d} = 1/4 \cdot \frac{\pi d}{1/4 \pi d^2} = 1/4 \cdot \frac{\text{Umfang}}{\text{Inhalt}}, \quad 1/4 \cdot \frac{2(a+b)}{ab} = \frac{a+b}{2ab}$$

einzusetzen, weshalb folgt:

$$h = \zeta \frac{l(a+b)}{2ab} \frac{v^2}{2g}.$$

Mit Hülfe dieser Formel für den Röhrenreibungswiderstand lassen sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und das Ausflußquantum finden, welches eine Röhre von einer gegebenen Länge und Weite unter einem gegebenen Drucke fortleitet. Uebrigens ist es vollkommen gleich, ob die Röhre KL, Fig. 808, horizontal ist, fällt, oder steigt, wenn nur unter der Druckhöhe die Tiefe RL des Mittelpunktes L der Röhrenmündung unter dem Wasserspiegel HO des Ausflußreservoirs verstanden wird.

Fig. 808.



Ist h die Druckhöhe, h_0 die Widerstandshöhe für das Einmündungsstück und h_1 die Widerstandshöhe für den übrigen Theil der Röhre, so hat man:

$$h - (h_0 + h_1) = \frac{v^2}{2g}, \text{ oder } h = \frac{v^2}{2g} + h_0 + h_1.$$

Bezeichnet ζ_0 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück, und ζ den Coefficienten des Reibungswiderstandes der übrigen Röhre, so ist zu setzen:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \zeta_0 \frac{v^2}{2g} + \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

oder:

$$1)\ h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

und:

$$2)\ v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}}}.$$

Aus der letzteren Formel ergiebt sich die Wassermenge $Q = Fv$.

Bei sehr langen Röhren fällt $1 + \zeta_0$ sehr klein gegen $\zeta \frac{l}{d}$ aus, weshalb dann einfach

$$h = \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\zeta} \frac{d}{l} \cdot 2gh} \text{ folgt.}$$

Der Reibungscoefficient ist, wie die Ausflußcoefficienten, nicht ganz constant, er ist bei kleinen Geschwindigkeiten größer und bei großen Geschwindigkeiten kleiner, d. h. der Reibungswiderstand des Wassers in den Röhren wächst nicht genau mit dem Quadrate der Geschwindigkeit, sondern §. 455.

auch noch mit einer anderen Potenz der Geschwindigkeit. Prony und Eytelwein haben angenommen, daß die durch den Reibungswiderstand verlorene Druckhöhe wie die einfache Geschwindigkeit und wie das Quadrat derselben wachse, und für sie den Ausdruck:

$$h = (\alpha v + \beta v^2)\frac{l}{d},$$

wo α und β Erfahrungscoefficienten bezeichnen, festgesetzt. Um diese Coefficienten zu bestimmen, haben die genannten Hydrauliker 51 Versuche benutzt, welche zu verschiedenen Zeiten von Couplet, Bossut und du Buat über die Bewegung des Wassers durch lange Röhren angestellt worden sind. Prony fand hieraus:

$$h = (0{,}0000693\, v + 0{,}0013932\, v^2)\frac{l}{d},$$

Eytelwein:

$$h = (0{,}0000894\, v + 0{,}0011213\, v^2)\frac{l}{d},$$

d'Aubuisson nimmt an:

$$h = (0{,}0000753\, v + 0{,}001370\, v^2)\frac{l}{d} \text{ Meter.}$$

Noch genauer an die Beobachtungen schließt sich eine von dem Verfasser aufgefundene Formel an, welche die Form

$$h = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}\right)\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

hat und sich auf die Voraussetzung gründet, daß der Reibungswiderstand wie das Quadrat und wie die Quadratwurzel aus dem Cubus der Geschwindigkeit zugleich wächst. Man hat also hiernach den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{v}}$$

und die Reibungswiderstandshöhe einfach

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \text{ zu setzen.}$$

Zur Ermittelung des Widerstandscoefficienten ζ oder der Hülfsconstanten α und β sind aber von dem Verfasser nicht nur die schon bei den Prony'schen und Eytelwein'schen Bestimmungen zu Grunde gelegten 51 Versuche von Couplet, Bossut und du Buat, sondern auch noch 11 Versuche vom Verfasser und 1 Versuch von einem Herrn Gueymard in Grenoble benutzt worden. Die älteren Versuche erstrecken sich nur auf Geschwindigkeiten von 0,043 bis 1,930 Meter, durch die Versuche des Verfassers ist aber die letzte Grenze der Geschwindigkeiten bis auf 4,648 Meter hinausgerückt worden. Die Weiten der Röhren waren bei den älteren Versuchen 27, 36, 54, 135 und 490 Millimeter, und die neuen Versuche wurden an

Röhren von 33, 71 und 275 Millimetern angestellt. Mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate ist nun aus den zu Grunde gelegten 63 Versuchen gefunden worden:

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}},$$

oder:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Meter},$$

oder für das preußische Maß:

$$h = \left(0{,}01439 + \frac{0{,}016921}{\sqrt{v}}\right) \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ Fuß}.$$

Anmerkung 1. Bei Berücksichtigung anderer Versuche von Herrn Professor Zeuner, angestellt an einer Zinkröhre von 25 Millimeter Weite bei 0,1356 bis 0,4287 Meter Geschwindigkeit, ist

$$\zeta = 0{,}014312 + \frac{0{,}010327}{\sqrt{v}}$$

zu setzen, wenn v in Metern gegeben ist. (Siehe „Civilingenieur", Bd. I, 1854.)

Anmerkung 2. Neuere Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhren unter großen und sehr großen Geschwindigkeiten sind 1856 und 1858 vom Verfasser angestellt worden. Siehe „Civilingenieur", Band V, Heft 1 und 3, sowie Band IX, Heft 1. Die Ergebnisse dieser Versuche enthält folgende Tabelle.

Bezeichnung der Röhren.	Weite der Röhre (d)	Mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre (v)	Reibungs-coefficient ζ
Engere Glasröhre	1,03 Ctm.	8,51 Meter.	0,01815
Weitere Glasröhre	1,43 „	10,18 „	0,01865
Engere Messingröhre . . .	1,04 „	8,64 „	0,01869
Desgl., kürzer gemacht . .	1,04 „	12,32 „	0,01784
Desgl., unter sehr hohem Drucke	1,04 „	20,99 „	0,01690
Weitere Messingröhre . . .	1,43 „	8,66 „	0,01719
Desgl., abgekürzt	1,43 „	12,40 „	0,01736
Desgl., unter sehr hohem Drucke	1,43 „	21,59 „	0,01478
Weitere Zinkröhre	2,47 „	3,19 „	0,01962
Desgl., kürzer	2,47 „	4,73 „	0,01838
noch kürzer	2,47 „	6,24 „	0,01790
noch kürzer	2,47 „	9,18 „	0,01670

Die Werthe in der letzten Columne weisen von Neuem nach, daß der Widerstandscoefficient ζ für die Reibung des Wassers in Röhren abnimmt, sowohl wenn die Geschwindigkeit (v), als auch, jedoch weit langsamer, wenn die Röhrenweite (d) eine größere wird. Uebrigens ist bei großen Geschwindigkeiten die Uebereinstimmung der Formel

$$\zeta = 0{,}01439 + \frac{0{,}0094711}{\sqrt{v}}$$

mit diesen neuen Erfahrungsgrößen noch eine leidliche, z. B. $v = 9$ Meter, giebt

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00316 = 0{,}01755,$$

und $v = 16$ Meter

$$\zeta = 0{,}01439 + 0{,}00237 = 0{,}01676,$$

was mit den nahe entsprechenden Werthen in der letzten Tabelle recht gut übereinstimmt.

Anmerkung 3. Herr de Saint-Venant findet, daß die bekannte Formel für den Widerstand des Wassers in Röhren sich noch mehr an die Erfahrungen anschließt, wenn man die Reibungshöhe nicht v^2 oder $\frac{v^2}{2g}$, sondern $v^{12/7}$ proportional wachsend annimmt. (Siehe dessen „Mémoire sur les formules nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes.") Es ist hiernach:

$$h = \frac{4l}{d} \cdot 0{,}00029557\, v^{12/7} = 0{,}00118228 \frac{l}{d} \cdot v^{12/7} = 0{,}023197\, v^{-2/7} \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ Meter}$$

zu setzen. Die Annahme eines gebrochenen Exponenten der Potenz von v ist gar nicht neu; schon Woltmann setzte $v^{7/4}$ statt v^2, und Eytelwein brachte $v^{33/18}$ statt v^2 in Vorschlag (siehe den vom Verfasser bearbeiteten Artikel „Ausfluß", Band I., Seite 554, der allgemeinen Maschinenencyclopädie von Hülsse).

Anmerkung 4. Neue und sehr ausführliche Versuche über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen sind von Herrn H. Darcy angestellt worden. (S. den Rapport der Akademie der Wissenschaften zu Paris in den „Comptes rendus etc.", Tom. 38, 1854, sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux.) Herr Darcy folgert für die Fälle, wo die Geschwindigkeit v des Wassers nicht unter 0,2 Meter ist, aus diesen Versuchen die Formel:

$$h = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{r}\right) \frac{l}{r} \cdot v^2$$

$$= \left(0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d}\right) \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ Meter,}$$

wonach der Widerstandscoefficient

$$\zeta = 0{,}01989 + \frac{0{,}0005078}{d} \text{ zu setzen wäre.}$$

Jedenfalls kann diese Formel bei kleinen Geschwindigkeiten nicht ausreichend genau sein.

§. 456. Zur Erleichterung der Rechnung ist folgende Tabelle der Widerstandscoefficienten zusammengestellt worden. Man ersieht aus ihr, daß allerdings die Veränderlichkeit dieser Coefficienten nicht unbedeutend ist, da dieser Coefficient für 0,1 Meter Geschwindigkeit $= 0{,}0443$, für 1 Meter $= 0{,}0239$ und für 5 Meter $= 0{,}0186$ ausfällt.

Tabelle der Reibungscoefficienten des Wassers.

		Zehntel Meter.									
	v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ganze Meter.	0	—	0,0443	0,0356	0,0317	0,0294	0,0278	0,0266	0,0257	0,0250	0,0244
	1	0,0239	0,0234	0,0230	0,0227	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213
	2	0,0211	0,0209	0,0208	0,0206	0,0205	0,0204	0,0203	0,0202	0,0201	0,0200
	3	0,0199	0,0198	0,0197	0,0196	0,0195	0,0195	0,0194	0,0193	0,0193	0,0192
	4	0,0191	0,0191	0,0190	0,0190	0,0189	0,0189	0,0188	0,0188	0,0187	0,0187

Man findet in dieser Tabelle den einer gewissen Geschwindigkeit entsprechenden Widerstandscoefficienten, wenn man die ganzen Meter in der ersten Vertical- und die Zehntel in der ersten Horizontalcolumne aufsucht, von der ersten Zahl horizontal und von der letzten vertical fortgeht bis zur Stelle, wo sich beide Bewegungen begegnen. Z. B. ist für $v = 1,3$ Meter, $\zeta = 0,0227$, für $v = 2,8$, $\zeta = 0,0201$.

Für das preußische Fußmaß läßt sich setzen:

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9 Fuß.
ζ	0,0679	0,0522	0,0453	0,0411	0,0383	0,0362	0,0346	0,0333	0,0322

v	1	$1^1/_4$	$1^1/_2$	2	3	4	6	8	12	20 Fuß.
ζ	0,0313	0,0296	0,0282	0,0263	0,0242	0,0229	0,0213	0,0204	0,0192	0,0182

Anmerkung. Eine ausgedehntere und bequemere Tafel giebt der „Ingenieur", Seite 442 und 443.

Lange Röhren. In Ansehung der Bewegung des Wassers in langen Röhren oder Röhrenleitungen können folgende drei Hauptaufgaben zur Lösung vorkommen. §. 457.

1) Es ist die Länge l und Weite d der Röhre und das fortzuführende Wasserquantum Q gegeben, man sucht die entsprechende Druckhöhe. Hier hat man zunächst die Geschwindigkeit

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{4\,Q}{\pi d^2} = 1,2732 \cdot \frac{Q}{d^2}$$

zu berechnen, dann den diesem Werthe entsprechenden Reibungscoefficienten ζ

in einer der letzten Tafeln aufzusuchen, und zuletzt die Werthe d, l, v, ζ und ζ_0, wo ζ_0 den Widerstandscoefficienten für das Einmündungsstück bezeichnet, in der ersten Hauptformel

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}$$

zu substituiren.

2) Es ist die Länge und Weite der Röhre, sowie die Druckhöhe oder das Gefälle gegeben, und die Wassermenge zu bestimmen. Hier ist zunächst die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l}{d}}}$$

zu finden; da aber der Widerstandscoefficient nicht ganz constant ist, sondern sich mit v etwas ändert, so muß man v vorher schon annähernd kennen, um danach ζ ermitteln zu können.

Aus v folgt dann:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\,v = 0{,}7854\,d^2 v.$$

3) Es ist die Wassermenge, die Druckhöhe und die Länge der Röhre gegeben, und die nöthige Weite der Röhre zu bestimmen.

Da $v = \frac{4\,Q}{\pi\,d^2}$, also $v^2 = \left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}$, so hat man:

$$2gh = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\,\frac{l}{d}\right)\left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{d^4}, \text{ oder:}$$

$$2gh \cdot \left(\frac{\pi}{4\,Q}\right)^2 = (1 + \zeta_0)\,\frac{1}{d^4} + \zeta\,\frac{l}{d^5}, \text{ oder:}$$

$$2gh \cdot \left(\frac{\pi}{4\,Q}\right)^2 d^5 = (1 + \zeta_0)\,d + \zeta l;$$

daher ist die Röhrenweite:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\,d + \zeta l}{2gh} \cdot \left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^2}.$$

Setzt man $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}6212$; $1 + \zeta_0 = 1{,}505$ und $\frac{1}{2g} = 0{,}051$, so erhält man:

$$d = 0{,}6075\,\sqrt[5]{(1{,}505\,.\,d + \zeta l)\,\frac{Q^2}{h}}\ \text{Meter.}$$

Auch diese Formel ist nur als Näherungsformel zu gebrauchen, weil in

ihr die Unbekannte d und auch der von der Geschwindigkeit $v = \frac{4\,Q}{\pi\,d^2}$ abhängige Coefficient ζ mit vorkommen.

Beispiele. 1) Welche Druckhöhe beansprucht eine 50 Meter lange und 0,15 Meter weite Röhrenleitung, wenn dieselbe in der Minute 1 Cubikmeter Wasser fortleiten soll? Hier ist

$$v = 1{,}2732\,\frac{1}{60\,.\,0{,}15^2} = 0{,}943 \text{ Meter},$$

daher läßt sich $\zeta = 0{,}0244 - 0{,}43\,(0{,}0244 - 0{,}0239) = 0{,}0242$ setzen, und es folgt nun die Druckhöhe oder das totale Röhrengefälle:

$$h = \left(1{,}505 + 0{,}0242\,\frac{50}{0{,}15}\right) 0{,}051\,.\,0{,}943^2 = 0{,}434 \text{ Meter}.$$

2) Welche Wassermenge wird eine Röhrenleitung von 20 Meter Länge und 0,05 Meter Weite bei 1,6 Meter Druckhöhe liefern? Es ist:

$$v = \frac{4{,}429\,\sqrt{1{,}6}}{\sqrt{1{,}505 + \zeta\,\frac{20}{0{,}05}}} = \frac{5{,}603}{\sqrt{1{,}505 + 400\,\zeta}}.$$

Vorläufig $\zeta = 0{,}020$ angenommen, erhält man:

$$v = \frac{5{,}603}{\sqrt{1{,}505 + 8{,}0}} = 1{,}818 \text{ Meter};$$

für $v = 1{,}8$ Meter ist aber richtiger $\zeta = 0{,}0215$, daher hat man genauer:

$$v = \frac{5{,}603}{\sqrt{1{,}505 + 400\,.\,0{,}0215}} = \frac{5{,}603}{\sqrt{10{,}10}} = 1{,}762 \text{ Meter},$$

woraus das Wasserquantum

$$Q = 3{,}14\,.\,0{,}025^2\,.\,1{,}762 = 3{,}95 \text{ Liter folgt.}$$

3) Welche Weite muß man einer 40 Meter langen Röhrenleitung geben, die bei 1,5 Meter Druckhöhe in jeder Minute 1,2 Cubikmeter Wasser liefern soll? Es ist:

$$d = 0{,}607\,\sqrt[5]{(1{,}505\,d + \zeta\,.\,40)\left(\frac{1{,}2}{60}\right)^2 \frac{1}{1{,}5}} = 0{,}607\,\sqrt[5]{0{,}0004\,d + 0{,}0107\,\zeta}.$$

Setzt man vorläufig $\zeta = 0{,}02$, so erhält man:

$$d = 0{,}607\,\sqrt[5]{0{,}0004\,d + 0{,}000214}, \text{ oder annähernd:}$$

$$d = 0{,}607\,\sqrt[5]{0{,}000214} = 0{,}112 \text{ Meter, also genauer:}$$

$$d = 0{,}607\,\sqrt[5]{0{,}0004\,.\,0{,}112 + 0{,}000214} = 0{,}116 \text{ Meter}.$$

Dieser Weite entspricht ein Querschnitt:

$$F = 0{,}7854\,.\,0{,}116^2 = 0{,}0106 \text{ Quadratmeter},$$

daher eine Geschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{1{,}2}{60\,.\,0{,}0106} = 1{,}89 \text{ Meter}.$$

Hierfür ist aber der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0213$, daher folgt nunmehr:

$$d = 0{,}607\,\sqrt[5]{0{,}0004\,.\,0{,}116 + 0{,}0107\,.\,0{,}0213} = 0{,}118 \text{ Meter}.$$

Anmerkung 1. Versuche mit 65 und 117 Millimeter weiten ordinären Holzröhren haben dem Verfasser den Widerstandscoefficienten 1,75 mal so groß

gegeben, wie bei den Metallröhren, auf welche sich die in den Tabellen des vorigen Paragraphen angeführten Werthe beziehen. Während also im Beispiel 1. für die Geschwindigkeit von 0,943 Meter bei Metallröhren $\zeta = 0{,}0242$ ist, müssen wir ihn bei Holzröhren 0,0242 . 1,75 = 0,0424 setzen, und die im Beispiel 1. erforderliche Druckhöhe würde sich unter Voraussetzung hölzerner Röhren zu

$$h = \left(1{,}505 + 0{,}0424\,\frac{50}{0{,}15}\right) 0{,}051 \,.\, 0{,}943^2 = 0{,}709 \text{ Meter}$$

berechnen, während sie bei metallenen Röhren nur zu 0,434 Meter sich ergab.

Nach den Versuchen Darcy's wächst der Widerstandscoefficient ζ überhaupt sehr bedeutend mit der Rauhigkeit der Röhrenwand und steigt bei sehr rauhen Wänden auf das Zwei- bis Dreifache. Dieselbe Erfahrung hat in der neuesten Zeit auch der Verfasser gemacht.

Anmerkung 2. Einen nicht unbedeutenden Einfluß übt noch die Temperatur auf den Widerstand des Wassers in Röhren aus. Hierauf Bezug habende Versuche sind von Gerstner (s. dessen „Handbuch der Mechanik", Bd. II.) und in der neuesten Zeit von Herrn Geh. Rath Hagen (s. dessen „Abhandlungen über den Einfluß der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren", Berlin, 1854) angestellt worden. Durch die allerdings nur an sehr engen Röhren ($d = 0{,}108 - 0{,}227$ Zoll) angestellten Versuche des Letzteren hat sich ergeben, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen die Geschwindigkeit des Wassers in Röhren nicht ohne Grenze mit der Temperatur desselben zunimmt, sondern daß es für jede Röhre eine gewisse Temperatur giebt, wo diese Geschwindigkeit ein Maximum ist. Für die Versuche außerhalb dieses Maximums findet Hagen folgende Formel: $h = m\, l\, r^{-1{,}25} \,.\, v^{1{,}75}$ und:

$$m = 0{,}000038941 - 0{,}0000017185\,\sqrt{t},$$

wo die Temperatur t in R.-Graden und die Druckhöhe h, die Länge l, der Röhrenhalbmesser r und die Geschwindigkeit v in Zollen auszudrücken sind.

§. 458. Conische Röhren. Bei einer conischen Röhre AD, Fig. 809, läßt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise finden. Es sei der halbe Convergenzwinkel der Röhrenwand $ACL = BCL = \delta$, der Durchmesser AB der Einmündung $= d_1$, der Durchmesser DE der Ausmündung $= d$, ferner die Länge KL der Röhre $= l$ und die Ausflußgeschwindigkeit (bei DE) $= v$.

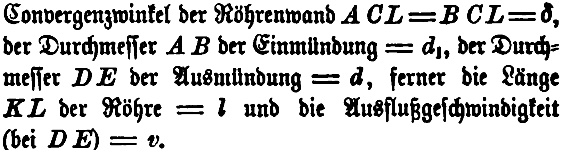


Fig. 809.

In einem Abstande $KM = x$ von der Ausmündung ist der Durchmesser der Röhre:

$$NO = y = DE + 2\,KM\,tang.\,\delta$$
$$= d + 2\,x\,tang.\,\delta$$

und daher die Geschwindigkeit w daselbst, da sich

$$\frac{w}{v} = \frac{d^2}{y^2}$$ setzen läßt:

$$w = \frac{d^2}{y^2} v = \frac{v}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^2}.$$

Für ein Element $NOPR$ des Röhrenstückes von der Länge

$$OP = NR = \frac{MQ}{cos.\,\delta} = \frac{\partial x}{cos.\,\delta}$$

ist daher die Widerstandshöhe der Reibung:

$$\partial h = \zeta \frac{\partial x}{y\,cos.\,\delta} \frac{w^2}{2g} = \zeta \frac{\partial x}{y\,cos.\,\delta \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^4} \frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta \frac{\partial x}{d\,cos.\,\delta \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5} \frac{v^2}{2g},$$

und es folgt die Reibungswiderstandshöhe für die ganze Röhre:

$$h = \zeta \frac{v^2}{2gd} \int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}\ ^{*}).$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}$$

$$= \frac{d}{2\,sin.\,\delta} \int \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^{-5} \partial \left(\frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)$$

$$= -\frac{d}{8\,sin.\,\delta} \left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^{-4}$$, daher ergiebt sich:

$$\int_0^l \frac{\partial x}{\left(1 + \frac{2x}{d}\,tang.\,\delta\right)^5 cos.\,\delta}$$

$$= \frac{d}{8\,sin.\,\delta} \left[1 - \left(1 + \frac{2l}{d}\,tang.\,\delta\right)^{-4}\right]$$, oder:

$$= \frac{d}{8\,sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^{-4}\right] = \frac{d}{8\,sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right],$$

da $d + 2l\,tang.\,\delta$ den Durchmesser d_1 der Einmündung ausdrückt.

Es ist folglich die gesuchte Widerstandshöhe:

$$h = \zeta \frac{v^2}{2gd} \frac{d}{8\,sin.\,\delta} \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] = \frac{1}{8}\,\zeta\,cosec.\,\delta \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Einmündung viel weiter als die Ausmündung, so kann man $\left(\frac{d}{d_1}\right)^4$ = Null setzen und erhält hiernach:

$$h = \frac{1}{8} \frac{\zeta}{sin.\,\delta} \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{8}\,\zeta\,cosec.\,\delta\,\frac{v^2}{2g};$$

*) Dieser Ausdruck ist nur annähernd genau, insofern er einen für alle Querschnitte zwischen A und K constanten Werth des Widerstandscoefficienten ζ voraussetzt.

es hängt also in diesem Falle der Reibungswiderstand gar nicht von der Länge der Röhre ab.

Beispiel. Bei dem Mundstücke AK, Fig. 810. einer Feuerspritze ist der Convergenzwinkel des Ausmündungsstückes BK, $2\delta_1 = 5^0$ und der des Einmündungsstückes AB, $2\delta_2 = 18^0$, ferner die Weite der Ausmündung $d = 15$ Millimeter, die Weite der Einmündung $d_1 = 39$ Millimeter und die ganze Länge des Gußstückes $AK = l = 160$ Millimeter. Welche Größe hat der Widerstandscoefficient desselben?

Sei $BK = l_1$ und $AB = l_2$, so haben wir:

$$l_1 + l_2 = l \text{ und } l_1\, tang.\, \delta_1 + l_2\, tang.\, \delta_2 = \frac{d_1 - d}{2}, \text{ oder:}$$

$$l_1 + l_2 = 160;\ 0{,}0437\, l_1 + 0{,}1584\, l_2 = 12, \text{ woraus}$$

$$l_1 = 116 \text{ Millimeter und } l_2 = 44 \text{ Millimeter folgt.}$$

Fig. 810.



Die Weite bei B, wo die Kegelflächen zusammenstoßen, ist:

$$d_2 = d + 2\, l_1\, tang.\, \delta_1 = 15 + 2\,.\,116\,.\,0{,}0437 = 25 \text{ Millimeter},$$

wofür wegen der Abrundung dieser Stelle 28 Millimeter gesetzt sein möge. Nun folgt für das Ausmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{sin.\, 2^1/_2{}^0} = \left[1 - \left(\frac{15}{28}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{0{,}0436} = 21{,}05$$

und für das Einmündungsstück:

$$\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] \frac{1}{sin.\, 9^0} = \left[1 - \left(\frac{28}{39}\right)^4\right] \cdot \frac{1}{0{,}1564} = 4{,}7;$$

daher ist für das ganze Mundstück die Widerstandshöhe:

$$h = \frac{\zeta}{8}\left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g\,.\,sin.\,\delta_1}$$

$$+ \frac{\zeta}{8}\left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right]\left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v^2}{2g\,.\,sin.\,\delta_2}$$

$$= \frac{\zeta}{8}\,\frac{v^2}{2g}\left[21{,}05 + 4{,}7\left(\frac{15}{28}\right)^4\right] = 2{,}68\,\zeta\,\frac{v^2}{2g}.$$

Nimmt man $\zeta = 0{,}02$ an, so folgt:

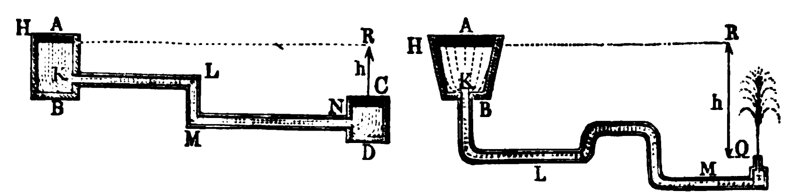
$$h = 0{,}054\,\frac{v^2}{2g},$$

d. i. beinahe $5^1/_2$ Procent der Geschwindigkeitshöhe, womit auch die angestellten Versuche übereinstimmen.

§. 459. **Röhrenleitungen.** Eine Röhrenleitung mündet entweder unter Wasser oder in freier Luft aus. Beide Fälle sind in den Figuren 811 und 812 abgebildet. Im ersten Falle ist als Druckhöhe h der Niveauabstand RC beider Wasserspiegel von einander, im zweiten aber die senkrechte Tiefe RO der Ausmündung O unter dem Wasserspiegel H des Zuflußapparates anzunehmen. Behält nun die Röhre überall eine und dieselbe Weite d, so finden in beiden Fällen die im §. 457 entwickelten Formeln ihre unmittelbare An-

wendung, verengert oder erweitert sich aber die Röhre an einer Stelle, so hat man es mit verschiedenen Röhrengeschwindigkeiten zu thun, und es ist daher

Fig. 811. Fig. 812.



der Reibungswiderstand für jede Röhre besonders zu berechnen. Einen solchen Fall bietet z. B. die Wasserleitung in Fig. 812 mit einem springenden Strahle dar, wo das Mundstück O enger ist als die Zuleitungsröhre BLM. Setzen wir, wie gewöhnlich, die Ausflußgeschwindigkeit $= v$, die Weite der Ausmündung $O = d$, die Weite der Röhre aber $= d_1$, so haben wir die Geschwindigkeit des Wassers in derselben:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v.$$

Bezeichnet noch l_1 die Länge der Röhre BLM und ζ_1 den Reibungscoefficienten, so folgt die entsprechende Reibungshöhe:

$$h_1 = \zeta_1 \frac{l_1 v_1^2}{d_1 2g} = \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ist nun noch ζ_0 der Widerstandscoefficient für das Einmündungsstück K und ζ der für das Ausmündungsstück O, so folgt der Druckhöhenverlust, welchen das erstere verursacht,

$$h_0 = \zeta_0 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

dagegen der, welcher aus der Bewegung durch das zweite entspringt,

$$h_2 = \zeta \frac{v^2}{2g};$$

und hiernach hat man nun das ganze Gefälle:

$$h = \frac{v^2}{2g} + h_0 + h_1 + h_2 = \left[1 + \zeta_0 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1} \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta\right] \frac{v^2}{2g}$$

und hieraus die Ausflußgeschwindigkeit:

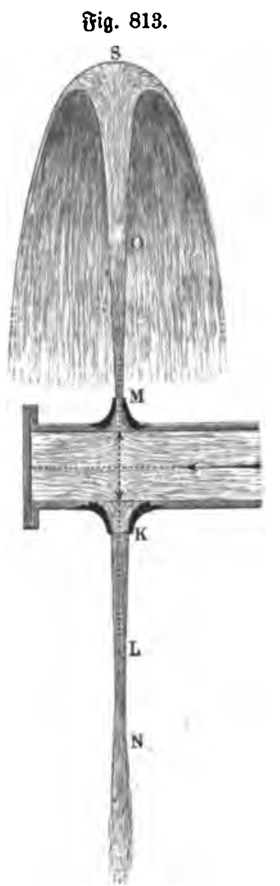
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta}}.$$

Die Mund- oder Ausgußstücke müssen zur Erzielung einer großen Steighöhe nicht bloß dem Wasser einen möglichst kleinen Widerstand darbieten, sondern auch das Ausströmen in möglichst parallelen Fäden bewirken, damit dieselben beim Aufsteigen einen lang zusammenhängenden Strahl bilden, der

durch die Luft weniger gestört wird als ein gleich anfangs zerrissener Strahl. Aus diesem Grunde zieht man die kurzen cylindrischen oder wenig conischen Mundstücke mit abgerundeter Einmündung den Ausmündungen in der dünnen Wand oder den nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles geformten Mundstücken vor, obgleich sie einen etwas größeren Geschwindigkeitsverlust verursachen als diese. Die Knoten und Bäuche, welche der aus den letzteren Mündungen kommende Strahl bildet oder zu bilden sucht, geben der äußeren Luft mehr Gelegenheit zum Eindringen als ein cylindrischer Strahl.

§. 460. **Springende Strahlen.** So lange der aus einer horizontalen Mündung K, Fig. 813, senkrecht abwärts fließende Strahl KLN noch ein Continuum bildet und nicht von der Luft zerrissen wird, nimmt dessen Querschnitt L immer mehr und mehr ab, wenn der Abstand $KL = x$ von der Mündung wächst. Ist c die Ausflußgeschwindigkeit und v die Geschwindigkeit in L, so hat man:

Fig. 813.



$$v^2 = 2gx + c^2;$$

und bezeichnet F die Querschnittsfläche der Ausmündung, sowie Y die Querschnittsfläche des Strahles in L, so gilt auch die Gleichung:

$$Fc = Yv, \text{ oder } F^2c^2 = Y^2v^2,$$

und es folgt schließlich die Gleichung:

$$Y^2(c^2 + 2gx) = Fc^2, \text{ oder:}$$

$$Y^2 = \frac{F^2c^2}{c^2 + 2gx}$$

für die Gestalt des die sogenannte Newton'sche Cataracte bildenden Wasserstrahles KN (siehe Newtoni Principia Philosophiae, Tom. II, Sect. VII). Ist der Querschnitt der Mündung K ein Kreis vom Durchmesser d, so bildet der Querschnitt L einen Kreis vom Durchmesser y, für welchen hiernach

$$y^4 = \frac{c^2d^4}{c^2 + 2gx}, \text{ oder}$$

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gx}{c^2}}} \text{ ist.}$$

Ueber die innere Beschaffenheit der fallenden Wasserstrahlen sind von Savart

Versuche angestellt worden, siehe Poggendorff's Annalen der Physik, Bd. 33.

Bei dem aus einer horizontalen Mündung M senkrecht aufsteigenden Strahle MS nimmt dagegen der Querschnitt O mit der Entfernung $MO = x$ von der Mündung M allmälig zu; denn es ist hier die Geschwindigkeit des Wassers in O:

$$v = \sqrt{c^2 - 2gx}, \text{ und daher}$$

$$Y^2 = \frac{F^2 c^2}{c^2 - 2gx},$$

folglich für den Querschnittsdurchmesser y in O:

$$y^4 = \frac{c^2 d^4}{c^2 - 2gx}, \text{ oder } y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - \frac{2gx}{c_2}}}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ durch h, so ist einfach und allgemein:

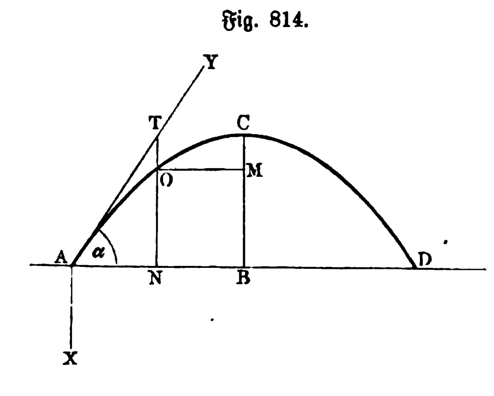
$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}.$$

Diese Formel verliert jedoch in ihren Grenzen ihre Richtigkeit; ihr zufolge wäre z. B. beim steigenden Strahle für $x = h$, also im Scheitel S, der Durchmesser des Strahles

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - 1}} = \frac{d}{0} = \infty.$$

Dies ist jedoch nicht der Fall, weil die einzelnen Wasserfäden, aus welchen der Strahl besteht, an der höchsten Stelle nicht ganz in Ruhe sind, sondern daselbst in Richtung radial-auswärts eine kleine Geschwindigkeit haben.

Fig. 814.



Wenn der Wasserstrahl AOC, Fig. 814, in einer gegen den Horizont geneigten Richtung ausströmt, so bleibt die Formel

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1 \pm \frac{x}{h}}}$$

noch anwendbar, wenn man nur darin statt x die Verticalprojection NO des Strahles AO

einsetzt. Tritt der Strahl unter dem Neigungswinkel α aus der Mündung, so ist die größte Steighöhe BC:

$$a = \frac{c^2 (sin.\alpha)^2}{2g} = h\,(sin.\alpha)^2 \text{ (s. §. 41)},$$

daher der Durchmesser desselben (im Scheitel C):

$$y = \frac{d}{\sqrt[4]{1-\frac{a}{h}}} = \frac{d}{\sqrt[4]{1-(sin.\alpha)^2}} = \frac{d}{\sqrt{cos.\alpha}}.$$

Im niedergehenden Strahltheile CD wird y wieder allmälig kleiner und kleiner, und beim Auffallen auf die Horizontalebene AD, von der er ausgegangen ist, würde y wieder $= d$ sein, wenn die Luft keine Störungen in der Bewegung des Strahles hervorbrächte.

§. 461. Die Steighöhe s eines vertical springenden Wasserstrahles ist nur bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten (c) nahe gleich der Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$; bei größeren Ausflußgeschwindigkeiten fällt dagegen in Folge des Widerstandes der Luft die Steighöhe s namhaft kleiner aus als die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$. Aus den vom Verfasser angestellten Versuchen (s. die Versuche über die Steighöhe springender Wasserstrahlen bei verschiedenen Mundstücken im 5. Bande der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure) sind folgende Thatsachen über springende Wasserstrahlen hervorgegangen:

1) Der Widerstand der Luft ist bei kleinen Ausflußgeschwindigkeiten von 1,5 bis 7,5 Meter, oder bei Steighöhen von $^1/_4$ bis 3 Meter so klein, daß hier die Sprunghöhe s ohne merklichen Fehler der Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ des ausströmenden Wassers gleichgesetzt werden kann.

2) Wenn die Geschwindigkeitshöhe nicht über 24 Meter ist, so läßt sich das Verhältniß der Steighöhe s zur Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$ setzen:

$$\frac{s}{h} = \frac{1}{\alpha + \beta h + \gamma h^2},$$

wobei α, β und γ für jede Mündung besonders zu bestimmende Erfahrungscoefficienten bezeichnen.

3) Bei Wasserstrahlen, welche aus Mündungen in der dünnen Wand emporspringen, läßt sich die Constante $\alpha =$ Eins setzen, folglich auch annehmen, daß der Widerstand beim Durchgange durch die Mündung bei einer kleinen Geschwindigkeit ziemlich Null ist und erst bei größeren Ausflußgeschwindigkeiten meßbar wird. Hiernach ist also auch der Widerstandscoef-

ficient ζ für diese Mündungen nicht constant, sondern wächst von Null an allmälig mit der Geschwindigkeit und der §. 435 angegebene Werth $\varphi = 0,97$ kann nur als ein mittlerer angesehen werden.

4) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit wächst die Steighöhe mit der Dicke des Strahles oder der Weite der Ausflußmündung; es ist folglich der Widerstand der Luft bei dicken Strahlen kleiner als bei schwachen. Die Steighöhe ist deshalb nicht allein bei großen Druckhöhen, sondern auch bei starken Strahlen größer als bei kleinen Druckhöhen und bei schwachen Strahlen.

5) Unter übrigens gleichen Verhältnissen springen die Wasserstrahlen aus kreisförmigen Mündungen höher als die aus quadratischen oder anders geformten Mündungen.

6) Bei gleicher Ausflußgeschwindigkeit und gleicher Mündungsweite springen die ohne Contraction ausfließenden Wasserstrahlen höher als die contrahirten Wasserstrahlen, und zwar nicht allein, weil diese Strahlen im Ganzen dünner sind als jene, sondern auch, weil sie durch ihre abwechselnden Zusammenziehungen und Anschwellungen dem Eindringen der Luft in größerem Maße ausgesetzt sind.

Unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen und bei nicht sehr kleinen Ausflußgeschwindigkeiten erreichen die durch kurze conoidische und längere conische Ansatzröhren mit innerer Abrundung ausfließenden Strahlen die größten Steighöhen.

Mariotte folgert aus seinen Versuchen über die Steighöhe springender Strahlen (s. die Meining'sche Uebersetzung von Mariotte's Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik), an Mündungen in der dünnen Wand von 4 und 6 Linien Durchmesser und bei Druckhöhen von $5^1/_2$ bis 35 Fuß, daß die zur Erlangung der Steighöhe s nöthige Druck- oder Geschwindigkeitshöhe

$$h = s + \frac{s^2}{300} \text{ Pariser Fuß}$$

sein müsse, wonach folglich

$$\frac{h}{s} = 1 + \frac{s}{300} = 1 + 0,0033\,s \text{ zu setzen wäre.}$$

Die viel ausgedehnteren und sehr mannigfaltigen Versuche des Verfassers, welche derselbe bei Druckhöhen von 1 bis 24 Meter angestellt hat, geben dagegen für Kreismündungen in der dünnen Wand, Fig. 815,

Fig. 815.

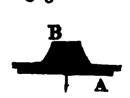
von 10 Millimeter Durchmesser:

$$1)\quad \frac{h}{s} = 1 + 0,011578\,h + 0,00058185\,h^2$$

und von 14,1 Millimeter:

$$2)\quad \frac{h}{s} = 1 + 0,007782\,h + 0,00060377\,h^2.$$

Fig. 816.



Für ein kurzes conoidisches Mundstück AB, Fig. 816, von 10 Millimeter Weite der Ausmündung fand der Verfasser:

$$3)\ \frac{h}{s} = 1,0272 + 0,000476\,h + 0,00095614\,h^2,$$

ferner für ein conisches Mundstück ABC, Fig. 817, von 0,145 Meter Länge und 10 Millimeter Weite an der Mündung C bei 30 Millimeter Weite der gut abgerundeten Einmündung A:

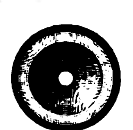
Fig. 817. Fig. 818.

I II

$$4)\ \frac{h}{s} = 1,0453 + 0,000373\,h + 0,000859\,h^2.$$

Bei dem Mundstücke AB, Fig. 818, welches aus demjenigen ABC, Fig. 817, durch Abnahme von BC entstand und eine Mündungsweite von 14,1 Millimeter bei 105 Millimeter Länge hatte, ergab sich:

$$5)\ \frac{h}{s} = 1,0216 + 0,002393\,h + 0,00032676\,h^2\,*).$$



Mit Hülfe dieser Formeln ist folgende Tabelle der Steighöhen springender Wasserstrahlen berechnet worden:

Geschwindigkeitshöhe h =	3	5	8	10	12	15	20 Meter.
ad 1) Sprunghöhe s = . .	2,89	4,66	7,08	8,53	9,82	11,49	13,66
ad 2) " s = . .	2,92	4,74	7,26	8,79	10,16	11,97	14,32
ad 3) " s = . .	2,89	4,75	7,33	8,87	10,26	12,01	14,10
ad 4) " s = . .	2,85	4,68	7,26	8,81	10,24	12,06	14,32
ad 5) " s = . .	2,91	4,80	7,54	9,28	10,93	13,26	16,67

Beispiel. Wenn an einem Springbrunnen die Leitungsröhre $l = 100$ Meter lang und $d_1 = 0,05$ Meter weit und das conische Mundstück desselben $d = 12$ Millimeter weit ist, wie hoch wird bei einer Druckhöhe h_0 von 15 Meter der Strahl springen, vorausgesetzt, daß außer der Reibung alle übrigen Röhrenwiderstände klein genug sind, um sie vernachlässigen zu können? Es ist hier, wenn man

$$\zeta_0 = 0,5;\ \zeta_1 = 0,025;\ \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = \left(\frac{12}{50}\right)^4 = 0,0033 \text{ und } \frac{l_1}{d_1} = \frac{100}{0,05} = 2000$$

*) In obigen unter 1—5 angegebenen Formeln sind s und h in Metern zu nehmen.

setzt, die Höhe h, welche der Ausflußgeschwindigkeit entspricht:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{h_0}{1 + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4} = \frac{15}{1 + (0,5 + 0,025 . 2000) . 0,0033} = 12,85 \text{ M.}$$

Nach der Formel 5 ist daher die bei ruhiger Luft zu erwartende Steighöhe:

$$s = \frac{h}{1,0216 + 0,002393 . h + 0,00032676 . h^2} = \frac{12,85}{1,1063} = 11,61 \text{ Meter.}$$

Piëzometer. Die Druckverluste, welche das Wasser in einer Röhrenleitung $ABCDE$, Fig. 819, durch Verengungen, Reibung u. s. w. erleidet, kann man durch die Wassersäulen messen, welche sich in senkrecht aufgesetzten Röhren BK, CM, DO erhalten, die man, wenn sie lediglich zu diesem Zwecke dienen, Piëzometer nennt. (S. §. 413.) §. 462.

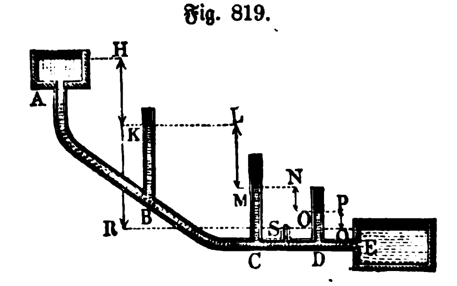


Fig. 819.

Ist v die Geschwindigkeit des Wassers an der Stelle B, Fig. 819, wo ein Piëzometer einmündet, l die Länge, d die Weite des Röhrenstückes AB, h die Druckhöhe oder die Tiefe des Punktes B unter dem Wasserspiegel, ist ferner ζ_0 der Widerstandscoefficient für den Eintritt aus dem Reservoir in die Röhre und ζ der Reibungscoefficient, so hat man für den, den Druck in B messenden Piëzometerstand:

$$z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Dagegen ist bei der Länge l_1 und dem Gefälle h_1 des Röhrenstückes BC, der Piëzometerstand in C:

$$z_1 = h + h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Es folgt daher die Differenz der Piëzometerstände:

$$z_1 - z = h_1 - \zeta \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g}$$

und umgekehrt, die Widerstandshöhe des Röhrenstückes BC:

$$\zeta \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g} = h_1 + z - z_1 = \text{Gefälle des Röhrenstückes}$$

plus Differenz der Piëzometerstände.

Man ersieht hieraus, daß die Piëzometer dazu dienen können, die Widerstände, welche das Wasser in den Röhrenleitungen zu überwinden hat, zu messen. Befindet sich in der Röhre ein besonderes Hinderniß, hat sich z. B.

ein kleiner Körper in derselben festgesetzt, so wird dieses sogleich durch das Sinken des Piëzometerstandes angezeigt und die Größe des erzeugten Widerstandes ausgedrückt werden. Die Widerstände, welche durch Regulirungsapparate, wie Hähne, Schieber u. s. w., von welchen im folgenden Capitel die Rede ist, erzeugt werden, lassen sich ebenfalls durch Piëzometerstände ausdrücken. So steht z. B. das Piëzometer in D tiefer als das in C, nicht allein wegen der Reibung des Wassers in dem Röhrenstücke CD, sondern auch wegen der Verengung, welche der Schieber S in der Röhre hervorbringt. Ist bei völlig geöffnetem Schieber die Differenz NO der Piëzometerstände $= h_1$, bei eingestelltem Schieber aber $= h_2$, so giebt die neue Differenz oder Senkung $h_2 - h_1$, die Widerstandshöhe, welche dem Durchgange des Wassers durch den Schieber entspricht.

Endlich läßt sich auch aus dem Piëzometerstande die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers berechnen. Ist der Piëzometerstand $PQ = z$, die Länge des letzten Röhrenstückes $DE = l$ und die Weite desselben $= d$, so hat man:

$$z = \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gz}{\zeta \frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{d}{l} \cdot \frac{2gz}{\zeta}}.$$

Beispiel. Ist bei der Leitung in Fig. 819 der Piëzometerstand $PQ = z = 0{,}3$ Meter, die Länge der Röhre DE, vom Piëzometer bis zur Ausmündung gemessen, $l = 50$ Meter, und die Röhrenweite 0,08 Meter, so folgt bei dem Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}025$ die Ausflußgeschwindigkeit:

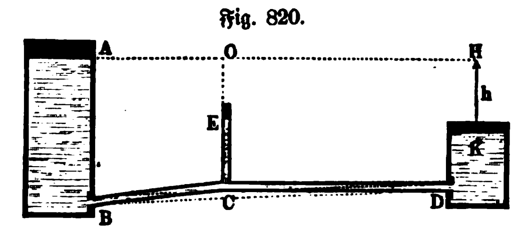
$$v = 4{,}429 \sqrt{\frac{0{,}08}{50} \cdot \frac{0{,}3}{0{,}025}} = 0{,}613 \text{ Meter}$$

und die Ausflußmenge:

$$Q = 3{,}14 \,.\, 0{,}04^2 \,.\, 0{,}613 = 0{,}00308 \text{ Cubikmeter} = 3{,}08 \text{ Liter}.$$

Anmerkung. Die Bewegung des Wassers in einer Röhrenleitung BCD, Fig. 820, kann sehr leicht durch Luft gestört werden, welche sich entweder aus dem

Fig. 820.



Wasser entwickelt, oder von außen in die Röhre eindringt. Damit keins von beiden eintrete, muß bei der Anlage der Röhrenleitung dafür gesorgt werden,

daß der Druck an jeder Stelle C derselben den Atmosphärendruck übertreffe, also in jedem Piëzometer eine Wassersäule CE stehe. Die Höhe dieser Wassersäule ist:

$$z = h_1 - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g},$$

wenn h_1 die Druckhöhe CO in C, l_1 die Länge des Röhrenstückes BC und v die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre bezeichnet. Es ist also nöthig, daß

$$h_1 > \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}\right) \frac{v^2}{2g}$$

sei, daß z. B. der Wasserstand im Zuflußreservoir mindestens die Geschwindigkeitshöhe des Wassers in der Röhre übertreffe. Außerdem ist zu befürchten, daß die Röhre in einem Wirbel Luft nachsauge.

Auch läßt sich $h_1 > \dfrac{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l_1}{d}}{1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}} h$ setzen, wenn h das ganze Röhrengefälle HK und l die ganze Röhrenlänge BCD bezeichnet.

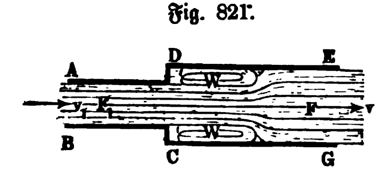
Um das Ansammeln von Luft in der Röhre mit Sicherheit zu verhindern, ist es sehr zweckmäßig, dieselbe steigend zu legen, weil dann die Luftblasen vom fließenden Wasser mit fortgenommen werden.

Viertes Capitel.

Von den Hindernissen in der Bewegung des Wassers bei Geschwindigkeits- und Richtungsveränderungen.

Plötzliche Erweiterung. Veränderungen in dem Querschnitte einer Röhre oder eines anderen Ausflußreservoirs geben auch Veränderungen in der Geschwindigkeit des Wassers. Die Geschwindigkeit ist dem Querschnitte des Wasserstromes umgekehrt proportional; je weiter das Gefäß ist, desto kleiner ist die Geschwindigkeit, und je enger das Gefäß, desto größer die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers. Aendert sich der Querschnitt eines Gefäßes plötzlich, wie z. B. bei der Röhre ACE, Fig. 821, so tritt auch eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein, und hiermit ist wieder ein Verlust an lebendiger Kraft und eine entsprechende Abnahme an Druck verbunden. Dieser Verlust läßt sich genau so berechnen, wie der Arbeitsverlust beim Stoße unelastischer Körper. §. 463.

Fig. 821.



(s. §. 359). Jedes Wasserelement, welches aus der engeren Röhre BD in die weitere Röhre DG tritt, stößt gegen die langsamer gehende Wassermasse in dieser Röhre und geht nach dem Stoße mit dieser vereinigt fort. Genau so ist es aber auch bei dem Zusammentreffen fester und unelastischer Körper, auch diese Körper gehen nach dem Stoße mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit fort. Wenn wir nun gefunden haben, daß der Arbeitsverlust beim Stoße dieser Körper

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \cdot \frac{G_1 \, G_2}{G_1 + G_2}$$

ist, so können wir hier, da das stoßende Wasserelement G_1 unendlich klein ist gegen die gestoßene Wassermasse G_2, setzen:

$$L = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} G_1$$

und folglich den entsprechenden Verlust an Druckhöhe:

$$h = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

Es entsteht also durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung ein Druckhöhenverlust, welcher durch die dieser Veränderung entsprechende Geschwindigkeitshöhe gemessen wird.

Ist nun F_1 der Querschnitt der einen Röhre AC und F der Querschnitt der anderen Röhre CE, welche mit der ersteren ein Ganzes bildet, die Geschwindigkeit des Wassers in der ersten Röhre $= v_1$ und die in der anderen $= v$, so hat man:

$$v_1 = \frac{Fv}{F_1},$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus einer Röhre in die andere:

$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

und den entsprechenden, schon von Borda gefundenen Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Die gefundene Druckhöhe

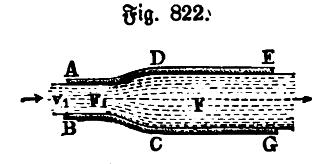
$$h_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

kann natürlich nicht spurlos verloren gehen, man muß vielmehr annehmen, daß die ihr entsprechende mechanische Arbeit auf die Zertheilung und die schwingende Bewegung der vorher ein Continuum bildenden Wassertheile, zumal auf die Wirbelbewegung in W, W verwendet wird.

Die hierüber angestellten Versuche des Verfassers stimmen mit der Theorie

gut überein. Damit die Röhre DG vom Wasser ausgefüllt werde, ist es nöthig, daß sie nicht sehr kurz und nicht sehr viel weiter sei als die Röhre AC. Dieser Verlust verschwindet, wenn, wie Fig. 822 repräsentirt, durch Abrundung der Kanten ein allmäliger Uebergang aus der einen Röhre in die andere herbeigeführt wird.

Fig. 822.



Beispiel. Wenn der Durchmesser der einen Röhre in der Zusammensetzung von Fig. 821 noch einmal so groß ist als der der anderen Röhre, so ist $\frac{F}{F_1} = (^2/_1)^2 = 4$, daher der Widerstandscoefficient $\zeta = (4 - 1)^2 = 9$ und die entsprechende Widerstandshöhe für den Uebergang aus der engeren Röhre in die weitere gleich $9 \cdot \frac{v^2}{2g}$. Ist die Geschwindigkeit des Wassers in der letzteren Röhre gleich 2 Meter, so folgt die Widerstandshöhe $9 \cdot 0{,}051 \cdot 2^2 = 1{,}836$ Meter.

Verengung. Eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung tritt auch dann ein, wenn das Wasser aus einem Gefäße AB, Fig. 823, in eine engere Röhre DG tritt, zumal wenn an der Eintrittsstelle CD ein Diaphragma sitzt, dessen Oeffnung noch kleiner ist als der Querschnitt des Rohres DG. Ist der Inhalt der Verengung $= F_1$ und α der Contractionscoefficient, so hat man den Querschnitt F_2 des contrahirten Wasserstrahles $= \alpha F_1$, und ist dagegen F der Querschnitt des Rohres und v die Ausflußgeschwindigkeit, so findet man die Geschwindigkeit des Wassers im contrahirten Querschnitte F_2 durch die Formel §. 464.

$$v_2 = \frac{F}{\alpha F_1} v,$$

daher den Druckhöhenverlust beim Uebergange aus F_2 in F oder aus v_2 in v:

$$h = \frac{(v_2 - v)^2}{2g} = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g}$$

und den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2.$$

Fig. 823.

Fig. 824.

Ohne Diaphragma erhält man eine bloße Ansatzröhre, Fig. 824, daher ist hier $F = F_1$ und

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2,$$

sowie umgekehrt:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \sqrt{\zeta}}.$$

Nimmt man $\alpha = 0,64$ an, so erhält man:

$$\zeta = \left(\frac{1 - 0,64}{0,64}\right)^2 = (9/_{16})^2 = 0,316.$$

Durch den Widerstand beim Eintritt in die Röhre und durch die Reibung des Wassers im äußeren Röhrenstücke steigert sich aber ζ auf 0,505 (§. 449).

Versuche über den Ausfluß des Wassers durch eine **Ansatzröhre mit verengtem Eintritte**, wie Fig. 823 vorstellt, haben den Verfasser auf Folgendes geführt. Der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch ein Diaphragma und für den Anschluß an die weitere Röhre kann durch die Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$$

ausgedrückt werden; es ist aber zu setzen:

Für $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α =	0,616	0,614	0,612	0,610	0,607	0,605	0,603	0,601	0,598	0,596

und folgt:

ζ =	231,7	50,99	19,78	9,612	5,256	3,077	1,876	1,169	0,734	0,480

Hiernach ist z. B. in dem Falle, wenn der verengte Querschnitt halb so groß ist als der Querschnitt der Röhre, der Widerstandscoefficient $\zeta = 5,256$, d. h. der Durchgang durch diese Verengung nimmt eine Druckhöhe in Anspruch, welche $5^1/_4$ mal so groß ist als die Geschwindigkeitshöhe.

Beispiel. Welche Ausflußmenge giebt der in Fig. 823 abgebildete Apparat, wenn die Druckhöhe 0,5 Meter, die Weite der kreisförmigen Verengung 40 und die der Röhre CE gleich 50 Millimeter ist? Hier hat man:

$$\frac{F_1}{F} = \left(\frac{40}{50}\right)^2 = 0,64;\ \text{daher}\ \alpha = 0,604,\ \text{und}$$

$$\zeta = \left(\frac{100}{64\ .\ 0,604} - 1\right)^2 = 2,52.$$

Setzt man nun $h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2g}$, so erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta}} = 4{,}429\sqrt{\frac{0{,}5}{3{,}52}} = 1{,}66 \text{ Meter},$$

und folglich das Ausflußquantum:

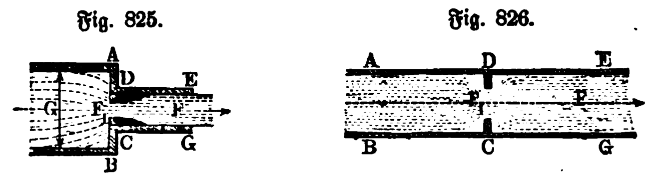
$$Q = 3{,}14 \,.\, 0{,}025^2 \,.\, 1{,}66 = 0{,}00325 \text{ Cubikmeter} = 3{,}25 \text{ Liter}.$$

Einfluss der unvollkommenen Contraction. Bei dem im letzten Paragraphen betrachteten Falle, wo das Wasser aus einem großen Gefäße kommt, konnte die Contraction als eine vollkommene angesehen werden; ist aber der Querschnitt des Gefäßes oder des an einer Verengung ankommenden Wasserstromes nicht sehr groß in Ansehung auf den Querschnitt F_1, Fig. 825, der Verengung, so ist die Contraction eine unvollkommene und daher auch der entsprechende Widerstandscoefficient kleiner als in dem oben untersuchten Falle. Gelten wieder die vorigen Bezeichnungen, so hat man auch hier die Widerstandshöhe oder die durch den Durchgang durch F_1 verzehrte Druckhöhe: §. 465.

$$h = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

nur sind für α veränderliche, und zwar um so größere Zahlen einzusetzen, je größer das Verhältniß $\frac{F_1}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Verengung und dem Querschnitte G der Zuleitungsröhre AB ist. Befindet sich das Dia-

Fig. 825. Fig. 826.



phragma CD in einer gleichweiten Röhre AG, Fig. 826, so findet ganz dieselbe Bestimmung statt, nur hängt hier der Coefficient α von $\frac{F_1}{F}$ ab.

Nach den vom Verfasser hierüber angestellten Versuchen hat man in der Formel

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2$$

für die Widerstandscoefficienten zu setzen:

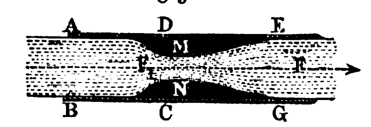
bei $\frac{F_1}{F}$ =	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
α =	0,624	0,632	0,643	0,659	0,681	0,712	0,755	0,813	0,892	1,000

und es folgt:

ζ =	225,9	47,77	17,51	7,801	3,753	1,796	0,797	0,290	0,060	0,000

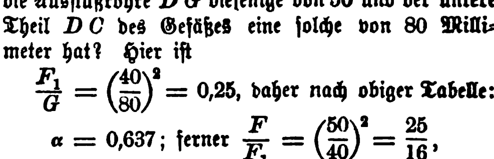
Diese Verluste werden kleiner, wenn man durch Abrundung der Kanten die Contraction vermindert oder aufhebt, und sie lassen sich fast ganz beseitigen, wenn man, wie Fig. 827 repräsentirt, ein sich allmälig erweiterndes Durchgangsstück MN einsetzt.

Fig. 827.



Beispiel. Welche Druckhöhe wird erfordert, damit der in Fig. 828 abgebildete Apparat in der Minute 0,3 Cubikmeter Wasser liefert, wenn das Diaphragma die Weite von 40 Millimeter, die Ausflußröhre DG diejenige von 50 und der untere Theil DC des Gefäßes eine solche von 80 Millimeter hat? Hier ist

Fig. 828.



$\frac{F_1}{G} = \left(\frac{40}{80}\right)^2 = 0,25$, daher nach obiger Tabelle:

$\alpha = 0,637$; ferner $\frac{F}{F_1} = \left(\frac{50}{40}\right)^2 = \frac{25}{16}$,

folglich:

$$\zeta = \left(\frac{25}{16\,.\,0,637} - 1\right)^2 = 2,11.$$

Da die erforderliche Ausflußgeschwindigkeit

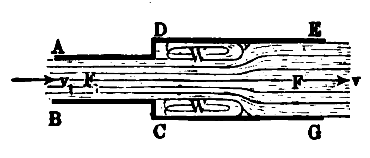
$$v = \frac{0,3}{60\,F} = \frac{0,005}{3,14\,.\,0,025^2} = 2,55 \text{ Meter}$$

sein muß, so folgt die erforderliche Druckhöhe zu:

$$h = (1 + \zeta)\,\frac{v^2}{2g} = 0,051\,.\,3,11\,.\,2,55^2 = 1,03 \text{ Meter}.$$

§. 466. **Druckverhältnisse in cylindrischen Röhren.** Mit Hülfe der Borda'schen Formel lassen sich auch die Druckverhältnisse in einer Ausflußröhre mit verschiedenen Weiten, wie z. B. ACE, Fig. 829, ermitteln. Ist p_1 der hydraulische Druck und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in F_1, sowie p der Druck*) und v die Geschwindigkeit desselben in F, so hat man:

Fig. 829.



*) Unter p und p_1 sind hier die totalen Drucke zu verstehen, d. h. die durch die Piëzometerhöhen dargestellten, vermehrt um den Druck der Atmosphäre.

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}, \text{ und daher:}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_1^2 + (v_1 - v)^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \frac{(v_1 - v)\,v}{g}, \text{ oder:}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)\frac{v^2}{g}.$$

Bezeichnet nun h die Höhe des Wasserspiegels über der horizontalen Axe des Rohres AG und p_0 den auf dem Wasserspiegel lastenden Druck (Atmosphäre), so ist:

$$h + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v)^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \left[1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2\right]\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}.$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von $\frac{v^2}{g}$ in die vorletzte Formel ein, so ergiebt sich:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - 2\,\frac{\frac{F}{F_1} - 1}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right).$$

In dem Falle, wo das Wasser in die freie Luft ausfließt, also der Querschnitt F dem Wasserbarometerstande b unterworfen, und wo auch der obere Wasserspiegel demselben Atmosphärendrucke ausgesetzt ist, hat man $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} = b$, daher:

$$\frac{p_1}{\gamma} = b - 2\,\frac{\frac{F}{F_1} - 1}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}\cdot h.$$

Da der hydraulische Druck p_1, sowie der Wasserdruck überhaupt, niemals negativ werden kann (vergl. §. 427), so wird das der Rechnung zu Grunde gelegte Ausflußverhältniß nur so lange wirklich stattfinden, als obiger Ausdruck einen positiven Werth für $\frac{p_1}{\gamma}$ liefert, d. h. so lange die Bedingung erfüllt ist:

$$b > 2\,\frac{\frac{F}{F_1} - 1}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}\,h, \text{ oder: } \frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)}.$$

Wenn die Druckhöhe h die durch diese Formel angegebene Grenze übersteigt, so trifft die gemachte Voraussetzung nicht mehr zu, daß das Wasser beim Ausfließen durch DG den Querschnitt F gänzlich ausfülle, es

fließt vielmehr das Wasser aus der Röhre AC so aus, als ob die Röhre DG gar nicht vorhanden wäre, und zwar mit der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$.

Die gefundene Bedingung für den Ausfluß mit gefülltem Querschnitte findet auch ihre Anwendung bei der Röhre CE, Fig. 823, mit Diaphragma, nur ist hier αF_1 anstatt F_1 einzusetzen, daher für den vollen Ausfluß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)} \text{ zu fordern.}$$

Läßt man das Diaphragma weg, hat man es also bloß mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre CE, Fig. 824, zu thun, so hat man $F_1 = F$ und daher:

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2}{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)} \text{ zu setzen.}$$

Führt man $\alpha = 0{,}64$, also $\frac{1}{\alpha} - 1 = 0{,}5625$ ein, so ergiebt sich für diese Röhren die Grenze des Ausflusses mit gefülltem Querschnitte:

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 0{,}3164}{2 \,.\, 0{,}5625}, \text{ d. i. } \frac{h}{b} < 1{,}17.$$

Nimmt man $b = 10{,}336$ Meter an, so folgt, daß bei Druckhöhen über $1{,}17 \,.\, 10{,}336 = 12{,}09$ Meter der volle Ausfluß durch eine kurze cylindrische Ansatzröhre aufhört.

Hiermit stimmen auch die Ergebnisse der Versuche des Verfassers vollkommen überein (s. den betr. Aufsatz im 9. Bande des „Civilingenieur“, über den Ausfluß des Wassers unter hohem Drucke).

Beim Ausflusse des Wassers in einen luftverdünnten Raum ist diese Grenze des vollen Ausflusses schon früher erreicht. Ist der Wasserbarometerstand in diesem Raume β, also $\beta = \frac{p}{\gamma}$, so giebt die allgemeine Formel:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - 2\,\frac{\frac{F}{F_1} - 1}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)$$

$$= \beta - 2\,\frac{\frac{F}{F_1} - 1}{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}(h + b - \beta)$$

die Bedingungsgleichung für den vollen Ausfluß:

$$\frac{h + b - \beta}{\beta} < \frac{1 + \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2}{2\left(\frac{F}{F_1} - 1\right)}$$

und bei einem kurzen cylindrischen Ansatzrohre:

$$\frac{h + b - \beta}{\beta} < 1{,}17.$$

Wäre z. B. in einem Condensator der Wasserbarometerstand $\beta = 1$ Meter gegeben, so würde ein cylindrisches Einspritzrohr nur dann mit gefülltem Querschnitte von dem Injectionswasser durchströmt werden, wenn $h + b < 1{,}17\,\beta + \beta$, d. h. wenn $h + 10{,}336$ kleiner als $2{,}17$ Meter wäre. Dies würde ein negatives h, d. h. ein Ansaugen des Wassers aus einer Tiefe von mindestens $10{,}336 - 2{,}17 = 8{,}166$ Meter bedingen. Setzt man $h = 0$ voraus, so würde voller Austritt durch ein Ansatzrohr an die Bedingung geknüpft sein:

$$\frac{b - \beta}{\beta} < 1{,}17;\ \text{oder}\ \beta > \frac{b}{2{,}17};\ \text{d. h.}\ \beta > 4{,}76\ \text{Meter}.$$

Wenn das Wasser durch eine sich allmälig erweiternde Röhre ACE, Fig. 830, fließt, so tritt ein Verlust an lebendiger Kraft nicht ein, und man hat daher:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},\ \text{oder:}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Fig. 830.

Da ferner die Gleichung gilt:

$$h + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g},$$

so folgt:

$$\frac{v^2}{2g} = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}.$$

Setzt man diesen Werth für $\frac{v^2}{2g}$ in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man allgemein:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right]\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right),$$

oder für den Fall, daß wieder $p_0 = p = b$ ist:

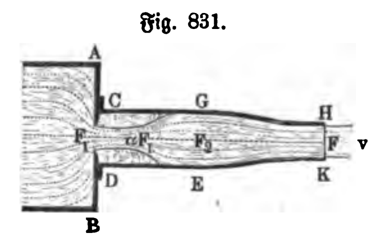
$$\frac{p_1}{\gamma} = b - \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] h.$$

Als Bedingung für den Ausfluß mit gefülltem Querschnitte hat man daher bei allmäliger Querschnittserweiterung

$$\frac{h}{b} < \frac{1}{\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1} \text{ zu fordern.}$$

§. 467. **Druckverhältnisse in conischen Röhren.** Das Ausfluß- und Druckverhältniß bei einer cylindrischen Röhre CE mit oder ohne Diaphragma erleidet folgende Modificationen, wenn noch ein besonderes Mundstück oder eine andere Röhre $EGHK$, Fig. 831, an diese Röhre angeschlossen ist. Es bezeichne F den Querschnitt, v die Geschwindigkeit und p den Druck des Wassers an der Ausmündung HK, ferner F_1 den Querschnitt der Einmündung, αF_1 den Querschnitt des contrahirten Wasserstrahles, sowie v_1 die Geschwindigkeit und p_1 den Druck des Wassers in demselben; ebenso sei F_2 der Röhrenquerschnitt an der Stelle, wo sich der Wasserstrahl wieder an die Röhre anlegt, endlich bezeichne v_2 die Geschwindigkeit und p_2 den Druck des Wassers an eben dieser Stelle.

Fig. 831.



Dann hat man:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} \text{ und daher:}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - v_2^2}{2g} - \frac{v_2(v_1 - v_2)}{g}$$

$$= \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - 2v_1 v_2 + v_2^2}{2g},$$

oder, da $\alpha F_1 v_1 = F_2 v_2 = F v$ ist, also

$$v_1 = \frac{Fv}{\alpha F_1} \text{ und } v_2 = \frac{Fv}{F_2} \text{ gesetzt werden kann,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \left[1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Nun ist aber hier die zur Erzeugung der Ausflußgeschwindigkeit nöthige Druckhöhe

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \left[1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g},$$

daher folgt auch:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} + \frac{1 - \frac{2F^2}{\alpha F_1 F_2} + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2} h = \frac{p}{\gamma} + \frac{\frac{1}{F^2} - \frac{2}{\alpha F_1 F_2} + \frac{1}{F_2^2}}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

$$\text{d. i. } z_1 = \frac{p_1}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h,$$

oder beim Ausflusse in die freie Luft:

$$z_1 = b - \frac{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)}{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2} h.$$

Damit ein voller Ausfluß erfolge, muß hiernach

$$\frac{h}{b} < \frac{\frac{1}{F^2} + \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2}{\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)} \text{ oder}$$

$$\frac{1 + \frac{h}{b}}{F^2} > \left(\frac{2}{\alpha F_1 F_2} - \frac{1}{F_2^2}\right) \frac{h}{b} - \left(\frac{1}{\alpha F_1} - \frac{1}{F_2}\right)^2 \text{ sein.}$$

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich nun auch die Ausflußverhältnisse der conischen Röhren $ABDE$, Fig. 832 und Fig. 833, angeben,

Fig. 832.

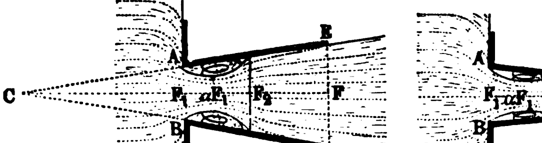
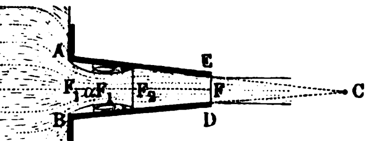


Fig. 833.



wenn man in denselben statt F_2 den Querschnitt der Röhre an der Stelle, wo sich der Strahl anlegt, einführt. Bezeichnet δ die Hälfte des Divergenzwinkels ACB der einen oder des Convergenzwinkels der anderen Röhre, und setzt man voraus, daß die Länge $F_1 F_2$ des Wirbels gleich der Mündungsweite $AB = d_1$ sei, so läßt sich die Weite der Röhren an der Stelle, wo sich das Wasser an die Röhrenwand anlegt, setzen:

$$d_2 = d_1 \pm 2\, d_1\, tang.\, \delta = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)\, d_1$$

und daher das Querschnittsverhältniß:

$$\frac{F_2}{F_1} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = (1 \pm 2\, tang.\, \delta)^2,$$

wobei das Pluszeichen für die divergente Röhre in Figur 832 und das Minuszeichen für die convergente Röhre in Fig. 833 in Anwendung zu bringen ist. Z. B. für $\delta = 2^1/_2$ Grad ist $2\, tang.\, \delta = 0{,}0873$ und

$$\frac{F_2}{F_1} = (1 \pm 0{,}0873)^2 \text{ entweder } = 1{,}182 \text{ oder } 0{,}833;$$

daher die Ausflußgeschwindigkeit im ersten Falle:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{1{,}182}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}514 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

und dagegen im zweiten:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{0{,}833}\right)^2 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}131 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}.$$

Der entsprechende Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}514 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der divergenten Röhre ist natürlich ansehnlich kleiner als der Ausflußcoefficient

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}131 \left(\frac{F}{F_1}\right)^2}}$$

der convergenten Röhre.

Wären z. B. die Röhren drei Mal so lang als in der Einmündung weit, so hätte man im ersten Falle:

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 + 6\, tang.\, \delta)^4 = 1{,}262^4 = 2{,}536, \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2{,}306}} = 0{,}659, \text{ dagegen im zweiten Falle:}$$

$$\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 = (1 - 6\, tang.\, \delta)^4 = 0{,}738^4 = 0{,}296 \text{ und}$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1{,}0387}} = 0{,}981 \text{ (vergl. §. 452).}$$

Damit der Ausfluß durch diese Röhren mit gefülltem Querschnitte erfolge, muß

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + \left(\frac{F}{\alpha F_1} - \frac{F}{F_2}\right)^2}{\frac{2F}{\alpha F_1}\frac{F}{F_2} - \left[1 + \left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]}$$

sein, also im ersten Falle, wo

$$\frac{F}{\alpha F_1} = \frac{1,593}{0,64} = 2,490 \text{ und } \frac{F}{F_2} = \frac{1,593}{1,182} = 1,348 \text{ ist,}$$

$$\frac{h}{b} < \frac{1 + 1,142^2}{6,713 - 2,817} = \frac{2,304}{3,896} = 0,592.$$

Es darf also die Druckhöhe h noch nicht 10,336 . 0,592 = 6,119 Meter erreichen.

Knieröhren. Besondere Hindernisse stellen sich der Bewegung des Wassers in Röhren entgegen, wenn dieselben gekrümmt sind oder gar Kniee bilden. Diese Widerstände lassen sich nicht mit Sicherheit theoretisch bestimmen und mußten daher, wie so viele andere Ausflußverhältnisse, auf dem Wege der Erfahrung untersucht werden. §. 468.

Bildet eine Röhre ACB, Fig. 834, ein Knie, so trennt sich der Strahl in Folge der Centrifugalkraft des Wassers von der inneren Fläche des zweiten Röhrenstückes; es hört, wenn dieses Stück kurz ist, der volle Ausfluß auf, und es fällt deshalb auch die Ausflußmenge kleiner aus als bei einer gleich langen geraden Röhre. Ist aber das äußere Stück CB der Knieröhre ACB,

Fig. 834. Fig. 835.

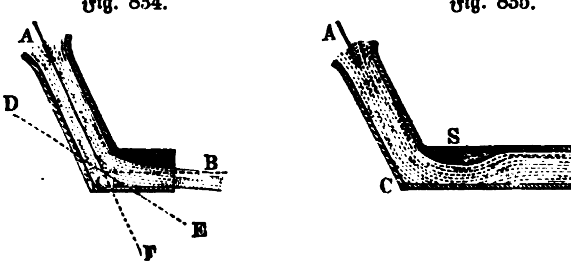


Fig. 835, länger, so bildet sich hinter dem Knie C ein Wirbel S, und es tritt bei wieder gefülltem Querschnitte eine verminderte Ausflußgeschwindigkeit v ein. Diese Verminderung der Ausflußgeschwindigkeit ist genau so zu beurtheilen wie der Widerstand, welchen Verengungen in Röhren bewirken. Ist F der Querschnitt der Röhre und F_1 der Querschnitt des contrahirten Strahles bei S, so hat man den Contractionscoefficienten desselben:

$$\alpha = \frac{F_1}{F}$$

und daher den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α und folglich auch der entsprechende Widerstandscoefficient ζ hängt von dem Bricol- oder halben Ablenkungswinkel $\delta = ACD = BCE = \frac{1}{2} BCF$, Fig. 834, ab, und es ist nach den Versuchen, welche der Verfasser an einer Röhre von 3 Centimeter Weite hierüber angestellt hat,

$$\zeta = 0{,}9457 \, sin. \delta^2 + 2{,}047 \, sin. \delta^4$$

zu setzen.

Folgende kleine Tabelle enthält eine Reihe von nach dieser Formel berechneten Widerstandscoefficienten für verschiedene Bricolwinkel:

$\delta^0 =$	10	20	30	40	45	50	55	60	65	70
$\zeta =$	0,046	0,139	0,364	0,740	0,984	1,260	1,556	1,861	2,158	2,431

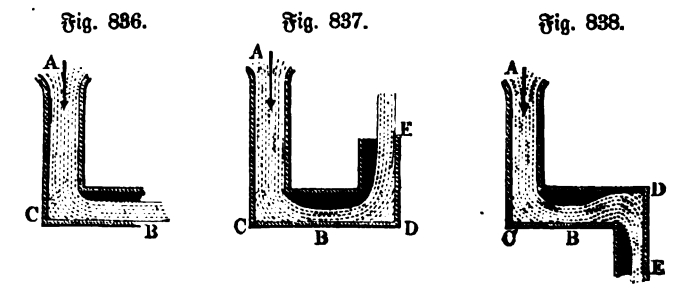
Man ersieht hieraus, daß durch die Kniee der lebendigen Kraft des Wassers in Röhren bedeutende Verluste erwachsen. Ist z. B. das Knie ein rechtwinkeliges, also $\delta = 45^0$, so hat man hiernach den durch dasselbe herbeigeführten Druckhöhenverlust:

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

also ziemlich gleich der Geschwindigkeitshöhe.

Bei engeren Röhren fällt ζ namhaft größer aus, z. B. für eine Knieröhre von 1 Centimeter Weite und 90 Grad Ablenkung ist $\zeta = 1{,}536$ gefunden worden. S. des Verfassers Experimentalhydraulik.

Stoßen an ein Knie ACB, Fig. 836, noch andere Kniee ohne längere Zwischenröhre, wie z. B. aus Fig. 837 und Fig. 838 zu ersehen ist, so

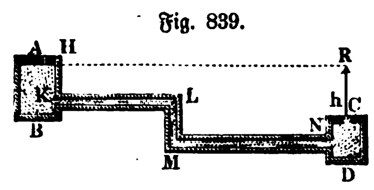


treten ganz besondere, jedoch leicht erklärliche Ausflußverhältnisse ein. Das zweite Knie BDE, Fig. 837, welches den Strahl nach derselben Seite hin ablenkt, wie das erste ACB, bringt keine weitere Contraction des Strahles hervor, es ist daher auch bei vollem Ausflusse hier ζ nicht größer als für ein einfaches Knie ACB. Lenkt aber das Knie BDE, Fig. 838,

den Strahl auf die entgegengesetzte Seite, so ist die Contraction eine doppelte, und daher auch der Widerstandscoefficient doppelt so groß als bei einfachem Knie. Wird endlich BDE so an ACB gesetzt, daß DE rechtwinkelig auf die Ebene ABD zu stehen kommt, so stellt sich ζ ungefähr $1\frac{1}{2}$ mal so groß heraus als bei dem Knie ACB allein.

Beispiel. Wenn die im Beispiel 1, §. 457; berechnete Röhrenleitung von 50 Meter Länge und 0,15 Meter Weite zwei rechtwinkelige Kniee enthält, Fig. 839, so beträgt die für ein gefordertes Lieferungsquantum von 1 Cubikmeter per Minute nöthige Druckhöhe:

Fig. 839.



$$h = \left(1{,}505 + 0{,}0242\,\frac{50}{0{,}15} + 2\,.\,0{,}984\right)\frac{v^2}{2g}$$
$$= 11{,}54\,.\,0{,}051\,.\,0{,}943^2 = 0{,}523 \text{ Meter.}$$

Kropfröhren. Gekrümmte Röhren geben unter übrigens gleichen Verhältnissen viel kleinere Widerstände als unabgerundete Knieröhren. Auch sie veranlassen in Folge der Centrifugalkraft des Wassers eine partielle Contraction des Wasserstrahles ABD, Fig. 840, so daß, wenn sich an die krumme Röhre keine längere gerade Röhre anschließt, der Querschnitt F_1 des Strahles bei seinem Austritte kleiner ist als der Querschnitt F der Röhre. Endigt sich aber der Kropf ABD, Fig. 841, in einer längeren geraden Röhre DE, so bildet sich wieder ein Wirbel F, und es findet auf Unkosten §. 469.

Fig. 840.

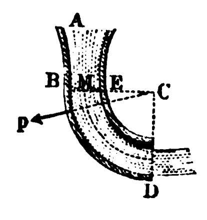
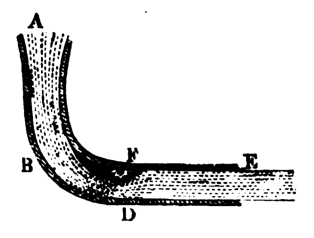


Fig. 841.



der lebendigen Kraft des Wassers wieder ein voller Ausfluß des Wassers statt. Ist der Contractionscoefficient $\frac{F_1}{F} = \alpha$, so haben wir auch den Coefficienten des Krümmungswiderstandes:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2.$$

Der Contractionscoefficient α hängt von dem Verhältnisse $\frac{a}{r}$ der halben Röhrenweite $BM = EM = a$, Fig. 840, zu dem Krümmungshalbmesser

$CM = r$ der Röhrenaxe ab und läßt sich annähernd auf folgende Weise theoretisch bestimmen. Ist v die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritte in den Kropf und v_1 die des zusammengezogenen Wasserstrahles, so hat man $v_1 F_1 = v F$, daher $v_1 = \frac{F}{F_1} v$ und demnach die den Druck in BE messende Druckhöhe:

$$h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Diese Höhe mit 1 und γ multiplicirt, ergiebt den Druck des Wasserstrahles bei E auf die Flächeneinheit nach allen Richtungen hin:

$$p = h\gamma = \left[\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\gamma = \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 1\right] \frac{v^2}{2g}\gamma.$$

Da nun die Centrifugalkraft des Wassers an der convexen Röhrenwandung dem Drucke p entgegenwirkt, so ist es möglich, daß sie denselben hier ganz aufheben kann. In diesem Falle wird aber auch die äußere Luft eindringen und sich der Strahl ganz von der convexen Seite losziehen, wie aus den Fig. 840 und 841 zu ersehen ist. Die Centrifugalkraft eines Wasserprismas von der Länge $BE = 2a$ und dem Querschnitte 1 ist bei dem Krümmungshalbmesser $CM = r$,

$$q = \frac{v^2}{gr} \cdot 2a\gamma,$$

setzt man daher $p = q$, so folgt die Bedingung des Losreißens:

$$\frac{1}{\alpha^2} - 1 = \frac{4a}{r},$$

daher der Contractionscoefficient:

$$\alpha = \sqrt{\frac{r}{r + 4a}},$$

und der Widerstandscoefficient bei vollem Ausflusse:

$$\zeta = \left(\sqrt{\frac{r + 4a}{r}} - 1\right)^2.$$

Da bei dieser Entwickelung nur eine mittlere Geschwindigkeit und ein mittlerer Krümmungshalbmesser zu Grunde gelegt wurde, so kann sie natürlich auch nur auf eine annähernde Bestimmung von α und ζ führen.

Aus den Versuchen des Verfassers und aus den Beobachtungsresultaten Du Buat's hat aber der Verfasser für den Widerstandscoefficienten beim Durchgange des Wassers durch Kröpfe folgende empirische Formeln abgeleitet:

1) Für Kröpfe mit kreisförmigem Querschnitte:

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2};$$

2) für Kropfröhren mit rectangulären Querschnitten:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2}.$$

Nach diesen Formeln sind folgende Tabellen berechnet worden:

Tabelle I.

Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit kreisförmigen Querschnitten.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,978

Tabelle II.

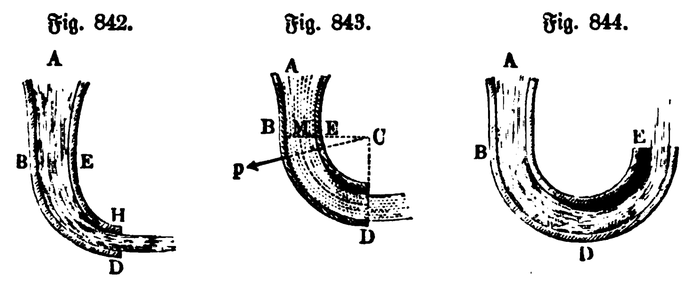
Coefficienten des Krümmungswiderstandes bei Röhren mit rectangulären Querschnitten.

$\frac{a}{r} =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\zeta =$	0,124	0,135	0,180	0,250	0,398	0,643	1,015	1,546	2,271	3,228

Hiernach sieht man, daß bei einer runden Röhre, deren Krümmungshalbmesser zweimal so groß ist als der Röhrenhalbmesser, der Widerstandscoefficient $= 0{,}294$, und bei einer Röhre, deren Krümmungshalbmesser mindestens zehnmal so groß ist als der Halbmesser des Querschnittes, dieser Coefficient $= 0{,}131$ ausfällt.

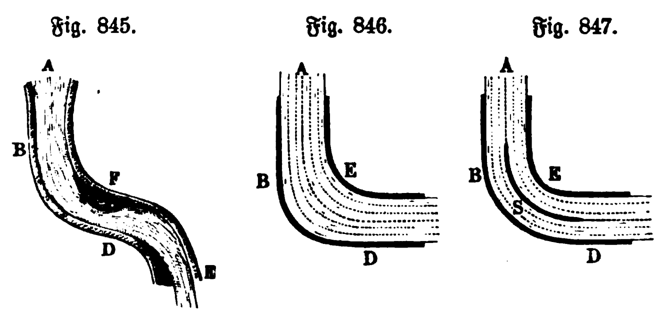
Um die Contraction des Wassers in einer krummen Röhre ABD, Fig. 842, zu verhindern, ist der Querschnitt der Röhre allmälig so zu verengern, daß der Querschnitt $DH = F_1$ der Ausmündung zum Querschnitte $BE = F$ der Einmündung im Verhältnisse $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\zeta + 1}}$ zu stehen kommt.

Fig. 842. Fig. 843. Fig. 844.



Stößt an den Kropf BD, Fig. 843, noch ein anderer an, welcher den Strahl nach derselben Seite noch weiter ablenkt, bildet z. B. die Röhrenaxe einen Halbkreis wie BDE, Fig. 844, so ändert sich die Contraction nicht, es behalten also auch α und ζ nahe denselben Werth wie bei der Röhre in Fig. 843, welche nur einen Quadranten einnimmt; schließt sich dagegen ein Kropf DE, Fig. 845, an, welcher nach der entgegengesetzten Seite ablenkt, so bildet sich vor diesem ein Wirbel F, und es tritt in demselben eine zweite Zusammenziehung des Strahles ein, wodurch der Widerstand (ζ) nahe verdoppelt wird.

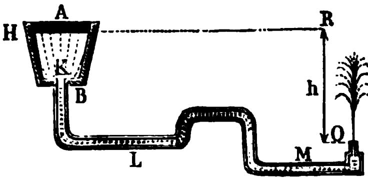
Fig. 845. Fig. 846. Fig. 847.



Der Widerstand des fließenden Wassers in Kropfröhren läßt sich durch Erweiterung der Kröpfe wie BDE, Fig. 846, sowie durch dünne Scheidewände in denselben wie S in BDE, Fig. 847, vermindern, denn im ersten Falle wird die Geschwindigkeit v und im zweiten das Verhältniß $\frac{a}{r}$ und folglich auch der Widerstandscoefficient ζ kleiner.

Beispiel. Wenn die Röhrenleitung BLM, Fig. 848, im zweiten Beispiele des §. 457 noch fünf Kröpfe zu je 90° enthält, und der Krümmungshalbmesser eines jeden 0,05 Meter beträgt, so hat man:

Fig. 848.



$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$

und nach der ersten der obigen Tabellen, den entsprechenden Widerstandscoefficienten: $\zeta = 0{,}294$; folglich für alle fünf Kröpfe, $5\zeta = 1{,}47$ und daher die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers statt

$$v = \frac{5{,}603}{\sqrt{10{,}10}} = 1{,}762 \text{ Meter},$$

$$v = \frac{5{,}603}{\sqrt{10{,}10 + 1{,}47}} = 1{,}647 \text{ Meter},$$

so daß nun die Ausflußmenge pro Secunde:

$$Q = 3{,}14 \,.\, 0{,}025^2 \,.\, 1{,}647 = 3{,}23 \text{ Liter folgt.}$$

Schieber, Hähne, Klappen. Um den Ausfluß des Wassers aus §. 470.
Röhren und Gefäßen zu reguliren, werden sogenannte Obturatoren, und zwar Schieber, Hähne, Klappen und Ventile angewendet, wodurch sich Verengungen erzeugen lassen, welche dem Durchgange des Wassers Widerstände entgegensetzen, die sich auf ähnliche Weise wie die in den letzten Paragraphen abgehandelten Verluste bestimmen lassen. Da aber hier das Wasser noch besondere Richtungsänderungen, Zertheilungen u. s. w. erleidet, so lassen sich die Coefficienten α und ζ nicht unmittelbar bestimmen, sondern es war zu deren Ermittelung die Ausführung besonderer Versuche nöthig. Solche Versuche sind von dem Verfasser ebenfalls angestellt worden*), und die Hauptergebnisse derselben sind in folgenden Tabellen enthalten:

Tabelle I.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber oder Schubventile im parallelepipedischen Rohre.

Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$ =	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
Widerstandscoefficient ζ =	0,00	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	193

Tabelle II.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Schieber im cylindrischen Rohre.

Relative Stellhöhe s =	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
Querschnittsverhältniß =	1,000	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
Widerstandscoefficient ζ =	0,00	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

*) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, angestellt und berechnet von Jul. Weisbach, oder unter dem Titel „Untersuchungen im Gebiete der Mechanik und Hydraulik" u. s. w., Leipzig 1842.

Tabelle III.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	$66^3/_4$
Querschnittsverhältniß =	0,926	0,849	0,769	0,687	0,604	0,520	0,436	0,352	0,269	0,188	0,110	0
Widerstandscoefficient =	0,05	0,31	0,88	1,84	3,45	6,15	11,2	20,7	41,0	95,3	275	∞

Tabelle IV.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch einen Hahn im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,926	0,850	0,772	0,692	0,613	0,535	0,458
Widerstandscoefficient =	0,05	0,29	0,75	1,56	3,10	5,47	9,68
Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	$82^1/_8$°
Querschnittsverhältniß =	0,385	0,315	0,250	0,190	0,137	0,091	0
Widerstandscoefficient =	17,3	31,2	52,6	106	206	486	∞

Tabelle V.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen oder Drosselventile im parallelepipedischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandscoefficient =	0,28	0,45	0,77	1,34	2,16	3,54	5,7

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniß =	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient =	9,27	15,07	24,9	42,7	77,4	158	368	∞

Tabelle VI.

Die Widerstandscoefficienten für den Durchgang des Wassers durch Drehklappen im cylindrischen Rohre.

Stellwinkel δ =	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
Querschnittsverhältniß =	0,913	0,826	0,741	0,658	0,577	0,500	0,426
Widerstandscoefficient =	0,24	0,52	0,90	1,54	2,51	3,91	6,22

Stellwinkel δ =	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	90°
Querschnittsverhältniß =	0,357	0,293	0,234	0,181	0,134	0,094	0,060	0
Widerstandscoefficient =	10,8	18,7	32,6	58,8	118	256	751	∞

Mit Hülfe der in den vorstehenden Tabellen aufgeführten Widerstands- §. 471.
coefficienten kann man nicht nur den einer gewissen Schieber-, Hahn- oder Klappenstellung entsprechenden Druckhöhenverlust angeben, sondern auch bestimmen, welche Stellung diesen Apparaten zu geben ist, damit die Ausflußgeschwindigkeit oder der Widerstand ein gewisser werde. Allerdings wird aber eine solche Bestimmung um so sicherer, je mehr diese regulirenden Vorrichtungen den bei den Versuchen angewendeten gleichen. Uebrigens gelten die in den Tabellen angegebenen Zahlenwerthe nur für den Fall, wenn das Wasser nach dem Durchgange durch die mittels dieser Apparate hervorgebrachten Verengungen das Rohr wieder ausfüllt. Damit dieser volle Ausfluß bei starken Verengungen noch eintrete, muß das Rohr eine beträchtliche Länge haben. Die Querschnitte der parallelepipedischen Röhren waren 5 Centimeter breit und $2^1/_2$ Centimeter hoch, und die Querschnitte von den

cylindrischen Röhren hatten eine Weite von 4 Centimetern. Bei dem Schieber, Fig. 849, entsteht eine einfache Verengung, deren Querschnitt

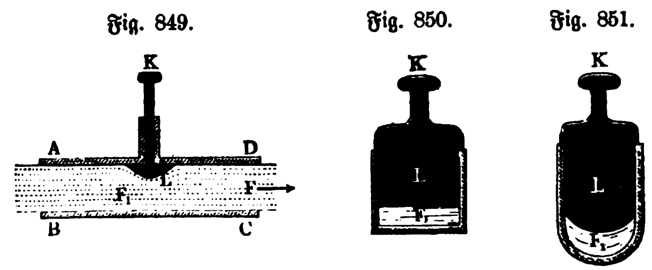


Fig. 849. Fig. 850. Fig. 851.

bei dem einen Rohre ein bloßes Rechteck F_1, Fig. 850, bei dem zweiten aber einen Mond F_1, Fig. 851, bildet. Bei den Hähnen, Fig. 852, stellen sich zwei Verengungen und auch zwei Richtungsabänderungen heraus,

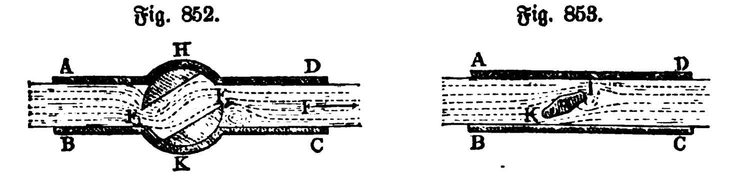


Fig. 852. Fig. 853.

deshalb sind auch hier die Widerstände sehr groß. Die Querschnitte der größten Verengungen haben ganz eigenthümliche Gestalten. Bei den Drehklappen, Fig. 853, theilt sich der Strom in zwei Theile, wovon jeder durch eine Verengung hindurchgeht. Die Querschnitte dieser Verengungen sind bei der Drehklappe im parallelepipedischen Rohre rectangulär und im cylindrischen mondförmig. — Zur Anwendung der oben mitgetheilten Tabellen wird durch folgende Beispiele hinreichende Anleitung gegeben werden.

Beispiele. 1) Wenn in einer cylindrischen Röhrenleitung von 0,08 Meter Weite und 160 Meter Länge ein Schubventil angebracht ist, und dasselbe um $^3/_8$ der ganzen Höhe gezogen wird, also $^5/_8$ derselben verschließt, welche Wassermenge liefert die Röhre unter einem Drucke von 1,2 Meter?

Der Widerstandscoefficient für den Eintritt in die Röhre läßt sich nach dem Früheren $\zeta_0 = 0{,}505$ und der Widerstandscoefficient für den Schieber nach Tabelle II., §. 470, $\zeta_1 = 5{,}52$ setzen, es folgt daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{4{,}429\,\sqrt{1{,}2}}{\sqrt{1{,}505 + 5{,}52 + \zeta_1 \frac{l}{d}}} = \frac{4{,}849}{\sqrt{7{,}025 + 2000\,\zeta}}.$$

Setzt man den Reibungscoefficienten vorläufig $\zeta = 0{,}025$, so erhält man:

$$v = \frac{4{,}849}{\sqrt{57{,}025}} = 0{,}642 \text{ Meter}.$$

Nun entspricht aber der Geschwindigkeit $v = 0{,}64$ Meter genauer $\zeta = 0{,}0262$, daher ist schärfer:

$$v = \frac{4{,}849}{\sqrt{59{,}425}} = 0{,}629 \text{ Meter}$$

und die Ausflußmenge pro Secunde:

$$Q = 3{,}14 \cdot 0{,}04^2 \cdot 0{,}629 = 0{,}00315 \text{ Cubikmeter} = 3{,}15 \text{ Liter}.$$

2) Eine Röhrenleitung von 0,1 Meter Weite liefert bei einer Druckhöhe von 1,6 Meter in der Minute 0,3 Cubikmeter Wasser. Welche Stellung hat man dem in derselben angebrachten Drosselventile zu geben, damit das Ausflußquantum nachher nur 0,2 Cubikmeter beträgt?

Die Geschwindigkeit ist anfänglich:

$$v = \frac{0{,}3}{60 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}05^2} = 0{,}637 \text{ Meter}$$

und nach theilweisem Verschluß der Klappe:

$$v_1 = \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}637 = 0{,}425 \text{ Meter}.$$

Der Ausflußcoefficient für den ersten Fall des Ausflusses ist:

$$\mu = \frac{v}{\sqrt{2gh}} = \frac{0{,}637}{4{,}429\sqrt{1{,}6}} = 0{,}114,$$

daher der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1 = \frac{1}{0{,}114^2} - 1 = 76;$$

der Ausflußcoefficient für den zweiten Fall ist:

$$\mu_1 = \tfrac{2}{3}\mu = \tfrac{2}{3} \cdot 0{,}114 = 0{,}076,$$

daher der Widerstandscoefficient:

$$\zeta_1 = \frac{1}{0{,}076^2} - 1 = 172.$$

Demnach darf der Coefficient des vom Drosselventile zu erzeugenden Widerstandes

$$\zeta_1 - \zeta = 172 - 76 = 96$$

betragen. Nun giebt aber Tabelle VI., §. 470, die Widerstandscoefficienten für δ gleich 55° und 60° bezüglich zu $\zeta = 58{,}8$ und $\zeta = 118$; man darf daher annehmen, daß bei einer Stellung unter dem Winkel

$$\delta = 55^0 + \frac{96 - 58{,}8}{118 - 58{,}8} \cdot 5^0 = 58^0$$

das gewünschte Ausflußquantum erhalten werde. Berücksichtigt man noch, daß bei dem Geschwindigkeitswechsel von 0,637 Meter auf 0,425 Meter der Reibungscoefficient der Röhrenleitung von 0,0263 in 0,0290 übergeht, so hat man noch genauer den Werth des der Drosselklappe zugehörigen Widerstandscoefficienten:

$$172 - 76\,\frac{290}{263} = 172 - 84 = 88$$

und demnach den gesuchten Stellwinkel:

$$\delta = 55^0 + \frac{88 - 58{,}8}{118 - 58{,}8} \cdot 5^0 = 57{,}5^0.$$

Ventile. Von besonderer Wichtigkeit ist die Kenntniß der durch Ventile hervorgebrachten Widerstände. Auch über diese sind vom Verfasser Versuche angestellt worden. Am häufigsten kommen die sogenannten Kegel- §. 472.

und nächstdem die **Klappenventile**, wie in den Figuren 854 und 855 abgebildet sind, zur Anwendung. Bei beiden geht das Wasser durch die von

Fig. 854.

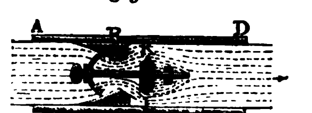
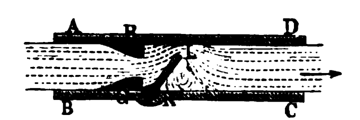


Fig. 855.



einem Ringe RG gebildete Oeffnung; das Kegelventil KL, Fig. 854, hat einen Stiel, womit es in einer Führung liegt, die ihm nur einen Ausschub in der Axenrichtung gestattet; das Klappenventil oder die **Ventilklappe** KL, Fig. 855, hingegen öffnet sich drehend wie eine Thür. Man sieht leicht ein, daß bei beiden Apparaten dem Wasser nicht nur durch den Ventilring, sondern auch durch die Ventilklappe ein Hinderniß entgegengesetzt wird.

Bei dem **Kegelventile**, womit die Versuche angestellt wurden, war das Verhältniß zwischen der Apertur im Ventilringe zum Querschnitte der ganzen Röhre: 0,356 und dagegen das Verhältniß zwischen der Ringfläche um das geöffnete Ventil herum zu dem Röhrenquerschnitte = 0,406; es läßt sich daher im Mittel $\frac{F_1}{F} = 0{,}381$ setzen. Indem man den Ausfluß bei verschiedenen Ventilstellungen beobachtete, ergab sich, daß der Widerstandscoefficient zwar abnahm, wenn der Ventilschub größer wurde, daß aber diese Abnahme schon höchst unbedeutend ausfiel, wenn der Ventilschub die halbe Weite der Apertur übertraf. Für diesen Stand war $\zeta = 11$, also die **Widerstandshöhe** oder der Druckhöhenverlust:

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 11 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wenn v die Geschwindigkeit des Wassers in der vollen Röhre bezeichnet. Diese Zahl kann man auch benutzen, um die anderen Querschnittsverhältnissen entsprechenden Widerstandscoefficienten zu bestimmen. Setzen wir allgemein

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2,$$

so erhalten wir für den beobachteten Fall:

$$\frac{F_1}{F} = 0{,}381 \text{ und } \zeta = \left(\frac{1}{0{,}381\,\alpha} - 1\right)^2 = 11,$$

daher:

$$\alpha = \frac{1}{0{,}381\,(1 + \sqrt{11})} = \frac{1}{4{,}317 \cdot 0{,}381} = 0{,}608$$

und endlich allgemein den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = \left(\frac{F}{0{,}608\,F_1} - 1\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{F}{F_1} - 1\right)^2.$$

Ist z. B. der Querschnitt der Oeffnung die Hälfte von dem der Röhre, so fällt hiernach der Widerstandscoefficient

$$\zeta = (1{,}645\ .\ 2 - 1)^2 = 2{,}29^2 = 5{,}24$$

aus.

Bei dem Klappenventile war das Querschnittsverhältniß zwischen der Durchgangsöffnung und der Röhre, d. i. $\frac{F_1}{F} = 0{,}535$; wie aber die Widerstandscoefficienten mit der Größe der Eröffnung abnehmen, führt folgende Tabelle vor Augen.

Tabelle

der Widerstandscoefficienten für die Ventilklappe.

Oeffnungswinkel	15°	20°	25°	30°	35°	40°	15°	50°	55°	60°	65°	70°
Widerstandscoefficient	90	62	42	30	20	14	9,5	6,6	4,6	3,2	2,3	1,7

Mit Hülfe dieser Tabellen lassen sich die Widerstandscoefficienten für Klappen auch dann noch annähernd berechnen, wenn das Querschnittsverhältniß $\frac{F_1}{F}$ ein anderes sein sollte. Es ist derselbe Weg zu betreten, welchen man bei den Kegelventilen verfolgt hat.

Beispiel. Eine Druckpumpe liefert bei jedem Niedergange des Kolbens in 5 Secunden 0,1 Cubikmeter Wasser; die Weite des Steigrohres, in welchem das kegelförmige Steigventil sitzt, beträgt 0,15 Meter, der innere Durchmesser des Ventilringes 90 Millimeter und der größte Durchmesser des Ventils 115 Millimeter. Welchen Widerstand hat das Wasser beim Durchgange durch dieses Ventil zu überwinden?

Das Querschnittsverhältniß zwischen Ventilsitz und Steigrohr ist:

$$\left(\frac{90}{150}\right)^2 = 0{,}36$$

und das Verhältniß der ringförmigen Verengung zum Röhrenquerschnitte:

$$1 - \left(\frac{115}{150}\right)^2 = 0{,}41,$$

daher das mittlere Querschnittsverhältniß:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{0{,}36 + 0{,}41}{2} = 0{,}385$$

und der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \left(\frac{1{,}645}{0{,}385} - 1\right)^2 = 10{,}7.$$

Da die Geschwindigkeit des Wassers in dem Rohre

$$\frac{0{,}1}{5\ .\ 3{,}14\ .\ 0{,}075^2} = 1{,}132 \text{ Meter}$$

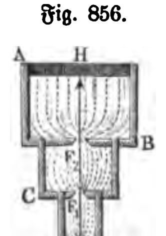
beträgt, so berechnet sich die Widerstandshöhe für das Ventil zu:

$$z = \zeta \frac{v^2}{2g} = 10{,}7 \ . \ 0{,}051 \ . \ 1{,}132^2 = 0{,}70 \text{ Meter.}$$

Die pro Secunde gehobene Wassermenge hat ein Gewicht von $\frac{0{,}1 \, . \, 1000}{5} = 20$ Kilogramm, daher ist die mechanische Arbeit, welche beim Durchgange des Wassers durch das Ventil in jeder Secunde consumirt wird, gleich $20 \ . \ 0{,}70 = 14$ Meterkilogramm.

§. 473. **Zusammengesetzte Gefässe.** Die vorstehenden Lehren über den Widerstand des Wassers beim Durchgange desselben durch Verengungen finden ihre Anwendung auch noch bei dem Ausflusse durch zusammengesetzte Gefäße. Der in Fig. 856 abgebildete Apparat AD ist durch zwei, die Mündungen F_1 und F_2 enthaltende Scheidewände abgetheilt und bildet deshalb drei communicirende Gefäße. Wären die Scheidewände nicht vorhanden und die Kanten bei den Uebergängen aus einem Gefäße in das andere abgerundet, so hätte man, wie bei einem einfachen Gefäße, die Ausflußgeschwindigkeit durch F:

Fig. 856.



$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0}},$$

insofern h die Tiefe FH der Oeffnung unter dem Wasserspiegel und ζ_0 den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Ausflußöffnung F bezeichnen.

Da aber nach dem Durchgange des Wassers durch die Mündungen F_1 und F_2 die Querschnitte αF_1 und αF_2 plötzlich in die Querschnitte G und G_1 der Gefäße CD und BC übergehen, und nach §. 464 die daraus erwachsenden Druckhöhenverluste

$$h_1 = \left(\frac{G}{\alpha F_1} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

und

$$h_2 = \left(\frac{G_1}{\alpha F_2} - 1\right)^2 \left(\frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

betragen, so hat man:

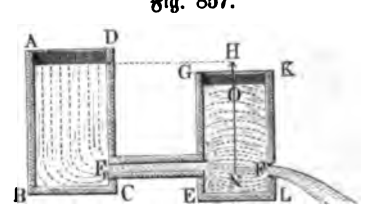
$$(1+\zeta_0)\frac{v^2}{2g} + h_1 + h_2 = \left[1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g} = h$$

und daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left(\frac{F}{F_1} - \frac{\alpha F}{G}\right)^2 + \left(\frac{F}{F_2} - \frac{\alpha F}{G_1}\right)^2}}.$$

Bei dem zusammengesetzten Ausflußapparate, welchen Fig. 857 repräsentirt, findet ganz dasselbe Verhältniß statt, nur ist hier noch die Reibung des Wassers in dem Communicationsrohre CE zu berücksichtigen. Ist l die Länge und d die Weite dieses Rohres, ferner ζ der Reibungscoefficient und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in demselben, so hat man die Höhe, welche das Wasser beim Uebergange von AC nach GL verliert:

Fig. 857.



$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \frac{v_1^2}{2g},$$

oder, da die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{\alpha F}{F_1} v$ zu setzen ist,

$$h_1 = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Zieht man nun diese Höhe von der ganzen Druckhöhe h ab, so bleibt die Druckhöhe im zweiten Gefäße: $h_2 = h - h_1$ und man hat daher für die Ausflußgeschwindigkeit v durch die Mündung F:

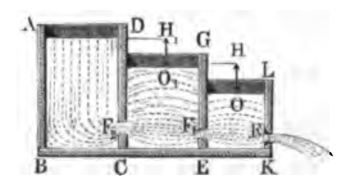
$$v = \frac{\sqrt{2g(h-h_1)}}{\sqrt{1+\zeta_0}} = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta_0}} \sqrt{h - \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2 \frac{v^2}{2g}},$$

woraus

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \zeta_0 + \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta \frac{l}{d}\right] \left(\frac{\alpha F}{F_1}\right)^2}} \text{ folgt.}$$

Diese Bestimmung wird bei dem Apparate, welchen Fig. 858 repräsentirt, sehr einfach, weil man die Querschnitte G, G_1, G_2 der Gefäße unendlich groß setzen kann in Ansehung der Mündungsquerschnitte F, F_1, F_2. Bezeichnen α, α_1 und α_2 die Contractionscoefficienten für die Mündungen F, F_1 und F_2, so geht bei dem Durchgange des Wassers durch F_1 die im contrahirten Querschnitte vorhandene Geschwindigkeit $\frac{1}{\alpha_1} v_1$ in diejenige

Fig. 858.



$v_1 \frac{F_1}{G} = 0$ über, und es beträgt daher der diesem Uebergange entsprechende Verlust an Druckhöhe:

$$h_1 = OH = \frac{1}{2g}\left(\frac{v_1}{\alpha_1}\right)^2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ebenso ist die zweite Niveaudifferenz $O_1 H_1$ oder die Widerstandshöhe für den Durchgang durch F_2:

$$h_2 = \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Hiernach folgt:

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = \frac{\alpha F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha F}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_1 F_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2 F_2}\right)^2}}.$$

Es ist leicht zu ermessen, daß zusammengesetzte Ausflußbehälter weniger Wasser liefern, als einfache unter übrigens gleichen Verhältnissen.

Beispiel. Wenn bei dem Apparate, Fig. 857, die totale Druckhöhe oder die Tiefe des Mittelpunktes der Mündung F unter dem Wasserspiegel des Gefäßes AC 2 Meter beträgt, die Mündung 0,2 Meter breit und 0,1 Meter hoch, der die beiden Reservoirs verbindende Lutten aber 4 Meter lang, 0,3 Meter breit und 0,15 Meter hoch ist, welches Ausflußquantum wird die Mündung F geben?

Der Querschnitt der Röhre CE ist 0,3 . 0,15 = 0,045 Quadratmeter, der Umfang 2 (0,3 + 0,15) = 0,9 Meter, daher kann man die mittlere Weite d dieser Röhre zu $d = 4\,\frac{0,045}{0,9} = 0,2$ Meter annehmen, also ist $\frac{l}{d} = \frac{4}{0,2} = 20$ zu setzen. Den Reibungscoefficienten $\zeta = 0,025$ gesetzt, folgt: $\zeta \frac{l}{d} = 0,5$.

Man erhält daher, wenn man den Coefficienten des Eintrittswiderstandes in die prismatische Röhre zu $\zeta_0 = 0,505$ annimmt:

$$1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\,\frac{l}{d} = 1 + 0,505 + 0,5 = 2,005.$$

Da $\frac{\alpha F}{F_1} = \frac{0,64 \,.\, 0,2 \,.\, 0,1}{0,3 \,.\, 0,15} = 0,284$ ist, so folgt der Widerstandscoefficient für den ganzen Lutten zu: $2,005 \,.\, 0,284^2 = 0,162$; wenn nun der Widerstandscoefficient für den Durchgang durch F zu 0,07 angenommen wird, so erhält man die Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{4,429\sqrt{2}}{\sqrt{1,07 + 0,162}} = 5,643 \text{ Meter}.$$

Das Ausflußquantum beträgt daher bei einem Contractionscoefficienten von 0,64:

$$Q = 0,64 \,.\, 0,2 \,.\, 0,1 \,.\, 5,643 = 0,072 \text{ Cubikmeter} = 72 \text{ Liter}.$$

Fünftes Capitel.

Von dem Ausflusse des Wassers unter veränderlichem Drucke.

Prismatische Gefässe. Erhält ein Gefäß, aus welchem das Wasser §. 474.
durch eine Boden- oder Seitenöffnung abfließt, von anderer Seite her keinen Zufluß, so tritt allmäliges Sinken des Wasserspiegels und schließliche Entleerung des Gefäßes ein. Wenn ferner die Zuflußmenge Q_1 größer oder kleiner ist, als das Ausflußquantum $Q = \mu F \sqrt{2gh}$, so steigt oder sinkt der Wasserspiegel so lange, bis die Druckhöhe $h = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ geworden ist, worauf Druckhöhe und Ausflußgeschwindigkeit unverändert bleiben. Es handelt sich nun hier um die Ermittelung der Abhängigkeit, in welcher die Zeit zu der Veränderung des Wasserspiegels und nach Befinden der Entleerung von Gefäßen gegebener Form und Größe steht.

Den einfachsten Fall bietet der Ausfluß aus einem prismatischen Gefäße dar, welcher durch eine Oeffnung im Boden erfolgt, wenn dabei ein Zufluß von oben nicht stattfindet. Ist x die veränderliche Druckhöhe FP, sowie F der Querschnitt der Mündung und G derjenige des Gefäßes AC, Fig. 859, so hat man für die Geschwindigkeit v des sinkenden Wasserspiegels:

Fig. 859.

$$Gv = \mu F \sqrt{2gx}; \text{ daher: } x = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{G}{\mu F}\right)^2.$$

Anfänglich, wo $x = h$ ist, betrage die Geschwindigkeit des Wasserspiegels c, alsdann hat man auch:

$$h = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{G}{\mu F}\right)^2.$$

Der Weg $OP = s = h - x$ des Wasserspiegels in einer gewissen Zeit drückt sich daher aus durch:

$$h - x = s = \frac{c^2 - v^2}{2g}\left(\frac{G}{\mu F}\right)^2 = \frac{c^2 - v^2}{2\left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g}.$$

Diese Formel, verglichen mit §. 14 IV., ergiebt, daß die Bewegung der Wasseroberfläche eine gleichförmig verzögerte ist, und daß das Maß der Verzögerung $p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g$ ist.

Bei dieser Bewegung wird die Geschwindigkeit v zu Null nach der Zeit:

$$t = \frac{c}{p} = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2gh} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 g = \frac{2G}{\mu F} \sqrt{\frac{h}{2g}},$$

und zwar ergiebt sich $v = 0$ für $x = 0$; d. h. jene Zeit t ist die zum vollständigen Entleeren des Gefäßes erforderliche. Man kann auch schreiben:

$$t = \frac{2G}{\mu F} \sqrt{\frac{h}{2g}} = \frac{2Gh}{\mu F \sqrt{2gh}} = \frac{2V}{Q}$$

und demgemäß sagen, daß zum Ausflusse der Wassermenge $V = Gh$ durch die Bodenöffnung F unter einer von h bis 0 abnehmenden Druckhöhe genau doppelt so viel Zeit erforderlich ist, als die gleiche Wassermenge bei der unveränderlichen Druckhöhe h gebraucht.

Da der Ausflußcoefficient mit der Abnahme des Druckes größer wird, so hat man bei Berechnungen dieser Art einen mittleren Werth von μ einzuführen.

Beispiel. In welcher Zeit entleert sich ein parallelepipedischer Kasten von 3 Quadratmeter Querschnitt durch eine kreisrunde Bodenöffnung von 0,05 Meter Durchmesser, wenn das Wasser anfänglich 1,2 Meter über dem Boden steht?

Theoretisch wäre die Ausflußzeit:

$$t = \frac{2 \,.\, 3 \sqrt{1{,}2}}{0{,}025^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 4{,}429} = 757 \text{ Secunden} = 12 \text{ Minuten } 37 \text{ Secunden}.$$

Am Ende der halben Ausflußzeit ist die Druckhöhe $x = (1/2)^2\, h = 0{,}3$ Meter; für solche Druckhöhe ist der Ausflußcoefficient für eine Mündung in dünner Wand $\mu = 0{,}613$ anzunehmen, daher bestimmt sich die Ausflußzeit zu:

$$\frac{757}{0{,}613} = 1235 \text{ Secunden} = 20 \text{ Minuten } 35 \text{ Secunden}.$$

§. 475. **Communicirende Gefässe.** Da bei einer anfänglichen Druckhöhe h_1 die Ausflußzeit

$$t_1 = \frac{2G\sqrt{h_1}}{\mu F \sqrt{2g}}$$

und bei einer anfänglichen Druckhöhe h_2 diese Zeit

$$t_2 = \frac{2G\sqrt{h_2}}{\mu F \sqrt{2g}}$$

ist, so folgt durch Subtraction die Zeit, innerhalb welcher die Druckhöhe aus h_1 in h_2 übergeht, oder der Wasserspiegel um $h_1 - h_2$ sinkt:

$$t = \frac{2G}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = 0{,}452 \frac{G}{\mu F} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Es ist umgekehrt die einer gegebenen Ausflußzeit entsprechende Senkung $s = h_1 - h_2$ des Wasserspiegels durch die Formel:

$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu\sqrt{2g} \cdot F}{2G}t\right)^2$$

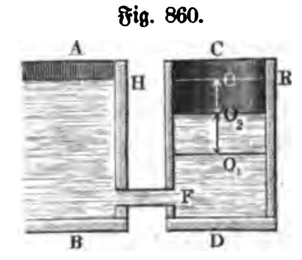
oder

$$s = \frac{\mu\sqrt{2g} \cdot Ft}{G}\left(\sqrt{h_1} - \frac{\mu\sqrt{2g}}{4G}Ft\right)$$

zu bestimmen.

Dieselben Formeln finden auch dann noch ihre Anwendung, wenn ein prismatisches Gefäß CD, Fig. 860, durch ein anderes Gefäß AB, in welchem das Wasser einen unveränderlichen Stand hat, gefüllt wird. Ist der Querschnitt der Communicationsröhre oder der Mündung $= F$, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes $= G$ und der anfängliche Niveauabstand OO_1 zwischen beiden Wasserspiegeln $= h$, so hat man, da hier der Wasserspiegel G im zweiten Gefäße gleichförmig verzögert steigt, ebenfalls die Zeit zum Füllen oder die Zeit, innerhalb welcher der zweite Wasserspiegel in das Niveau HR des ersten kommt:

Fig. 860.



$$t = \frac{2G\sqrt{h}}{\mu F\sqrt{2g}}$$

und ebenso die Zeit, in welcher der Niveauabstand $O_1O = h_1$ in $O_2O = h_2$ übergeht, also der Wasserspiegel um $O_1O_2 = s = h_1 - h_2$ steigt:

$$t = \frac{2G}{\mu F\sqrt{2g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}).$$

Beispiele. 1) Um wie viel sinkt der Wasserspiegel in dem Gefäße des letzten Beispiels (§. 474) binnen 5 Minuten?

Es ist $h_1 = 1{,}2$, $t = 5 \cdot 60 = 300$, $\frac{F}{G} = \frac{0{,}025^2 \cdot 3{,}14}{3} = 0{,}00065$, nimmt man noch $\mu = 0{,}605$ an, so folgt:

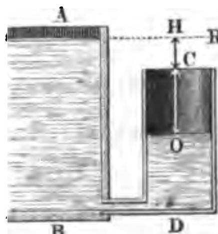
$$h_2 = \left(\sqrt{h_1} - \mu\sqrt{2g}\,\frac{Ft}{2G}\right)^2 = \left(\sqrt{1{,}2} - 0{,}605 \cdot 4{,}429\,\frac{300 \cdot 0{,}00065}{2}\right)^2$$

$$= (1{,}095 - 0{,}261)^2 = 0{,}696 \text{ Meter},$$

daher die gesuchte Senkung:

$$s = 1{,}2 - 0{,}696 = 0{,}504 \text{ Meter}.$$

Fig. 861.



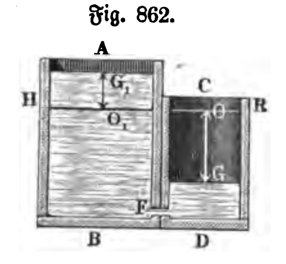
2) Welche Zeit braucht das Wasser, um in der 0,5 Meter weiten Röhre CD, Fig. 861, zum Ueberlaufen zu gelangen, wenn es mit einem Gefäße AB durch eine kurze, 0,04 Meter weite Röhre communicirt, und der steigende Wasserspiegel G anfänglich um $OH = 2$ Meter unter dem unveränderlichen Wasserspiegel t und um $OC = 1{,}5$ Meter unter dem Rande der Röhre steht?

Es ist hier, wenn $\mu = 0{,}81$ angenommen wird (vergl. §. 448):

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = \frac{2\,.\,0{,}25^2\,.\,3{,}14}{0{,}81\,.\,0{,}02^2\,.\,3{,}14\,.\,4{,}429} (\sqrt{2} - \sqrt{0{,}5})$$
$$= 87{,}11\,.\,(1{,}414 - 0{,}707) = 61{,}6 \text{ Secunden.}$$

§. 476. Wenn das erste Gefäß AB, Fig. 862, aus welchem das Wasser in das andere läuft, keinen Zufluß hat, und sein Querschnitt G_1 auch nicht als unendlich groß angesehen werden kann in Hinsicht auf den Querschnitt G des folgenden Gefäßes CD, so hat man die Bestimmung zu modificiren. Ist der veränderliche Abstand $G_1 O_1$ des ersten Wasserspiegels von dem Niveau HR, in welchem beide Wasserspiegel bei Beendigung des Ausflusses stehen, $= x$, und der Abstand GO des zweiten Wasserspiegels von eben dieser Ebene $= y$, so hat man die veränderliche Druckhöhe $= x + y$ und die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2g(x + y)}$, oder, da das Wasserquantum $G_1 x = G y$ ist,

Fig. 862.



$$v = \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Wasserspiegel im zweiten Gefäße steigt, ist nun:

$$v_1 = \frac{\mu F}{G} v = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y},$$

folglich die entsprechende Retardation:

$$p = \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) g$$

und die Ausflußzeit:

$$t = \frac{\mu F}{G} \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y} : \left(\frac{\mu F}{G}\right)^2 \left(1 + \frac{G}{G_1}\right) g$$
$$= \frac{2\,G\sqrt{y}}{\mu F \sqrt{2g\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)}}.$$

Führen wir statt x und y den anfänglichen Niveauabstand h ein, setzen wir also $x + y = h$, oder $\left(1 + \frac{G}{G_1}\right) y = h$, so erhalten wir:

$$y = \frac{h}{1 + \frac{G}{G_1}}$$

und die Zeit, binnen welcher die beiden Wasserspiegel in ein Niveau kommen:

$$t = \frac{2\,G\,\sqrt{h}}{\mu F\left(1 + \frac{G}{G_1}\right)\sqrt{2g}} = \frac{2\,G\,G_1\,\sqrt{h}}{\mu F(G + G_1)\sqrt{2g}}.$$

Die Zeit, innerhalb welcher der Niveauabstand von h auf h_1 sinkt, ist dagegen:

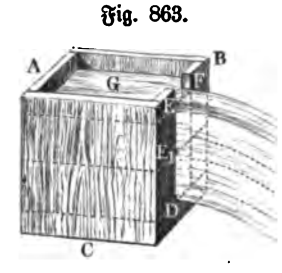
$$t = \frac{2\,G\,G_1\,(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})}{\mu F\,(G + G_1)\sqrt{2g}}.$$

Beispiel. Wenn aus einem Kasten von 1,2 Quadratmeter Querschnitt das Wasser durch eine 30 Millimeter weite Röhre in einen Kasten von 0,4 Quadratmeter fließt, und der anfängliche Niveauabstand in beiden Kästen 0,9 Meter beträgt, so kommt das Wasser in beiden Gefäßen in gleiches Niveau nach der Zeit:

$$t = \frac{2\,.\,1{,}2\,.\,0{,}4\,\sqrt{0{,}9}}{0{,}82\,.\,0{,}015^2\,.\,3{,}14\,.\,1{,}6\,.\,4{,}429} = \frac{0{,}911}{0{,}0041} = 222 \text{ Secunden.}$$

Wandeinschnitt. Fließt das Wasser durch einen Wandeinschnitt oder Ueberfall DE aus einem prismatischen Gefäße ABC, Fig. 863, welches keinen Zufluß erhält, so ist die Ausflußzeit auf folgende Weise zu ermitteln. §. 477.

Fig. 863.



Bezeichnen wir den Querschnitt des Gefäßes durch G, die Breite EF des Einschnittes durch b und die Höhe DE desselben durch h, und theilen wir die ganze Ausflußmündung durch Horizontalen in lauter schmale Streifen, jeden von der Breite b und Höhe $\frac{h}{n}$. Bei constantem Drucke ist die Ausflußmenge auf die Secunde bezogen,

$$Q = {}^2/_3\,\mu\,b\,\sqrt{2gh^3}.$$

Dividiren wir hiermit in den Inhalt $\frac{Gh}{n}$ einer Wasserschicht, so erhalten wir die entsprechende Ausflußzeit:

$$\tau = \frac{Gh}{{}^2/_3\,\mu n b\,\sqrt{2gh^3}} = \frac{3\,Gh}{2\,\mu n b\,\sqrt{2g}}\cdot h^{-3/2}.$$

Um nun die Ausflußzeit für ein Wasserquantum $G\,(h - h_1)$ zu erhalten, oder um die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher der Wasserstand über der Schwelle von $DE = h$ auf $DE_1 = h_1$ herabsinkt, setzen wir $h_1 = m\,\frac{h}{n}$ und führen in der letzten Gleichung statt $h^{-3/2}$ nach und nach die Werthe

$$\left(\frac{m+1}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+2}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}, \left(\frac{m+3}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}} \cdots \left(\frac{n}{n}h\right)^{-\frac{3}{2}}$$

ein, so erhalten wir durch Summiren die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{3\,G\,h}{2\,\mu\,n\,b\,\sqrt{2\,g}} \cdot \frac{h^{-\frac{3}{2}}}{n^{-\frac{3}{2}}} \left[(m+1)^{-\frac{3}{2}} + (m+2)^{-\frac{3}{2}} + \cdots n^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{3\,G\,h^{-\frac{1}{2}}}{2\,\mu\,n^{-\frac{1}{2}}\,b\,\sqrt{2\,g}} \left[(1^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} + 3^{-\frac{3}{2}} + \cdots n^{-\frac{3}{2}}) - (1^{-\frac{3}{2}} + 2^{-\frac{3}{2}} + 3^{-\frac{3}{2}} + \cdots m^{-\frac{3}{2}})\right]$$

oder s. „Ingenieur", Arithmetik S. 88:

$$t = \frac{3\,G\,h^{-\frac{1}{2}}}{2\,\mu\,n^{-\frac{1}{2}}\,b\,\sqrt{2\,g}} \left(\frac{n^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \frac{m^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}\right)$$

$$= \frac{3\,G}{\mu\,b\,\sqrt{2\,g}} \left(\frac{h}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (m^{-\frac{1}{2}} - n^{-\frac{1}{2}}) = \frac{3\,G}{\mu\,b\,\sqrt{2\,g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Setzt man $h_1 = 0$, so wird $t = \infty$; damit also das Wasser bis zur Schwelle abläuft, ist eine unendlich lange Zeit erforderlich.

Beispiel. Aus einem Reservoir von 40 Meter Länge und 12 Meter Breite fließt das Wasser durch einen Wandeinschnitt von 0,2 Meter Breite aus, nach welcher Zeit ist der 0,36 Meter hohe Wasserstand über der Schwelle bis auf 0,16 Meter herabgesunken? Es ist:

$$t = \frac{3\,.\,40\,.\,12}{\mu\,.\,0{,}2\,.\,4{,}429} \left(\frac{1}{\sqrt{0{,}16}} - \frac{1}{\sqrt{0{,}36}}\right) = \frac{1440}{0{,}886\,\mu} \cdot 0{,}833 = \frac{1353{,}9}{\mu}.$$

Nimmt man den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}60$ an, so folgt:

$$t = \frac{1353{,}9}{0{,}60} = 2257 \text{ Secunden} = 37 \text{ Minuten } 37 \text{ Secunden}.$$

Anmerkung. Bezeichnet allgemein x die Höhe des Wasserspiegels über der Schwelle in einem beliebigen Augenblicke, so fließt in der Zeit ∂t durch den Wandeinschnitt das Wasser $\frac{2}{3}\mu\,b\,\sqrt{2\,g\,x^3}\,.\,\partial t$. Wird der Wasserspiegel hierdurch um ∂x gesenkt, so hat man:

$$G\,\partial x = \tfrac{2}{3}\,\mu\,b\,\sqrt{2\,g\,x^3}\,.\,\partial t,$$

oder

$$\partial t = \frac{3\,G}{2\,\mu\,b\,\sqrt{2\,g}}\,x^{-\frac{3}{2}}\,\partial x.$$

Hieraus folgt durch Integration zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = h_1$:

$$t = \frac{3\,G}{2\,\mu\,b\,\sqrt{2\,g}} \int\limits_{h_1}^{h} x^{-\frac{3}{2}}\,\partial x = \frac{3\,G}{\mu\,b\,\sqrt{2\,g}} \left(\frac{1}{\sqrt{h_1}} - \frac{1}{\sqrt{h}}\right)$$

wie oben.

Für eine rectanguläre Seitenöffnung von der Breite a und dem Querschnitte F, für welche die Druckhöhe (über dem Schwerpunkte) anfänglich h und am Ende des Ausflusses h_1 ist, hat man nach §. 428 annähernd:

$$G\,\partial x = \mu\,F\left[1 - \tfrac{1}{96}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right]\sqrt{2\,g\,x}\,.\,\partial t, \text{ oder:}$$

$$\partial t = \frac{G}{\mu F \sqrt{2g}} \cdot \frac{x^{-1/2}}{1 - 1/96 \left(\frac{a}{x}\right)^2} \partial x = \frac{G}{\mu F \sqrt{2g}} x^{-1/2} \left[1 + 1/96 \left(\frac{a}{x}\right)^2\right] \partial x$$

$$= \frac{G}{\mu F \sqrt{2g}} \left(x^{-1/2} \partial x + \frac{a^2}{96} x^{-5/2} \partial x\right).$$

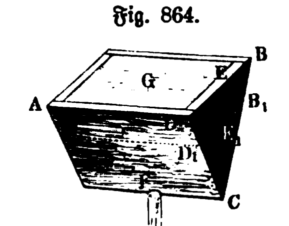
Es folgt daher durch Integration:

$$t = \frac{2\,G}{\mu F \sqrt{2g}} \left[\sqrt{h} - \sqrt{h_1} - \frac{a^2}{288} \left(\frac{1}{\sqrt{h^3}} - \frac{1}{\sqrt{h_1^3}}\right)\right].$$

Wird $h_1 = \frac{a}{2}$, so geht die Oeffnung in einen Wandeinschnitt über, und es ist nun die Formel für diesen anzuwenden.

Keil- und pyramidenförmige Gefässe. Bildet das Ausflußgefäß ABF, Fig. 864, ein horizontales, dreiseitiges Prisma, so findet man die Ausflußzeit auf folgende Weise. Theilen wir die Höhe $CE = h$ in n gleiche Theile, und legen wir durch die Theilpunkte Horizontalebenen, so zerlegen wir das ganze Wasserquantum in lauter gleich dicke Schichten von gleicher Länge $AD = l$ und von oben nach unten zu abnehmenden Breiten. Ist die Breite DB der oberen Schicht $= b$, so hat man die Breite D_1B_1 einer anderen Schicht, welche um $CE_1 = x$ über der in der unteren Kante liegenden Mündung F steht, $y = \frac{x}{h} b$, und ihr Volumen $= yl \cdot \frac{h}{n}$ $= \frac{blx}{n}$. Nun ist aber die Ausflußmenge, auf die Zeiteinheit bezogen: §. 478.

Fig. 864.



$$Q = \mu F \sqrt{2gx},$$

daher folgt dann die kleine Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um $\frac{h}{n}$ sinkt,

$$\tau = \frac{bl}{n} x : \mu F \sqrt{2gx} = \frac{bl}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{1/2}.$$

Da endlich die Summe aller $x^{1/2}$, von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{nh}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{1/2} \cdot \frac{n^{3/2}}{3/2} = 2/3\, n h^{1/2}$$

ist, so hat man die Zeit zum Ausflusse des ganzen Wasserprismas:

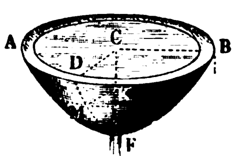
$$= \frac{bl}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot 2/3\, n h^{1/2} = 2/3 \frac{bl}{\mu F \sqrt{2g}} \cdot h^{1/2} = 4/3 \frac{1/2\, blh}{\mu F \sqrt{2gh}}, \text{ d. i.}$$

$$t = 4/3 \frac{V}{\mu F c},$$

wenn $V = \frac{1}{2} b l h$ das ganze Wasservolumen und $c = \sqrt{2 g h}$ die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit ist. Es braucht also hier das Wasser um $\frac{1}{3}$ mehr Zeit, als wenn die Ausflußgeschwindigkeit unveränderlich c wäre.

Bildet das Gefäß ABF, Fig. 865, ein aufrechtstehendes Umdrehungsparaboloid, so hat man für das Verhältniß zwischen den Halbmessern $KM = y$ und $CD = b$:

Fig. 865.



$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}},$$

und daher das Verhältniß des Horizontalabschnittes G_1 durch K zur Grundfläche $ADB = G$:

$$\frac{G_1}{G} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h}, \text{ folglich } G_1 = \frac{Gx}{h},$$

daher ist der Inhalt einer Wasserschicht $= G_1 \frac{h}{n} = \frac{Gx}{n}$.

Die vollständige Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem für das dreiseitige Prisma gefundenen gestattet daher auch hier

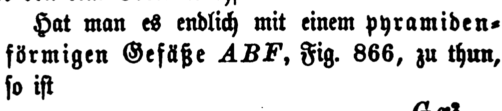
$$t = \frac{4}{3} \frac{\frac{1}{2} G h}{\mu F \sqrt{2 g h}}$$

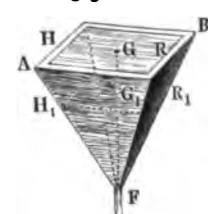
zu setzen, oder, da hier $V = \frac{1}{2} G h$ ist (§. 127, Beisp.), auch

$$t = \frac{4}{3} \frac{V}{\mu F c}.$$

Diese Formel läßt sich in vielen anderen Fällen zur angenäherten Bestimmung der Ausflußzeit namentlich auf das Ausleeren von Teichen anwenden. Sie gilt überhaupt auch in allen den Fällen, wenn die Horizontalschnitte wie die Abstände von dem Boden wachsen.

Fig. 866.


Hat man es endlich mit einem pyramidenförmigen Gefäße ABF, Fig. 866, zu thun, so ist



$G_1 : G = x^2 : h^2$, und daher $G_1 = \frac{G x^2}{h^2}$,

ferner der Inhalt der Schicht $H_1 R_1$:

$$\frac{G_1 h}{n} = \frac{G x^2}{n h},$$

und die Zeit zum Ausflusse derselben:

$$\tau = \frac{G x^2}{n h} : \mu F \sqrt{2 g x} = \frac{G}{n \mu F h \sqrt{2 g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da aber die Summe aller $x^{3/2}$ von $x = \frac{h}{n}$ bis $x = \frac{n h}{n}$ genommen,

$$= \left(\frac{h}{n}\right)^{3/2} \cdot \frac{n^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{5} n h^{3/2}$$

ist, so folgt die Zeit zum Leeren der ganzen Pyramide:

$$t = \frac{G}{n\mu F h \sqrt{2g}} \cdot {}^2/_5\, n\, h^{3/2} = {}^2/_5\, \frac{G h^{1/2}}{\mu F \sqrt{2g}} = {}^6/_5\, \frac{{}^1/_3\, G h}{\mu F \sqrt{2gh}},$$

oder ${}^1/_3\, G h = V$ gesetzt:

$$t = {}^6/_5\, \frac{V}{\mu F c}.$$

Da bei diesem Ausflusse die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit von c allmälig bis Null abnimmt, so ist die Ausflußzeit ${}^1/_5$ größer, als wenn die Geschwindigkeit unveränderlich $= c$ bliebe.

Beispiel. In welcher Zeit wird sich ein Teich, dessen Wasserspiegel 8 Hectaren groß ist, leeren, wenn das an der tiefsten Stelle einmündende Fischgerinne 4 Meter unter dem Wasserspiegel steht, und eine Röhre von 0,4 Meter Durchmesser bei 15 Meter Länge bildet?

Ohne Berücksichtigung der Widerstände wäre die Ausflußzeit:

$$t = {}^4/_3\, \frac{V}{F \sqrt{2gh}} = {}^4/_3 \cdot {}^1/_2\, \frac{80000\ .\ 4}{0{,}2^2\ .\ 3{,}14\ .\ 4{,}429 \sqrt{4}} = 191675 \text{ Secunden.}$$

Nun ist aber der Widerstandscoefficient für den Eintritt in das innen etwa um den Winkel von 45^0 abgeschrägte Teichgerinne (s. §. 450):

$$\zeta = 0{,}505 + 0{,}327 = 0{,}832,$$

und der Reibungscoefficient für dieses Gerinne:

$$0{,}020\, \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}02\, \frac{15}{0{,}4} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}75\, \frac{v^2}{2g};$$

daher folgt der vollständige Ausflußcoefficient für dasselbe:

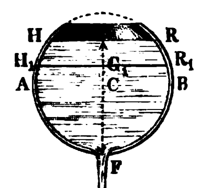
$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 0{,}75}} = 0{,}622,$$

und die in Frage stehende Ausflußzeit:

$$t = \frac{191675}{0{,}622} = 308159 \text{ Secunden} = 85 \text{ Stunden } 36 \text{ Minuten.}$$

Kugel- und obeliskenförmige Gefässe. Mit Hülfe der im letzten Paragraphen aufgefundenen Formeln kann man nun auch die Ausflußzeiten für viele andere Gefäße, z. B. für kugel-, obelisken-, pyramidenförmige u. s. w. finden. §. 479.

Fig. 867.



1) Für das Leeren eines gefüllten Kugelsegmentes AFB, Fig. 867, dessen Halbmesser $CA = CF = r$ und Höhe $FG = h$ ist, erhält man:

$$t = {}^4/_3\, \frac{\pi r h^2}{\mu F \sqrt{2gh}} - {}^2/_5\ .\ \frac{\pi h^3}{\mu F \sqrt{2gh}} = {}^2/_{15}\, \pi\, \frac{(10r - 3h)\, h^{3/2}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

also für das Leeren einer vollen Kugel, wo $h = 2r$ ist,

$$= \frac{16\, \pi r^2 \sqrt{2r}}{15\, \mu F \sqrt{2g}},$$

und für das einer **halben Kugel**, wo $h = r$,

$$t = \frac{14 \pi r^2 \sqrt{r}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Es ist nämlich hier die der Tiefe $FG_1 = x$ entsprechende Horizontalschicht $H_1 R_1 = G_1$:

$$\pi x (2r - x) \cdot \frac{h}{n} = \frac{2 \pi r x h}{n} - \frac{\pi h x^2}{n},$$

folglich bei der Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ die Zeit zum Ausfließen derselben

$$\tau = \frac{2 \pi r h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{1/2} - \frac{\pi h}{n \mu F \sqrt{2g}} \cdot x^{3/2}.$$

Da der erste Theil dieses Ausdruckes mit der Formel für das Leeren des prismatischen und der zweite Theil mit derjenigen für das Leeren des pyramidalen Gefäßes übereinstimmt, wenn man nur das eine Mal $2 \pi r h$ statt bl und das zweite Mal πh^2 statt G setzt, so erhält man mit Hülfe der Differenz für die im vorigen Paragraphen gefundenen Ausleerungszeiten eines prismatischen und eines pyramidalen Gefäßes:

$$t = {}^2/_3 \cdot \frac{blh}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

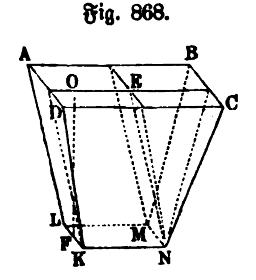
und

$$t = {}^2/_5 \cdot \frac{Gh}{\mu F \sqrt{2gh}}$$

auch die oben angegebene Ausleerungszeit des Kugelsegmentes.

2) Für das **obelisken-** oder **pontonförmige** Gefäß ACK, Fig. 868, lassen sich, da dasselbe aus einem Parallelepipede AEK, aus zwei Prismen BEN und DEN und einer Pyramide CEN (vergl. §. 124) zusammengesetzt ist, die obigen Formeln ebenfalls anwenden. Es sei b die obere Breite AD, b_1 die untere Breite KL, ferner l die obere Länge AB und l_1 die untere Länge KN und endlich h die Höhe OF des Gefäßes. Dann hat man für die Fläche des Wasserspiegels AC:

Fig. 868.



$$bl = b_1 l_1 + b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1) + (l - l_1)(b - b_1),$$

und davon bildet $b_1 l_1$ die Basis des Parallelepipedes AEK; ferner sind $b_1 (l - l_1)$ und $l_1 (b - b_1)$ die Grundflächen der beiden Prismen BEN und DEK und es ist $(l - l_1)(b - b_1)$ die Basis der Pyramide CEN.

Nun ist aber die Ausflußzeit für das Parallelepiped:

$$t_1 = \frac{2 b_1 l_1 \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}},$$

ferner die Ausflußzeit für die beiden dreiseitigen Prismen:

$$t_2 = {}^2/_3 \frac{[b_1 (l - l_1) + l_1 (b - b_1)] \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}}$$

und endlich die Ausflußzeit für die Pyramide:

$$t_3 = {}^2/_5 \frac{(l - l_1)(b - b_1) \sqrt{h}}{\mu F \sqrt{2g}};$$

es folgt daher die Ausflußzeit für das ganze Gefäß:

$$t = t_1 + t_2 + t_3$$

$$= [30 b_1 l_1 + 10 b_1 (l - l_1) + 10 l_1 (b - b_1) + 6 (l - l_1)(b - b_1)] \frac{\sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}$$

$$= [3 b l + 8 b_1 l_1 + 2 (b l_1 + b_1 l)] \frac{2 \sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Ist $\frac{b_1}{l_1} = \frac{b}{l}$, so hat man es mit einer abgekürzten Pyramide zu thun. Setzen wir für diese die Grundfläche $bl = G$ und die Grundfläche $b_1 l_1 = G_1$, so erhalten wir:

$$t = (3 G + 8 G_1 + 4 \sqrt{G G_1}) \frac{2 \sqrt{h}}{15 \mu F \sqrt{2g}}.$$

Uebrigens ist leicht zu ermessen, daß diese Formel auch für jede drei= und vielseitige Pyramide gilt.

Beispiel. Ein obeliskenförmiger Wasserkasten ist oben 2 Meter lang, 1,2 Meter breit und 1,6 Meter tiefer, nämlich im Niveau der 30 Millimeter weiten, 0,09 Meter langen horizontalen Ansatzröhre, 1,5 Meter lang und 0,8 Meter breit; wie viel Zeit braucht das anfangs den Kasten ganz füllende Wasser, um 1 Meter zu sinken?

Die Zeit zur gänzlichen Entleerung bis zur Ansatzröhre beträgt, $\mu = 0,82$ angenommen:

$$t = [3 \,.\, 1,2 \,.\, 2 + 8 \,.\, 0,8 \,.\, 1,5 + 2 (1,2 \,.\, 1,5 + 0,8 \,.\, 2)] \frac{2 \sqrt{1,6}}{15 \,.\, 0,82 \,.\, 0,015^2 \,.\, 3,14 \,.\, 4,429}$$

$$= 23,6 \frac{2,530}{0,0386} = 1547 \text{ Secunden.}$$

Im Niveau $1,6 - 1 = 0,6$ Meter über der Röhre ist

$$l = l_1 + \frac{0,6}{1,6} \cdot (2 - 1,5) = 1,5 + 0,1875 = 1,6875 \text{ Meter und}$$

$$b = b_1 + \frac{0,6}{1,6} \cdot (1,2 - 0,8) = 0,8 + 0,15 = 0,95 \text{ Meter.}$$

Es ist daher die Zeit zur gänzlichen Entleerung des Gefäßes, wenn dasselbe nur bis zu diesem Niveau gefüllt ist (0,6 Meter über der Ansatzröhre):

$$t_1 = [3 \,.\, 0,95 \,.\, 1,6875 + 8 \,.\, 0,8 \,.\, 1,5$$

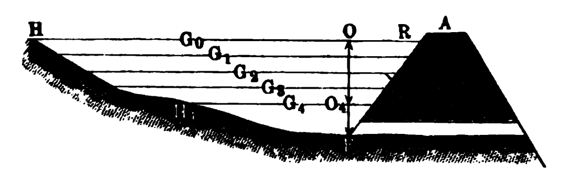
$$+ 2\,(0,95 \,.\, 1,5 + 0,8 \,.\, 1,6875)]\,\frac{2\,\sqrt{0,6}}{15 \,.\, 0,82 \,.\, 0,015^2 \,.\, 3,14 \,.\, 4,429}$$

$$= 19,959\,\frac{1,549}{0,0386} = 801 \text{ Secunden.}$$

Die Differenz $t - t_1 = 1547 - 801 = 746$ Secunden $= 12$ Minuten 26 Secunden giebt daher die Zeit, binnen welcher der anfänglich bis zum Rande des Gefäßes reichende Wasserspiegel um 1 Meter gesenkt wird.

§. 480. **Ungesetzmässige Gefässe.** Ist die Ausflußzeit für ein ungesetzmäßig geformtes Gefäß *HFR*, Fig. 869, zu finden, so hat man eine

Fig. 869.



Annäherungsmethode, z. B. die Simpson'sche Regel, anzuwenden. Hat man die ganze Wassermasse in vier gleich hohe Schichten getheilt, und die den Horizontalschnitten G_0, G_1, G_2, G_3, G_4 entsprechenden Druckhöhen durch h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 bezeichnet, so ergiebt sich die Ausflußzeit durch die Simpson'sche Regel:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12\,\mu F\,\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_1}}\right).$$

Bei Annahme von sechs Schichten erhält man:

$$t = \frac{h_0 - h_6}{18\,\mu\,F\sqrt{2g}}\left(\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} + \frac{4\,G_1}{\sqrt{h_1}} + \frac{2\,G_2}{\sqrt{h_2}} + \frac{4\,G_3}{\sqrt{h_3}} + \frac{2\,G_4}{\sqrt{h_4}} + \frac{4\,G_5}{\sqrt{h_5}} + \frac{G_6}{\sqrt{h_6}}\right).$$

Das Ausflußquantum ist im ersten Falle:

$$V = \frac{h_0 - h_4}{12}\,(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + G_4),$$

im zweiten:

$$V = \frac{h_0 - h_6}{18}\,(G_0 + 4\,G_1 + 2\,G_2 + 4\,G_3 + 2\,G_4 + 4\,G_5 + G_6).$$

Ist die Gestalt und Größe des Ausflußgefäßes nicht bekannt, so kann man durch die in gleichen Zeitintervallen beobachteten Wasserstände h_0, h_1 u. s. w. die Ausflußmenge V gleichwohl berechnen. Ist t die ganze Ausflußzeit, so hat man bei Boden- und Seitenöffnungen:

$$V = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12}\,(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}),$$

und für Ueberfälle oder Wandeinschnitte:

$$V = {}^2/_3 \frac{\mu b t}{12} \sqrt{2g} \left(\sqrt{h_0^3} + 4\sqrt{h_1^3} + 2\sqrt{h_2^3} + 4\sqrt{h_3^3} + \sqrt{h_4^3}\right).$$

Beispiel. In welcher Zeit sinkt der Wasserspiegel eines Teiches um 2 Meter, wenn das Teichgerinne einen halben Kreis von 0,5 Meter Weite und 20 Meter Länge bildet, und die Wasserspiegel folgende Inhalte haben:

G_0	bei 6	Meter Druckhöhe	60000	Quadratmeter
G_1	„ 5,5	„ „	49000	„
G_2	„ 5	„ „	41000	„
G_3	„ 4,5	„ „	32000	„
G_4	„ 4	„ „	25000	„

Es ist $F = \frac{1}{2}\, 0{,}25^2\, 3{,}14 = 0{,}098$ Quadratmeter gleich dem Inhalte eines vollen Kreises von 0,357 Meter Durchmesser. Setzt man, wie im Beispiel zu §. 478, den Widerstandscoefficienten für den Eintritt gleich 0,832 und den für die Reibung gleich $0{,}025 \frac{l}{d} = 0{,}025 \frac{20}{0{,}357} = 1{,}4$, so hat man den Ausflußcoefficienten:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + 0{,}832 + 1{,}4}} = 0{,}557.$$

Nun hat man:

$$\frac{G_0}{\sqrt{h_0}} = \frac{60000}{\sqrt{6}} = 24500;\ \frac{G_1}{\sqrt{h_1}} = \frac{49000}{\sqrt{5{,}5}} = 20895;$$

$$\frac{G_2}{\sqrt{h_2}} = \frac{41000}{\sqrt{5}} = 19230;\ \frac{G_3}{\sqrt{h_3}} = \frac{32000}{\sqrt{4{,}5}} = 15087;$$

$$\frac{G_4}{\sqrt{h_4}} = \frac{25000}{\sqrt{4}} = 12500;$$

daher folgt die Ausflußzeit:

$$t = \frac{2}{12 \,.\, 0{,}557 \,.\, 0{,}098 \,.\, 4{,}429}(24500 + 4 \,.\, 20895 + 2 \,.\, 19230 + 4 \,.\, 15087 + 12500)$$

$$= \frac{438776}{2{,}907} = 150938 \text{ Secunden} = 42 \text{ Stunden } 16 \text{ Minuten}.$$

Das Ausflußquantum ist:

$$V = {}^2/_{12}\,(60000 + 4 \,.\, 49000 + 2 \,.\, 41000 + 4 \,.\, 32000 + 25000)$$
$$= 81\,833 \text{ Cubikmeter}.$$

Zu- und Abfluss. Erhält das Gefäß während des Ausflusses von unten noch Zufluß von oben, so wird die Bestimmung der Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel auf eine gewisse Höhe steigt oder sinkt, viel verwickelter, so daß man sich meist mit einer angenäherten Bestimmung begnügen muß. Ist das Zuflußquantum pr. Secunde $Q_1 > \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Steigen, und ist $Q_1 < \mu F \sqrt{2gh}$, so findet ein Sinken des Wasserspiegels statt. Uebrigens tritt hier alle Mal Beharrungszustand ein, wenn die Druckhöhe entweder auf $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_1}{\mu F}\right)^2$ angewachsen oder dahin §. 481.

herabgesunken ist. Die Zeit τ, innerhalb welcher die veränderliche Druckhöhe x um die kleine Größe ξ wächst, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$G_1 \xi = Q_1 \tau - \mu F \sqrt{2 g x} \, . \, \tau,$$

und dagegen die Zeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel um ξ sinkt, durch:

$$G_1 \xi = \mu F \sqrt{2 g x} \, . \, \tau - Q_1 \tau.$$

Man hat daher im ersten Falle:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{Q_1 - \mu F \sqrt{2 g x}}$$

und im zweiten:

$$\tau = \frac{G_1 \xi}{\mu F \sqrt{2 g x} - Q_1}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel erhält man so die Ausflußzeit, innerhalb welcher der Wasserspiegel sinkend aus G_0 in G_1, G_2, ... und die Druckhöhe aus h_0 in h_1, h_2, ... übergeht:

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12} \left[\frac{G_0}{\mu F \sqrt{2 g h_0} - Q_1} + \frac{4 G_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1} - Q_1} + \frac{2 G_2}{\mu F \sqrt{2 g h_2} - Q_1} + \frac{4 G_3}{\mu F \sqrt{2 g h_3} - Q_1} + \frac{G_4}{\mu F \sqrt{2 g h_4} - Q_1} \right],$$

oder einfacher, wenn man $\frac{Q_1}{\mu F \sqrt{2 g}}$ durch $\sqrt{k}$ bezeichnet,

$$t = \frac{h_0 - h_4}{12 \mu F \sqrt{2 g}} \left[\frac{G_0}{\sqrt{h_0} - \sqrt{k}} + \frac{4 G_1}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} + \frac{2 G_2}{\sqrt{h_2} - \sqrt{k}} + \frac{4 G_3}{\sqrt{h_3} - \sqrt{k}} + \frac{G_4}{\sqrt{h_4} - \sqrt{k}} \right].$$

Ist das Gefäß prismatisch und vom Querschnitte G, so ergiebt sich bei einem Zuflusse Q_1 in der Zeiteinheit die Formel für die Bewegung des Wasserspiegels wie folgt*). Bei einer Druckhöhe x über der Bodenöffnung folgt die Ausflußmenge $Q = \mu F \sqrt{2 g x}$; daher ändert sich das in dem Gefäße enthaltene Wasserquantum in der Zeiteinheit um

$$Q - Q_1 = \mu F \sqrt{2 g x} - Q_1 = \mu F \sqrt{2 g} \left(\sqrt{x} - \sqrt{k} \right),$$

wenn man wieder $Q_1 = \mu F \sqrt{2 g k}$ voraussetzt, wo unter k diejenige Druckhöhe verstanden werden kann, bei welcher Beharrungszustand vorhanden sein würde, d. h. bei welcher durch die Oeffnung F gerade ein Quantum Wasser gleich Q_1 austreten würde. Aendert sich nun der Wasserstand in der Zeit ∂t um ∂x, so hat man zur Bestimmung der Verhältnisse dieser Aenderung:

*) S. des Verf. Experimentalhydraulik §. 9, XII.

$$G\partial x = (Q - Q_1)\,\partial t = \mu F \sqrt{2g}\,(\sqrt{x} - \sqrt{k})\,\partial t,$$ oder:

$$\partial t = \frac{G}{\mu F \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{k}}\,\partial x.$$

Da nun

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{k}}\,\partial x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\partial x + \int \frac{\sqrt{\frac{k}{x}}}{\sqrt{x} - \sqrt{k}}\,\partial x$$
$$= 2\sqrt{x} + 2\sqrt{k}\;Log.\,nat.\,(\sqrt{x} - \sqrt{k})$$

ist, so hat man zwischen den Grenzen $x = h$ und $x = h_1$ für die zur Senkung erforderliche Zeit:

$$t = \frac{G}{\mu F \sqrt{2g}} \int_{h_1}^{h} \frac{\partial x}{\sqrt{x} - \sqrt{k}}$$
$$= \frac{2G}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h} - \sqrt{h_1} + \sqrt{k}\;Log.\,nat.\,\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}}\right).$$

Da für $h_1 = k$ der Werth $\frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{\sqrt{h_1} - \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{k}}{0} = \infty$, so folgt daraus, daß der Beharrungszustand erst unendlich spät eintritt.

Fließt das Wasser durch einen Wandeinschnitt aus, so ergiebt sich, wenn man $Q_1 = {}^2/_3\,\mu b \sqrt{2gk^3}$ setzt:

$$t = \frac{Gk}{3Q_1}\left[Log.\,nat.\,\frac{(\sqrt{h} - \sqrt{k})^2\,(h_1 + \sqrt{h_1 k} + k)}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2\,(h + \sqrt{hk} + k)}\right.$$
$$\left. + \sqrt{12}\;arc.\,tang.\,\frac{(\sqrt{h} - \sqrt{h_1})\sqrt{12k}}{3k + (2\sqrt{h} + \sqrt{k})\,(2\sqrt{h_1} + \sqrt{k})}\right].$$

Je nachdem $k \gtrless h$, oder das zufließende Wasserquantum $Q_1 \gtrless {}^2/_3\,\mu b \sqrt{2gh^3}$ ist, findet entweder ein Steigen oder Fallen des Wasserspiegels statt. Der Beharrungszustand tritt ein, wenn $h_1 = k$ ist, die entsprechende Zeit t fällt aber unendlich groß aus.

Beispiel. In welcher Zeit steigt das Wasser in einem 5 Meter langen und 2 Meter breiten parallelepipedischen Kasten von Null auf 0,5 Meter Höhe über der Schwelle eines 0,15 Meter breiten Wandeinschnitts, wenn in jeder Secunde 0,2 Cubikmeter Wasser zufließen?

Da hier $h = 0$ ist, so hat man nach der letzten Formel:

$$t = \frac{Gk}{3Q_1}\left[Log.\,nat.\,\frac{h_1 + \sqrt{h_1 k} + k}{(\sqrt{h_1} - \sqrt{k})^2} + \sqrt{12}\;arc.\,tang.\,\frac{-\sqrt{3h_1}}{2\sqrt{k} + \sqrt{h_1}}\right].$$

Nun ist $G = 5\,.\,2 = 10$; $Q_1 = 0{,}2$, $h_1 = 0{,}5$, $b = 0{,}15$, $\mu = 0{,}6$ und

$$k = \left(\frac{0{,}2}{{}^2/_3\,0{,}6\,.\,0{,}15\,.\,4{,}429}\right)^{2/3} = 0{,}827,$$

daher folgt die gesuchte Zeit:

$$t = \frac{10 . 0{,}827}{3 . 0{,}2}\left(Log.\,nat.\,\frac{1{,}327 + \sqrt{0{,}414}}{(\sqrt{0{,}5} - \sqrt{0{,}827})^2} - \sqrt{12}\cdot arc.\,tang.\,\frac{\sqrt{1{,}5}}{2\sqrt{0{,}827} + \sqrt{0{,}5}}\right)$$

$$= 13{,}783\left(3{,}877 - 3{,}464\,\frac{25{,}9^0}{180}\cdot 3{,}14\right) = 13{,}783\,(3{,}877 - 1{,}565) = 32 \text{ Secunden}.$$

§. 482. **Schleusen.** Eine nützliche Anwendung der oben abgehandelten Lehren läßt sich auf das Füllen und Leeren der Schleusen machen. Man unterscheidet zweierlei Schleusen (Schifffahrtsschleusen), nämlich einfache und doppelte. Die einfache Schleuse, Figur 870, besteht aus einer Kammer B, welche durch das Oberthor HF vom Oberwasser A und durch das Unterthor RS vom Unterwasser C getrennt wird. Die doppelte Schleuse, Fig. 871, hingegen besteht aus zwei Kammern mit dem Oberthore KL, Mittelthore HF und Unterthore RS.

Fig. 870.

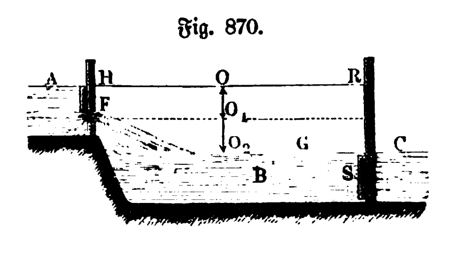
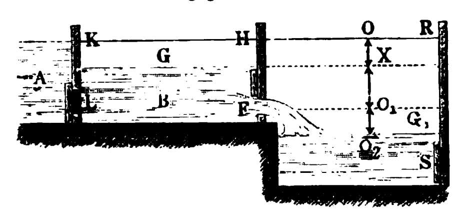


Fig. 871.



1) Setzen wir den mittleren horizontalen Querschnitt einer einfachen Schleusenkammer $= G$, den Abstand $O\,O_1$ der Mitte der Schutzöffnung im Oberthore von der Oberfläche HR des Oberwassers $= h_1$ und den Abstand $O_1\,O_2$ von der des Unterwassers $= h_2$ und endlich den Inhalt der Schutzöffnung $= F$, so erhalten wir die Zeit des Füllens bis zur Mitte der Mündung, wobei die Druckhöhe constant ist:

$$t_1 = \frac{G\,h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}},$$

und die Zeit zum Füllen des übrigen Raumes, wobei ein allmäliges Abnehmen der Druckhöhe statt hat:

$$t_2 = \frac{2\,G\,h_1}{\mu F \sqrt{2 g h_1}};$$

es ist folglich die Zeit zum Füllen der einfachen Schleuse:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{(2\,h_1 + h_2)\,G}{\mu F \sqrt{2 g h_1}}.$$

Befindet sich die Mündung im Unterthore ganz unter Wasser, so nimmt beim Leeren die Druckhöhe allmälig von $O\,O_2 = h_1 + h_2$ bis Null ab, es ist daher die Zeit des Leerens oder Ablassens:

$$t = \frac{2\,G\,\sqrt{h_1 + h_2}}{\mu\,F\,\sqrt{2g}}.$$

Steht hingegen ein Theil der Mündung aus dem Unterwasser hervor, so hat man zwei Ausflußmengen, eine über und eine unter Wasser ausfließend, zu berücksichtigen. Setzen wir die Höhe des Theiles der Mündung über dem Wasser $= a_1$ und die Höhe des Theiles unter dem Wasser $= a_2$, sowie die Breite der Mündung $= b$, so erhält man die Ausflußzeit durch den Ausdruck:

$$t = \frac{2\,G\,(h_1 + h_2)}{\mu\,b\,\sqrt{2g}\left(a_1\sqrt{h_1 + h_2 - \frac{a_1}{2}} + a_2\sqrt{h_1 + h_2}\right)}$$

2) Bei den doppelten Schleusen (Fig. 871) nimmt die Druckhöhe in der vom Oberwasser abgeschlossenen Kammer während des Ausflusses in die zweite Kammer immer mehr und mehr ab. Ist G der horizontale Querschnitt der ersten Kammer und sinkt die anfängliche Druckhöhe $O\,O_1 = h_1$ in dieser Kammer auf $X\,O_1 = x$ herab, während das Wasser in der zweiten Kammer bis zur Mitte der Schutz- oder Ausflußöffnung, und zwar um $O_2\,O_1 = h_2$ steigt, so hat man die entsprechende Zeit (§. 475):

$$t_1 = \frac{2\,G}{\mu F\,\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{x}\right).$$

Nun ist aber das Wasserquantum:

$$G\,(h_1 - x) = G_1\,h_2,$$

daher:

$$x = h_1 - \frac{G_1}{G}\,h_2$$

und:

$$t_1 = \frac{2\,G}{\mu\,F\,\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_1 - \frac{G_1\,h_2}{G}}\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{G}}{\mu\,F\,\sqrt{2g}}\left(\sqrt{G\,h_1} - \sqrt{G\,h_1 - G_1\,h_2}\right).$$

Die Zeit, in welcher das Wasser in der zweiten Kammer so hoch steigt, wie in der ersten Kammer, nach welcher also das Wasser in beiden in einerlei Niveau kommt, ist nach §. 476:

$$t_2 = \frac{2\,G\,G_1\,\sqrt{x}}{\mu\,F\,(G + G_1)\,\sqrt{2g}} = \frac{2\,G_1\,\sqrt{G}\,\sqrt{G\,h_1 - G_1\,h_2}}{\mu\,F\,(G + G_1)\,\sqrt{2g}}$$

und die ganze Füllungszeit:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{G}}{\mu F \sqrt{2g}} \left(\sqrt{G h_1} - \frac{G}{G + G_1} \sqrt{G h_1 - G_1 h_2}\right).$$

Beispiel. Welche Zeit ist zum Füllen und Ablassen folgender einfachen Schleusenkammer nöthig? Mittlere Schleusenlänge = 60 Meter, mittlere Breite = 8 Meter, also $G = 480$ Quadratmeter; Abstand des Mittelpunktes der Schutzöffnung im Oberthore von jedem Wasserspiegel = 1,5 Meter, Breite jeder Oeffnung 0,8 Meter, Höhe der Oeffnung im Oberthore 1,2 Meter, im Unterthore (ganz unter Wasser) 1,5 Meter. Nimmt man $\mu = 0{,}615$, so folgt die Zeit zum Füllen der Kammer:

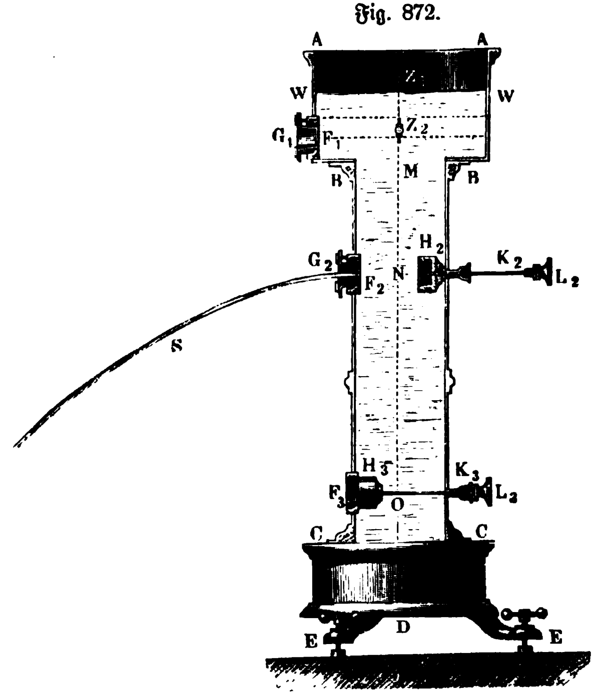
$$t = \frac{2h_1 + h_2}{\mu F \sqrt{2 g h_1}} G = \frac{2 \,.\, 1{,}5 + 1{,}5}{0{,}615 \,.\, 0{,}8 \,.\, 1{,}2 \,.\, 4{,}429 \sqrt{1{,}5}} 480$$
$$= 675 \text{ Secunden} = 11 \text{ Minuten } 15 \text{ Secunden},$$

und die Zeit zum Entleeren:

$$t = \frac{2 G \sqrt{h_1 + h_2}}{\mu F \sqrt{2g}} = \frac{2 \,.\, 480 \sqrt{1{,}5 + 1{,}5}}{0{,}615 \,.\, 0{,}8 \,.\, 1{,}5 \,.\, 4{,}429} = 510 \text{ Sec.} = 8 \text{ Min. } 30 \text{ Sec.}$$

§. 483. **Hydraulischer Versuchsapparat.** Mittels eines in Fig. 872 abgebildeten hydraulischen Versuchsapparates kann man nicht allein

Fig. 872.



durch mehr als 100 Versuche die wichtigsten Erscheinungen des Ausflusses vor Augen führen, sondern auch die hauptsächlichsten Gesetze derselben in Zahlen nachweisen. Dieser Apparat besteht in einem Ausflußgefäße ABC mit drei Mündungen F_1, F_2, F_3, deren Mittelpunkte von dem mittleren Wasserspiegel WW um Höhen abstehen, welche sich zu einander wie die Quadratzahlen 1, 4, 9 zu einander verhalten. In diese Mündungen lassen sich die verschiedenartigsten Mundstücke und Röhren einsetzen, und damit dies ohne Störung durch das Wasser geschehen könne, hat man besondere Verschließungsklappen H_2, H_3, deren Stiele K_2, K_3 durch Stopfbüchsen in der Rückwand des Apparates hindurchgehen, angebracht. In dem oberen und weiteren Theile AB des Apparates befinden sich noch zwei zugespitzte und nach oben gerichtete Zeiger Z_1 und Z_2, welche als Anhaltepunkte bei den Versuchen dienen, indem der Durchgang des sinkenden Wasserspiegels durch diese Spitzen den Anfang und das Ende eines jeden Versuches bestimmt. Das ausfließende Wasser fängt man in einem Gefäße auf, das vor dem folgenden Versuche auf das Ausflußreservoir gesetzt wird und durch ein mit einem Stöpsel versehenes Loch seinen Inhalt in das Reservoir zurückführt.

Um mit Hülfe dieses Apparates die Ausflußcoefficienten μ verschiedener Mundstücke und Röhren zu finden, hat man mittels einer guten Secundenuhr die Zeit t zu beobachten, innerhalb welcher während des Ausflusses der Wasserspiegel von der einen Spitze bis zur anderen sinkt, oder die Druckhöhe h_1 in die Druckhöhe h_2 übergeht; ist dann noch F der Querschnitt der Ausflußmündung und G der Inhalt des sinkenden Wasserspiegels, so hat man den Ausflußcoefficienten (s. §. 475):

$$\mu = \frac{2\,G\,(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{F\,t\,\sqrt{2g}}$$

und die entsprechende mittlere Druckhöhe:

$$h = \left(\frac{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}{2}\right)^2.$$

Zu diesem Apparate gehört noch eine Sammlung von Mundstücken und Röhren, nämlich quadratische, rectanguläre, kreisförmige und trianguläre Mündungen in dünnem Blech, mit oder ohne innere Einfassung, kurze cylindrische und conische Röhren, längere gerade Röhren von verschiedenen Weiten, Kropf- und Knieröhren u. s. w., welche sich in die verschiedenen Ausflußlöcher F_1, F_2, F_3 einsetzen lassen. Mittels dieses so ausgerüsteten Apparates kann man in wenig Stunden fast alle Erscheinungen und Gesetze des Ausflusses vor Augen führen; man kann an demselben nicht nur die vollkommene und unvollkommene, die vollständige und unvollständige, sondern auch die verschiedenen Grade der Contraction der Wasserstrahlen studiren, ferner die Reibungs-, Knie- und Krümmungswiderstände in Röhren, sowie

auch den hydraulischen Druck des Wassers, durch Springen und Ansaugen u. s. w. kennen lernen. Immer wird man auf recht leidliche, zum Theil aber auch auf überraschend gute Uebereinstimmung mit den mitgetheilten Erfahrungsgrößen (μ, φ, α, ζ) stoßen. Bei unserem Apparate ist $G = 0{,}125$ Quadratmeter, die gewöhnliche Mündungs- und Röhrenweite ungefähr 1 Centimeter und für die untere Mündung $h_1 = 0{,}96$ und $h_2 = 0{,}84$ Meter. (Eine ausführliche Beschreibung dieses Apparates und der mit demselben auszuführenden Versuche u. s. w. enthält die Experimental-hydraulik des Verfassers.)

Ein Beispiel, wie gut die Beobachtungen an diesem Apparate mit den bekannten Versuchen im Großen übereinstimmen, ist folgendes. Für eine kurze cylindrische Ansatzröhre im unteren Loche wurde $t = 33$, für eine längere Glasröhre mit dem Längenverhältnisse $\frac{l}{d} = 124$ aber $t = 56$ Secunden gefunden; hieraus berechnet sich für die eine:

$$\mu_1 = 0{,}815 \text{ und } \zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = 0{,}504$$

und für die andere:

$$\mu_2 = 0{,}480 \text{ und } \zeta_2 = \frac{1}{\mu_2^2} - 1 = 3{,}332,$$

es folgt hiernach:

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 3{,}332 - 0{,}504 = 2{,}828$$

und daher der Reibungscoefficient der Röhre:

$$\zeta = \frac{d}{l}(\zeta_2 - \zeta_1) = \frac{2{,}828}{124} = 0{,}0228.$$

Nach der ersten Tabelle in §. 456 ist für die mittlere Geschwindigkeit $v = 1{,}84$ Meter, mit welcher das Wasser aus der Röhre ausfloß, $\zeta = 0{,}0215$, also die Uebereinstimmung eine ganz gute. Bei diesen Versuchen läßt sich auch auf das Ueberzeugendste nachweisen, daß die Ausflußgeschwindigkeit durch Röhren nicht von der Neigung derselben, sondern nur von der Druckhöhe der Ausmündung abhängt. Es fällt z. B. die Ausflußzeit gleich groß aus, die lange Röhre mag im mittleren oder im unteren Loche stecken, wenn nur die Ausmündung derselben gleich tief unter dem Wasserspiegel im Reservoir steht.

Dieser Ausflußapparat hat neuerer Zeit noch vielfache Ergänzungen erhalten, so daß es möglich ist, mit demselben auch Versuche über den Ausfluß des Wassers unter constantem Drucke, sowie auch solche über den Ausfluß der Luft, ferner Versuche über den Druck, Stoß und die Reaction des Wassers u. s. w. anzustellen.

Schlußanmerkung. Die Literatur über den Ausfluß des Wassers und über die Bewegung des Wassers in Röhren wird am vollständigsten mitgetheilt in der

„allgemeinen Maschinenencyklopädie, Band 1, Art. Ausfluß". Von den neueren Schriften ist hier nur anzuführen: „Gerstner, Handbuch der Mechanik, Band 2, Prag 1832"; ferner „d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. II. édit. 1840". Die erste Ausgabe ist auch deutsch erschienen. „Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, dritte Auflage, 1842"; ferner Scheffler's „Principien der Hydrostatik und Hydraulik, Braunschweig 1847". Wegen ihrer praktischen Haltung haben die älteren hydraulischen Schriften von Bossut und du Buat immer einen großen Werth. Für den Unterricht und für das praktische Studium der Hydraulik ist besonders geeignet: „Die Experimentalhydraulik, eine Anleitung zur Ausführung hydraulischer Versuche im Kleinen, von J. Weisbach, Freiberg 1855". Ferner ist zu empfehlen: „Rühlmann's Hydromechanik, Leipzig 1857". Der neueren Werke von Lesbros, Boileau, Francis u. s. w. ist oben (§§. 437, 439 und 446) gedacht worden. Noch ist zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie Cours de Mécanique appliquée II., par Bresse. Von den hydraulischen Versuchen des Verfassers sind bis jetzt erst zwei Hefte erschienen, und zwar:

1) Versuche über den Ausfluß des Wassers durch Schieber, Hähne, Klappen und Ventile, und
2) Versuche über die unvollkommene Contraction des Wassers beim Ausflusse u. s. w., Leipzig 1843.

Mehrere neue Abhandlungen des Verfassers über Hydraulik enthält der Civil-Ingenieur, die Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereines u. s. w.

Sechstes Capitel.

Von dem Ausflusse der Luft und anderer Flüssigkeiten aus Gefäßen und Röhren.

Ausfluss von Quecksilber und Oel. Die allgemeine Formel §. 484.

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (s. §. 424)}$$

für die Ausflußgeschwindigkeit v des unter dem durch die Höhe h gemessenen Drucke ausfließenden Wassers gilt (s. §. 426) auch bei anderen Flüssigkeiten, z. B. Quecksilber, Oel, Alkohol u. s. w., und läßt sich sogar auch auf den Ausfluß der Luft und anderer luftförmigen Flüssigkeiten anwenden, wenn deren Pressung nicht groß ist. Bezeichnet γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit und p den Druck derselben auf die Flächeneinheit, so hat man ebenfalls $h = \frac{p}{\gamma}$

und daher auch $v = \sqrt{2g \frac{p}{\gamma}}$.

Mißt man den Druck durch ein Piëzometer, dessen Füllung, z. B. Quecksilber, das specifische Gewicht γ_1 hat, so beträgt der Stand desselben, d. i. die Höhe seiner Flüssigkeitssäule:

$$h_1 = \frac{p}{\gamma_1};$$

es ist also $p = h_1 \gamma_1$, und daher auch

$$v = \sqrt{2g \frac{\gamma_1}{\gamma} h_1} = \sqrt{2g \varepsilon_1 h_1},$$

wenn $\varepsilon_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma}$ das Verhältniß der Dichtigkeit der Piëzometerfüllung zur Dichtigkeit der ausströmenden Flüssigkeit bezeichnet.

Die Uebereinstimmung der Ausflußgesetze der verschiedenen Flüssigkeiten erstreckt sich nicht allein auf die Geschwindigkeit, sondern auch auf die Contraction der Flüssigkeitsstrahlen; die Quecksilber-, Oel-, Luftstrahlen u. s. w. beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand sind ebenso und fast in demselben Verhältnisse contrahirt wie die Wasserstrahlen. Einige Versuche, welche der Verfasser über den Ausfluß des Quecksilbers, Rüböles und der atmosphärischen Luft angestellt hat, weisen diese Uebereinstimmung vollständig nach (s. Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1851, Seite 386). Diese Versuche gaben:

1) Für eine kreisrunde Mündung in der dünnen ebenen Wand von 6,5 Millimeter Durchmesser, bei den Druckhöhen 91,5 Millimeter und 329 Millimeter die Ausflußcoefficienten:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl
$\mu = 0{,}709$	0,670	0,674

Es läßt sich hiernach erwarten, daß die Contraction der Quecksilber- und Rübölstrahlen noch wenig stärker ist als die der Wasserstrahlen.

2) Ferner gab ein kurzes innen gut abgerundetes conoidisches Mundstück von der Ausmündungsweite $d = 6{,}6$ Millimeter und der doppelten Länge ($l = 2d$) folgende Ausflußcoefficienten:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
		bei $12\frac{1}{2}$° C. Temp.	bei 39° C. Temp.
$\mu = 0{,}942$	0,989	0,430	0,665

3) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre ohne alle Abrundung von der Weite $d = 6,76$ Millimeter und der dreifachen Länge ($l = 3\,d$) führte auf folgende Werthe:

für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
		bei 12½° C. Temp.	bei 39° C. Temp.
$\mu = 0,885$	0,900	0,363	0,604

Aus diesen Versuchen ergiebt sich, daß beim Ausflusse durch kurze Mundstücke und Röhren das Quecksilber nur wenig schneller ausfließt als das Wasser, dagegen das Rüböl eine viel kleinere, jedoch mit der Temperatur ansehnlich wachsende Geschwindigkeit hat als das Wasser. Der erhebliche Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des Rüböles und des Wassers hat jedenfalls in der großen Klebrigkeit des Oeles an der Röhrenwand seinen Grund.

4) Beim Ausflusse durch eine 6,64 Millimeter weite und 86mal so lange Glasröhre (I.) und beim Ausflusse durch eine 6,78 Millimeter weite und 85mal so lange Eisenröhre (II.) ergaben sich folgende Werthe der Widerstandscoefficienten ζ:

	für Wasser	Quecksilber	Rüböl	
			bei 6° C. Temp.	bei 32° C. Temp.
I.	$\zeta = 0,0271$	0,0277	39,21	2,722
II.	$\zeta = 0,0403$	0,0461	54,90	5,24

Den letzten Versuchen zufolge ist sowohl in einer Glas- als auch in einer Eisenröhre der Widerstandscoefficient des Quecksilbers wenig größer, dagegen aber der Widerstandscoefficient des Rüböles viele Mal größer als der des Wassers. Auch ist aus der letzten Tabelle zu ersehen, daß der Widerstandscoefficient des Rüböles um so mehr abnimmt, je höher die Temperatur oder der Flüssigkeitsgrad desselben ist. Endlich wird auch durch diese Versuche dargethan, daß die Widerstandscoefficienten der Reibung für die Eisenröhre weit größer sind als für die glattere Glasröhre.

Ausflussgeschwindigkeit der Luft. Unter der Voraussetzung, daß die Luft während des Ausflusses ihre Dichtigkeit nicht ändert, läßt sich die bekannte Grundformel für den Ausfluß des Wassers aus Gefäßen auch auf den Ausfluß der Luft anwenden. Ist daher p der Druck der §. 485.

äußeren Luft, sowie p_1 der Druck und γ_1 das specifische Gewicht der Luft im Inneren des Reservoirs AB, Fig. 873, so kann man die Ausflußgeschwindigkeit der letzteren (s. §. 426) setzen:

Fig. 873.

$$v = \sqrt{2g\frac{(p_1 - p)}{\gamma_1}} = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

Nun ist aber (nach §. 420), wenn p den Druck in Kilogrammen auf ein Quadratmeter Fläche, γ das Gewicht eines Cubikmeters Luft und t die Temperatur derselben bezeichnen, für atmosphärische Luft:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + 0{,}00367\,.\,t}{0{,}000125} = 7991\,(1 + 0{,}00367\,t),$$

daher folgt:

$$\sqrt{\frac{p_1}{\gamma_1}} = \sqrt{\frac{p}{\gamma}} = \sqrt{7991}\,\sqrt{1 + 0{,}00367\,t},$$

oder wenn man noch 0,00367 durch δ ersetzt,

$$\sqrt{\frac{p}{\gamma}} = 89{,}39\,\sqrt{1 + \delta t}, \text{ und}$$

$$v = 89{,}39\,\sqrt{2g\,(1 + \delta t)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 396\,\sqrt{(1 + \delta t)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Meter},$$

oder, für preuß. Maß,

$$v = 159{,}6\,\sqrt{2g\,(1 + \delta t)\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta t\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)} \text{ Fuß}.$$

Ist b der äußere Barometerstand, und h der Manometerstand (M), so hat man auch:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{b}{b + h}, \text{ also } 1 - \frac{p}{p_1} = \frac{h}{b + h}$$

und folglich die Ausströmungsgeschwindigkeit der Luft:

$$v = 396\,\sqrt{(1 + \delta t)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\,\sqrt{(1 + \delta t)\,\frac{h}{b + h}} \text{ Fuß},$$

oder annähernd, bei kleinen Manometerständen, indem man

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{b}}} = 1 - \frac{h}{2b} \text{ setzt,}$$

$$v = 396\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1+\delta t)\frac{h}{b}} \text{ Meter}$$

$$= 1261\left(1 - \frac{h}{2b}\right)\sqrt{(1+\delta t)\frac{h}{b}} \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Wegen des gewöhnlichen Feuchtigkeitszustandes der atmosphärischen Luft ist es rathsam, in der Praxis $\delta = 0{,}004$ anzunehmen.

Ausflussquantum. Ist F die Größe der Ausströmungsöffnung, so hat man die effective Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke p_1 oder $b + h$: §. 486.

$$V_1 = Fv = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\left(1-\frac{p}{p_1}\right)} = F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}}\sqrt{\frac{h}{b+h}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$V_1 = 396\,F\sqrt{\frac{(1+\delta t)\,h}{b+h}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1261\,F\sqrt{\frac{(1+\delta t)\,h}{b+h}} \text{ Cubikfuß.}$$

Dieses Luftquantum auf den äußeren Luftdruck p oder b reducirt, beträgt:

$$V = \frac{p_1}{p}V_1 = \frac{b+h}{b}V_1$$

$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}\cdot\frac{p_1}{p}}\sqrt{1-\frac{p}{p_1}}$$

$$= F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}\cdot\frac{b+h}{b}}\sqrt{\frac{h}{b+h}} = F\sqrt{\frac{2gp}{\gamma}}\sqrt{\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}},$$

z. B. für atmosphärische Luft:

$$V = 396\,F\sqrt{(1+\delta t)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1261\,F\sqrt{(1+\delta t)\left(1+\frac{h}{b}\right)\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. In einem großen Behälter ist Luft von 120 Grad Wärme eingeschlossen, welcher ein Quecksilbermanometerstand von 0,10 Meter entspricht, während der äußere Barometerstand 0,750 Meter beträgt; welche Windmenge

wird aus dem Behälter durch eine 40 Millimeter weite kreisrunde Mündung strömen?

Die theoretische Ausflußgeschwindigkeit ist:

$$v = 396 \sqrt{(1 + 0{,}00367 \cdot 120)\, \frac{100}{850}} = 163{,}2 \text{ Meter},$$

ferner der Querschnitt der Mündung:

$$F = 0{,}02^2 \cdot 3{,}14 = 0{,}00126 \text{ Quadratmeter},$$

daher die theoretische Ausflußmenge, gemessen unter dem inneren Drucke:

$$V_1 = F v = 163{,}2 \cdot 0{,}00126 = 0{,}206 \text{ Cubikmeter};$$

dagegen gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$V = \frac{b + h}{b}\, V_1 = \frac{850}{750} \cdot 0{,}206 = 0{,}233 \text{ Cubikmeter}.$$

§. 487. **Ausfluss nach dem Mariotte'schen Gesetze.** Unter der Voraussetzung, daß die Luft beim Ausströmen aus Gefäßen keine Temperaturveränderung erleidet, läßt sich annehmen, daß sie sich hierbei nach dem Mariotte'schen Gesetze (s. §. 414) ausdehnt, und daher auch voraussetzen, daß das Luftquantum V beim Uebergange aus der Pressung p_1 in die Pressung p die Arbeit $Vp\, Log.\, nat.\, \frac{p_1}{p}$ verrichte (s. §. 415). Setzt man nun diese Arbeit der Arbeit $\frac{v^2}{2g} V\gamma$ gleich, welche das Luftquantum $V\gamma$ bei dem Ausflusse in Anspruch nimmt, so erhält man folgende Formel:

$$\frac{v^2}{2g} V\gamma = Log.\, nat.\, \frac{p_1}{p} \cdot Vp, \text{ oder}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p}{\gamma}\, Ln.\, \frac{p_1}{p},$$

wonach die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g\, \frac{p}{\gamma}\, Ln.\, \frac{p_1}{p}} \text{ folgt.}$$

Noch ist, wie oben, für Metermaß $\frac{p}{\gamma} = \frac{1 + \delta t}{0{,}000125}$, daher hat man auch

$$v = 396 \sqrt{(1 + \delta t)\, Ln.\, \frac{p_1}{p}} = 396 \sqrt{(1 + \delta t)\, Ln.\, \frac{b + h}{b}} \text{ Meter},$$

sowie

$$v = 1261 \sqrt{(1 + \delta t)\, Ln.\, \frac{p_1}{p}} = 1261 \sqrt{(1 + \delta t)\, Ln.\, \frac{b + h}{b}} \text{ Fuß},$$

wobei b den Barometerstand der äußeren und h den Manometerstand der inneren Luft, ferner t die Temperatur der letzteren und $\delta = 0{,}00367$ den bekannten Ausdehnungscoefficienten der Luft bezeichnet. Nun folgt die theoretische Ausflußmenge pr. Secunde:

$$V = Fv = F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} \, Ln. \frac{p_1}{p}}$$

$$= 396 \, F \sqrt{(1 + \delta t) \, Ln. \frac{b + h}{b}} \text{ Cubikmeter,}$$

oder reducirt auf den inneren Druck:

$$V_1 = \frac{p}{p_1} V = \frac{p}{p_1} F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Ln. \frac{p_1}{p}}$$

$$= \frac{b}{b + h} F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} Ln. \frac{b + h}{b}}$$

$$= 396 \, F \frac{b}{b + h} \sqrt{(1 + \delta t) \, Ln. \frac{b + h}{b}} \text{ Cubikmeter.}$$

Ist der Ueberdruck der inneren Luft oder $\frac{h}{b}$ sehr klein, so kann man

$$Ln. \frac{b + h}{b} = Ln. \left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{b}\right)^2$$

(s. „Ingenieur“, Seite 81), und daher auch annähernd

$$V = F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} \left(1 - \frac{h}{2b}\right) \frac{h}{b}}$$

setzen, während nach der ersteren Ausflußformel (s. §. 486)

$$Q = F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} \left(1 + \frac{h}{b}\right) \frac{h}{b}} \text{ ist.}$$

Es führt also die Annahme, daß sich die Luft beim Ausströmen nach dem Mariotte'schen Gesetze ausdehne, auf eine kleinere Ausflußmenge, als die Annahme, daß sie sich beim Ausflusse genau so wie Wasser verhalte, also gar nicht ausdehne. Diese Differenz vermindert sich jedoch mit $\frac{h}{b}$, und es ist endlich bei sehr kleinen Werthen von $\frac{h}{b}$ in beiden Fällen:

$$V = F \sqrt{2g \frac{p}{\gamma} \cdot \frac{h}{b}} = 396 \, F \sqrt{(1 + \delta t) \frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

zu setzen.

Arbeit der Wärme. Der in §. 415 gefundene logarithmische Ausdruck für die beim Comprimiren oder Ausdehnen eines gewissen Luftquantums erforderliche oder ausgeübte mechanische Arbeit hat nur unter der Voraussetzung seine Gültigkeit, daß bei dieser Volumen- oder Dichtigkeitsveränderung die Temperatur der Luft unverändert bleibe. Dies kann so lange angenommen werden, als die Volumenänderung so langsam stattfindet, und die Wandungen des Gefäßes für die Wärme so durchlässig sind, daß eine Ausgleichung der §. 488.

Temperatur im Innern des Gefäßes mit der der äußeren Umgebung stattfinden kann. Treffen diese Voraussetzungen nicht zu, geht also die Volumenänderung sehr schnell vor sich, und sind die Gefäßwände so schlechte Wärmeleiter, daß man von einer Wärmetransmission durch dieselben abstrahiren kann, so findet mit jeder Volumenveränderung der Luft außer der Spannungsänderung auch eine Temperaturveränderung statt, und zwar eine Erhöhung derselben bei einer Compression und eine Erniedrigung bei einer Ausdehnung.

Diese Erscheinung ist in der Verschiedenheit der specifischen Wärmemengen s_p und s_v, d. h. derjenigen Wärmemengen begründet, welche ein Kilogramm Luft gebraucht, um sich um 1° C. zu erwärmen, je nachdem die Luft dabei ihre Spannung p oder ihr Volumen v unverändert behält. Wenn die Wärmemenge, welche zu dieser angegebenen Erwärmung der unter constantem Drucke stehenden Luft durch $s_p = 0{,}2377$ ausgedrückt ist, so beträgt die Wärme, welche die in ein constantes Volumen eingeschlossene Luft erfordert, $s_v = 0{,}1687$, und man nimmt gewöhnlich das Verhältniß dieser Wärmemengen $k = \frac{s_p}{s_v} = 1{,}42$ an*).

Die Entwickelungen der mechanischen Wärmetheorie ergeben nun folgendes Verhalten der Luft: Wird ein gewisses Volumen V atmosphärische Luft von der Spannung p, dem specifischen Gewichte γ und der Temperatur t einer Volumenänderung von V zu V_1 unterworfen, so nimmt diese Luft, unter der Voraussetzung, daß die Gefäßwände für die Wärme undurchdringlich sind, also weder eine Zuführung noch Abführung von Wärme eintreten kann, eine Temperatur t_1 an, so daß die Beziehung stattfindet:

$$\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{k-1},$$

unter k jenes Verhältniß $\frac{s_p}{s_v}$ der specifischen Wärmen verstanden.

Unter Berücksichtigung dieser Temperaturänderung behält nun die in §. 419 aus dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze gefundene Gleichung

$$\frac{p_1}{p} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

auch fernere Gültigkeit, und es folgt daraus:

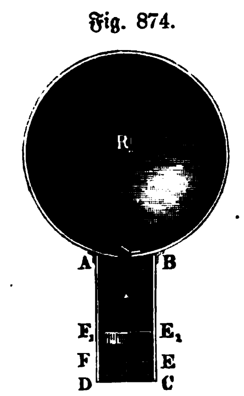
$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^k = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{1,42}, \text{ oder}$$

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}\right)^{1 + \frac{1}{k-1}} = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}\right)^{3,38}.$$

*) Das Weitere hierüber gehört in das Capitel über die Wärme, s. Th. II.

Wenn nun in dem Cylinder AC, Fig. 874, durch den Kolben EF anfänglich ein Luftprisma von der Höhe $EB = l$ von der Spannung p und dem specifischen Gewichte γ abgesperrt ist, und dieser Luftmasse durch schnelles Aufschieben des Kolbens um x plötzlich das specifische Gewicht γ_x und die Spannung p_x mitgetheilt wird, so ist

Fig. 874.



$$p_x = p\left(\frac{\gamma_x}{\gamma}\right)^k = p\left(\frac{l}{l-x}\right)^k.$$

Um den Kolben aus dieser Lage um das kleine Wegelement ∂x fortzuschieben, ist bei dem Querschnitte F des Kolbens die mechanische Arbeit erforderlich

$$F p_x \partial x = F p \left(\frac{l}{l-x}\right)^k \partial x.$$

Die Gesammtarbeit, welche nöthig ist, um den Kolben aus der Lage EF in diejenige $E_1 F_1$, also um die Größe $l - l_1$ zu verschieben, wenn $E_1 B$ mit l_1 bezeichnet wird, bestimmt sich daher zu:

$$A_1 = \int_0^{l-l_1} Fp\left(\frac{l}{l-x}\right)^k \partial x = Fpl^k \int_0^{l-l_1} (l-x)^{-k}\, \partial x$$

$$= \frac{-Fpl^k}{-k+1}\left(l_1^{-k+1} - l^{-k+1}\right) = \frac{Fpl}{k-1}\left[\left(\frac{l}{l_1}\right)^{k-1} - 1\right].$$

Um das comprimirte Luftquantum AE_1 durch weiteres Emporschieben des Kolbens um den Weg l_1 in den Raum R zu drücken, in welchem die Pressung

$$p_1 = p\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^k = p\left(\frac{l}{l_1}\right)^k$$

vorhanden ist, wird noch die Arbeit

$$A_2 = Fp_1 l_1 = Fp\frac{l^k}{l_1^{k-1}}$$

erfordert, wobei die äußere Luft während des ganzen Kolbenweges mit der Pressung p nachschiebt, und hierbei die Arbeit $A_0 = Fpl$ auf den Kolben überträgt. Es ist daher schließlich die ganze mechanische Arbeit:

$$A = A_1 + A_2 - A_0 = Fpl\left(\frac{1}{k-1}\left[\left(\frac{l}{l_1}\right)^{k-1} - 1\right] + \left(\frac{l}{l_1}\right)^{k-1} - 1\right)$$

$$= Fpl\,\frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{l}{l_1}\right)^{k-1} - 1\right],$$

wofür man auch, da

$$\left(\frac{l}{l_1}\right)^{k-1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} \text{ ist,}$$

schreiben kann:

$$A = Fpl \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = Vp \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right].$$

Nach dem Mariotte'schen Gesetze allein wurde die Arbeit zum Comprimiren in §. 415 zu $A = Vp \,.\, Log.\, nat. \frac{p_1}{p}$ gefunden, es entspricht dieser Werth der Voraussetzung, daß $k = 1$ ist, d. h.

$$\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^0 = 1;$$

woraus folgt, daß bei einer Volumenveränderung von V auf V_1 die Temperatur t sich nicht ändere.

Würde $k = \infty$ vorausgesetzt, so hätte man

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\infty}} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^0 = 1;$$

d. h. man würde es mit einer incompressibeln Flüssigkeit zu thun haben, und die Formel für die Arbeitsleistung fiele dann

$$A = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right) = V \,.\, (p_1 - p) \text{ aus.}$$

Wird umgekehrt das Luftvolumen V_1 von der Pressung p_1 durch plötzliche Ausdehnung auf das Volumen

$$V = V_1 \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$$

und auf die Dichtigkeit

$$\gamma = \gamma_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

zurückgeführt, so verrichtet es die mechanische Arbeit:

$$A = Vp \frac{k}{k-1}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = V_1 p_1 \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Beispiel. Wie groß ist der zu einem Kolbenhube erforderliche Arbeitsaufwand bei dem im Beispiele zu §. 415 angegebenen Gebläse, dessen Kolben 1 Meter Durchmesser und 1,5 Meter Hub hat, wenn bei einem Barometerstande von 0,750 Meter die Manometerspannung im Windregulator 0,800 Meter beträgt?

Da der Druck p der äußeren Luft hier pro Quadratmeter

$$0{,}750 \,.\, 13\,600 = 10\,200 \text{ Kilogramm}$$

und das Volumen

$$V = 0{,}5^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 1{,}5 = 1{,}1775 \text{ Cubikmeter}$$

beträgt, so folgt die gesuchte Arbeit:

$$A = 1{,}1775 \,.\, 10\,200 \cdot \frac{1{,}42}{0{,}42}\left[\left(\frac{800}{750}\right)^{\frac{0{,}42}{1{,}42}} - 1\right] = 12010{,}5 \,.\, 3{,}381\,(1{,}0667^{0{,}296} - 1)$$

$$= 783{,}1 \text{ Meterkilogramm.}$$

Die logarithmische Formel (ohne Berücksichtigung der Temperaturerhöhung) gab in dem angeführten Beispiele:

$$A = 775{,}14 \text{ Meterkilogramm}$$

und für ein incompressibeles Fluidum (Wasser), welches von der Pressung 750 Millimeter auf 800 Millimeter zu bringen ist, hätte man die Arbeit:

$$A = Vp\left(\frac{p_1}{p} - 1\right) = 1{,}1775 \,.\, 10\,200\left(\frac{800}{750} - 1\right) = 800{,}7 \text{ Meterkilogramm.}$$

Ausfluss der Luft mit Berücksichtigung der Abkühlung. §. 489. Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen gefundenen Formel für die Arbeit, welche die Luft bei ihrer Ausdehnung verrichtet, kann man nunmehr auch die Ausströmungsgeschwindigkeit der Luft bestimmen, da angenommen werden muß, daß die bei der Ausdehnung des Luftvolumens V_1 auf V frei werdende Arbeit zur Erzeugung der Geschwindigkeit v verwendet wird. Wenn in einer gewissen Zeit das Luftquantum V_1 vom specifischen Gewichte γ_1 und der Pressung p_1 mit der Geschwindigkeit v zum Ausflusse in einen Raum gelangt, dessen Pressung p sein mag, so hat man die frei werdende Arbeit

$$V_1 p_1 \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

gleich der zur Erzeugung dieser Geschwindigkeit erforderlichen mechanischen Arbeit

$$V_1 \gamma_1 \frac{v^2}{2g}$$

zu setzen, und erhält daraus:

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \text{ oder:}$$

$$v = \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{k}{k-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Die ausströmende Luft hat die äußere Pressung p, das specifische Gewicht $\gamma_2 = \gamma_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}$ und die Temperatur:

$$t_2 = t_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} + \frac{1}{\delta}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1\right] = t_1\left(\frac{p}{p_1}\right)^{0{,}296} + 273\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{0{,}296} - 1\right].$$

Das theoretische Luftquantum, welches durch eine Mündung F ausströmt, ist pro Secunde daher:

$$V_2 = Fv = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Reducirt man dieses Luftquantum auf den inneren Druck p_1 und das specifische Gewicht γ_1, so erhält man:

$$V_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}V_2 = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}V_2 = F\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Endlich findet man das Volumen V, welches diese Luftmenge unter dem äußeren Drucke p annimmt, wenn die innere Temperatur ihr unverändert verbleibt, für welchen Fall also einfach $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{p}{p_1}$ ist, zu:

$$V = \frac{p_1}{p}V_1 = F\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}}\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

$$= F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{k}{k-1}\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}}\left[\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]}.$$

In diesen Formeln kann man wieder wie früher

$$\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}} = 396\sqrt{1+\delta t} \text{ für Metermaß und}$$

$$\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}} = 1261\sqrt{1+\delta t} \text{ für Fußmaß setzen.}$$

Setzt man $\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b}$, wo b den Barometerstand und h den Manometerstand bedeutet, so kann man, wenn $\frac{k-1}{k}$ der Kürze wegen mit n bezeichnet wird, auch schreiben:

$$V = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{1}{n}\left(\frac{b+h}{b}\right)^n\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^n-1\right]}.$$

In den meisten Fällen der Praxis ist $\frac{h}{b}$ nur klein, alsdann kann man mit hinreichender Genauigkeit setzen:

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^n = \left(1+\frac{h}{b}\right)^n = 1 + n\frac{h}{b} + \frac{n.(n-1)}{2}\left(\frac{h}{b}\right)^2 \text{ und}$$

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^n - 1 = n\frac{h}{b} + n\frac{(n-1)}{2}\left(\frac{h}{b}\right)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{2.3}\left(\frac{h}{b}\right)^3$$

$$= n\frac{h}{b}\left[\left(1+\frac{n-1}{2}\frac{h}{b}+\frac{(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]\text{, daher}$$

$$\left(\frac{b+h}{b}\right)^n\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^n-1\right]$$
$$=n\frac{h}{b}\left[1+\frac{3n-1}{2}\frac{h}{b}+\frac{6n(n-1)+(n-1)(n-2)}{6}\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]$$
$$=n\frac{h}{b}\left[1-0{,}056\frac{h}{b}-0{,}0085\left(\frac{h}{b}\right)^2\right]$$

und $\sqrt{\left(\frac{b+h}{b}\right)^n\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^n-1\right]}=\left(1-0{,}028\frac{h}{b}\right)\sqrt{n\frac{h}{b}}$.

Dies eingeführt, giebt das Volumen:

$$V=\left(1-0{,}028\frac{h}{b}\right)F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h}{b}}$$
$$=\left(1-0{,}028\frac{h}{b}\right)396\ F\sqrt{(1+\delta t)\frac{h}{b}}\ \text{Cubikmeter.}$$

Bei Anwendung auf Gebläse-, Wetter- und Lüftungsmaschinen ist $\frac{h}{b}<\frac{1}{2}$, und daher kann man in allen den Fällen ganz einfach das theoretische Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke und bei der inneren Temperatur,

$$V=F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}=396\ F\sqrt{(1+\delta t)\frac{h}{b}}\ \text{Cubikmeter}$$

setzen.

Beispiel. Für den im Beispiele zu §. 486 behandelten Fall, wo $b = 0{,}750$ und $h = 0{,}10$ Meter, ferner $t = 120^0$ und $F = 0{,}00126$ Quadratmeter ist, hat man nach der letzteren Formel die Ausflußmenge, gemessen unter dem äußeren Drucke:

$$V = 396\ .\ 0{,}00126\sqrt{(1+0{,}00367\ .\ 120)\frac{100}{750}} = 0{,}219\ \text{Cubikmeter,}$$

während nach der Wasserformel, ohne Berücksichtigung der Dichtigkeitsänderung, $V = 0{,}233$ Cubikmeter sich ergab, und die logarithmische Formel in §. 487, welche auf die Temperaturveränderung nicht Rücksicht nimmt,

$$V=396\ .\ 0{,}00126\sqrt{(1+0{,}00367\ .\ 120)\ Log.\ nat.\ \frac{850}{750}}=0{,}212\ \text{Cubikmeter}$$

giebt.

Ausfluss der bewegten Luft. Die gefundenen Ausflußformeln setzen voraus, daß die Pressung p_1 oder der Manometerstand h an einer Stelle gemessen worden sei, wo die Luft in Ruhe befindlich ist, oder eine sehr schwache Bewegung hat; mißt man aber p_1 oder h an einem Orte, wo die §. 490.

Luft in Bewegung ist, communicirt z. B. das Manometer M_1 mit der in einer Leitungsröhre CF (Fig. 875) befindlichen Luft, so hat man bei Bestimmung der Ausflußgeschwindigkeit auch noch die lebendige Kraft der ankommenden Luft zu berücksichtigen.

Ist c die Geschwindigkeit der vor der Manometermündung vorübergehenden Luft, so hat man demnach zu setzen:

$$V_1 \gamma_1 \frac{v^2}{2g} = V_1 \gamma_1 \frac{c^2}{2g} + V_1 p_1 \frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Bezeichnet F den Querschnitt der Mündung und G den der Röhre oder des an der Manometermündung vorbeigehenden Stromes, so ist das ausströmende Luftquantum $V_1 \gamma_1 = G c \gamma_1 = F v \gamma_2$, daher folgt:

$$\frac{c}{v} = \frac{F\gamma_2}{G\gamma_1} = \frac{F}{G}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}$$

und nach Einführung dieses Werthes:

$$V_1 \gamma_1 \frac{v^2}{2g}\left[1-\left(\frac{F}{G}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}}\right] = V_1 p_1 \frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right].$$

Es ergiebt sich daher die gesuchte Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}}}}$$

oder annähernd, wenn p_1 nicht viel größer als p ist, und $k = 1,42$ gesetzt wird:

$$v = \sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{k}{k-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}}$$

$$= 728\sqrt{\frac{(1+\delta t)\left[1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{0,296}\right]}{1-\left(\frac{F}{G}\right)^2}} \text{ Meter.}$$

Es stellt sich also auch hier, genau wie beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen, die Ausflußgeschwindigkeit um so größer heraus, je größer das

Verhältniß $\frac{F}{G}$ zwischen dem Querschnitte der Mündung und dem der Röhre oder des ankommenden Luftstroms ist. Man ersieht auch hieraus, daß unter

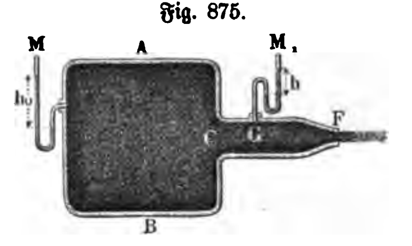


Fig. 875.

übrigens gleichen Verhältnissen der Manometerstand p_1 um so kleiner ausfällt, je enger die Leitungsröhre oder je größer die Geschwindigkeit der durch sie fortgeführten Luft ist.

Bezeichnet wieder b den Barometerstand und h den Manometerstand in der Röhre vom Querschnitte G, so findet man ganz ähnlich wie im vorhergehenden Paragraphen das theoretische Luftquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke und der inneren Temperatur:

$$V = F \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}} = 396\, F \sqrt{\frac{(1 + \delta t) \frac{h}{b}}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}} \text{ Cubikmeter.}$$

Bezeichnet noch p_0 die Spannung im Windreservoir, wo die Luft noch in Ruhe ist, so hat man nach der Formel in §. 489 auch:

$$v = \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \frac{k}{k-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}$$

und man erhält, wenn man diesen Werth von v dem oben gefundenen gleich setzt, zur Bestimmung von p_0 die Gleichung:

$$\frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}} = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} = 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2$$

annähernd.

Beispiel. Ein auf einer 0,10 Meter weiten Windleitung sitzendes Quecksilbermanometer steht auf 60 Millimeter, während der Wind am Ende der Röhre durch eine 50 Millimeter weite kreisrunde Düse ausströmt; welches Windquantum strömt per Secunde aus, vorausgesetzt, daß der äußere Barometerstand 0,760 Meter und die Temperatur der Luft in der Windleitung 10 Grad beträgt.

Es ist hier das ausströmende Luftquantum, von der Pressung 0,760 Meter bei 10° C.:

$$V = 396 \,.\, 0{,}025^2 \,.\, 3{,}14 \sqrt{\frac{(1 + 0{,}00367 \,.\, 10)\, \frac{60}{760}}{1 - \left(\frac{25^2}{50^2}\right)^2}} = 0{,}229 \text{ Cubikmeter.}$$

Für die entsprechende Spannung p_0 im Windregulator hat man:

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,296} = \left[1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{0,296}\right] : 1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2 \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1,408} \text{ oder}$$

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,296} = \left[1 - \left(\frac{760}{820}\right)^{0,296}\right] : \left[1 - \left(\frac{25^2}{50^2}\right)^2 \left(\frac{760}{820}\right)^{1,408}\right] = \frac{0,02224}{0,9460} = 0,0235,$$

daher ist $\frac{p}{p_0} = \left(1 - 0,0235\right)^{\frac{1}{0,296}} = 0,9765^{3,38}$ und $p_0 = \frac{p}{0,9765^{3,38}} = 1,084\,p$, sowie auch $b + h_0 = 1,084\,b$, und folglich der Manometerstand im Reservoir:

$$h_0 = 0,084 \,.\, 0,760 = 0,064 = 64 \text{ Millimeter.}$$

§. 491. **Ausflusscoefficienten.** Die Contractionserscheinungen, welche wir beim Ausflusse des Wassers aus Gefäßen kennen gelernt haben, finden sich auch beim Ausströmen der Luft aus Gefäßen vor. Ist die Ausflußöffnung in einer dünnen Wand ausgeschnitten, so hat der durch sie gehende Luft- oder Windstrahl einen kleineren Querschnitt als die Mündung selbst, und es ist deshalb auch die effective Ausflußmenge V_1 kleiner als das theoretische Ausflußquantum V oder das Product Fv aus Querschnitt F der Mündung und theoretischer Geschwindigkeit v. Diese Verminderung der Ausflußmenge hat, wie man am ausströmenden Rauche beobachten kann, hauptsächlich ihren Grund in der Contraction des Luftstrahles, und wir können daher auch, wie bei den Wasserstrahlen (s. §. 433), das Verhältniß $\alpha = \frac{F_1}{F}$ zwischen dem Querschnitte F_1 des Luftstrahles und dem Querschnitte F der Mündung

den Contractionscoefficienten,

ferner das Verhältniß $\varphi = \frac{v_1}{v}$ zwischen der effectiven Ausströmungsgeschwindigkeit v_1 und der theoretischen Ausflußgeschwindigkeit v (s. §. 435)

den Geschwindigkeitscoefficienten,

und das Verhältniß $\mu = \frac{V_1}{V} = \frac{F_1\, v_1}{F v} = \alpha \varphi$ der wirklichen Ausflußmenge V_1 zur theoretischen Ausflußmenge V

den Ausflußcoefficienten der ausströmenden Luft

nennen.

Jedenfalls ist bei dem Ausflusse der Luft durch eine Mündung in der dünnen ebenen Wand wie bei dem des Wassers der Geschwindigkeitscoefficient φ nahe = Eins, und daher auch, so lange als besondere Messungen der Luftstrahlen nicht vorgenommen worden sind, der Ausflußcoefficient $\mu = \alpha \varphi$ der Luft dem Contractionscoefficienten α gleich zu setzen. Die älteren Versuche, welche über den Ausfluß der Luft durch Mündungen in der dünnen Wand angestellt worden sind, weichen sehr von einander ab. Die von Buff nach der Wasserformel berechneten Versuche von Koch geben für Kreismündungen von 3 bis 6 Linien Durchmesser, bei

0,2 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}60$ bis $0{,}50$, dagegen liefern die hiernach berechneten Versuche von d'Aubuisson bei 0,027 bis 0,144 Meter Wassermanometerhöhe an Kreismündungen von 1 bis 3 Centimeter Durchmesser, $\mu = 0{,}65$ bis $0{,}64$. Ferner fand Poncelet durch die Berechnung der Pecqueur'schen Versuche nach derselben Formel für eine Mündung von 1 Centimeter Durchmesser, unter dem Ueberdrucke von 1 Atmosphäre, also 10 Meter Höhe Wassersäule, $\mu = 0{,}563$, und für eine solche von 1,5 Centimeter Weite $\mu = 0{,}566$. Die in großer Ausdehnung angestellten, und mittels der letzten Ausflußformel

$$V = F\left(1 - 0{,}0028\,\frac{h}{b}\right)\sqrt{2g\,\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{h}{b}}$$

berechneten Versuche des Verfassers haben folgende Resultate geliefert.

1) bei der Mündungsweite $d = 1$ Centimeter, und dem mittleren Pressungsverhältnisse:

$\frac{p_1}{p} = \frac{b+h}{b} =$	1,05	1,09	1,43	1,65	1,89	2,15
$\mu =$	0,555	0,589	0,692	0,724	0,754	0,788

2) bei der Mündungsweite $d = 2{,}14$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,05	1,09	1,36	1,67	2,01
$\mu =$	0,558	0,573	0,634	0,678	0,723

3) bei der Mündungsweite $d = 1{,}725$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,37	1,63
$\mu =$	0,563	0,631	0,665

4) bei der Mündungsweite $d = 2$ Centimeter, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,39
$\mu =$	0,578	0,641

Es wächst also hiernach der Contractionscoefficient beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ansehnlich mit der Druckhöhe. Bei

Anwendung der Wasserformel wird aber diese Veränderlichkeit bedeutend herabgezogen. Diese Formel giebt nämlich das theoretische Luftquantum

$$V = F\sqrt{2g\frac{p}{\gamma}\frac{h}{b}}\sqrt{1+\frac{h}{b}} = F\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\frac{h}{b}}\sqrt{\frac{p_1}{p}}$$

nahezu in dem Verhältnisse $\sqrt{\frac{p_1}{p}}$ größer, als die von dem Verfasser zu Grunde gelegte, daher müssen die nach ersterer berechneten Werthe von μ $\sqrt{\frac{p}{p_1}}$ mal so groß sein, wie diejenigen, welche aus der letzteren Formel resultiren, z. B. für $\frac{p_1}{p} = 2$ sind sie $\sqrt{1/2} = 0{,}707$ mal so groß. Beispielsweise ist nach der umstehenden ersten Tabelle für $d = 1$ und $\frac{p_1}{p} = 2$; $\mu = \frac{0{,}754 + 0{,}788}{2} = 0{,}771$ und daher müßte bei Zugrundelegung der älteren Formel $\mu = 0{,}707 \,.\, 0{,}771 = 0{,}555$ sich ergeben, wie es nach den Poncelet'schen Versuchen sehr nahe der Fall ist.

Bei dem Ausfluß durch eine Kreismündung von 1 Centimeter Durchmesser in einer conisch convergenten Wand von 100 Grad Convergenz wurde für

$\frac{b+h}{b} =$	1,31	1,66
$\mu =$	0,752	0,793

gefunden.

Ebenso bei einer solchen Mündung in der conisch divergenten Wand von 100 Grad Divergenz, für

$\frac{b+h}{b} =$	1,30	1,66
$\mu =$	0,589	0,663

§. 492. Die Veränderlichkeit des Contractionscoefficienten $\alpha = \mu$ für den Ausfluß der Luft durch eine Mündung in der dünnen Wand, erstreckt sich der bekannten Formel

$$\mu = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2}} \text{ (s. §. 449)}$$

zufolge auf den Ausfluß durch kurze cylindrische Ansatzröhren. Nach den oben angeführten Versuchen von Koch ist z. B. für solche Röhren von 3 bis 4 Linien Weite und 4- bis 6facher Länge, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}74$ bis $0{,}72$, wogegen d'Aubuisson für solche Röhren von 1 bis 3 Centimeter Weite und der 3- bis 4fachen Länge, bei 0,027 bis 0,141 Meter Wasserbarometerstand, $\mu = 0{,}92$ bis $0{,}93$ und Poncelet für cylindrische Röhren von 1 Centimeter Weite und der $2^1/_2$- bis 10fachen Weite, bei dem doppelten Atmosphärendrucke, $\mu = 0{,}632$ bis $0{,}650$ gefunden hat.

Die vom Verfasser angestellten Versuche haben dagegen auf folgende Resultate geführt:

1) Eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 1 Centimeter Weite und 3 Centimeter Länge, gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,05	1,10	1,30
$\mu =$	0,730	0,771	0,830

2) Eine solche Röhre von 1,414 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, führte für

$\frac{b+h}{b} =$	1,41	1,69
auf $\mu =$	0,813	0,822

3) Eine solche Röhre von 2,44 Centimeter Weite und der dreifachen Länge, gab für

$$\frac{b+h}{b} = 1{,}74;\ \mu = 0{,}833.$$

Die Zunahme des Ausflußcoefficienten beim Wachsen der Pressung ist durch das gleichzeitige Wachsen des Contractionscoefficienten erklärlich.

Die Ansatzröhre (1) mit schwach abgerundeter Einmündung gab im Mittel den Ausflußcoefficienten $\mu = 0{,}927$, also viel größer als bei einer solchen Röhre ohne Abrundung.

4) Ein kurzes innen gut abgerundetes Mundstück von 1 Centimeter Weite und 1,6 Centimeter Länge gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,24	1,38	1,59	1,85	2,14
$\mu =$	0,979	0,986	0,965	0,971	0,978

Da dieser Coefficient, wie erforderlich, der Einheit sehr nahe kommt, so ist dadurch der Vorzug der Ausflußformel

$$Q = \mu F \sqrt{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b}}$$

vor den anderen Formeln dargethan.

Die ältere Formel giebt natürlich bei hohem Drucke viel kleinere Werthe, und dagegen die logarithmische Formel (s. §. 487) viel größere, die Einheit sogar übersteigende Werthe von μ.

Eine kurze conische Röhre mit innerer Abrundung gab ziemlich dieselben Werthe für μ, dagegen eine kurze conische Röhre ohne Abrundung von 1 Centimeter Mündungsweite, 4 Centimeter Länge und 7° 9′ Convergenz für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,27	1,65
$\mu =$	0,910	0,922	0,964

Nach Buff und Koch ist für eine solche Röhre von 2,72 Linien äußerer Weite und 6° Seitenconvergenz, bei 0,3 bis 6,2 Fuß Wassermanometerhöhe, $\mu = 0{,}73$ bis 0,85, und nach d'Aubuisson, bei einer ähnlichen Röhre von 1,5 Centimeter Mündungsweite, unter 0,027 bis 0,144 Meter Wasserdruckhöhe, $\mu = 0{,}94$, bei Zugrundelegung der älteren oder sogenannten Wasserformel.

Das vollständige längere Düsenmundstück AC, Fig. 817 aus §. 461, d. i. eine conische Röhre, von 14,5 Centimeter Länge, 1 Centimeter Weite in der Ausmündung, und 3,8 Centimeter Weite in der übrigens gut abgerundeten Einmündung, bei nahe 6° Seitenconvergenz gab für

$\frac{b+h}{b} =$	1,08	1,45	2,16
$\mu =$	0,932	0,960	0,984

Durch Versuche über das Einströmen der Luft in Gefäße fanden die Franzosen Saint-Venant und Wantzel für ein kurzes, inwendig nach einem Viertelkreise abgerundetes Mundstück, nach der neueren Formel berechnet, $\mu = 0{,}98$, und für eine Mündung in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}61$.

Sind die Pressungen klein, ist, wie z. B. bei der gewöhnlichen Gebläseluft, $\frac{h}{b} < 1/_6$, so läßt sich dem Vorstehenden zufolge, bei Anwendung der neueren Ausflußformel

$$V = \mu F \sqrt{2 g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b}} = 396 \, \mu F \sqrt{(1 + 0{,}004 \, . t) \frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

im Mittel setzen:

1) für Mündungen in der dünnen Wand, $\mu = 0{,}56$,
2) für kurze cylindrische Ansatzröhren, $\mu = 0{,}75$,
3) für ein gut abgerundetes conoidisches Mundstück, $\mu = 0{,}98$,
4) für eine conische Röhre von circa 6^0 Seitenconvergenz, $\mu = 0{,}92$.

Beispiel. Wenn bei einem Gebläse die Mündungen der beiden conischen Düsen zusammen 20 Quadratcentimeter Inhalt haben, wenn ferner bei einer Temperatur von 15 Grad der Manometerstand im Regulator 80 Millimeter und der äußere Barometerstand 740 Millimeter mißt, so läßt sich das effective Ausflußquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke, setzen:

$$V = 396 \, \mu F \sqrt{(1 + 0{,}004 \, t) \frac{h}{b}} = 396 \, . \, 0{,}92 \, . \, 0{,}002 \sqrt{1{,}06 \frac{80}{740}} = 0{,}246 \text{ Cbm.}$$

Reibungscoefficient der Luft. Bewegt sich die Luft durch eine lange Röhre *CF*, Fig. 876, so hat sie einen Reibungswiderstand wie §. 493.

Fig. 876.



das Wasser zu überwinden, auch läßt sich dieser Widerstand durch die Höhe einer Luftsäule messen, welche der Ausdruck

$$z = \zeta \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

angiebt, worin, genau wie bei den Wasserleitungen, l die Länge, d die Weite der Röhre, v die Geschwindigkeit und ζ den durch Versuche zu bestimmenden Widerstandscoefficienten der Luft bezeichnet.

Die Versuche von Girard über die Bewegung der Luft durch Röhren führen auf den Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}0256$, und die von d'Aubuisson liefern im Mittel $\zeta = 0{,}0238$, wogegen nach Buff's Versuchen im Mittel $\zeta = 0{,}0375$ zu setzen ist. Dagegen findet wieder Poncelet aus den Ergebnissen der Versuche von Pecqueur bei dem Pressungsverhältnisse $\frac{p_1}{p} = 2$, $\mu = 0{,}0237$.

Die nach der neueren Formel berechneten Versuche des Verfassers gaben folgende Resultate.

1) Eine Messingröhre von 1 Centimeter Weite und 2 Meter Länge gab für Geschwindigkeiten von 25 bis 150 Meter, ζ allmälig abnehmend von 0,027260 bis 0,01482, und

2) eine Glasröhre von derselben Länge bei ziemlich denselben Geschwindigkeiten lieferte $\zeta = 0{,}02738$ bis 0,01390.

3) Eine Messingröhre von 1,41 Centimeter Weite und 3 Meter Länge führte auf $\zeta = 0{,}02578$ bis 0,01214, und

4) eine dergleichen Glasröhre auf $\zeta = 0{,}02663$ bis 0,009408.

5) Eine Zinkröhre von 2,4 Centimeter Weite und 10 Meter Länge gab endlich bei Geschwindigkeiten von 25 bis 80 Meter $\zeta = 0{,}02303$ bis 0,01296.

Es ist hieraus zu folgern, daß nur bei mäßigen Windgeschwindigkeiten, von circa 25 Meter, der Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}024$ gesetzt werden kann, daß er aber um so kleiner angenommen werden muß, je größer die Geschwindigkeit des Windes in der Röhre ist.

Annähernd läßt sich auch für Metermaß $\zeta = \frac{0{,}120}{\sqrt{v}}$ und für Fußmaß $\zeta = \frac{0{,}214}{\sqrt{v}}$ setzen.

Im Ganzen verhält sich also die Luft bei der Bewegung in Röhren ebenso wie das Wasser.

Auch der Widerstand, welchen Kniee und Kröpfe in den Röhren der Bewegung der durchströmenden Luft entgegensetzen, ist ähnlich wie beim Wasser zu beurtheilen.

Bei den Versuchen des Verfassers gab ein rechtwinkeliges Knie von 1 Centimeter Weite $\zeta = 1{,}61$, und ein solches von 1,41 Centimeter Weite $\zeta = 1{,}24$; ferner ein nach einem Kreisquadranten gebogener Kropf gab bei der ersteren Weite $\zeta = 0{,}485$ und bei der letzteren $\zeta = 0{,}471$.

§. 494. **Bewegung der Luft in langen Röhren.** Mit Hülfe des Coefficienten ζ des Reibungswiderstandes einer Röhre, wie BF, läßt sich nun auch die Ausflußgeschwindigkeit und Ausflußmenge bei gegebener Länge und Weite derselben u. s. w. bestimmen.

Ist h_2 der Stand des Manometers M_2 am Ende der Röhre CF, Fig. 877, unmittelbar vor dem Mundstück F, dessen Widerstandscoefficient $\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1$ sein möge, und bezeichnet d die Weite der Röhre, sowie d_1 die Weite der Mündung F_1, so hat man nach dem Obigen die Ausflußmenge:

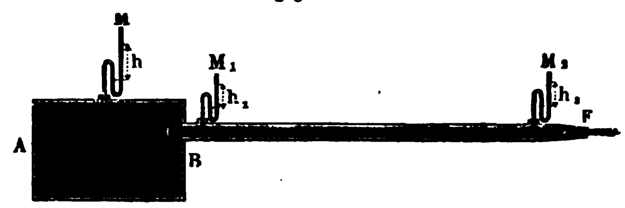
$$V = \mu_1 F_1 \sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_2}{b}}{1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} = 396\,\mu_1\,\pi\frac{d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1+\delta t)\frac{h_2}{b}}{1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cbkmtr.,}$$

sowie umgekehrt für den Manometerstand h_2:

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_2}{b} = \left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\mu_1 F_1}\right)^2.$$

Die Differenz der Quecksilbersäulen $h_1 - h_2$ der beiden Manometer M_1 und M_2 am Anfange und Ende der Windleitung von der Länge l wird nun

Fig. 877.



durch die Reibungswiderstände, welche einer Luftsäule $\zeta\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g}$ entsprechen, aufgezehrt, es ist daher:

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\,\frac{h_1-h_2}{b} = \zeta\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g},$$

wenn v die Geschwindigkeit des Luftstroms in dieser Röhre und d den Durchmesser der letzteren bezeichnet; daher hat man:

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_1}{b} = \left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\mu_1 F_1}\right)^2 + \zeta\,\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g}, \text{ oder}$$

$$v = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 v_1, \text{ und } v_1 = \frac{V}{F_1} \text{ eingeführt,}$$

$$\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_1}{b} = \left(\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{1}{\mu_1^2} + \zeta\,\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right)\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{V}{F_1}\right)^2,$$

und es folgt daher die Ausflußmenge

$$V = F_1\sqrt{\frac{2g\frac{p_1}{\gamma_1}\cdot\frac{h_1}{b}}{\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{1}{\mu_1^2}+\zeta\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}}$$

$$= 396\,\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{(1+\delta t)\,\frac{h_1}{b}}{\left[1-\left(\frac{d_1}{d}\right)^4\right]\frac{1}{\mu_1^2}+\zeta\frac{l}{d}\left(\frac{d_1}{d}\right)^4}} \text{ Cubikmeter.}$$

Ist endlich der Stand h des Manometers M im Reservoir AB bekannt, so haben wir, wenn wir den Widerstandscoefficienten für den Eintritt bei C durch ζ_0 bezeichnen, und $\frac{1}{\mu_1^2} = 1 + \zeta_1$ einzusetzen, da hier beim Eintritt in die Röhre die Druckhöhe $\zeta_0 \frac{v^2}{2g}$ verloren geht,

$$\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b} = \left[\left(\zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1\right] \frac{1}{2g} \left(\frac{V}{F_1}\right)^2,$$

folglich die Ausflußmenge

$$V = F_1 \sqrt{\frac{2g \frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}}$$

$$= 396 \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{(1 + 0{,}04\, t)\frac{h}{b}}{\left(\zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + 1 + \zeta_1}} \text{ Cubikmeter.}$$

Je nachdem der Einmündungspunkt um s höher oder tiefer liegt als die Ausmündungsstelle, hat man in dem Zähler der Wurzelgröße zu $\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{h}{b}$ noch s zu addiren oder subtrahiren.

Beispiel. In dem Regulator am Kopfe einer 100 Meter langen, 0,1 Meter weiten Windleitung steht das Quecksilbermanometer auf 0,075 Meter, während der äußere Barometerstand 0,750 Meter beträgt; es ist ferner die Mündungsweite des conisch zusammengezogenen Röhrenendes $d_1 = 0{,}05$ Meter und die Temperatur der comprimirten Luft im Regulator $t = 20^0$ C., welches Windquantum liefert die Leitung?

Es ist hier $F_1 = 0{,}025^2\ 3{,}14 = 0{,}00196$ Quadratmeter,

$$(1 + 0{,}004\, t)\frac{h}{b} = 1{,}08 \frac{75}{750} = 0{,}108,$$

$$\zeta_0 = \frac{1}{\mu_0^2} - 1 = \frac{1}{0{,}75^2} - 1 = 0{,}778,$$

$$\zeta \frac{l}{d} = 0{,}024 \frac{100}{0{,}1} = 24; \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 = \left(\frac{5}{10}\right)^4 = 0{,}0625,$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1 = \frac{1}{0{,}92^2} - 1 = 0{,}183,$$

daher folgt die gesuchte Windmenge:

$$V = 396\ .\ 0{,}00196 \sqrt{\frac{0{,}108}{(0{,}778 + 24)\ 0{,}0625 + 1{,}183}} = 0{,}154 \text{ Cubikmeter.}$$

§. 495. **Ausfluss unter abnehmendem Drucke.** Wenn ein Windreservoir keinen Zufluß erhält, während durch eine Mündung in demselben

ununterbrochenes Ausströmen statt hat, so nimmt die Dichtigkeit und Spannung allmälig ab, und es fällt daher auch die Ausflußgeschwindigkeit während des Ausflusses immer kleiner und kleiner aus. In welchem Verhältnisse nun diese Abnahme zur Zeit und zur Ausflußmenge in derselben steht, läßt sich auf folgende Weise ermitteln.

Es sei das Volumen des Reservoirs V, der anfängliche Manometerstand $= h_0$, und der Manometerstand am Ende einer gewissen Zeit t, $= h_1$, sowie der äußere Barometerstand $= b$. Dann ist das auf den äußeren Druck reducirte Luft- oder Windquantum im Reservoir anfangs

$$= \frac{V(b + h_0)}{b}$$

und am Ende der Zeit t

$$= \frac{V(b + h_1)}{b},$$

und folglich das innerhalb der Zeit t ausgeflossene und unter dem äußeren Drucke gemessene Windquantum:

$$V_1 = \frac{V(b + h_0)}{b} - \frac{V(b + h_1)}{b} = \frac{V(h_0 - h_1)}{b}.$$

Nun hat man aber auch

$$V_1 = \mu F t \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1} \cdot \frac{x}{b}},$$

wenn x dem mittleren Manometerstande während der Ausflußzeit t entspricht, daher folgt

$$t = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1} b x}} = \frac{V(h_0 - h_1)}{\mu F \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1} b}}\, x^{-1/2}.$$

Ferner ist, wenn $h_0 = m\sigma$ und $h_1 = n\sigma$ gesetzt wird, der Mittelwerth

$$x^{-1/2} = \frac{\sigma^{-1/2}}{m-n}(1^{-1/2} + 2^{-1/2} + \cdots + m^{-1/2}) - (1^{-1/2} + 2^{-1/2} + \cdots + n^{-1/2})$$

$$= \frac{\sigma^{-1/2}}{m-n}\left(\frac{m^{1/2}}{1/2} - \frac{n^{1/2}}{1/2}\right) = \frac{2\sigma^{-1/2}}{m-n}\left(\sqrt{\frac{h_0}{\sigma}} - \sqrt{\frac{h_1}{\sigma}}\right)$$

$$= \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{(m-n)\sigma} = \frac{2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{h_0 - h_1}$$ (s. Ingenieur S. 88); daher folgt die gesuchte Ausflußzeit

$$t = \frac{2V(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})}{\mu F \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1} b}} = \frac{2V}{\mu F \sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}}}\left(\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h_1}{b}}\right).$$

Diese Bestimmung hat übrigens nur dann eine hinreichende Genauigkeit, wenn das Ausflußreservoir (V) groß, oder die Ausflußmündung, sowie die

Pressungsdifferenz klein ist, wo die Abkühlung der Luft im Reservoir während des Ausflusses unbedeutend ausfällt.

Beispiel. Der 15 Meter lange, 2 Meter weite cylindrische Windregulator eines Gebläses ist mit Wind angefüllt, dessen Manometerstand 0,250 Meter und dessen Temperatur 6° C. beträgt. Wenn nun der Wind durch eine 30 Millimeter weite Kreismündung in einen Raum ausströmt, dessen Barometerstand 0,740 Meter beträgt, in welcher Zeit sinkt der Manometerstand auf 0,2 Meter herab und welches ist die entsprechende Ausflußmenge?

Es ist das Volumen des Regulators:

$$V = 3{,}14 \;.\; 15 = 47{,}1 \text{ Cubikmeter,}$$

daher das ausgeströmte Luftquantum, auf den äußeren Druck bezogen:

$$V_1 = 47{,}1 \,\frac{250-200}{740} = 3{,}182 \text{ Cubikmeter.}$$

Ferner ist:

$$\sqrt{\frac{h_0}{b}} - \sqrt{\frac{h}{b}} = \sqrt{\frac{0{,}250}{0{,}740}} - \sqrt{\frac{0{,}200}{0{,}740}} = 0{,}062 \text{ und}$$

$$\sqrt{2g\frac{p_1}{\gamma_1}} = 396\sqrt{1 + 0{,}004 \;.\; 6} = 400{,}7,$$

daher ist die Ausflußzeit, wenn $\mu = 0{,}95$ gesetzt wird:

$$t = \frac{2 \;.\; 47{,}1 \;.\; 0{,}062}{0{,}95 \;.\; 0{,}015^2 \;.\; 3{,}14 \;.\; 400{,}7} = \frac{5{,}84}{0{,}268} = 21{,}8 \text{ Secunden.}$$

Anmerkung. Eine allgemeinere Theorie des Ausflusses der Luft und des Wasserdampfes wird im zweiten Theile abgehandelt.

Schlußanmerkung. Versuche über den Ausfluß der Luft sind angestellt worden von Young, Schmidt, Lagerhjelm, Koch, d'Aubuisson, Buff, und in neuerer Zeit von Saint-Venant, Wantzel und Pecqueur. In Betreff der Versuche von Young und Schmidt ist nachzusehen in Gilbert's Annalen Bd. 22, 1801, und Bd. 6, 1820, und in Poggendorff's Annalen, Bd. 2, 1824, in Betreff derjenigen von Koch und Buff aber in den Studien des Götting'schen Vereines bergmännischer Freunde, Bd. 1, 1824; Bd. 3, 1833; Bd. 4, 1837 und Bd. 5, 1838; ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. 27, 1836 und Bd. 40, 1837. Nächstdem auch in Gerstner's Mechanik, Bd. 3, und in Hülsse's allgemeiner Maschinenencyclopädie, Artikel „Ausfluß". Die Lagerhjelm'schen Versuche werden behandelt in dem schwedischen Werke Hydrauliska Försök af Lagerjhelm, Forselles och Kallstenius, 1 Delen, Stockholm, 1818. Die Versuche d'Aubuisson's lernt man kennen in den Annales des mines, Tome 11, 1825; Tome 13, 1826; Tome 34, 1827, dann aber auch in d'Aubuisson's Traité d'Hydraulique. Ueber die Versuche von Saint-Venant und Wantzel siehe Comptes rendus hebd. des séances de l'Académie des sciences, à Paris 1839. Von den neuesten in Frankreich angestellten Versuchen handelt Poncelet in einer Note sur les expériences de M. Pecqueur relatives à l'écoulement de l'air dans les tubes etc. der Comptes rendus und hiervon im Auszuge das polytechnische Centralblatt, Bd. 6, 1845. Aus diesen Versuchen folgert Poncelet, daß die Luft bei ihrem Ausflusse denselben Gesetzen folge, wie das Wasser. Die meisten dieser Versuche sind mit sehr engen Mündungen angestellt worden, weshalb sie wohl schwerlich den Ansprüchen der Praxis Genüge leisten. Leider findet auch unter den Ergebnissen aller dieser Versuche nicht die

erwünschte Uebereinstimmung statt, namentlich weichen auch die von d'Aubuisson gefundenen Ausflußcoefficienten von denen, welche sich aus den Koch'schen berechnen lassen, bedeutend ab. Vergleichende Versuche über das Aus- und Einströmen der Luft und über den Ausfluß des Wassers rapportirt des Verfassers Experimental-Hydraulik. Die Resultate der neuesten, im größeren Maßstabe vom Verfasser ausgeführten Versuche über den Ausfluß der Luft werden im 5. Bande des Civilingenieurs mitgetheilt.

Siebentes Capitel.

Von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen.

Fliessende Wasser. Die Lehre von der Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen macht den zweiten Haupttheil der Hydraulik aus. Das Wasser fließt entweder in einem natürlichen oder in einem künstlichen Bette. Im ersten Falle bildet es Ströme, Flüsse, Bäche, im zweiten Canäle, Gräben und Gerinne. Bei der Theorie der Bewegung der fließenden Wasser kommt auf diesen Unterschied nichts, oder nur wenig an. §. 496.

Das Flußbett besteht aus dem Grundbette oder der Sohle und aus den beiden Ufern. Durch eine Ebene winkelrecht gegen die Bewegungsrichtung des fließenden Wassers ergiebt sich der Querschnitt desselben. Der Umfang desselben ist das Quer- oder Breitenprofil, welches wieder aus dem Wasser- und dem Luftprofile besteht. Eine Verticalebene in der Richtung des fließenden Wassers giebt den Längendurchschnitt und das Längenprofil desselben. Unter Abhang eines fließenden Wassers versteht man den Neigungswinkel seiner Oberfläche gegen den Horizont. Um diesen auf eine bestimmte Länge eines fließenden Wassers anzugeben, dient das Gefälle, welches der Verticalabstand der beiden Endpunkte im Wasserspiegel einer bestimmten Flußstrecke ist. Rösche ist das Gefälle für die Längenerstreckung = 1. Für die Flußstrecke $AD = l$,

Fig. 878.

Fig. 878, ist BC das Grundbette, $DH = h$ das Gefälle und der Winkel $DAH = \delta$ der Abhang; die Rösche aber ist

$$sin. \delta = \frac{h}{l}, \text{ oder annähernd } \delta = \frac{h}{l}.$$

Anmerkung. Das Gefälle der Bäche und Flüsse ist sehr verschieden. So hat z. B. die Elbe auf eine deutsche Meile Erstreckung von Hohenelbe bis Podiebrad 57 Fuß, von da bis Leitmeritz 9 Fuß, von da bis Mühlberg im Mittel 5,8 und von Mühlberg bis Magdeburg 2,5 Fuß Gefälle. Gebirgsbäche haben auf die Meile ein Gefälle von 40 bis 400 Fuß. Näheres hierüber siehe: „Vergleichende hydrographische Tabellen u. s. w. von Stranz." Canäle oder andere künstliche Wasserleitungen erhalten viel kleinere Gefälle. Hier ist die Rösche meistens unter 0,001, oft 0,0001 und noch kleiner. Mehr hierüber im zweiten Theile.

§. 497. **Verschiedene Geschwindigkeiten eines Querprofiles.** Die Geschwindigkeit des Wassers in einem und demselben Querprofile ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden. Die Adhäsion des Wassers an dem Bette und der Zusammenhang der Wassertheile unter einander bewirken, daß die den Bettwänden näher liegenden Wassertheile in ihrer Bewegung mehr aufgehalten werden und daher langsamer fließen, als die entfernteren. Aus diesem Grunde nimmt die Geschwindigkeit von der Oberfläche nach dem Bette zu ab, und es ist dieselbe am Boden und nahe den Ufern am kleinsten. Die größte Geschwindigkeit befindet sich bei geraden Flußstrecken meist in der Mitte oder an derjenigen Stelle in der freien Oberfläche des Wassers, wo es die größte Tiefe hat. Man nennt diejenige Stelle, wo das Wasser die größte Geschwindigkeit hat, den Stromstrich, und die tiefste Stelle im Bette die Stromrinne.

Bei Krümmungen ist der Stromstrich in der Regel nahe dem concaven Ufer.

Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers innerhalb eines Querprofiles ist nach §. 423:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{\text{Wasserquantum pr. Secunde}}{\text{Inhalt des Querschnittes}}.$$

Außerdem läßt sich die mittlere Geschwindigkeit auch noch aus den Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w. der einzelnen Theile des Querprofiles und aus den Inhalten F_1, F_2, F_3 u. s. w. der letzteren berechnen. Es ist nämlich:

$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 + F_3 c_3 + \cdots,$$

und daher auch:

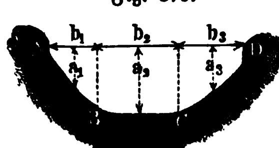
$$c = \frac{F_1 c_1 + F_2 c_2 + \cdots}{F_1 + F_2 + \cdots}.$$

Außer der mittleren Geschwindigkeit führt man auch die mittlere Wassertiefe, also diejenige Tiefe a ein, welche ein Querprofil an allen Stellen haben müßte, damit es ebenso viel Inhalt erhielte, als es bei den veränderlichen Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w. wirklich hat. Es ist also hiernach:

$$a = \frac{F}{b} = \frac{\text{Inhalt des Querschnittes}}{\text{Breite des Querschnittes}}.$$

Sind die den einzelnen Breitentheilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. entsprechenden mittleren Tiefen a_1, a_2, a_3 u. s. w., Fig. 879, so hat man:

Fig. 879.



$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots,$$

und daher auch:

$$a = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}{b_1 + b_2 + \cdots}.$$

Endlich ist die mittlere Geschwindigkeit auch

$$c = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots},$$

und bei gleicher Größe der Theile b_1, b_2 u. s. w.:

$$c = \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots}{a_1 + a_2 + \cdots}.$$

Ein Fluß oder Bach ist im **Beharrungszustande**, wenn durch jeden seiner Querschnitte in gleicher Zeit eine gleiche Wassermenge fließt, wenn also Q oder das Product Fc aus dem Inhalte des Querprofiles und aus der mittleren Geschwindigkeit auf die ganze Flußstrecke eine unveränderliche Zahl ist. Hieraus folgt nun das einfache Gesetz: **bei der permanenten Bewegung des Wassers verhalten sich die mittleren Geschwindigkeiten innerhalb zweier Querprofile umgekehrt wie die Inhalte dieser Profile.**

Beispiele. 1) An dem Querprofile $ABCD$ eines Canals, Fig. 879, hat man gefunden:
Breitentheile: $b_1 = 1{,}1$ Meter, $b_2 = 1{,}6$ Meter, $b_3 = 1{,}2$ Meter,
mittlere Tiefen: $a_1 = 0{,}6$ Meter, $a_2 = 0{,}9$ Meter, $a_3 = 0{,}7$ Meter,
mittlere Geschwindigkeiten: $c_1 = 0{,}7$ Meter, $c_2 = 1$ Meter, $c_3 = 0{,}9$ Meter,
daher hat man den Inhalt dieses Profiles:

$$F = 1{,}1 \,.\, 0{,}6 + 1{,}6 \,.\, 0{,}9 + 1{,}2 \,.\, 0{,}7 = 2{,}94 \text{ Quadratmeter},$$

ferner die Wassermenge:

$$Q = 1{,}1 \,.\, 0{,}6 \,.\, 0{,}7 + 1{,}6 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1 + 1{,}2 \,.\, 0{,}7 \,.\, 0{,}9 = 2{,}658 \text{ Cubikmeter},$$

also die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{2{,}658}{2{,}94} = 0{,}904 \text{ Meter}.$$

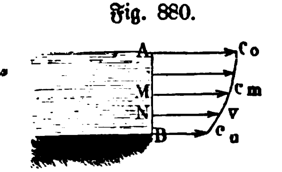
2) Wenn ein Graben pr. Secunde 0,25 Cubikmeter Wasser mit einer mittleren Geschwindigkeit c von 0,4 Meter fortführen soll, so hat man ihm ein Querprofil von $\frac{0{,}25}{0{,}4} = 0{,}625$ Quadratmeter Inhalt zu geben.

3) Wenn ein Fluß an einer Stelle bei 200 Meter Breite und 3 Meter mittlerer Tiefe eine mittlere Geschwindigkeit von 0,6 Meter hat, so wird er an einer anderen Stelle, bei 140 Meter Breite und 3,2 Meter mittlerer Tiefe, die mittlere Geschwindigkeit haben:

$$c = \frac{200 \,.\, 3}{140 \,.\, 3{,}2} \cdot 0{,}6 = 0{,}804 \text{ Meter}.$$

§. 498. **Mittlere Geschwindigkeit.** Wenn man die Wassertiefe an irgend einer Stelle eines fließenden Wassers in gleiche Theile theilt, und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten aufträgt, so erhält man eine sogenannte Stromgeschwindigkeitsscala AB, Fig. 880. Obwohl es als ausgemacht anzusehen ist, daß das Gesetz dieser Scala oder der Geschwindigkeitsveränderung durch irgend eine Curve, wie z. B. nach Gerstner, durch eine Ellipse u. s. w. ausgedrückt wird, so läßt sich doch auch, ohne einen großen Fehler befürchten zu müssen, eine gerade Linie substituiren, oder annehmen, daß die Geschwindigkeit nach der Tiefe gleichmäßig abnehme, weil die Abnahme der Geschwindigkeit nach unten immer nur eine mäßige ist. Aus den Versuchen von Ximenes, Brünnings und Funk ergiebt sich, daß die Geschwindigkeit in dem mittleren Perpendikel M

Fig. 880.



$$c_m = 0{,}915\, c_0$$

ist, wenn c_0 die Geschwindigkeit an der Oberfläche oder die Maximalgeschwindigkeit bezeichnet. Es nimmt also hiernach die Geschwindigkeit von oben bis zur Mitte M um

$$c_0 - c_m = (1 - 0{,}915)\, c_0 = 0{,}085\, c_0$$

ab, und es läßt sich folglich die Geschwindigkeit unten oder am Fußpunkte des Perpendikels,

$$c_u = c_0 - 2\,.\,0{,}085\, c_0 = (1 - 0{,}170)\, c_0 = 0{,}83\, c_0$$

setzen. Ist nun die ganze Tiefe $AB = a$, so hat man, bei Annahme einer der geraden Linie entsprechenden Geschwindigkeitsscala für eine Tiefe $AN = x$ unter dem Wasser, die entsprechende Geschwindigkeit:

$$v = c_0 - (c_0 - c_u)\frac{x}{a} = \left(1 - 0{,}17\,\frac{x}{a}\right) c_0.$$

Sind ferner noch $c_0, c_1, c_2 \ldots$ die Oberflächengeschwindigkeiten eines ganzen Querprofiles von nicht sehr veränderlicher Tiefe, so hat man die entsprechenden Geschwindigkeiten in der mittleren Tiefe:

$$0{,}915\, c_0,\ 0{,}915\, c_1,\ 0{,}915\, c_2,$$

und daher die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile:

$$c = 0{,}915\,\frac{c_0 + c_1 + c_2 + \cdots c_n}{n}.$$

Nehmen wir endlich an, daß die Geschwindigkeit vom Stromstriche aus nach den Ufern zu ebenso abnehme wie nach der Tiefe zu, so können wir wieder die mittlere Oberflächengeschwindigkeit

$$\frac{c_0 + c_1 + \cdots + c_n}{n} = 0{,}915\, c_0$$

setzen, und erhalten so die **mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile**

$$c = 0{,}915 \ . \ 0{,}915 \ . \ c_0 = 0{,}837 \ c_0,$$

d. i. 83 bis 84 Procent der Maximal- oder Stromstrichgeschwindigkeit.

Prony leitet aus den allerdings nur in kleinen Gräben angestellten Versuchen du Buat's und für diese Fälle vielleicht noch genauer

$$c = \frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0} \cdot c_0 \text{ Meter} = \frac{7{,}50 + c_0}{9{,}97 + c_0} \cdot c_0 \text{ Fuß}$$

ab. Für mittlere Geschwindigkeiten von 1 Meter folgt hiernach:

$$c = 0{,}81 \ c_0.$$

Fließt das Wasser **nicht frei**, sondern ist es durch eine Verengerung des Querprofiles **gestaut**, so fällt c noch größer aus.

Beispiel. Wenn im Stromstriche eines Flusses die Geschwindigkeit 1,2 Meter und die Tiefe 2 Meter beträgt, so hat man die mittlere Geschwindigkeit in dem entsprechenden Perpendikel:

$$c_m = 0{,}915 \ . \ 1{,}2 = 1{,}098 \text{ Meter},$$

die am Boden

$$= 0{,}83 \ . \ 1{,}2 = 0{,}996 \text{ Meter},$$

und die Geschwindigkeit in 0,6 Meter unter der Oberfläche

$$\left(1 - 0{,}17 \frac{0{,}6}{2}\right) 1{,}2 = (1 - 0{,}051) \ 1{,}2 = 1{,}139 \text{ Meter}.$$

Die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Querprofils ist

$$c = 0{,}837 \ . \ 1{,}2 = 1{,}004,$$

oder nach **Prony**:

$$c = \frac{2{,}372 + 1{,}2}{3{,}153 + 1{,}2} \ 1{,}2 = 0{,}985 \text{ Meter}.$$

Anmerkung. Ueber diesen und über die nächstfolgenden Gegenstände wird ausführlich gehandelt in der allgemeinen Maschinenencyklopädie, Artikel „Bewegung des Wassers". Neue Versuche und neue Ansichten hierüber findet man in folgender Schrift: **Lahmeyer**, Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Canälen, Braunschweig 1845. Nach **Baumgarten's** Beobachtungen (s. Annales des Ponts et Chaussées, Paris 1848, sowie polytechnisches Centralblatt, Nr. 14, 1849) giebt obige Formel bei größeren Geschwindigkeiten (über 1,5 Meter) zu große Werthe, und es ist für solche

$$c = \frac{2{,}372 + c_0}{3{,}153 + c_0} \cdot 0{,}8 \, c_0 \text{ Meter}$$

zu setzen.

Die Maximalgeschwindigkeit des Wassers kommt immer etwas unterhalb der Oberfläche des Wassers vor, was jedenfalls seinen Grund in dem Widerstande der Luft hat. Von der Stelle der Maximalgeschwindigkeit an nimmt die Geschwindigkeit mit dem Quadrate der Tiefe ab, wonach also die Geschwindigkeitsscala einer Parabel entspricht. Ebenso soll nach **Boileau** (s. dessen Traité sur la mesure des eaux) vom Stromstriche aus die Geschwindigkeit mit dem Quadrate des Ab-

standes von dieser Stelle abnehmen. Bezeichnet c_0 die Geschwindigkeit im Stromstriche, so ist hiernach die Geschwindigkeit im Horizontalabstande x:

$$c_x = c_0 - \mu x^2,$$

wobei μ eine allerdings bei verschiedenen Flüssen verschiedene Erfahrungszahl bezeichnet.

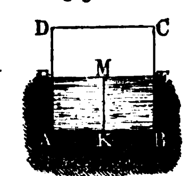
§. 499. **Vortheilhafteste Querprofile.** Der Widerstand, welchen das Bette der Bewegung des Wassers in Folge der Adhäsion, Klebrigkeit oder Reibung entgegensetzt, wächst mit der Berührungsfläche zwischen dem Bette und dem Wasser, und also auch mit dem Umfange p des Wasserprofiles oder des im Bette liegenden Theiles vom Querprofile. Da aber durch ein Querprofil um so mehr Wasserfäden hindurchgehen, je größer der Inhalt eines solchen ist, so wächst der Widerstand eines Wasserfadens auch umgekehrt wie der Inhalt, und daher im Ganzen wie der Quotient $\frac{p}{F}$ aus dem Umfange des Wasserprofiles und dem Inhalte F des ganzen Querprofiles.

Damit nun dieser Reibungswiderstand eines fließenden Wassers möglichst klein ausfalle, hat man dem Querprofile diejenige Gestalt zu geben, bei welcher $\frac{p}{F}$ möglichst klein ist, für welche also der Umfang p bei gegebenem Inhalte ein Minimum, oder der Inhalt bei gegebenem Umfange ein Maximum werde. Bei ringsumschlossenen Wasserleitungen, wie z. B. bei Röhren, ist p der ganze Umfang der vom Querprofile gebildeten Figur. Nun hat aber unter allen Figuren von gleicher Seitenzahl allemal die regelmäßige, und unter allen regelmäßigen Figuren wieder diejenige, deren Seitenzahl die größere ist, bei gleichem Inhalte den kleinsten Umfang, daher fällt auch bei ringsumschlossenen Wasserleitungen der Reibungswiderstand um so kleiner aus, je mehr ihr Querprofil einer regelmäßigen Figur sich nähert, und je größer die Seitenzahl derselben ist. Daher ist der Kreis, als eine regelmäßige Figur von unendlich vielen Seiten, in diesem Falle das dem kleinsten Reibungswiderstande entsprechende Querprofil. Bei den oben offenen Wasserleitungen ist das Verhältniß ein anderes, weil die obere Seite des Querprofiles frei oder vielmehr nur mit Luft in Berührung ist, die, so lange sie sich in Ruhe befindet, dem Wasser keinen oder nur einen sehr kleinen Widerstand entgegensetzt. Wir müssen also auch bei Beurtheilung dieses Reibungswiderstandes in dem Quotienten $\frac{p}{F}$ die obere Seite oder das sogenannte Luftprofil außer Acht lassen.

Bei Anwendung von Canälen, Gräben und Gerinnen kommen in der Regel nur rectanguläre und trapezoidale Querprofile vor. Eine durch den Mittelpunkt M des Quadrates AC gehende Horizontale EF, Fig. 881, theilt sowohl den Inhalt als auch den Umfang in zwei gleiche Theile, daher

bleibt dann das, was für das Quadrat gilt, auch für diese Hälfte richtig, und es entspricht sonach unter allen rectangulären Querprofilen das halbe Quadrat AE, oder dasjenige Rechteck, welches doppelt so breit als hoch ist, dem kleinsten Reibungswiderstande.

Fig. 881.



Ebenso wird das regelmäßige Sechseck ACE, Fig. 882, durch eine Horizontale CF in zwei gleiche Trapeze zertheilt, wovon jedes, wie das ganze Sechseck, den größten relativen Inhalt hat, und es ist folglich unter allen trapezoidalen Querprofilen das halbe regelmäßige Sechseck oder das Trapez $ABCF$ mit Böschungswinkeln $AFM = BCM$ von 60° dasjenige, bei dessen Anwendung der kleinste Reibungswiderstand eintritt.

Ebenso liefern das halbe regelmäßige Achteck ADE, Fig. 883, das halbe regelmäßige Zehneck u. s. w. und endlich der Halbkreis ADB, Fig. 884, unter gegebenen Umständen die vortheilhaftesten Querprofile für

Fig. 882.

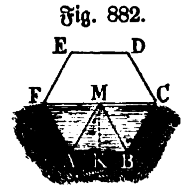


Fig. 883.

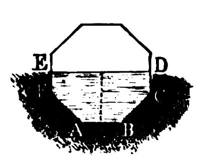
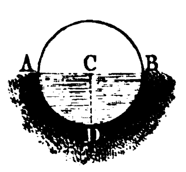


Fig. 884.



Canäle. Das trapezoidale oder halbe regelmäßige Sechseck giebt noch einen kleineren Widerstand als das halbe Quadrat oder Rechteck mit dem Seitenverhältniß 1 : 2, weil das Sechseck einen kleineren relativen Umfang hat als das Quadrat. Das halbe regelmäßige Zehneck führt auf eine noch kleinere Reibung, und dem Halbkreise entspricht allerdings das Minimum der Reibung. Nach dem Halbkreise und nach dem Rechtecke werden nur die Profile von Gerinnen aus Holz, Stein oder Eisen gebildet, nach Trapezen hingegen construirt man die Querprofile von ausgegrabenen und gemauerten Canälen. Andere Formen werden wegen Schwierigkeiten in der Ausführung nicht leicht angewendet.

In den Fällen, wenn Canäle nicht ausgemauert, sondern in der lockeren Erde oder in Sand ausgegraben werden, ist der Böschungswinkel von 60° zu groß oder die relative Böschung *cotang.* 60° = 0,57735 zu klein, weil die Ufer noch nicht hinreichende Stabilität erhalten; man wird daher genöthigt, trapezoidale Querprofile anzuwenden, bei welchen die Neigung der Seiten gegen die Basis noch kleiner als 60°, vielleicht nur 45° oder sogar noch kleiner ist. Bei einem trapezoidalen Querprofile $ABCD$, Fig. 885 (a. f. S.), welches mit dem halben Quadrate gleichen Umfang und Inhalt hat, ist die §. 500.

relative Böschung = $^4/_3$ und der Böschungswinkel nur 36° 52′. Theilt man die Höhe BE dieses Profiles in drei gleiche Theile, so hat die Basis BC deren 2, die Parallele AD, 10 und jede der Seiten $AB = CD$, 5 Theile. In vielen Fällen macht man die Böschung = 2, deren Winkel 26° 34′ beträgt, und zuweilen macht man sie noch größer.

Jedenfalls läßt sich der Böschungswinkel $BAE = \theta$, Fig. 886, oder die Böschung $\frac{AE}{BE} = cotang.\ \theta$ als eine gegebene und von der Natur des Erdreiches, worin der Canal ausgegraben wird, abhängige Größe ansehen, und es sind daher nur noch die Dimensionen des den kleinsten Widerstand

Fig. 885.

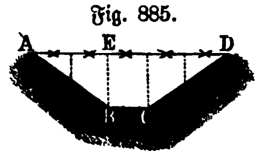
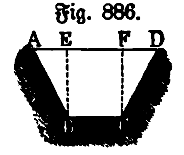


Fig. 886.



gebenden Querprofiles zu bestimmen. Setzen wir die untere Breite $BC = b$, die Tiefe $BE = a$ und die Böschung $\frac{AE}{BE} = v$, so erhalten wir für den Umfang des Profiles:

$$AB + BC + CD = p = b + 2\sqrt{a^2 + v^2a^2} = b + 2a\sqrt{1 + v^2},$$

für den Inhalt desselben:

$$F = ab + vaa = a\,(b + va),$$

und daher umgekehrt:

$$b = \frac{F}{a} - va,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\left(2\sqrt{v^2 + 1} - v\right).$$

Führt man statt a, $a + x$ ein, wo x eine kleine Zahl bezeichnet, so läßt sich

$$\frac{p}{F} = \frac{1}{a + x} + \frac{a + x}{F}\left(2\sqrt{v^2 + 1} - v\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2}\right) + \frac{a + x}{F}\left(2\sqrt{v^2 + 1} - v\right)$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{a}{F}\left(2\sqrt{v^2 + 1} - v\right) + \left(\frac{2\sqrt{v^2 + 1} - v}{F} - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{x^2}{a^3}$$

setzen.

Damit nun dieser Werth nicht allein für einen positiven, sondern auch für einen negativen Werth von x größer ausfalle, als der erste Werth

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{F}\left(2\sqrt{v^2 + 1} - v\right),$$

damit also $\frac{p}{F}$ zum Minimum werde, ist nöthig, daß das Glied mit dem Factor x verschwinde, daß also

$$\frac{2\sqrt{\nu^2+1}-\nu}{F}-\frac{1}{a^2}=0 \text{ sei,}$$

wonach für die gesuchte Canaltiefe a folgt:

$$a^2=\frac{F}{2\sqrt{\nu^2+1}-\nu},$$

oder, da $\nu = cotang.\,\theta$ und $\sqrt{\nu^2+1}=\frac{1}{sin.\,\theta}$ ist:

$$a^2=\frac{F\,sin.\,\theta}{2-cos.\,\theta}.$$

Hiernach ist also die einem gegebenen Böschungswinkel θ und einem gegebenen Inhalte entsprechende zweckmäßigste Form des Querprofiles bestimmt durch die Formel

$$a=\sqrt{\frac{F\,sin.\,\theta}{2-cos.\,\theta}} \text{ und } b=\frac{F}{a}-a\,cotang.\,\theta.$$

Es ist folglich die obere Breite AD des Querprofiles:

$$b_1=b+2\nu a=\frac{F}{a}+a\,cotang.\,\theta,$$

und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F}=\frac{b}{F}+\frac{2a}{F\,sin.\,\theta}=\frac{1}{a}+\frac{(2-cos.\,\theta)\,a}{F\,sin.\,\theta}=\frac{2}{a}.$$

Beispiel. Welche Dimensionen sind dem Querprofile eines Canales zu geben, dessen Ufer 40° Böschung erhalten sollen, und der bestimmt ist, bei einer mittleren Geschwindigkeit von 0,6 Meter ein Wasserquantum $Q = 2$ Cubikmeter pro Secunde abzuführen?

Es ist $F=\frac{Q}{c}=\frac{2}{0,6}=3,333$ Quadratmeter, daher die erforderliche Tiefe:

$$a=\sqrt{\frac{3,333\,.\,sin.\,40^0}{2-cos.\,40^0}}=1,317 \text{ Meter;}$$

die untere Breite: $b=\frac{3,333}{1,317}-1,317\,.\,cotang.\,40^0=0,96$ Meter,
die Böschung jederseits $\nu a=1,317\,.\,cotang.\,40^0=1,57$ Meter,
die obere Breite im Wasserspiegel: $b_1=0,96+2\,.\,1,57=4,10$ Meter,
der wasserbenetzte Umfang: $p=0,96+\frac{2\,.\,1,317}{sin.\,40^0}=5,06$ Meter
und das den Reibungswiderstand bestimmende Verhältniß:

$$\frac{p}{F}=\frac{2}{a}=\frac{2}{1,317}=1,519.$$

Bei dem Querprofile in Form eines halben regelmäßigen Sechsecks, wo $\theta = 60^0$ ist, fällt $a = 1,39$ Meter, $b = 1,60$ Meter, $b_1 = 3,2$ Meter, $p = 4,8$ Meter aus, daher ist $\frac{p}{F} = 1,44$.

§. 501. **Tabelle der vortheilhaftesten Querprofile.** Die Dimensionen der, verschiedenen Böschungswinkeln und einem gegebenen Querschnitte entsprechenden, zweckmäßigsten Querprofile giebt folgende Tabelle an.

Böschungswinkel θ.	Relative Böschung ν.	Dimensionen der Querprofile.				Quotient
		Tiefe a.	Untere Breite b.	Absolute Böschung νa.	Obere Breite $b + 2\nu a$.	$\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$
90^0	0	$0,707\sqrt{F}$	$1,414\sqrt{F}$	0	$1,414\sqrt{F}$	$\frac{2,828}{\sqrt{F}}$
60^0	0,577	$0,760\sqrt{F}$	$0,877\sqrt{F}$	$0,439\sqrt{F}$	$1,755\sqrt{F}$	$\frac{2,632}{\sqrt{F}}$
45^0	1,000	$0,740\sqrt{F}$	$0,613\sqrt{F}$	$0,740\sqrt{F}$	$2,092\sqrt{F}$	$\frac{2,704}{\sqrt{F}}$
40^0	1,192	$0,722\sqrt{F}$	$0,525\sqrt{F}$	$0,860\sqrt{F}$	$2,246\sqrt{F}$	$\frac{2,771}{\sqrt{F}}$
$36^0 52'$	1,333	$0,707\sqrt{F}$	$0,471\sqrt{F}$	$0,943\sqrt{F}$	$2,357\sqrt{F}$	$\frac{2,828}{\sqrt{F}}$
35^0	1,428	$0,697\sqrt{F}$	$0,439\sqrt{F}$	$0,995\sqrt{F}$	$2,430\sqrt{F}$	$\frac{2,870}{\sqrt{F}}$
30^0	1,732	$0,664\sqrt{F}$	$0,356\sqrt{F}$	$1,150\sqrt{F}$	$2,656\sqrt{F}$	$\frac{3,012}{\sqrt{F}}$
$26^0 34'$	2,000	$0,636\sqrt{F}$	$0,300\sqrt{F}$	$1,272\sqrt{F}$	$2,844\sqrt{F}$	$\frac{3,144}{\sqrt{F}}$
Halbkreis	—	$0,798\sqrt{F}$	—	—	$1,596\sqrt{F}$	$\frac{2,507}{\sqrt{F}}$

Man ersieht aus dieser Tafel, daß allerdings beim Halbkreise der Quotient $\frac{p}{F}$ am kleinsten, nämlich $= \frac{2,507}{\sqrt{F}}$ ist, daß er beim halben Sechseck größer, beim halben Quadrate und beim Trapeze von $36^0 52'$ Böschung aber noch größer ausfällt u. s. w.

Beispiel. Welche Dimensionen sind einem Querprofile zu geben, welches bei 5 Quadratmeter Inhalt eine Uferböschung von 35° hat? Nach der vorstehenden Tafel ist die Tiefe:

$a = 0{,}697\sqrt{5} = 1{,}559$ Meter, die untere Breite
$b = 0{,}439\sqrt{5} = 0{,}982$ Meter, die absolute Böschung
$\nu a = 0{,}995\sqrt{5} = 2{,}225$ Meter, die obere Breite
$b_1 = 5{,}432$ Meter und das Verhältniß:

$$\frac{p}{F} = \frac{2{,}870}{\sqrt{5}} = 1{,}283.$$

Gleichförmige Bewegung. Die Bewegung des Wassers in Betten ist auf einer gewissen Strecke entweder gleichförmig oder ungleichförmig; gleichförmig, wenn die mittlere Geschwindigkeit in allen Querschnitten dieser Strecke sich gleichbleibt, und also auch die Inhalte der Querschnitte gleich sind; ungleichförmig hingegen, wenn die mittleren Geschwindigkeiten und also auch die Inhalte der Querschnitte sich verändern. Zunächst ist von der gleichförmigen Bewegung die Rede. §. 502.

Bei der gleichförmigen Bewegung des Wassers auf einer Strecke $AD = l$, Fig. 887, wird das ganze Gefälle $HD = h$ nur auf die Ueberwindung der Reibung des Wassers im Bette verwendet, weil das Wasser mit derselben Geschwindigkeit fortfließt, mit welcher es zuströmt, also eine Geschwindigkeitshöhe weder gebunden noch frei wird. Messen wir nun diese Reibung durch die Höhe einer Wassersäule, so können wir folglich das Gefälle dieser Höhe gleichsetzen.

Fig. 887.



Die Reibungswiderstandshöhe wächst aber mit dem Quotienten $\frac{p}{F}$, mit l und mit dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit c (§. 454), daher gilt denn die Formel:

$$1)\ h = \zeta \frac{lp}{F} \frac{c^2}{2g},$$

worin ζ eine Erfahrungszahl ausdrückt, welche der Coefficient des Reibungswiderstandes zu nennen ist.

Durch Umkehrung folgt

$$2)\ c = \sqrt{\frac{F}{\zeta \cdot lp} 2gh}.$$

Es kommt also bei der Bestimmung des Gefälles aus der Länge, dem Querprofile und der Geschwindigkeit, sowie umgekehrt, bei der Ermittelung der Geschwindigkeit aus dem Gefälle, der Länge und dem Querprofile, auf die Kenntniß des Reibungscoefficienten ζ an. Nach den Eytelwein'schen Berechnungen der 91 Beobachtungen von du Buat, Brünings, Funk und Woltmann ist $\zeta = 0{,}007565$, und daher:

$$h = 0{,}007565 \frac{lp}{F} \frac{c^2}{2g}.$$

Setzt man $g = 9,809$ Meter oder 31,25 Fuß ein, so erhält man für Metermaß:

$$h = 0,0003856 \frac{lp}{F} \cdot c^2 \text{ und } c = 50,9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}},$$

dagegen für das Fußmaß:

$$h = 0,00012103 \frac{lp}{F} \cdot c^2 \text{ und } c = 90,9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}}.$$

Bei Röhrenleitungen ist $\frac{lp}{F} = \frac{\pi l d}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4l}{d}$, daher giebt diese Formel für Röhren:

$$h = 0,03026 \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g},$$

während wir richtiger (§. 455) für diese bei mittleren Geschwindigkeiten:

$$h = 0,025 \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g}$$

gefunden haben. Es ist also, wie zu erwarten stand, die Reibung in Flußbetten größer, als in metallenen Röhrenleitungen.

Beispiele. 1) Welches Gefälle ist einem Canale von der Länge $l = 1000$ Meter, unteren Breite $b = 1$ Meter, oberen Breite $b_1 = 3,6$ Meter und der Tiefe $a = 1,2$ Meter zu geben, wenn er ein Wasserquantum $Q = 1,5$ Cubikmeter pro Secunde abführen soll?

Es ist $p = 1 + 2\sqrt{1,2^2 + 1,3^2} = 4,538$ Meter, $F = 1,2 \,.\, 2,3 = 2,76$ Quadratmeter und $c = \frac{1,5}{2,76} = 0,54$ Meter, daher das gesuchte Gefälle:

$$h = 0,0003856 \frac{1000 \,.\, 4,538}{2,76} 0,54^2 = 0,185 \text{ Meter}.$$

2) Welches Wasserquantum liefert ein Canal von 2000 Meter Länge bei 0,8 Meter Gefälle, 1,5 Meter Tiefe, 1,2 Meter unterer und 5 Meter oberer Breite?

Hier ist $\frac{p}{F} = \frac{1,2 + 2\sqrt{1,5^2 + 1,9^2}}{1,5 \,.\, 3,1} = \frac{6,04}{4,65} = 1,299$,

daher die Geschwindigkeit:

$$c = 50,9 \sqrt{\frac{0,8}{1,299 \,.\, 2000}} = 0,89 \text{ Meter}$$

und das gesuchte Wasserquantum:

$$Q = Fc = 4,65 \,.\, 0,89 = 4,139 \text{ Cubikmeter}.$$

§. 503. **Reibungscoefficienten.** Auch bei Flüssen, Bächen u. s. w. zeigt sich der Widerstandscoefficient, wofür wir im vorigen Paragraphen den mittleren Werth 0,007565 angegeben haben, nicht constant, sondern, wie bei Röhren, bei kleinen Geschwindigkeiten etwas zu- und bei großen etwas abnehmend. Man hat also zu setzen:

$$\zeta = \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{c}\right) \text{ oder } \zeta_1 \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{c}}\right) \text{ oder dergleichen.}$$

Der Verfasser der schon in der Anmerkung zu §. 498 angeführten Schrift findet aus 255 zum großen Theil von ihm angestellten Versuchen für das preuß. Maß:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}1865}{c}\right),$$

und es folgt hiernach für das Metermaß:

$$\zeta = 0{,}007409 \left(1 + \frac{0{,}05853}{c}\right).$$

Man sieht, daß diese Formeln bei einer Geschwindigkeit $c = 2{,}8$ Meter den oben angegebenen mittleren Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}007565$ wiedergeben. Zur Erleichterung der Rechnung dient folgende Tabelle der Widerstandscoefficienten:

Geschwindigkeit c	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1175	0958	0885	0849	0828	0813	0803	0795	0789	

Geschwindigkeit c	1	1,2	1,5	2	3	4	5 Meter.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	0784	0777	0771	0763	0755	0752	0750

Für das preuß. Fußmaß gilt folgende Tabelle:

Geschwindigkeit c	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	5	7	10	15 Fuß.
Widerstandscoefficient $\zeta = 0{,}0$	1202	1096	1017	0971	0938	0914	0894	0879	0833	0810	0787	0769	0761	0755	0750

Diese Tabellen finden eine unmittelbare Anwendung in allen den Fällen, wenn die Geschwindigkeit c gegeben ist und das Gefälle gesucht wird, und wenn die Formel Nr. 1 des vorigen Paragraphen in Anwendung kommt. Ist aber die Geschwindigkeit c unbekannt oder die zu suchende Größe, so gestattet diese Tabelle nur dann eine unmittelbare Anwendung, wenn man schon einen Näherungswerth von c hat. Am einfachsten geht man zu Werke, wenn man erst annähernd c durch eine der Formeln

$$c = 50{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Meter oder } c = 90{,}9 \sqrt{\frac{Fh}{pl}} \text{ Fuß,}$$

bestimmt, dann hieraus, mittels der Tabelle ζ ermittelt, und den so erhaltenen Werth in der Formel

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{\zeta} \cdot \frac{F}{lp}, \text{ oder:}$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\zeta l p} \cdot 2gh} \text{ einsetzt.}$$

Aus der Geschwindigkeit c folgt dann auch noch das Wasserquantum mittels der Formel $Q = Fc$.

Ist endlich das Wasserquantum und Gefälle gegeben und, wie es bei Anlegung von Canälen oft vorkommt, das Querprofil zu bestimmen, so setze man $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ (s. Tabelle §. 501) und $c = \frac{Q}{F}$ in die Formel:

$$h = 0{,}007565 \frac{lp}{F} \cdot \frac{c^2}{2g}, \text{ schreibe also:}$$

$$h = 0{,}007565 \frac{mlQ^2}{2gF^{5/2}}, \text{ und bestimme hiernach:}$$

$$F = \left(0{,}007565 \frac{mlQ^2}{2gh}\right)^{2/5}, \text{ d. i. für Metermaß:}$$

$$F = 0{,}0431 \left(\frac{mlQ^2}{h}\right)^{2/5}, \text{ oder für Fußmaß:}$$

$$F = 0{,}0271 \left(\frac{mlQ^2}{h}\right)^{2/5}.$$

Hieraus folgt nun annähernd:

$$c = \frac{Q}{F};$$

nimmt man diesem Werth entsprechend, ζ aus einer der Tabellen, so läßt sich

$$F = \left(\zeta \cdot \frac{mlQ^2}{2gh}\right)^{2/5}$$

genauer berechnen, und es ergeben sich hieraus auch schärfere Werthe für

$$c = \frac{Q}{F} \text{ und } p = m\sqrt{F},$$

sowie für a, b u. s. w.

Beispiele. 1) Welches Gefälle erfordert ein Canal von 500 Meter Länge, 0,6 Meter unterer, 3 Meter oberer Breite und 1,2 Meter Tiefe zur Fortleitung einer Wassermenge von 1,7 Cubikmeter pro Secunde?

Es ist $p = 0{,}6 + 2\sqrt{1{,}2^2 + 1{,}2^2} = 3{,}994$, $F = 1{,}2 \,.\, 1{,}8 = 2{,}16$,

$$c = \frac{1{,}7}{2{,}16} = 0{,}79 \text{ Meter,}$$

daher: $\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{0{,}79}\right) = 0{,}00796$ und

$$h = 0{,}00796\,\frac{500\,.\,3{,}994}{2{,}16}\,\frac{0{,}79^2}{2\,.\,9{,}81} = 0{,}235 \text{ Meter.}$$

2) Welche Wassermenge liefert ein Bach von 12 Meter Breite, $1\frac{1}{2}$ Meter mittlerer Tiefe und 15 Meter Wasserprofil, wenn er auf einer Länge von 250 Meter 0,25 Meter Gefälle hat?

Es ist annähernd: $c = 50{,}9\sqrt{\frac{12\,.\,1{,}5\,.\,0{,}25}{15\,.\,250}} = 1{,}76$ Meter;
und hiernach genauer:

$$\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{1{,}76}\right) = 0{,}007656.$$

Man erhält demnach schärfer:

$$c = \sqrt{\frac{12\,.\,1{,}5\,.\,0{,}25\;2\,.\,9{,}81}{0{,}007656\,.\,250\,.\,15}} = 1{,}754 \text{ Meter.}$$

Die entsprechende Wassermenge beträgt daher:

$$Q = 12\,.\,1{,}5\,.\,1{,}754 = 31{,}57 \text{ Cubikmeter.}$$

3) Man will einen Graben von 1200 Meter Länge anlegen, welcher bei einem Totalgefälle von 0,3 Meter eine Wassermenge von 0,4 Cubikmeter pro Secunde fortführt. Welche Dimensionen sind dem Querprofile desselben zu geben, wenn es die Form eines halben regelmäßigen Sechsecks erhalten soll?

Hier ist $m = 2{,}632$ (s. Tabelle §. 501), daher annähernd:

$$F = 0{,}0431\left(\frac{2{,}632\,.\,1200\,.\,0{,}4^2}{0{,}3}\right)^{2/5} = 0{,}842 \text{ Quadratmeter, und}$$

$$c = \frac{0{,}4}{0{,}842} = 0{,}475 \text{ Meter.}$$

Hiernach ist $\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{0{,}475}\right) = 0{,}0083$, und daher:

$$F = \left(0{,}0083\,.\,2{,}632\,\frac{1200\,.\,0{,}16}{2\,.\,9{,}81\,.\,0{,}3}\right)^{2/5} = 0{,}873 \text{ Quadratmeter.}$$

Es ist hiernach zu setzen:

die Tiefe: $a = 0{,}760\sqrt{0{,}873} = 0{,}71$ Meter,
die untere Breite: $b = 0{,}877\sqrt{0{,}873} = 0{,}82$ Meter
und die obere Breite: $b_1 = 2\,b = 1{,}64$ Meter.

Die Geschwindigkeit c ist jetzt genauer:

$$c = \frac{0{,}4}{0{,}873} = 0{,}458 \text{ Meter,}$$

für welche der oben berechnete Reibungscoefficient $\zeta = 0{,}0083$ hinreichend genau ist. (Genau wäre jetzt

$$\zeta = 0{,}007409\left(1 + \frac{0{,}05853}{0{,}458}\right) = 0{,}00835 \text{ einzusetzen.)}$$

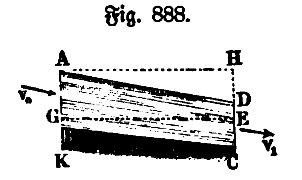
§. 504. **Ungleichförmige Bewegung.** Die Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers in Flußbetten läßt sich insofern auf die Theorie der gleichförmigen Bewegung zurückführen, als man den Reibungswiderstand auf einer kurzen Flußstrecke als constant und die entsprechende Höhe ebenfalls

$$= \zeta \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

setzen kann. Außerdem ist aber noch auf die der Geschwindigkeitsveränderung entsprechende lebendige Kraft des Wassers Rücksicht zu nehmen.

Es sei $ABCD$, Fig. 888, eine kurze Flußstrecke, von der Länge $AD = l$, dem Gefälle $DH = h$, und es sei v_0 die Geschwindigkeit des ankommenden, v_1 die des fortgehenden Wassers. Wenden wir die Regeln des Ausflusses auf ein Element D im Wasserspiegel an, so erhalten wir für dessen Geschwindigkeit v_1:

Fig. 888.



$$\frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_0^2}{2g};$$

was aber ein Element E unter Wasser betrifft, so hat dasselbe zwar von der einen Seite her eine größere Druckhöhe $AG = EH$, allein da das Unterwasser mit der Druckhöhe DE entgegenwirkt, so bleibt für dasselbe ebenfalls nur das Gefälle $DH = EH - ED$ als Bewegung erzeugende Druckhöhe übrig, und es gilt also auch für dieses und für jedes andere Element die Formel:

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g}.$$

Nimmt man hierzu noch den Reibungswiderstand, so erhält man:

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} + \zeta \frac{lp}{F} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin p, F und v die Mittelwerthe des Wasserprofiles, Querschnittes und der Geschwindigkeit sind. Ist F_0 der Inhalt des oberen und F_1 der des unteren Querprofiles, so läßt sich setzen:

$$F = \frac{F_0 + F_1}{2} \text{ und } Q = F_0 v_0 = F_1 v_1,$$

weshalb nun

$$\frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{Q}{F_1}\right)^2 - \left(\frac{Q}{F_0}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g},$$

sowie

$$\frac{v^2}{F} = \frac{v_0^2 + v_1^2}{F_0 + F_1} = \left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{F_0 + F_1}$$

folgt und sich ergiebt:

1) $h = \left[\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\right]\frac{Q^2}{2g}$, sowie

2) $Q = \dfrac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2} + \zeta \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)}}.$

Mit Hülfe der Formel 1) läßt sich aus dem Wasserquantum, der Länge und den Querschnitten einer Fluß- oder Canalstrecke das entsprechende Gefälle h berechnen, mit Hülfe der Formel 2) aber umgekehrt aus dem Gefälle, der Länge und den Querschnitten das Wasserquantum. Um mehr Genauigkeit zu erzielen, kann man die Rechnung für mehrere kurze Flußstrecken durchführen und zuletzt das arithmetische Mittel nehmen. Ist nur das Totalgefälle bekannt, so setze man gleich dieses statt h in die letzte Formel, führe statt

$$\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}, \; \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_0^2},$$

wo F_n den Inhalt des letzten Querprofiles bezeichnet, und statt

$$\zeta \cdot \frac{lp}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)$$

die Summe aller ähnlichen Werthe der einzelnen Flußstrecken ein.

Beispiel. Ein Bach hat auf einer Strecke von 100 Metern 0,20 Meter Gefälle, der mittlere Umfang seines Wasserprofils ist 12 Meter, der Inhalt des oberen Querprofils mißt 7, der des unteren 6 Quadratmeter. Welche Wassermasse liefert der Bach?

Es ist $Q = \dfrac{4{,}429\sqrt{0{,}2}}{\sqrt{\frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + 0{,}007565\,\frac{100\,.\,12}{13}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right)}} = 9{,}719$ Cubikmeter.

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\dfrac{2\,.\,9{,}719}{7 + 6} = 1{,}495$, daher ist richtiger

$\zeta = 0{,}00771$ statt $0{,}007565$

zu setzen, und es folgt nun schärfer:

$$Q = \frac{4{,}429\sqrt{0{,}2}}{\sqrt{\frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + 0{,}00771\,\frac{100\,.\,12}{13}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right)}} = 9{,}695 \text{ Cubikmeter.}$$

Wenn derselbe Bach bei demselben Wasserstande auf einer anderen Strecke von 150 Meter Länge 0,14 Meter Gefälle hat, und wenn auf dieser Strecke sein oberes Profil 8, sein unteres 9 Quadratmeter und der mittlere Profilumfang 15 Meter beträgt, so hat man die mittlere Geschwindigkeit auf dieser Strecke etwa zu

$$\frac{2\,.\,9{,}695}{8 + 9} = 1{,}14 \text{ Meter,}$$

daher ist ζ hierfür gleich 0,00780 zu setzen, folglich

$$Q = \frac{4{,}429\sqrt{0{,}14}}{\sqrt{\frac{1}{9^2} - \frac{1}{8^2} + 0{,}0078\,\frac{150\,.\,15}{17}\left(\frac{1}{9^2} + \frac{1}{8^2}\right)}} = 10{,}352 \text{ Cubikmeter.}$$

Aus beiden Werthen folgt der mittlere

$$Q = \frac{9{,}695 + 10{,}352}{2} = 10{,}023 \text{ Cubikmeter.}$$

Um eine Formel für die Wassertiefe zu erhalten, setzen wir die obere §. 505.
Tiefe $= a_0$ und die untere $= a_1$, ferner den Abhang des Flußbettes $= \alpha$,

folglich das Gefälle des Grundbettes $= l \sin. \alpha$. Dann erhalten wir das Wassergefälle:

$$h = a_0 - a_1 + l \sin. \alpha,$$

und es folgt nun die Gleichung:

$$a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \left[\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - \sin. \alpha\right] l,$$

daher:

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{\zeta \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} - \sin. \alpha}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man die Strecke l bestimmen, welche einer gegebenen Veränderung $a_0 - a_1$ der Wassertiefe entspricht. Ist aber die umgekehrte Aufgabe zu lösen, so hat man den Weg der Näherung zu betreten, indem man erst die den angenommenen Senkungen $a_0 - a_1$ und $a_1 - a_2$ entsprechenden Entfernungen l_1 und l_2 ermittelt, und hieraus durch eine Proportion die der gegebenen Entfernung l entsprechende Senkung berechnet (s. „Ingenieur", Arithmetik, §. 16, V. Seite 76).

Die Formel ist noch einer Vereinfachung fähig, wenn die Breite b des fließenden Wassers constant ist, oder als constant angesehen werden kann. Wir setzen in diesem Falle:

$$\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{F_0^2 F_1^2} \cdot \frac{Q^2}{2g} = \frac{(F_0 - F_1)(F_0 + F_1)}{F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

$$= \frac{(a_0 - a_1)(a_0 + a_1)}{a_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \text{ annähernd } = 2\frac{(a_0 - a_1)}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g},$$

und ebenso:

$$\frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g} = \frac{p(F_0^2 + F_1^2)}{(F_0 + F_1)F_1^2} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$$

annähernd $= \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g}$, erhalten daher:

$$l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}\right)}{\zeta \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - \sin. \alpha},$$

und folglich:

$$\frac{a_0 - a_1}{l} = \frac{\zeta \frac{p}{a_0 b} \cdot \frac{v_0^2}{2g} - \sin. \alpha}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2g}}.$$

Mit Hülfe dieser Formel läßt sich direct die einer gegebenen Strecke l entsprechende Veränderung $(a_0 - a_1)$ der Wassertiefe berechnen.

Beispiel. Man will in einem horizontalen Graben von 2 Meter Breite und 200 Meter Länge eine Wassermenge von 1 Cubikmeter fortführen und dieselbe am Anfange des Canals 0,6 Meter hoch eintreten lassen, welche Höhe wird das Wasser am Ende des Canales haben?

Theilt man die ganze Länge in zwei gleiche Theile und bestimmt nach der letzten Formel das Gefälle für jeden dieser Theile, so hat man $sin.\ \alpha = 0$, $l = 100$ Meter, $b = 2$ Meter für jeden Theil und für den oberen Theil $v_0 = \frac{1}{0{,}6\ .\ 2} = 0{,}833$ Meter, daher $\zeta = 0{,}00793$. Da ferner $a_0 = 0{,}6$ und $p = 3{,}2$ Meter ist, so folgt:

$$a_0 - a_1 = \frac{0{,}00793\ \frac{3{,}2}{0{,}6\ .\ 2}\ \frac{0{,}833^2}{2\ .\ 9{,}81}}{1 - \frac{2}{0{,}6}\ .\ \frac{0{,}833^2}{2\ .\ 9{,}81}}\ 100 = 0{,}085 \text{ Meter.}$$

Nun ist für die zweite Canalhälfte $a_1 = 0{,}6 - 0{,}085 = 0{,}515$, ferner p_1 etwa 3 Meter, $v_1 = \frac{1}{0{,}515\ .\ 2} = 0{,}971$ Meter, daher $\zeta = 0{,}00785$ und die Senkung:

$$a_1 - a_2 = \frac{0{,}00785\ \frac{3}{0{,}515\ .\ 2}\ .\ \frac{0{,}971^2}{2\ .\ 9{,}81}}{1 - \frac{2}{0{,}515}\ .\ \frac{0{,}971^2}{2\ .\ 9{,}81}}\ 100 = 0{,}134 \text{ Meter,}$$

daher folgt die ganze Senkung

$$= 0{,}085 + 0{,}134 = 0{,}219 \text{ Meter,}$$

und die Wassertiefe am unteren Ende

$$= 0{,}6 - 0{,}219 = 0{,}381 \text{ Meter.}$$

Anschwellungen. Wenn Flüsse oder Canäle ihren Wasserstand ändern, so treten auch Geschwindigkeitsveränderungen und Veränderungen in den Wassermengen ein. Einem höheren Wasserstande entspricht nicht nur ein größerer Querschnitt, sondern auch eine größere Geschwindigkeit, und daher aus doppelten Gründen ein größeres Wasserquantum, und ebenso giebt eine Abnahme der Wassertiefe eine Verminderung im Querschnitte und in der Geschwindigkeit und daher auch eine Abnahme der Wassermenge in zweifacher Beziehung. Ist die anfängliche Tiefe $= a$ und die spätere Tiefe $= a_1$, sowie die obere Breite des Canales $= b$, so läßt sich die Vergrößerung des Querschnittes $= b\ (a_1 - a)$ und daher der Querschnitt nach der Anschwellung $(a_1 - a)$: §. 506.

$$F_1 = F + b\ (a_1 - a)$$

setzen, auch folgt hiernach:

$$\frac{F_1}{F} = 1 + \frac{b\ (a_1 - a)}{F}$$

und:

$$\sqrt{\frac{F_1}{F}} \text{ annähernd } = 1 + \frac{b\ (a_1 - a)}{2F}.$$

Ist ferner p der anfängliche, p_1 der spätere Umfang des Wasserprofiles, sowie θ der Böschungswinkel der Ufer, so läßt sich setzen:

$$p_1 = p + \frac{2\,(a_1 - a)}{sin.\,\theta}, \text{ daher}$$

$$\frac{p_1}{p} = 1 + \frac{2\,(a_1 - a)}{p\,sin.\,\theta} \text{ und:}$$

$$\sqrt{\frac{p_1}{p}} = 1 + \frac{a_1 - a}{p\,sin.\,\theta}, \text{ sowie:}$$

$$\sqrt{\frac{p}{p_1}} = 1 - \frac{a_1 - a}{p\,sin.\,\theta}.$$

Nun ist aber die Geschwindigkeit beim ersten Wasserstande $c = 90{,}9\sqrt{\frac{Fh}{pl}}$, und beim zweiten $c_1 = 90{,}9\sqrt{\frac{F_1}{p_1}\cdot\frac{h}{l}}$, es läßt sich daher:

$$\frac{c_1}{c} = \sqrt{\frac{F_1}{F}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p_1}} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{2\,F}\right)\left(1 - \frac{a_1 - a}{p\,sin.\,\theta}\right)$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right),$$

also die relative Geschwindigkeitsveränderung:

$$1)\ \frac{c_1 - c}{c} = (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right) \text{ setzen.}$$

Dagegen folgt das Verhältniß der Wassermengen:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{F_1\,c_1}{Fc} = \left(1 + \frac{b\,(a_1 - a)}{F}\right)\left[1 + (a_1 - a)\left(\frac{b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right)\right]$$

$$= 1 + (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right),$$

und der relative Wasserzuwachs:

$$2)\ \frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\,sin.\,\theta}\right).$$

Weniger genau, aber in vielen Fällen, namentlich bei breiten Canälen mit wenig Böschung genügend, ist es, $F = ab$ zu setzen und $\frac{1}{p\,sin.\,\theta}$ zu vernachlässigen, weswegen dann einfacher

$$\frac{c_1 - c}{c} = {}^1/_2\,\frac{a_1 - a}{a} \text{ und } \frac{Q_1 - Q}{Q} = {}^3/_2\cdot\frac{a_1 - a}{a}$$

folgt.

Hiernach ist also die relative Geschwindigkeitsveränderung halb so groß, und die relative Veränderung im Wasserquantum $^3/_2$ mal so groß, als die relative Veränderung im Wasserstande.

Die vorstehenden Formeln gelten nur für die permanente Bewegung

des Wassers in Flußbetten, wo die Wasserstände constant sind, nicht aber in den Fällen, wo die Höhe des fließenden Wassers veränderlich ist. Die mittlere Geschwindigkeit in einem und demselben Querprofile ist während des Steigens der Wasserhöhe größer und während des Fallens kleiner als bei constantem Wasserstande, es fließt also auch im ersten Falle mehr und im zweiten Falle weniger Wasser durch als bei der permanenten Bewegung des Wassers.

Beispiele. 1) Wenn der Wasserstand um $^1/_{10}$ seiner anfänglichen Größe zunimmt, so wird die Geschwindigkeit um $^1/_{20}$ und das Wasserquantum um $^3/_{20}$ seines anfänglichen Werthes größer.

2) Wenn die Tiefe um 8 Procent abnimmt, so vermindert sich die Geschwindigkeit um 4 Procent, und das Wasserquantum um 12 Procent.

3) Mit Hülfe der genaueren Formel

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = (a_1 - a)\left(\frac{3\,b}{2\,F} - \frac{1}{p\, sin.\, \theta}\right)$$

läßt sich eine Wasserstandsscala KM, Fig. 889, construiren, woran man die jeder Wassertiefe KL entsprechende Wassermenge eines Canales ablesen kann, wenn man nur einmal das Wasserquantum für eine gewisse mittlere Tiefe kennt. Ist $b = 3$ Meter, die untere Breite $b_1 = 1$, $a = 1$ Meter und $\theta = 45^0$, so hat man:

Fig. 889.

$$F = \frac{3 + 1}{2}\, 1 = 2 \text{ Quadratmeter},$$

$$p = 1 + 2\sqrt{2} = 3{,}828 \text{ Meter, und}$$

$$sin.\, \theta = 0{,}707,$$

daher:

$$\frac{Q_1 - Q}{Q} = \left(\frac{3\,.\,3}{2\,.\,2} - \frac{1}{3{,}828\,.\,0{,}707}\right)(a_1 - a) = 1{,}88\,(a_1 - a).$$

Beträgt das dem mittleren Wasserstande entsprechende Wasserquantum $Q = 1{,}2$ Cubikmeter, so hat man:

$$Q_1 = 1{,}2 + 1{,}2\,.\,1{,}88\,(a_1 - a) = 1{,}2 + 2{,}256\,(a_1 - a).$$

Ist $a_1 - a = \frac{0{,}1}{2{,}256} = 0{,}044$ Meter, so folgt $Q_1 = 1{,}2 + 0{,}1 = 1{,}3$ Cubikmeter; ist $a_1 - a = 2\,.\,0{,}044$ Meter, so folgt $Q_1 = 1{,}2 + 2\,.\,0{,}1 = 1{,}4$ Cubikmeter u. s. f. Es giebt also eine Scala, deren Intervalle $LM = LN = 44$ Millimeter groß sind, die Wassermenge bis auf 0,1 Cubikmeter genau an. Natürlich wird die Genauigkeit um so kleiner, je mehr sich der Wasserstand von dem mittleren entfernt.

Anmerkung. Ueber die Zu- und Abführung des Wassers in Canälen, sowie über die Anlage der Wehre und Teiche wird im zweiten Theile gehandelt.

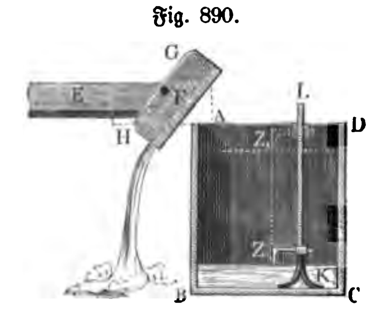
Schlußanmerkung. Ausführlich über die Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen handelt der Verfasser in der allgemeinen Encyklopädie, Bd. II., Artikel „Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen“; auch wird daselbst eine vollständige Literatur (bis 1844) über diesen Gegenstand mitgetheilt. Rittinger's tabellarische Zusammenstellung der Versuche über die Bewegung des Wassers in Canälen ist in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins 7. Jahrgang 1855, enthalten.

Achtes Capitel.

Hydrometrie oder Lehre vom Wassermessen.

§. 507. **Aichen.** Das Wasserquantum, welches ein fließendes Wasser innerhalb einer gewissen Zeit liefert, wird entweder durch Aichmaße, oder durch Ausflußapparate oder durch Hydrometer gefunden. Das einfachste Wassermessen besteht allerdings in dem Aichen, d. i. in der Anwendung eines Aichgefäßes, doch ist dieses nur bei kleineren Wassermengen, wie sie etwa in Röhren oder kleinen Bächen und Gräben zugeführt werden, anwendbar. Das Aichgefäß wird meist aus Brettern zusammengesetzt, und bekommt deshalb eine parallelepipedische Form; um seine Haltbarkeit zu erhöhen, wird es wohl noch mit eisernen Reifen umgeben. Wie der genaue Inhalt dieses Gefäßes zu ermitteln ist, wird im „Ingenieur“, S. 208, angezeigt. Das Wasser wird diesem Gefäße durch ein Gerinne EF, Fig. 890, zugeführt, an dessen Ende sich eine Doppelklappe GH befindet, durch welche man das Wasser nach Belieben neben dem Gefäße AC oder in dasselbe ausfließen lassen kann. Um die Höhe des Wasserkörpers im Gefäße recht genau zu erhalten, wendet man wohl noch eine Wasserstandsscala KL an. Wenn man vor der Messung die Zeigerspitze Z bis auf die Oberfläche des schon im Gefäße befindlichen und wenn auch vielleicht nur den Boden bedeckenden Wassers herabgelassen und den Wasserstand an der Scala abgelesen hat, so erhält man die Höhe ZZ_1 des geaichten Wassers durch Subtraction dieses Wasserstandes von demjenigen Stande, welchen die Scala anzeigt, wenn man die Zeigerspitze Z_1 am Ende der Beobachtung mit dem Wasserspiegel in Berührung gebracht hat. Vor der Messung ist natürlich die Klappe so zu stellen, daß das Wasser neben dem Kasten ausfließt. Hat man sich überzeugt, daß der Zufluß im Gerinne in Beharrung übergegangen ist, und hat man an der in der Hand befindlichen Uhr einen Zeitpunkt beobachtet, so dreht man die Klappe um, damit das Wasser in das Aichgefäß fließt; und ist nachher das Gefäß ganz oder zum Theil gefüllt, so liest

Fig. 890.

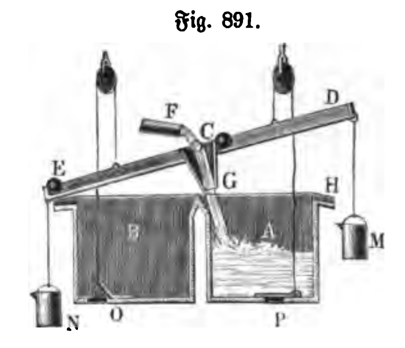


man auf der Uhr einen zweiten Zeitpunkt ab und bringt die Klappe wieder in die erste Stellung. Aus dem mittleren Querschnitte F des Gefäßes und der Höhe $ZZ_1 = s$ des Wasserkörpers ergiebt sich das ganze Wasserquantum $V = Fs$, und hieraus wieder mittels der durch die Differenz der beobachteten Zeiten gegebenen Füllungszeit t das Wasserquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{Fs}{t}.$$

Anmerkung. Um ein veränderliches Zuflußwasserquantum zu jeder Tageszeit angeben zu können, kann man den in Fig. 891 abgebildeten Cubir-Apparat, wie er vorzüglich auf Salinen vorkommt, anwenden. Hier giebt es zwei Aichgefäße A und B, die sich abwechselnd füllen und leeren, und das durch eine Röhre F zugeführte Wasser geht durch eine kurze Röhre CG, welche mit einem um C drehbaren Hebel DE fest verbunden ist. Hat sich das eine Gefäß, z. B. A, gefüllt, so fließt das Wasser durch ein kleines Gerinne H in das Eimerchen M, dieses zieht nun den Hebel auf der einen Seite nieder, und es kommt die Röhre CG in eine Lage, wodurch das Wasser nach B geleitet wird. Das Aufziehen der Klappen O und P erfolgt durch über Rollen weggehende Schnüre, deren Enden mit dem Hebel verbunden sind, und wird vorzüglich durch eiserne Kugeln unterstützt, die dem Niedergehen des Hebels den letzten Impuls ertheilen. Die Eimer M und N enthalten noch kleine Ausflußöffnungen, damit sie sich nach jedesmaligem Kippen leeren können. Uebrigens ist noch ein Zählapparat angebracht, an welchem die Zahl der Spiele zu jeder Zeit abgelesen werden kann. Andere Apparate dieser Art von Brown beschreibt Dingler's polyt. Journal Bd. 115. Ueber einen neuen Wassermeßapparat von Noeggerath siehe „Polyt. Centralblatt 1856. Heft 5." Vergleiche ferner die angeführten Werke von Francis, Lesbros u. s. w. Siehe auch weiter unten unter Wassermesser.

Fig. 891.



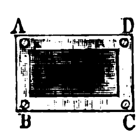
Ausflussregulatoren. Sehr häufig werden kleinere und mittlere Wassermengen mit Hülfe ihres Ausflusses durch eine bestimmte Mündung und unter einem bekannten Drucke gefunden. Aus dem Inhalte F der Mündung, aus der Druckhöhe h und mit Hülfe eines Ausflußcoefficienten μ ergiebt sich die Wassermenge pr. Secunde: §. 508.

$$Q = \mu F \sqrt{2gh}.$$

Am besten eignen sich hierzu die Poncelet'schen Mündungen, weil für diese bei sehr verschiedenen Druckhöhen die Ausflußcoefficienten mit großer Genauigkeit bekannt sind (§. 437); jedoch sind dieselben nur bei gewissen mittleren Wassermengen anwendbar. Der Verfasser bedient sich bei seinen Wassermessungen vier solcher Mündungen, einer von 5, einer von 10, einer von 15

und einer von 20 Centimeter Höhe, jeder aber von 20 Centimeter Weite. Diese Mündungen sind in Messingtafeln ausgeschnitten, welche auf hölzernen Rahmen *A C*, Fig. 892, aufsitzen, die man mittels vier starker eiserner Schrauben an jeder Wand befestigen kann. In vielen Fällen muß man sich freilich größerer Mündungen bedienen, für welche die Ausflußcoefficienten nicht so sicher bestimmt sind, ja oft lassen sich nur Ueberfälle anbringen, welche meist noch weniger Genauigkeit gewähren. Jedenfalls gilt aber die Regel, daß man bei dem Ausflusse so viel wie möglich vollständige und vollkommene Contraction zu erzielen suchen und deshalb der Mündung, wenn sie in einer dickeren Wand befindlich ist, nach außen eine Abschrägung ertheilen muß. Welche Correctionen bei unvollkommener und partieller Contraction anzubringen sind, ist in den §§. 441, 442 u. s. w. hinreichend auseinandergesetzt worden.

Fig. 892.



Um das Wasser eines Gerinnes zu messen, hat man das Mündungsstück einzusetzen und den Moment abzuwarten, wann der Wasserstand in Beharrung gekommen ist. Zur Messung der Druckhöhe kann man sich der festen Wasserstandsscala *KL* mit Zeiger, Fig. 893, oder der beweglichen Wasserstandsscala *EF*, Fig. 894, bedienen. Will man den Ausfluß unmittelbar

Fig. 893.

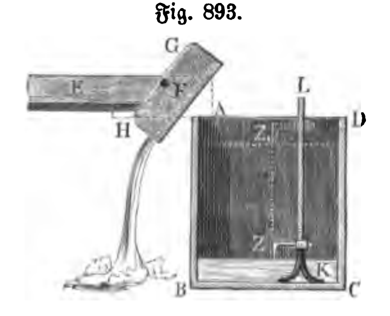
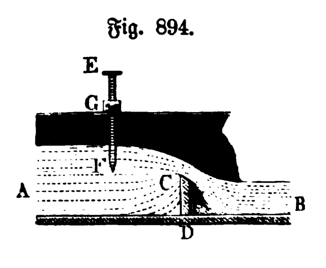
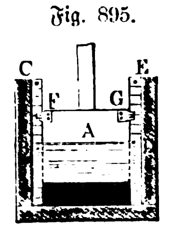


Fig. 894.



an Schutzöffnungen beobachten, so ist es gut, vorher ein Paar messingene **Schützenstandsscalen** *BC* und *DE*, Fig. 895, nebst ihren Zeigern *F* und *G* auf die Führung und auf das Schutzbrett *A* zu befestigen, um die Oeffnungshöhe sicherer ablesen zu können. Uebrigens ist es meist besser, zu dem Zwecke der Wassermessung gleich ein neues Schutzbrett nebst einer Führung mit der erforderlichen Abschrägung nach außen einzusetzen.

Fig. 895.



Das einfachste Mittel, das Wasser in einem Gerinne zu messen, besteht allerdings in dem Einsetzen eines an der **oberen Kante abgeschrägten Brettes** *CF*,

Fig. 780, und in der Ausmessung des dadurch gebildeten Ueberfalles. Ist der Graben oder das Gerinne lang und wenig ansteigend, so dauert es allerdings ziemlich lange, ehe der Beharrungszustand eintritt, und es ist deshalb gut, hier vor der Messung noch ein zweites Brett einzusetzen, welches den Ausfluß des Wassers auf eine längere Zeit verhindert, um das Steigen des Wassers auf die dem Beharrungszustande entsprechende Höhe zu beschleunigen.

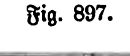
Um das Wasserquantum eines Baches zu messen, kann man denselben durch einen aus Pfählen und Brettern bestehenden Einbau AB, Fig. 896, eindämmen und das Wasser durch eine in demselben angebrachte Oeffnung C abfließen lassen, oder man kann sich auch eines einfachen Ueberfalles oder Ueberfallwehres (hiervon im zweiten Theile) bedienen.

Fig. 896.



Anmerkung. Das einfachste Mittel, um die Druckhöhe zu bestimmen, ist, den Stand des Zeigers zu beobachten, wenn dessen Spitze erstens die Oberfläche des im Beharrungszustande abfließenden Wassers und zweitens den Spiegel des stillstehenden und nur bis Schwelle C aufgestauten Wassers berührt. Die Differenz dieser beiden Scalenstände ist die Druckhöhe oder der Stand des Wassers über der Schwelle. Bei Beobachtung des letzten Zeigerstandes ist die Capillarität nicht außer Acht zu lassen, vermöge welcher der Wasserspiegel noch um 1,37 Linien über oder unter der Schwelle stehen kann, ehe der Abfluß des Wassers über derselben beginnt oder aufhört. (Siehe §. 407.)

Sehr einfach wird auch das Wasser in einem rectangulären Canale oder §. 509.
Gerinne AB, Fig. 897 und 898, gemessen, wenn man ein unten abgeschrägtes Brett CD so einsetzt, daß unter demselben eine Ausflußöffnung CE übrig bleibt, durch welche das Wasser abfließen kann. Diese Methode hat vor der Anwendung eines Ueberfalles den Vorzug, daß bei ihr das


Fig. 897.

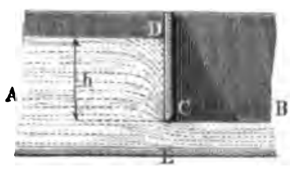
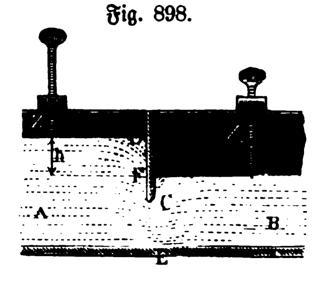


Fig. 898.



gespannte Wasser mehr zur Ruhe kommt, und deshalb die Messung der Druckhöhe schärfer zu vollziehen ist. Wenn es möglich ist, suche man einen freien Ausfluß, wie Fig. 897, herbeizuführen, weil hierbei eine größere Genauigkeit zu erlangen ist; bei einer großen Wassermenge ist es jedoch nicht möglich, das Zurückstauen des Unterwassers zu verhindern, und man muß sich daher mit einem Ausflusse unter Wasser, Fig. 898, begnügen. Endigt sich das Gerinne kurz hinter der Mündung, bildet es also ein sogenanntes kurzes Ansatzgerinne, so fließt das Wasser durch dasselbe fast frei ab, und man hat es dann mit einem Falle der Lesbros'schen Versuche (§. 445) zu thun. Bezeichnet a die Mündungshöhe, b die Mündungsbreite, ferner h die Druckhöhe, bis Mitte der Mündung gemessen, und μ den aus Tab. II, §. 445, zu nehmenden Ausflußcoefficienten, so hat man das Ausflußquantum

$$Q = \mu a b \sqrt{2 g h}.$$

Ist hingegen das Gerinne lang, oder das abfließende Wasser gestaut, so daß es eine horizontale Oberfläche hat, so fließt das Wasser in allen Stellen des Mündungsquerschnittes mit einer und derselben, dem Niveauabstande zwischen der Oberfläche des Oberwassers A und der Oberfläche des Unterwassers B entsprechenden Geschwindigkeit ab, es ist daher dann in der letzten Formel für Q, unter h dieser Niveauabstand zu verstehen.

Fließt das Wasser in die freie Luft, oder steht der Unterwasserspiegel nicht über der oberen Mündungskante, wie Fig. 897 vor Augen führt, so hat man sowohl für eine scharfe als auch für eine abgerundete Mündungskante,

$$\mu = 0{,}965$$

einzusetzen, und folglich bei der Strahldicke a und Breite b,

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{2 g h},$$

oder genauer, wenn a_1 die Tiefe des zu- und a die des abfließenden Wassers bezeichnet, nach §. 425:

$$Q = 0{,}965\, a b \sqrt{\frac{2 g h}{1 - \left(\frac{a}{a_1}\right)^2}}.$$

Bei dem Ausflusse unter Wasser, wobei der Unterwasserspiegel über der oberen Mündungskante steht (s. Fig. 898), bildet sich hinter der Mündungswand ein Wasserwirbel, wobei der Ausfluß wesentlich gestört wird, und es ist hier, einigen Versuchen des Verfassers zufolge, für eine Mündung mit scharfer Mündungskante im Mittel,

$$\mu = 0{,}462,$$

und dagegen für eine solche mit nach einem Quadranten abgerundeter Kante,

$$\mu = 0{,}717$$

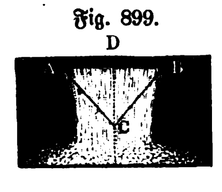
zu setzen.

Beispiel. Um die Wassermenge zu finden, welche ein Gerinne AB, Fig. 898, fortführt, hat man ein scharfkantiges Brett CD in dasselbe eingesetzt, und dadurch einen Ausfluß unter Wasser hergestellt, übrigens aber Folgendes gefunden. Weite der Mündung oder des Gerinnes, $b = 1$ Meter, Oeffnungshöhe oder Abstand CE der Brettkante C vom Gerinnboden, $a = 0,15$ Meter, Stand des Zeigers Z auf der Seite des Oberwassers $h_1 = 0,145$ und Stand des Zeigers Z_1 über dem Unterwasser, $h_2 = 0,32$ Meter. Es ist hiernach der Niveauabstand: $h = h_2 - h_1 = 0,32 - 0,145 = 0,175$ Meter, und die gesuchte Wassermenge:

$$Q = 0,462 \,.\, 4,429 \,.\, 1 \,.\, 0,15 \sqrt{0,175} = 0,128 \text{ Cubikmeter.}$$

Wäre der Ausflußcoefficient bei ähnlichen Mündungsquerschnitten immer §. 510.
derselbe, so würde der trianguläre Ueberfall oder zweiseitige Wandeinschnitt ABC, Fig. 899, einen besonderen Vorzug vor dem Ueberfall mit horizontaler Schwelle haben, dies ist jedoch, wie schon an Kreismündungen wahrgenommen werden kann, bei kleinen Mündungen nicht, und bei großen Mündungen nur annähernd richtig. Solche Wandeinschnitte empfiehlt Herr Professor Thomsen in Belfast als Hülfsmittel zum Wassermessen. Aus der Breite $AB = b$ und der Höhe $CD = h$ folgt hier das Wasserquantum

Fig. 899.



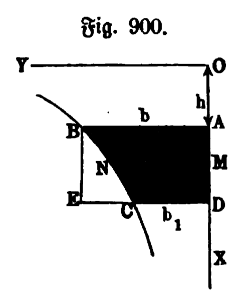
$$Q = {}^8/_{15} \frac{\mu b h}{2} \sqrt{2gh} \text{ (s. §. 429),}$$

und wenn man nach Thomson den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,619$ setzt,

$$Q = 0,33 \frac{bh}{2} \sqrt{2gh} = 0,73\, b h^{3/2} \text{ Cubikmeter.}$$

Zum Wassermessen eignen sich auch solche Mündungen, bei welchen die Wassermenge der Mündungshöhe proportional ist. Ist dieselbe mit einem Schutzbrette versehen, so giebt dann die Größe des Schützenzuges das Maß der Ausflußmenge an. Es sei die Druckhöhe über der oberen Kante einer solchen Mündung $ABCD$, Fig. 900, $OA = h$, die Länge dieser Kante $AB = b$, die der unteren Kante $CD = b_1$ und die Höhe der Mündung $AD = a$. Horizontale Linien im Abstande $\frac{a}{n}$ von einander theilen die Mündung in gleichhohe Streifen, wovon jeder eine und dieselbe Wassermenge $\frac{Q}{n}$ geben soll. Für den oberen Spalt oder Streifen, welcher die Breite b und Druckhöhe h hat, ist

Fig. 900.



$$\frac{Q}{n} = \frac{ba}{n} \sqrt{2gh},$$

und dagegen für einen Streifen, welcher um $OM = x$ unter dem Wasserspiegel liegt, und die Breite $MN = y$ hat, ist

$$\frac{Q}{n} = \frac{y\,a}{n}\sqrt{2\,g\,x};$$

folglich hat man, wenn man diese beiden Ausdrücke für $\frac{Q}{n}$ einander gleich setzt,

$$y\sqrt{x} = b\sqrt{h}, \text{ oder}$$

$$\frac{y}{b} = \sqrt{\frac{h}{x}}.$$

Die Curve BNC, welche die Mündung an der Seite begrenzt, gehört einem aus Artikel 9 der analytischen Hülfslehren bekannten Curvensysteme an, welches die Horizontale OY und die Verticale OX zu Asymptoten hat.

Aus Q, h und a folgt:

1) die obere Mündungsbreite $b = \frac{Q}{a\sqrt{2\,g\,h}}$,

2) Mündungsbreite in der Tiefe x, $y = b\sqrt{\frac{h}{x}}$ und

3) die untere Mündungsbreite $b_1 = b\sqrt{\frac{h}{h+a}}$.

Ferner ist der Inhalt der Mündung:

$$F = 2b\left(\sqrt{h\,(h+a)} - h\right),$$

und daher die mittlere Druckhöhe:

$$z = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F}\right)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{h\,(h+a)} - h}\right)^2 \cdot \frac{h}{4}.$$

Ist diese Mündung mit einer Schütze AE versehen, so giebt der Schützenzug $DM = a_1$ eine Ausflußöffnung MC, durch welche die Wassermenge $Q_1 = \frac{a_1}{a}Q$ fließt.

§. 511. **Prony's Methode.** Da es oft lange dauert, ehe der Beharrungszustand von dem durch einen Einbau aufgestauten Wasser eintritt, so kann man folgendes von Prony vorgeschlagene Verfahren mit Vortheil anwenden. Zuerst verschließe man die Mündung durch ein Schutzbrett ganz und lasse dadurch das Wasser ziemlich hoch, oder so weit es die Umstände erlauben, aufstauen; jetzt ziehe man das Schutzbrett so weit auf, daß mehr Wasser ab- als zufließt, und messe nun während der Ausflußzeit t die Wasserstände in gleichen und möglichst kleinen Zeitabständen; endlich verschließe man die Schutzöffnung wieder völlig und beobachte noch die Zeit t_1, innerhalb welcher das Wasser auf die erste Höhe steigt. Jedenfalls ist dann im Laufe der ganzen Beobachtungszeit $t + t_1$ ebenso viel Wasser zu- als abgeflossen, und

es läßt sich daher durch das Ausflußquantum in der Zeit t das Zuflußquantum in der Zeit $t + t_1$ ausdrücken. Sind die Druckhöhen während des Sinkens h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4, so hat man die mittlere Ausflußgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\sqrt{2g}}{12}\left(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}\right) \text{ (s. §. 480)},$$

und ist nun der Inhalt der Schutzöffnung $= F$, so hat man das Ausflußquantum in der Zeit t:

$$V = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12}\left(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}\right),$$

und daher das Zuflußquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{V}{t + t_1} = \frac{\mu F t \sqrt{2g}}{12(t + t_1)}\left(\sqrt{h_0} + 4\sqrt{h_1} + 2\sqrt{h_2} + 4\sqrt{h_3} + \sqrt{h_4}\right).$$

Beispiel. Um das zum Umtriebe eines Wasserrades zu benutzende Wasser eines Baches zu messen, hat man dasselbe durch eine Spundwand, Fig. 896, eingedämmt und nach Eröffnung der rectangulären Mündung in derselben Folgendes beobachtet: anfängliche Druckhöhe 0,6 Meter, nach 30 Sec. 0,55 Meter, nach 60 Sec. 0,48 Meter, nach 90 Sec. 0,40, nach 120 Sec. 0,34, nach 150 Sec. 0,30 Meter, nach 180 Sec. 0,27 Meter; Breite der Oeffnung 0,5 Meter, Höhe der Oeffnung 0,15, Zeit zum Zurücksteigen auf die erste Höhe bei verschlossener Oeffnung 120 Secunden. Wie viel Wasser führt der Bach pro Secunde zu?

Zunächst beträgt die mittlere Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \frac{4{,}429}{18}\left(\sqrt{0{,}6} + 4\sqrt{0{,}55} + 2\sqrt{0{,}48} + 4\sqrt{0{,}40} + 2\sqrt{0{,}34} + 4\sqrt{0{,}30} + \sqrt{0{,}27}\right)$$
$$= 2{,}838 \text{ Meter},$$

und da $F = 0{,}5 \,.\, 0{,}15 = 0{,}075$ Quadratmeter ist, so folgt das gesuchte Wasserquantum unter Annahme eines Ausflußcoefficienten von 0,60 zu:

$$Q = \frac{0{,}6 \,.\, 0{,}075 \,.\, 2{,}838 \,.\, 180}{180 + 120} = 0{,}0766 \text{ Cubikmeter} = 76{,}6 \text{ Liter}.$$

Wasserzoll. Um kleine Wassermengen zu messen, bedient man §. 512.
sich auch wohl des Ausflusses durch kreisrunde, 1 Zoll weite Mündungen in einer dünnen Wand unter einem gegebenen Drucke. Man nennt die Wassermenge, welche eine solche Oeffnung unter dem kleinsten Drucke, oder dann, wenn der Wasserspiegel nur eine Linie über der obersten Stelle der Mündung steht, einen Wasser- oder Brunnenzoll. Die Franzosen nehmen an, daß einem Wasserzolle (alt Paris. Maß) in 24 Stunden 15 Pinten oder 19,1953 Cubikmeter Wasser, also

in 1 Stunde 0,7998 Cubikmeter und
in 1 Minute 0,01333 „

entspricht, doch weichen ältere Angaben von Mariotte, Couplet und Bossut hiervon nicht unbedeutend ab. Nach Hagen liefert ein Wasserzoll (für das preuß. Maß) in 24 Stunden 520 Cubikfuß, also in der Minute 0,3611 Cubikfuß. Der Prony'sche doppelte Wassermodul, welcher einer

Mündung von 2 Centimeter Durchmesser bei 5 Centimeter Druck entspricht und in 24 Stunden 20 Cubikmeter Wasser liefert, hat keine allgemeine Aufnahme gefunden.

Die Beobachtungen lassen sich sicherer anstellen, wenn man eine größere Druckhöhe hat; am einfachsten ist es, wenn man diese Höhe, wie den Durchmesser der Mündung, 1 Zoll annimmt. Nach den Herren Bornemann und Röting giebt ein solcher Wasserzoll täglich 642,8 Cubikfuß Wasser (s. „Ingenieur" Seite 463).

Der Apparat, an dem man mit Hülfe von Wasserzollen das Wasser mißt, ist in Fig. 901 abgebildet. Das zu messende Wasser fließt durch die Röhre *A* in einen Kasten *B*, aus diesem tritt es durch unten in der Scheidewand *CD* angebrachte Löcher in den Kasten *E*, und aus diesem fließt es durch eine horizontale Reihe von genau 1 Zoll weiten und in Blech ausgeschnittenen kreisrunden Mündungen *F* in das Reservoir *G*. Damit sich aber der Wasserspiegel nur eine Linie über den Köpfen dieser Mündungen stellt, ist es nöthig, daß diese in hinreichender Zahl vorhanden seien, und daß man einen Theil derselben durch Stöpsel verschließe. Zur genaueren Angabe bringt man noch Mündungen F_1 an, welche $^1/_2$, $^1/_4$ Wasserzoll durchlassen. Bei großen Wassermengen theilt man wohl erst das ganze Wasser, und mißt auf diese Weise nur einen Theil, z. B. den zehnten. Dieses Theilen ist leicht dadurch zu bewirken, daß man das Wasser erst in ein Reservoir mit einer gewissen Anzahl, in gleichem Niveau befindlicher Mündungen leitet, und nur das von der einen Mündung gelieferte Wasser in dem oben abgebildeten Apparate auffängt.

Fig. 901.



Anmerkung. Man kann auch die Hähne und andere Regulirungsapparate zur Wassermessung anwenden, wenn man den jeder Stellung entsprechenden Widerstandscoefficienten kennt. Ist h die Druckhöhe, F der Querschnitt des Rohres und μ der Ausflußcoefficient bei völlig geöffnetem Hahne, so hat man die Ausflußmenge:

$$Q = \mu F \sqrt{2gh},$$

sowie umgekehrt:

$$\mu = \frac{Q}{F\sqrt{2gh}} \text{ und } \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{F}{Q}\right)^2 \cdot 2gh.$$

Setzt man nun den einer bestimmten Hahnstellung entsprechenden und aus den oben

mitgetheilten Tabellen zu entnehmenden Widerstandscoefficienten $= \zeta$, so hat man die entsprechende Ausflußmenge:

$$Q_1 = F\sqrt{\frac{2gh}{\frac{1}{\mu^2} + \zeta}} = \frac{\mu F \sqrt{2gh}}{\sqrt{1 + \mu^2\zeta}} = \frac{Q}{\sqrt{1 + \mu^2\zeta}}$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{1 + \zeta\left(\frac{Q}{F}\right)^2 \cdot \frac{1}{2gh}}}.$$

Zur Bequemlichkeit kann man sich hiernach eine Tabelle construiren, so daß es nur eines Blickes auf diese bedarf, um die einer gewissen Hahnstellung entsprechende Ausflußmenge, oder um die einem gegebenen Ausflußquantum entsprechende Stellung des Hahnes zu finden. Ist z. B. $\mu = 0{,}7$ und $F = 0{,}0025$ Quadratmeter, so hat man:

$$Q_1 = \frac{0{,}7\ .\ 0{,}0025\ .\ 4{,}429\sqrt{h}}{\sqrt{1 + 0{,}49\,\zeta}} = 0{,}00775\sqrt{\frac{h}{1 + 0{,}49\,\zeta}} \text{ Cubikmeter,}$$

oder wenn h constant gleich 1 Meter vorausgesetzt wird:

$$Q_1 = \frac{0{,}00775}{\sqrt{1 + 0{,}49\,\zeta}} \text{ Cubikmeter} = \frac{7{,}75}{\sqrt{1 + 0{,}49\,\zeta}} \text{ Liter.}$$

Wenn den Hahnstellungen von 5°, 10°, 15°, 20°, 25° u. s. w. die Widerstandscoefficienten 0,05, 0,29, 0,75, 1,56, 3,10 u. s. w. (s. §. 470, Tab. IV) zukommen, so entsprechen denselben die Ausflußmengen: 7,67, 7,25, 6,62, 5,84, 4,89 Liter.

Um den Ausfluß durch eine Mündung F, Fig. 902, zu reguliren, wendet §. 513.
man auch einen Hahn oder eine Klappe A, Fig. 902, an, welche durch einen

Fig. 902.

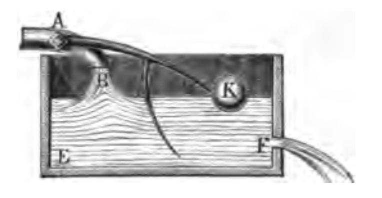


Fig. 903.



Schwimmer K mittels eines Hebels regulirt wird, so daß durch B immer nur so viel Wasser zu-, als durch F abfließt.

Sehr einfach läßt sich auch der Abfluß des Wassers aus einem Reservoir BDE, Fig. 903, durch eine tiefere Mündung oder Röhre D, mittels eines breiten Ueberfalles B reguliren, da hier eine mäßige Veränderung des Wasserzuflusses durch A eine mäßige Vergrößerung des Wasserstandes über der Schwelle B und eine verhältnißmäßig unbedeutende Vergrößerung der Druckhöhe der Ausflußmündung zur Folge hat.

Bezeichnet F die Größe der Ausmündung D, h die Höhe der Ueberfallschwelle über der Mitte dieser Mündung, h_1 die Höhe des Wasserspiegels

über der gedachten Schwelle, so hat man bei dem Ausflußcoefficienten μ das Abflußquantum durch D:

$$Q = \mu F \sqrt{2g(h + h_1)}.$$

Setzt man die Druckhöhe h_1 des Ueberfalles, welche sich aus dem Abflußquantum Q_1, der Breite b_1 und dem Ausflußcoefficienten μ_1, mittels der Gleichung

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu_1 b_1 \sqrt{2 g h_1^3}, \text{ oder durch die Formel}$$

$$h_1 = \left[\frac{1}{2g}\left(\frac{3/2\, Q_1}{\mu_1 b_1}\right)^2\right]^{1/3},$$

bestimmen läßt, in diesen Ausdruck ein, so erhält man die Formel

$$Q = \mu F \sqrt{2gh + \left(\frac{3 g Q_1}{\mu_1 b_1}\right)^{2/3}},$$

woraus zu ersehen ist, daß sich Q mit Q_1 um so weniger verändert, je größer die Schwellenhöhe h und je größer die Breite b_1 des Ueberfalles ist.

Die Ueberfallbreite b_1 läßt sich dadurch leicht vergrößern, daß man dem Ueberfall eine Bogenform, wie BOB, Fig. 904, giebt. Die Ausmündung D liefert dann ein ziemlich constantes Wasserquantum, obgleich der Zufluß bei A sehr variabel ist, weil die Höhe des Wassers über der langen bogenförmigen Schwelle immer klein bleibt gegen die Höhe dieser Schwelle über der Mitte der Ausflußöffnung.

Fig. 904.

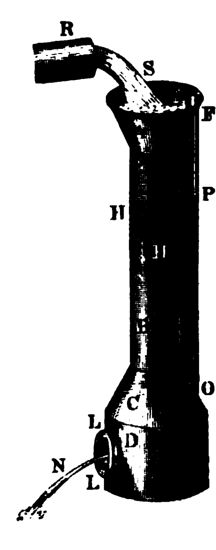


Anmerkung. Einen solchen Wassertheiler aus Eisenblech hat der Herr Oberkunstmeister Schwamkrug für den Wernergraben bei Freiberg construirt. Derselbe führt durch die rectanguläre Mündung D von 1,57 Meter Breite und 0,314 Meter Höhe fast constant 1,25 Cubikmeter Wasser pr. Secunde ab, während das übrige Wasser durch den Ueberfall, dessen Schwelle 0,63 Meter über der oberen Mündungskante liegt, in den Graben fließt, welcher es nach dem Punkte des Bedarfs fortführt.

§. 514. **Hydrometrischer Becher.** Zur Ausmessung geringer fließenden Wassermengen kann man sich eines kleinen in Fig. 905 abgebildeten Gefäßes bedienen, welchem ich den Namen hydrometrischer Becher gegeben habe. Dieses Instrument besteht aus einer 8 Centimeter weiten und 30 Centimeter langen Röhre B mit einem trichterförmigen Einmündungsstücke A und einem 16 Centimeter weiten und ebenso hohen Gefäße D, welches durch ein conisches Zwischenstück C mit B fest verbunden ist. Dieses Gefäß ist mit einem Seitenloch LL versehen, in welches verschiedene, kreisförmige Mündungen in der dünnen

Wand bildende Mundstücke eingesetzt werden können. Man hält dieses Instrument mittels der Henkel H, H unter das z. B. durch eine Röhre R ausfließende Wasser S und läßt das auf diese Weise abgefangene Wasser wieder durch das Mundstück LL abfließen. Um das eingeflossene Wasser zu beruhigen, ist noch in dem Reservoir D ein feines Sieb angebracht, und um die Druckhöhe des Wassers beobachten zu können, ist eine Glasröhre OP angesetzt, welche an einer Messingscala aufsteigt und sich unten, 12 Millimeter über dem Boden des Gefäßes D, endigt. Aus der beobachteten Druckhöhe h, dem bekannten Querschnitt des Mundstückes und dem entsprechenden Ausflußcoefficienten läßt sich dann die Ausflußmenge mittels der Formel

Fig. 905.



$$Q = \mu F \sqrt{2gh}$$

berechnen.

Wenn man sich eine kleine Tabelle anfertigt, so kann man die Berechnung nach dieser Formel ganz ersparen, und es ist höchstens eine einfache Interpolation zu den Tabellenwerthen erforderlich. Ist d der Durchmesser der Mündung, so hat man

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \text{ und daher:}$$

$$Q = \frac{\mu \pi}{4} d^2 \sqrt{2gh} = \frac{\mu \pi}{4} \sqrt{2g} \cdot d^2 \sqrt{h}.$$

Die Ausflußmenge Q wird sowohl das Doppelte bei dem doppelten Querschnitte oder doppelten d^2, als auch bei der vierfachen Druckhöhe. Richtet man daher das Instrument so ein, daß die Maximaldruckhöhe das Vierfache der Minimaldruckhöhe, z. B. jene 40 und diese 10 Centimeter beträgt, und bedient man sich einer Sammlung von Mundstücken, deren Durchmesser die geometrische Reihe

$$d,\ \sqrt{2}\,.\,d,\ 2\,d,\ 2\sqrt{2}\,.\,d,\ 4\,d \text{ u. s. w.}$$

d. i. d, $1{,}414\,d$, $2\,d$, $2{,}828\,d$, $4\,d$ u. s. w.

bilden, so erhält man dadurch ein Mittel, zur Bestimmung aller Wassermengen innerhalb des Minimums, welches die kleinste Mündung mit dem Durchmesser d bei der kleinsten Druckhöhe h giebt, und des Maximums, welches der größten Mündung mit dem Durchmesser $\sqrt{n}\,.\,d$ und der größten Druckhöhe $4\,h$ entspricht.

Nimmt man für das Mundstück

Nr.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
$d =$	5 mm	$5 . \sqrt{2}$ = 7,07 mm	5 . 2 = 10 mm	$5 . 2\sqrt{2}$ = 14,14 mm	5 . 4 = 20 mm	$5 . 4\sqrt{2}$ = 28,28 mm
$\mu =$	0,67	0,66	0,64	0,63	0,62	0,61

an, so läßt sich folgende, zum Gebrauche nützliche Tabelle zusammenstellen.

Tabelle

der stündlichen Wassermengen vorstehender Mündungen in Cubikmetern.

Druckhöhe h in Metern.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
0,1	0,066	0,131	0,253	0,499	0,983	1,931
0,125	0,074	0,146	0,283	0,558	1,094	2,157
0,150	0,081	0,160	0,310	0,611	1,200	2,365
0,175	0,088	0,173	0,335	0,656	1,296	2,554
0,200	0,094	0,185	0,359	0,706	1,386	2,730
0,225	0,100	0,196	0,380	0,749	1,469	2,896
0,250	0,105	0,207	0,400	0,789	1,554	3,057
0,275	0,110	0,216	0,420	0,828	1,624	3,201
0,300	0,115	0,226	0,439	0,865	1,698	3,346
0,325	0,119	0,235	0,457	0,899	1,767	3,483
0,350	0,124	0,245	0,474	0,934	1,835	3,617
0,375	0,129	0,253	0,491	0,966	1,897	3,740
0,400	0,133	0,260	0,507	0,997	1,959	3,861

Der Gebrauch dieser Tabelle ist aus folgendem Beispiele zu ersehen.

Beispiel. Um die Ergiebigkeit eines Brunnens zu ermitteln, hat man das Wasser desselben durch einen hydrometrischen Becher fließen lassen und gefunden, daß beim Ausflusse durch die Mündung IV. (von 14,14 Millimeter Durchmesser) der Beharrungszustand eintrat, als die Druckhöhe 0,285 Meter war. Der Tabelle zufolge ist für $h = 0,275$:

$$Q = 0,828 \text{ Cubikmeter,}$$

und für $h = 0,300$:

$$Q = 0,865 \text{ Cubikmeter,}$$

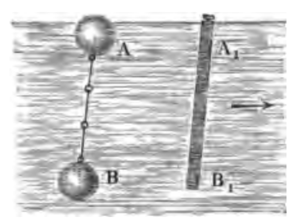
folglich ergiebt sich im vorliegenden Falle die Wassermenge pro Stunde zu:

$$Q = 0,828 + \frac{285 - 275}{300 - 275}(0,865 - 0,828) = 0,843 \text{ Cubikmeter.}$$

Schwimmer. Die Wassermengen von größeren Bächen, Canälen und von Flüssen lassen sich nur mittels der die Geschwindigkeit angebenden Hydrometer bestimmen. Unter diesen Instrumenten sind aber die Schwimmer die einfachsten. Man kann zwar hierzu jeden schwimmenden Körper gebrauchen, doch ist es sicherer, Körper von mittlerer Größe, welche nur wenig specifisch leichter als Wasser sind, zu verwenden. Körper von einigen Cubikdecimetern Inhalt sind hinreichend groß. Sehr große Körper nehmen nicht leicht die Geschwindigkeit des Wassers an, und sehr kleine Körper lassen sich wieder, namentlich wenn sie viel aus dem Wasser hervorragen, leicht durch zufällige Umstände, zumal durch die Luft über dem Wasserspiegel, in ihrer Bewegung stören. Oft wendet man einfache Holzstücke an, gut ist es aber, wenn dieselben mit einer hellen Firnißfarbe überstrichen sind, und noch besser sind die hohlen Schwimmer, wie Glasflaschen, Blechkugeln u. s. w., weil man diese nach Belieben mit Wasser füllen kann. Am häufigsten wendet man aber die Schwimmkugeln an. Dieselben werden von 1 bis 3 Decimeter Durchmesser aus Messingblech verfertigt, sie bekommen, um sie nicht leicht aus dem Auge zu verlieren, einen Anstrich von lichter Oelfarbe, und erhalten auch noch eine Oeffnung mit einem Halse, um sie mit Wasser anfüllen und verstöpseln zu können. Eine solche Schwimmkugel *A*, Fig. 906, giebt allerdings nur die Geschwindigkeit an der Oberfläche und sogar oft nur die im Stromstriche an, allein man kann durch das Aneinanderhängen zweier Kugeln *A* und *B*, Fig. 907, auch die Geschwindigkeiten in verschiedenen Tiefen bestimmen. §. 515.

Fig. 906.

Fig. 907.



In diesem Falle wird die eine Kugel *B*, welche unter Wasser schwimmen soll, ganz mit Wasser, die andere aber, welche im Wasserspiegel zu schwimmen bestimmt ist, nur so viel mit Wasser angefüllt, daß sie noch wenig aus dem Wasser hervorragt. Beide Kugeln werden durch einen Faden oder einen Draht oder durch eine dünne Drahtkette mit einander verbunden. Zuerst bestimmt man durch die einfache Kugel die Oberflächengeschwindigkeit c_0, und dann beobachtet man durch die Kugelverbindung die mittlere Geschwindigkeit c beider; bezeichnet man nun die Geschwindigkeit in der Tiefe der zweiten Kugel durch c_1, so läßt sich setzen:

$$c = \frac{c_0 + c_1}{2} \text{ und daher umgekehrt: } c_1 = 2c - c_0.$$

Wenn man nun beide Kugeln durch längere und längere Drähte mit einander verbindet, so kann man auf diese Weise nach und nach die Geschwindig-

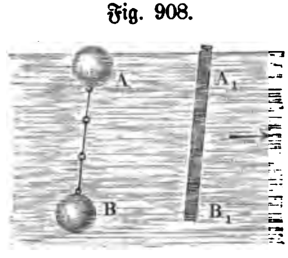
keiten in größeren und größeren Tiefen finden. Uebrigens ergiebt sich auch die mittlere Geschwindigkeit c eines Perpendikels, wenn man die zweite Kugel nahe über dem Boden schwimmen läßt und ebenfalls

$$c = \frac{c_0 + c_1}{2}$$

setzt; genauer aber noch, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Geschwindigkeiten in einem Perpendikel nimmt.

Um die mittlere Geschwindigkeit in einem Perpendikel anzugeben, wendet man auch oft den in Fig. 908 abgebildeten Schwimmstab $A_1 B_1$ an, namentlich ist dieser bei Messungen in Canälen und Gräben bequem, zumal wenn er aus kurzen Stücken zusammengeschraubt werden kann. Der Schwimmstab, welchen der Verfasser anwendet, ist aus 15 ausgehöhlten Theilen, jeder von 1 Decimeter Länge, zusammengesetzt. Damit derselbe ziemlich aufrecht schwimme, wird stets das unterste Stück so stark mit Schrot angefüllt, daß der Kopf beim Schwimmen nur wenig aus dem Wasser hervorragt. Die Anzahl der zusammenzuschraubenden Stücke hängt natürlich von der Tiefe des Canales ab.

Fig. 908.



An dem Schwimmstabe, sowie an der Schwimmkugelverbindung läßt sich auch wahrnehmen, daß bei ungehinderter Bewegung des Wassers in Betten die Geschwindigkeit am Wasserspiegel größer ist als am Boden, weil der Kopf des Stabes dem Fuße und die obere Kugel der unteren etwas vorausschwimmt. Nur bei durch Verengungen, z. B. durch Brückenpfeiler gebildeten Aufstauungen findet das Gegentheil statt.

Anmerkung. In der Regel ist, namentlich bei großen Schwimmern, wie Schiffen u. s. w., die Geschwindigkeit der schwimmenden Körper etwas größer als die des Wassers, weniger deshalb, weil diese Körper beim Schwimmen von einer durch die Oberfläche des Wassers gebildeten schiefen Ebene herabgleiten, als deshalb, weil sie nicht oder nur zum Theil an der unregelmäßigen inneren Bewegung des Wassers Theil nehmen; doch ist die Abweichung bei kleinen Schwimmern klein genug, um sie vernachlässigen zu können.

§. 516. **Geschwindigkeits- und Querschnittsbestimmung.** Die Geschwindigkeit einer Schwimmkugel findet man, indem man mit einer guten Secundenuhr oder an einem halbe Secunden schlagenden Lothe oder Pendel (§. 351) die Zeit t beobachtet, welche diese auf dem Wasser schwimmend braucht, um eine an einem Ufer abgesteckte und ausgemessene Strecke $AB = s$, Fig. 909, zurückzulegen. Es ist dann die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel $c = \frac{s}{t}$. Damit die Zeit t genau dem am Ufer abgemessenen Wege ent-

sprechend gefunden werde, ist es nöthig, mit Hülfe eines Winkelkreuzes oder Winkelspiegels am jenseitigen Ufer zwei, Perpendikel auf *AB* bezeichnende Signalstangen *C* und *D* einzustecken. Stellt man sich hinter *A*, so kann man den Zeitpunkt beobachten, wenn der etwas oberhalb *A* eingesetzte Schwimmer *K* in das Alignement *AC* kommt, und begiebt man sich hinter *B*, so kann man ebenfalls an der in der Hand gehaltenen Uhr beobachten, wann der Schwimmer in das Alignement *BD* gelangt, und man findet dann durch Subtraction der Beobachtungszeiten die gesuchte und der Durchlaufung von *s* entsprechende Zeit *t*.

Fig. 909.

Außer der mittleren Geschwindigkeit *c* des Wassers ist auch noch der Inhalt *F* des Querprofiles erforderlich, um das Wasserquantum $Q = Fc$ zu bestimmen. Um diesen Inhalt angeben zu können, ist es aber nöthig, daß man die Breite und mittlere Tiefe des Wassers kenne. Die Tiefe mißt man mit einer eingetheilten Sondirstange *AB*, Fig. 910, mit länglichem Querschnitte und einem Brettchen *B* am Fuße; bei größeren Tiefen kann man sich auch einer Sondirkette bedienen, an deren Ende eine eiserne Platte hängt, die sich beim Einsenken auf das Grundbett aufsetzt. Die Breite und die den gemessenen Tiefen entsprechenden Abscissen oder Abstände

Fig. 910.

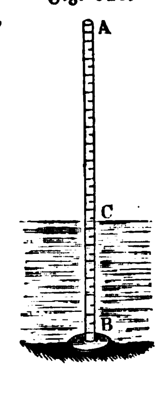
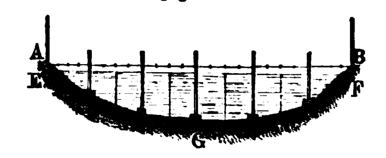


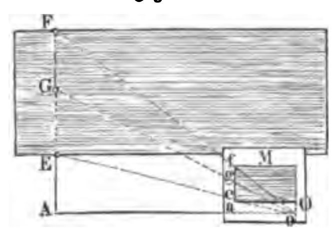
Fig. 911.



von den Ufern ergeben sich bei Canälen und schmalen Bächen *EFG*, Fig. 911, durch Ausspannen einer Meßkette *AB* oder Legen einer Stange u. s. w. quer über das fließende Wasser. Bei breiten Flüssen bestimmt man sie mit Hülfe eines Meßtisches *M*, den man in schicklicher Entfernung *AO* vom zu messenden Querprofile *EF*, Fig. 912 (a. f. S.), aufstellt. Ist *ao* auf der Mensel die verjüngte Entfernung *AO* der Standpunkte *A* und *O* von einander, und hat man *ao* in der Richtung von *AO* und dadurch auch die vorher beim Aufstellen des Meßtisches aufgetragene Breitenrichtung *af* mit der abgesteckten Breitenlinie *AF* parallel gestellt, so schneidet jede Visirlinie nach den Punkten *E*, *F*, *G* u. s. w. im Querprofile, entsprechende Punkte *e*, *f*, *g* auf der Mensel ab, und es sind *ae*, *af*, *ag* u. s. w. die Entfernungen *AE*, *AF*, *AG* u. s. w. im verjüngten Maße. Man hat

also beim Einsetzen der Sondirstange und dem dadurch bewirkten Tiefenmessen nicht erst nöthig, die Entfernungen der entsprechenden Punkte von den Ufern zu messen, wenn der am Meßtische stehende Ingenieur die Sondirstange beim Einsetzen in der Linie *EF* anvisirt.

Fig. 912.



Besteht nun die Breite *EF*, Fig. 911, eines Querprofiles aus den Theilen b_1, b_2, b_3 u. s. w. und sind die mittleren Tiefen innerhalb dieser Theile a_1, a_2, a_3, sowie die mittleren Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 u. s. w., so hat man den Inhalt des Querprofiles:

$$F = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots,$$

die Wassermenge:

$$Q = a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_3 c_3 + \cdots$$

und endlich die mittlere Geschwindigkeit:

$$c = \frac{Q}{F} = \frac{a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 + \cdots}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots}.$$

Beispiel. An einer ziemlich geraden und unveränderlichen Flußstrecke hat man Folgendes gefunden:

Breitentheile.	2	3,5	4,5	4	2,5 Meter.
Tiefen in den Mitten der Breitentheile	0,9	1,6	2,5	2,2	1,1 Meter.
Mittlere Geschwindigkeiten	0,6	0,8	0,85	0,82	0,7 "

Man hat daher den Inhalt des Querprofils:

$F = 2 . 0,9 + 3,5 . 1,6 + 4,5 . 2,5 + 4 . 2,2 + 2,5 . 1,1 = 30,2$ Quadratmeter

und das Wasserquantum:

$Q = 1,8 . 0,6 + 5,6 . 0,8 + 11,25 . 0,85 + 8,8 . 0,82 + 2,75 . 0,7 = 24,264$ Cubikmeter.

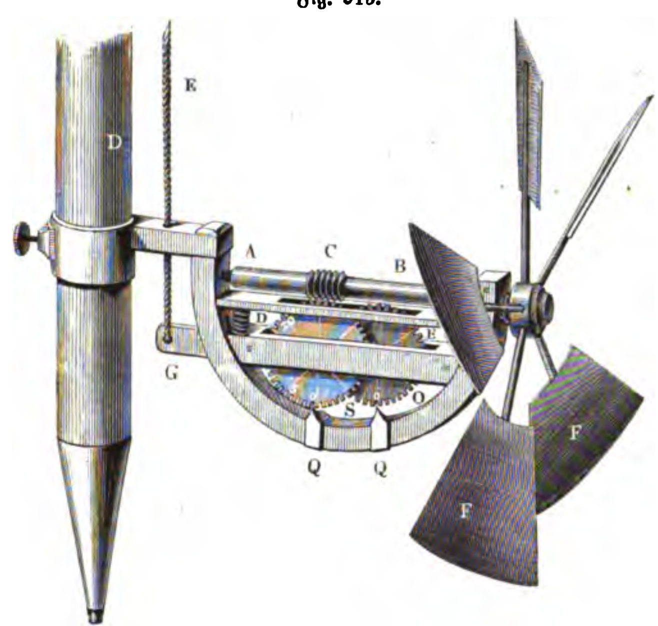
Die mittlere Geschwindigkeit beträgt:

$$c = \frac{24,264}{30,2} = 0,803 \text{ Meter.}$$

§. 517. **Hydrometrischer Flügel.** Das vorzüglichste Hydrometer ist das hydrometrische Flügelrad von Woltmann, Fig. 913. Es besteht aus

einer horizontalen Welle AB mit 2 bis 5 schief gegen die Axenrichtung stehenden Flächen oder Flügeln F, und giebt, unter das Wasser getaucht

Fig. 913.



und der Bewegungsrichtung desselben entgegengehalten, durch die Anzahl seiner Umdrehungen innerhalb einer gewissen Zeit die Geschwindigkeiten des fließenden Wassers an. Um die Anzahl dieser Umdrehungen ablesen zu können, erhält die Welle ein paar Schraubengänge C, und läßt man diese zwischen die Zähne eines Rades D greifen, auf dessen Seitenflächen Ziffern eingravirt sind, welche an einem festen Zeiger die Anzahl der Umdrehungen der Flügelwelle angeben. Um aber eine große Anzahl von Umdrehungen beobachten zu können, wird auf die Welle dieses Zahnrades noch ein Getriebe aufgesetzt, das in ein zweites Zahnrad E eingreift, an dem sich, gleichsam wie am Stundenweiser einer Uhr, vielfache, z. B. fünf- oder zehnfache der Flügelumdrehungen ablesen lassen. Hat z. B. jedes der beiden Zahnräder 50 Zähne, und das Getriebe deren 10, so dreht sich das zweite Rad um einen Zahn, während das erste um fünf Zähne fortrückt, oder das Flügelrad fünf Umdrehungen macht. Wenn der Zeiger des ersten Rades auf $12 = 10 + 2$ und der des zweiten auf 32 steht, so ist hiernach die entsprechende Umdrehungszahl des Flügels

$$n = 32 \,.\, 5 + 2 = 162.$$

Das ganze Instrument wird mit einer Blechfahne an einen Stab geschraubt,

um es bequem ins Wasser eintauchen und dem Strome entgegenhalten zu können. Damit aber das Räderwerk nur während der Beobachtungszeit umlaufe, läßt man seine Axen in Pfannen umgehen, welche auf einem Hebel GO sitzen, der durch eine Feder niedergedrückt wird, so daß ein Eingreifen der Zähne des ersten Rades in die Schraubengänge nur so lange statt hat, als man den Hebel mittels einer Schnur GE emporzieht.

Die Umdrehungszahl eines Flügels in einer gewissen Zeit, z. B. in einer Secunde, ist nicht genau der Geschwindigkeit des Wassers proportional, es läßt sich daher auch nicht $v = \alpha . u$, wo u die Umdrehungszahl, v die Geschwindigkeit und α die Erfahrungszahl bezeichnet, setzen; es ist vielmehr zu setzen:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder genauer:

$$v = v_0 + \alpha u + \beta u^2 \cdots,$$

oder noch genauer:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2},$$

wo v_0 diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, bei welcher das Wasser nicht mehr im Stande ist, den Flügel in Umdrehung zu setzen, α und β aber Erfahrungscoefficienten ausdrücken. Die Constanten v_0, α, β sind für jedes Instrument besonders zu ermitteln. Mit Hülfe derselben ergiebt sich durch eine einzige Beobachtung die Geschwindigkeit, doch ist es sicherer, deren immer wenigstens zwei anzustellen, und den mittleren Werth als den richtigen einzuführen.

Beispiel. Wenn bei einem Flügelrade $v_0 = 0{,}03$ Meter, $\alpha = 0{,}15$ und $\beta = 0$, also $v = 0{,}03 + 0{,}15\, u$ ist, und man hat bei einer Beobachtung in einer Zeit von 80 Secunden eine Umdrehungszahl von 210 gefunden, so ist die entsprechende Geschwindigkeit des Wassers:

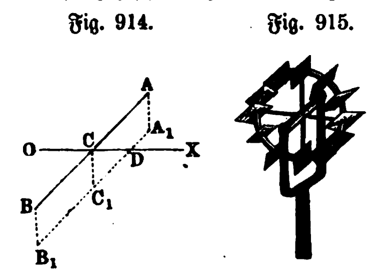
$$v = 0{,}03 + 0{,}15 \frac{210}{80} = 0{,}424 \text{ Meter}.$$

Anmerkung 1. Die Constanten v_0, α und β hängen vorzüglich von der Größe des Stoßwinkels, d. i. von dem Winkel ab, welchen die Flügelfläche mit der Bewegungsrichtung des Wassers und also auch mit der Axenrichtung des Flügels einschließt. Um bei kleinen Geschwindigkeiten noch ziemlich genau beobachten zu können, ist es gut, den Stoßwinkel groß, d. i. gegen 70° zu machen. Uebrigens ist es zweckmäßig, Flügel von verschiedener Größe und verschiedenen Stoßwinkeln zu haben, um, je nachdem die Tiefe oder die Geschwindigkeit des fließenden Wassers größer oder kleiner ist, den einen oder den anderen anwenden zu können.

Anmerkung 2. Hätte der hydrometrische Flügel bei seiner Umdrehung keine Hindernisse zu überwinden, so würde der Flügel AB, Fig. 914, den Weg $CC_1 = CD \,.\, tang.\, CDC_1$ zurücklegen, während das Wasser um CD fortläuft, bezeichnet daher v die Geschwindigkeit des Wassers und δ den Stoßwinkel

$OCB = CDC_1$ desselben, so hat man unter dieser Voraussetzung die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit des Flügels:

Fig. 914. Fig. 915.



$$v_1 = v \, tang. \delta;$$

es ist hiernach zu ermessen, daß bei dem mittleren Flügelradius r die Umdrehungszahl des Flügelrades

$$u = \frac{v_1}{2 \pi r} = \frac{v \, tang. \delta}{2 \pi r}$$

ausfällt, und folglich direct wie die Geschwindigkeit v des Wassers und wie die Tangente des Stoßwinkels der Flügel, sowie umgekehrt wie der mittlere Flügelhalbmesser wächst.

Anmerkung 3. Um die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers zu finden, wendet man auch wohl ein kleines Blechrädchen, wie Fig. 915 repräsentirt, an, indem man nur dessen Untertheil ins Wasser eintaucht. Die Anzahl der Umdrehungen desselben läßt sich durch ein Räderwerk genau wie beim hydraulischen Flügel angeben.

Um die Constanten oder Coefficienten eines hydrometrischen Flügelrades zu finden, ist es nöthig, dieses Instrument in fließende Wasser einzuhalten, deren Geschwindigkeiten bekannt sind, und die entsprechenden Umdrehungszahlen zu beobachten. Wiewohl man eigentlich nur so viel Beobachtungen braucht, als Constanten vorhanden sind, so ist es doch viel sicherer, so viel Beobachtungen wie möglich, und namentlich auch bei sehr verschiedenen Geschwindigkeiten anzustellen, weil man dann die Methode der kleinsten Quadrate (s. analyt. Hülfslehren §. 36) anwenden und dadurch den Einfluß der zufälligen Beobachtungsfehler herabziehen kann. Uebrigens läßt sich die Geschwindigkeit des Wassers entweder durch eine Schwimmkugel oder auch dadurch finden, daß man das Wasser in einem Aichgefäße auffängt, und die darin gemessene Wassermenge durch das Querprofil dividirt. Bei Anwendung der Schwimmkugeln ist ruhige Luft und eine gerade und gleichförmig fließende Wasserstrecke nöthig. Der Flügel ist an mehreren Stellen des von dem Schwimmer durchlaufenen Weges einzuhalten, und es ist auch die Genauigkeit befördernd, wenn der Durchmesser der Schwimmkugel ungefähr gleich ist dem Durchmesser des Flügelrades. §. 518.

Viele Vortheile gewährt die zweite Bestimmungsweise, wo man das Wasser, in welches der Flügel eingetaucht wird, in einem Aichkasten auffängt. Zu diesem Zwecke, und zum Justiren der Hydrometer überhaupt, ist es sehr gut, wenn der Hydrauliker über ein besonderes, aus einem Ausflußkasten, einem Aichreservoir und einem zwischen beiden befindlichen Gerinne bestehendes hydraulisches Observatorium verfügen kann. Bei einem solchen ist ohne Umstände dem Wasser jede beliebige Geschwindigkeit zu ertheilen, indem man nicht nur den Eintritt in das Gerinne, sondern auch die Bewegung in

demselben durch Einsatzbretter nach Willkür reguliren kann. Bei den Beobachtungen hat man den Flügel an verschiedenen Stellen eines Querprofiles im Gerinne einzuhalten, die Tiefe dieses Profiles durch Wasserstandsscalen zu messen, und endlich das in irgend einer Zeit durchgelaufene Wasser im unteren Reservoir zu aichen (§. 507). Den Inhalt F des Querprofiles erhält man durch Multiplication der mittleren Wassertiefe mit der mittleren Breite, und das Wasserquantum Q erhält man aus dem mittleren Querschnitte G des Aichmaßes und der Höhe s des in der Zeit t zugeflossenen Wasserquantums durch die Formel

$$Q = \frac{Gs}{t};$$

aus Q und F folgt zuletzt die mittlere Wassergeschwindigkeit:

$$v = \frac{Q}{F} = \frac{Gs}{Ft}.$$

Die entsprechende Umdrehungszahl u des Flügels ist das Mittel aus allen Umdrehungen, welche man erhält, wenn man das Instrument in verschiedenen Breiten und Tiefen des ausgemessenen Querprofiles einhält.

Hat man nun bei einer Versuchsreihe die mittleren Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 u. s. w. und die entsprechenden Umdrehungszahlen gefunden, so erhält man durch Substitution in der Formel:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

oder in der genaueren:

$$v = \alpha u + \sqrt{v_0^2 + \beta u^2}$$

so viel Bestimmungsgleichungen für die Constanten v_0, α, β, als Beobachtungen angestellt worden sind, und man kann nun hieraus die Constanten selbst finden, indem man entweder das §. 36 der analytischen Hülfslehren angegebene Verfahren anwendet, oder indem man diese Gleichungen in so viel Gruppen theilt, als unbekannte Constanten vorhanden sind, und diese durch Addition zu so viel Bestimmungsgleichungen vereinigt, als zur Ermittelung von v_0, α und nach Befinden β, nöthig sind.

Unter der Voraussetzung, daß die passiven Widerstände des Instrumentes klein genug sind, um sie außer Acht lassen zu können, läßt sich $v = \alpha u$ setzen und α dadurch finden, daß man das Flügelrad im stillstehenden Wasser fortbewegt und hierbei die Anzahl $n = ut$ der Umdrehungen beobachtet, welche es bei Durchlaufung eines Weges $s = vt$ macht. Es ist dann:

$$\alpha = \frac{v}{u} = \frac{vt}{ut} = \frac{s}{n}.$$

Anmerkung 1. Wenn man die einfachere Formel $v = v_0 + \alpha u$ zu Grunde legt, so hat man nach der Methode der kleinsten Quadrate (s. analyt. Hülfslehren §. 36):

$$v_0 = \frac{\Sigma(u^2)\,\Sigma(v) - \Sigma(u)\,\Sigma(uv)}{n\,\Sigma(u^2) - \Sigma(u)\,\Sigma(u)} \text{ und}$$

$$\alpha = \frac{n\,\Sigma(uv) - \Sigma(u)\,\Sigma(v)}{n\,\Sigma(u^2) - \Sigma(u)\,\Sigma(u)},$$

unter n die Anzahl der Beobachtungen verstanden.

Beispiel. Man hat mit einem kleinen hydrometrischen Flügel bei den Wassergeschwindigkeiten:

$$v = 0{,}163;\ 0{,}205;\ 0{,}298;\ 0{,}366;\ 0{,}610 \text{ Meter}$$

die Umdrehungszahlen pro Secunde:

$$u = 0{,}600;\ 0{,}835;\ 1{,}467;\ 1{,}805;\ 3{,}142$$

beobachtet, und soll nun die diesem Flügel entsprechenden Constanten bestimmen. Mit Hülfe der in der Anmerkung gegebenen Formel folgt, da

$$\Sigma(u^2) = 0{,}60^2 + 0{,}835^2 + 1{,}467^2 + 1{,}805^2 + 3{,}142^2 = 16{,}339,$$
$$\Sigma(v) = 0{,}163 + 0{,}205 + 0{,}298 + 0{,}366 + 0{,}610 = 1{,}642,$$
$$\Sigma(u) = 0{,}60 + 0{,}835 + 1{,}467 + 1{,}805 + 3{,}142 = 7{,}849,$$
$$\Sigma(uv) = 0{,}60 \,.\, 0{,}163 + 0{,}835 \,.\, 0{,}205 + 1{,}467 \,.\, 0{,}298 + \cdots = 3{,}283$$

und $n = 5$ ist:

$$v_0 = \frac{16{,}339 \,.\, 1{,}642 - 7{,}849 \,.\, 3{,}283}{5 \,.\, 16{,}339 - 7{,}849^2} = \frac{1{,}0603}{20{,}09} = 0{,}053,$$

$$\alpha = \frac{5 \,.\, 3{,}283 - 7{,}849 \,.\, 1{,}642}{5 \,.\, 16{,}339 - 7{,}849^2} = \frac{3{,}527}{20{,}09} = 0{,}1756,$$

daher gilt für dieses Instrument die Formel:

$$v = 0{,}053 + 0{,}1756\,u.$$

Setzt man hierin nach einander für u die Werthe:

$$0{,}60;\ 0{,}835;\ 1{,}467;\ 1{,}805;\ 3{,}142,$$

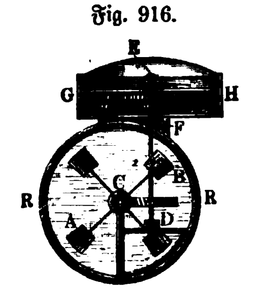
so folgen durch Rechnung für v die Werthe:

$$0{,}158;\ 0{,}200;\ 0{,}310;\ 0{,}370;\ 0{,}605,$$

also höchstens um 12 Millimeter verschieden von den wahren Werthen der Geschwindigkeit v.

Anmerkung 2. Man kann auch nach Lapointe das hydraulische Flügelrad in eine cylindrische Röhre einsetzen, und sich von demselben die Geschwindigkeit des durchfließenden Wassers angeben lassen. Der Zählapparat kann dann außerhalb des Wassers stehen und mit dem Rade durch eine stehende Welle in Verbindung gesetzt werden. Lapointe nennt dieses Instrument une tube jaugeur (s. Comptes rendues T. XXV, 1848; auch Polytechn. Centralblatt 1847). Fig. 916 führt eine ideelle Darstellung des hydrometrischen Flügelrades in einer Röhre vor Augen. Das Flügelrad ACB setzt auch hier mittels Schraube ohne Ende eine Welle DE in Umdrehung; die letztere ist aber mittels einer Stopfbüchse F aus der Röhre RR, in welcher das zu messende Wasser fließt, in das Gehäuse GH des Zählapparates geführt, dessen innere Einrichtung sehr verschieden sein kann.

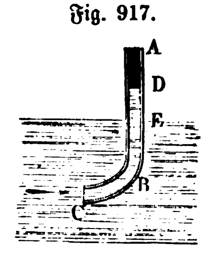
Fig. 916.



Anmerkung 3. In Frankreich fängt man erst seit Kurzem an, dem hydraulischen Flügelrade die nöthige Aufmerksamkeit zu schenken. Wir finden eine ausführliche Abhandlung über dieses Instrument in den Annales des ponts et chaussées, T. XIV, 1847, von Baumgarten, und einen Auszug hiervon im Polytechnischen Centralblatte, 1849. Herr Baumgarten empfiehlt besonders die Schraubenflügel, und macht hierzu noch manche Bemerkungen, die mit den von uns allerdings schon längst gemachten Erfahrungen ganz im Einklange stehen. Ein neues hydrometrisches Flügelrad mit einer langen Schraube und ohne Räder beschreibt Boileau in seinem Traité de la mesure des eaux courantes.

§. 519. **Pitot'sche Röhre.** Die übrigen Hydrometer sind unvollkommener als der hydraulische Flügel, denn sie gewähren entweder weniger Genauigkeit, oder sie sind umständlicher im Gebrauche. Das einfachste Instrument dieser Art ist die Pitot'sche Röhre. In seiner einfachsten Gestalt besteht es in einer gläsernen Knieröhre ABC, Fig. 917, welche so ins Wasser gehalten wird, daß der untere Theil derselben horizontal und dem Wasser entgegen zu stehen kommt. Durch den Wasserstoß wird nun in dieser Röhre eine Wassersäule zurückgehalten, die über das Niveau des äußeren Wasserspiegels zu stehen kommt, und die Erhebung DE dieser Wassersäule fällt um so größer aus, je größer der Stoß oder die ihn erzeugende Geschwindigkeit des Wassers ist; es kann daher auch umgekehrt diese Erhebung oder Niveaudifferenz als Maß der Geschwindigkeit des Wassers dienen. Setzen wir diese Erhebung DE über den äußeren Wasserspiegel $= h$, und die Geschwindigkeit des Wassers $= v$, so können wir, wenn μ eine Erfahrungszahl bezeichnet,

Fig. 917.



$$h = \frac{v^2}{2 g \mu^2}$$

setzen, und daher umgekehrt

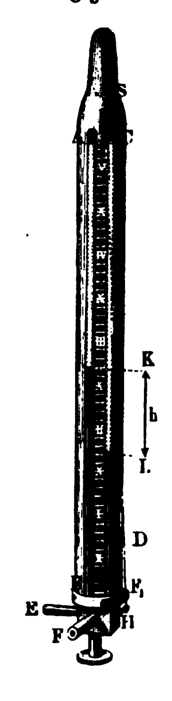
$$v = \mu \sqrt{2 g h} \text{ oder einfacher}$$
$$v = \psi \sqrt{h}.$$

Um die Constante ψ zu finden, hält man das Instrument an einer Stelle ins Wasser, wo die Geschwindigkeit v_1 bekannt ist; zeigt sich hier die Erhebung $= h_1$, so hat man für die Constante $\psi = \frac{v_1}{\sqrt{h_1}}$, welche nun in anderen Fällen, wo die Geschwindigkeit mit diesem Instrumente gesucht werden soll, zu gebrauchen ist.

Um das Ablesen der Höhe h zu erleichtern, läßt man das Instrument aus zwei Röhren AB und CD bestehen, und wie Fig. 918 zeigt, aus der einen ein Röhrchen E in der Stromrichtung, aus der anderen aber zwei Röhrchen

F und F_1 rechtwinkelig gegen die Stromrichtung, durch beide Röhren aber einen einzigen Hahn *H* gehen, womit man die Wassersäulen in beiden Röhren absperren kann. Zieht man das Instrument aus dem Wasser heraus, so kann man bequem an einer zwischen beiden Röhren befindlichen Scala die Differenz $KL = h$ der beiden Wassersäulen ablesen. Damit das Wasser in der Röhre keine großen Schwankungen annehme, ist es nöthig, den Röhren enge Einmündungen zu geben, und damit das Absperren der Röhren schnell und sicher vor sich gehen könne, versieht man den Hahn mit einem Arme und einer in der Figur größtentheils punktirten Zugstange *HS*, welche oben nahe an der Handhabe des Instrumentes sich endigt.

Fig. 918.

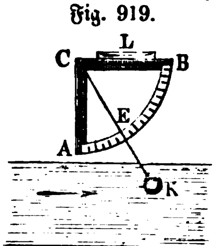


Anmerkung 1. Wenn auch die Pitot'sche Röhre nicht die Genauigkeit gewährt wie das hydrometrische Flügelrad, so ist sie doch wegen ihres einfachen Gebrauches ein sehr zu empfehlendes Instrument. Der Verfasser handelt im Polytechnischen Centralblatte, 1847, etwas specieller von diesem Instrumente, und theilt auch daselbst eine Reihe von Erfahrungszahlen und die darauf gegründete Bestimmung des Coefficienten ψ mit. Bei seinem Instrumente ist für Geschwindigkeiten zwischen 0,32 und 1,24 Meter, $v = 3{,}545\sqrt{h}$ Meter zu setzen.

Anmerkung 2. Duchemin empfiehlt eine Pitot'sche Röhre mit Schwimmer. Da dieselbe ziemlich weit sein muß, so giebt sie eine nicht unbeträchtliche Stauung, weshalb sie in engen Canälen nicht zu gebrauchen ist (siehe Duchemin: Recherches expérim. sur les lois de la résistance des fluides). Boileau beschreibt in dem oben (§. 439) citirten Werke eine neue Pitot'sche Röhre mit einem kleinen Aichgefäße, wodurch die Geschwindigkeit des fließenden Wassers mittels der Wassermenge, welche das letztere über den Wasserspiegel drückt, gemessen wird.

Stromquadrant. Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel ist vorzüglich von Ximenes, Michelotti, Gerstner und Eytelwein zum Messen der Geschwindigkeit fließender Wasser angewendet worden. Dieses Instrument besteht aus einem in Grade und feinere Theile eingetheilten Quadranten *AB*, Fig. 919, und aus einer im Mittelpunkte *C* desselben mittels eines Fadens aufgehängten Metall- oder Elfenbeinkugel *K* von 5 bis 6 Centimeter Durchmesser; es giebt die Geschwindigkeit des Wassers durch den Winkel *ACE* §. 520.

Fig. 919.



an, um welchen der von der Kugel gespannte Faden von der Verticalen *CA* abweicht, wenn man die Ebene des Instrumentes in die Richtung des Stromes bringt, und die Kugel unter das Wasser tauchen läßt. Da der Winkel nicht leicht 40 und mehr Grade beträgt, so giebt man diesem Instrumente oft nur die Form eines rechtwinkeligen Dreieckes und bringt die Gradtheilung auf der horizontalen Kathete desselben an. Zum Einstellen der Index- oder Nulllinie in die Verticale wendet man am besten eine oben aufsitzende Röhrenlibelle an, oder man bedient sich dazu der Kugel selbst, indem man dieselbe außerhalb des Wassers hängen läßt und das Instrument so lange dreht, bis der Faden in die Nulllinie der Eintheilung fällt. Bei Geschwindigkeiten unter 1 Meter kann man sich einer Elfenbeinkugel, bei größeren Geschwindigkeiten muß man sich aber schwerer Metallkugeln bedienen. Wegen der steten Schwankungen der Kugel in der Bewegungsrichtung des Wassers sowohl als auch rechtwinkelig gegen die Stromrichtung ist das Ablesen ziemlich beschwerlich und läßt viel Unsicherheit zurück; es ist daher dieses Instrument nicht zu den vollkommneren zu zählen.

Die Abhängigkeit zwischen dem Ablenkungswinkel und der Geschwindigkeit des Wassers läßt sich bei einer nicht sehr tief eingetauchten Kugel auf folgende Weise ermitteln. Aus dem Gewichte *G* der Kugel und aus dem mit dem Quadrate der Geschwindigkeit *v* und dem Querschnitte *F* der Kugel gleichmäßig wachsenden Wasserstoße $P = \mu F v^2$ folgt eine Mittelkraft *R*, deren Richtung auch der Faden annimmt, und welche bestimmt ist durch den Ablenkungswinkel δ, für den man hat:

$$tang.\, \delta = \frac{P}{G} = \frac{\mu F v^2}{G};$$

es ist daher auch umgekehrt:

$$v^2 = \frac{G\, tang.\, \delta}{\mu F} \text{ und } v = \sqrt{\frac{G}{\mu F}} \sqrt{tang.\, \delta},$$

d. i.:

$$v = \psi \sqrt{tang.\, \delta},$$

wenn ψ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, den man vor dem Gebrauche auf dem oben angegebenen Wege (§. 518) zu ermitteln hat.

§. 521. **Rheometer.** Die übrigen Hydrometer, als: Lorgna's Wasserhebel, Ximenes' Wasserfahne, Michelotti's hydraulische Schnellwage, Brünning's Tachometer, Poletti's Rheometer u. s. w., sind im Gebrauche umständlicher und zum Theil auch unsicher. Das Princip ist bei allen diesen Instrumenten dasselbe; diese Instrumente sind aus einer Stoßfläche und einer Wage zusammengesetzt, und es dient die letztere dazu, den

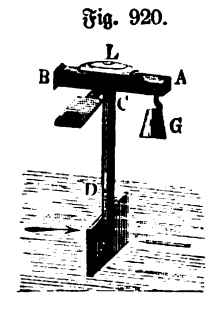
Stoß P des Wassers gegen die erstere anzugeben; da dieser aber $= \mu F v^2$ ist, so hat man umgekehrt:

$$v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \psi \sqrt{P},$$

wo ψ eine von der Größe der Stoßfläche F abhängige Erfahrungsconstante bezeichnet.

Das Rheometer, welches in der neueren Zeit von Poletti vorgeschlagen wurde, und im Wesentlichen nicht von Michelotti's hydrometrischer Schnellwage abweicht, besteht aus einem um eine feste Axe C drehbaren Hebel AB, Fig. 920, und einem dazu senkrechten Arme CD, an welchen die Stoßfläche oder, nach Poletti, ein bloßer Stoßstab angeschraubt wird. Um dem Stoße des Wassers gegen diese Fläche das Gleichgewicht zu halten, werden in die am Hebelende A hängende Blechbüchse Gewichte oder Schrotkörner eingelegt, und um die leere Wage im stillstehenden Wasser ins Gleichgewicht zu setzen, ist bei B ein Gegengewicht angesetzt, welches das äußerste Ende des Armes CB ausmacht. Aus dem aufgelegten Gewichte G folgt die Stoßkraft P mittels der Hebelarme $CA = a$ und $CF = b$, durch die Formel $Pb = Ga$, weshalb nun

Fig. 920.



$$P = \frac{a}{b}\, G \text{ und } v = \sqrt{\frac{P}{\mu F}} = \sqrt{\frac{a\, G}{\mu b F}} = \psi \sqrt{G}$$

ist, wo ψ wieder eine Erfahrungsconstante bezeichnet.

Ein nach demselben Principe construirtes Hydrometer, wo dem Wasserstoß durch die Kraft einer Feder das Gleichgewicht gehalten wird, beschreibt Boileau in seiner Abhandlung über das Wassermessen.

Anmerkung 1. Ueber die letzteren Hydrometer wird ausführlicher gehandelt in Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, ferner in Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. II., in Brünning's Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers, in Venturoli's Elementi di Meccanica e d'Idraulica, Vol. II. Wegen Poletti's Rheometer ist in Dingler's Polytechn. Journal, Bd. XX., 1826, nachzusehen. Stevenson's Hydrometer ist der Woltmann'sche Flügel, s. Dingler's Journal, Bd. LXV., 1842. Die nach Art der Reactionsräder construirten Hydrometer und Gasuhren werden im folgenden Capitel abgehandelt.

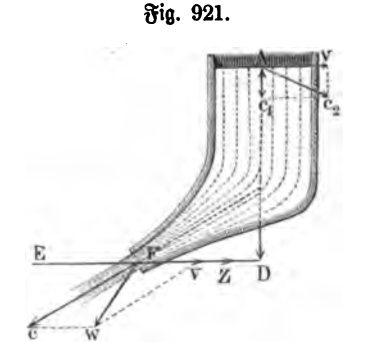
Anmerkung 2. Ein besonders auch zum praktischen Gebrauche zu empfehlendes Werk ist die Hydrometrie oder praktische Anleitung zum Wassermessen, von Bornemann, Freiberg 1849. Der Schrift von Boileau ist schon wiederholt gedacht worden (s. §. 439 u. s. w.).

Neuntes Capitel.

Von der Kraft und dem Widerstande der Flüssigkeiten.

§. 522. **Reaction des Wassers.** Der Gesammtdruck des in einem Gefäße stillstehenden Wassers reducirt sich nach §. 389 auf eine dem Gewichte dieser Wassermasse gleiche Verticalkraft; wenn aber das Gefäß *AF*, Fig. 921, eine Oeffnung *F* hat, durch welche das Wasser ausfließen kann, so erleidet diese Kraft eine Veränderung, und zwar nicht allein, weil in *F* ein Theil der Gefäßwand ausfällt, sondern auch deshalb, weil das der Mündung zufließende Wasser wie jeder andere Körper, der seinen Bewegungszustand ändert, vermöge seiner Trägheit reagirt. Da die Aenderung in dem Bewegungszustande eines Körpers sowohl auf die Geschwindigkeit wie auf die Richtung der Bewegung sich erstrecken kann, so kann auch die Reaction des ausfließenden Wassers ebensowohl aus einer Beschleunigung wie aus einer Richtungsänderung des der Mündung zuströmenden Wassers hervorgehen.

Fig. 921.



Auf folgendem Wege gelangt man zur Kenntniß der vollständigen Reaction des ausfließenden Wassers.

Es sei c die Geschwindigkeit des durch die Mündung *F* fließenden Wassers, c_1 die relative Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche bei *A*, *G* der Inhalt dieser Fläche und h die Druckhöhe *AD* in der Ausmündung. Dann haben wir:

$$\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g}$$

und das Ausflußquantum:

$$Q = Fc = Gc_1.$$

Denken wir das Gefäß *AF*, Fig. 921, mit einer Geschwindigkeit v

horizontal fortgehend, so müssen wir für die absolute Geschwindigkeit c_2 des eintretenden Wassers:

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2,$$

und bei dem Neigungswinkel $EFc = \alpha$ der Strahlaxe gegen den Horizont, für die absolute Geschwindigkeit w des austretenden Strahles:

$$w^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha \text{ setzen.}$$

Nun ist das Arbeitsvermögen des Wassers vor dem Ausflusse:

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2}{2g} + h\right) Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das Arbeitsvermögen desselben nach dem Ausflusse:

$$L_2 = \frac{w^2}{2g}\, Q\gamma = \frac{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha}{2g}\, Q\gamma,$$

daher folgt das dem Wasser entzogene und auf das Gefäß übertragene Arbeitsquantum:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - c^2 + 2\,c\,v\,cos.\,\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $\frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = h$ ist:

$$L = \frac{c\,v\,cos.\,\alpha}{g}\, Q\gamma;$$

und hiernach die horizontale Componente der Reaction des Wassers

$$H = \frac{L}{v} = \frac{c\,cos.\,\alpha}{g}\, Q\gamma.$$

Setzt man hierin $Q = Fc$ und aus

$$\frac{c^2}{2g} = h + \frac{c_1^2}{2g} = h + \left(\frac{F}{G}\right)^2 \frac{c^2}{2g}$$

den Werth:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{h}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2},$$

so erhält man:

$$H = \frac{c\,cos.\,\alpha}{g}\, Fc\gamma = 2\,\frac{c^2}{2g}\, F\gamma\, cos.\,\alpha = 2\,F\gamma\, cos.\,\alpha\, \frac{h}{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2}.$$

Ist F klein gegen G, so folgt:

$$H = 2\,h\,F\gamma\, cos.\,\alpha$$

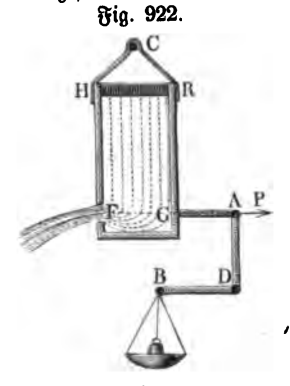
und bei einem horizontal gerichteten Strahle (Fig. 922):

$$H = 2\,h\,F\gamma.$$

Es ist also die Reaction eines horizontalen Strahles gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche den Querschnitt des Strahles zur Basis und die doppelte Geschwindigkeitshöhe ($2\,h$) zur Länge hat.

Anmerkung. Ein Engländer, Peter Ewart, hat in der neueren Zeit die Richtigkeit dieses Gesetzes durch Versuche zu bestätigen gesucht (s. Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II., oder den „Ingenieur, Zeitschrift für das gesammte Ingenieurwesen", Bd. I.). Hierbei wurde das Gefäß HRF, Fig. 922, an eine horizontale Axe C gehangen, und die Reaction durch eine Winkelhebelwage ADB gemessen, auf welche das Gefäß mittels eines horizontalen Stabes GA wirkte, der sich genau der Mündung F gegenüber, an das Gefäß anstemmte. Beim Ausflusse durch eine Mündung in der dünnen Wand ergab sich:

Fig. 922.



$$P = 1{,}14 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma.$$

Setzt man den Strahlquerschnitt

$$F_1 = 0{,}64 \,.\, F$$

und die effective Ausflußgeschwindigkeit

$$v_1 = 0{,}96\, v$$

(s. §. 432), so erhält man nach der theoretischen Formel:

$$P = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot F_1 \gamma = 2 \,.\, 0{,}96^2 \,.\, 0{,}64 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}18 \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

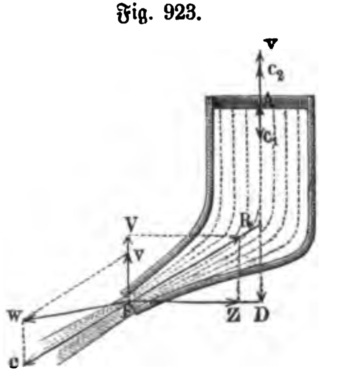
also ziemlich dasselbe, was die Versuche gegeben haben. Bei einer nach dem contrahirten Wasserstrahle geformten Mündung wurde $P = 1{,}73 \,.\, \frac{v^2}{2g} F\gamma$, der Ausfluß- oder Geschwindigkeitscoefficient aber $= 0{,}94$ gefunden. Da hier $F_1 = F$ und $v_1 = 0{,}94\, v$ ist, so hat man theoretisch:

$$P = 2 \,.\, 0{,}94^2 \frac{v^2}{2g} F\gamma = 1{,}77 \,.\, \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

also wieder eine gute Uebereinstimmung.

§. 523. Denkt man sich das Ausflußgefäß AF, Fig. 923, mit einer Geschwindigkeit v vertical aufwärts bewegt, so hat man für die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers:

Fig. 923.



$$c_2 = v - c_1$$

und dagegen für die des ausfließenden, bei der im vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnung:

$$w^2 = c^2 + v^2 - 2cv\cos.(90^0 - \alpha)$$
$$= c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha.$$

Es ist hiernach das ganze Leistungsvermögen der Wassermenge Q pr. Secunde:

$$L_1 = \left(\frac{(v - c_1)^2}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

dagegen das des abfließenden Wassers:

$$L_2 = \frac{c^2 + v^2 - 2cv\sin.\alpha}{2g} Q\gamma,$$

und folglich die mechanische Arbeit, welche das Wasser dem Gefäße mitgetheilt hat:

$$L = L_1 - L_2 = \left(\frac{c_1^2 - 2vc_1 - c^2 + 2cv\,sin.\alpha}{2g} + h\right) Q\gamma,$$

oder, da $h = \frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g}$ ist:

$$L = \frac{(c\,sin.\alpha - c_1)v}{g} Q\gamma,$$

und die entsprechende Verticalkraft:

$$V = \frac{L}{v} = \frac{c\,sin.\alpha - c_1}{g} Q\gamma = \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right)\frac{c}{g} Q\gamma$$

$$= \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right)\frac{c^2}{g} F\gamma = \left(sin.\alpha - \frac{F}{G}\right).\,2hF\gamma.$$

Ist die Ausflußmündung klein gegen die Oberfläche G, so hat man $\frac{F}{G} = 0$ und daher die verticale Componente der Reaction:

$$V = 2hF\gamma\,sin.\alpha.$$

Nach dem vorigen Paragraphen hat man aber die horizontale Componente dieser Kraft:

$$H = 2hF\gamma\,cos.\alpha,$$

daher ist die vollständige Reaction des Wassers:

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = 2hF\gamma,$$

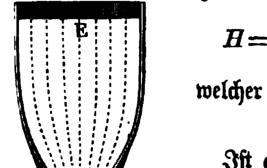
und die Richtung derselben der Bewegung des ausfließenden Wassers genau entgegengesetzt.

Ist $F = G$, fließt z. B. das Wasser durch eine überall gleichweite Röhre, so hat man $\frac{F}{G} = 1$ und daher:

$$V = (sin.\alpha - 1).\,2hF\gamma = -(1 - sin.\alpha).\,2hF\gamma;$$

dann wirkt also V nicht nach oben, sondern nach unten.

Fig. 924.



Für $\alpha = -90^0$, d. i. wenn die Röhre einen Halbkreis bildet, hat man

$$H = 0 \text{ und } V = R = -\left(1 + \frac{F}{G}\right) 2hF\gamma,$$

welcher letztere Werth für $F = G$ übergeht in:

$$V = R = -4hF\gamma.$$

Ist $\alpha = +90^0$, hat man es also mit dem Ausflusse, Fig. 924, zu thun, so ist:

$$H = 0 \text{ und } V = R = \left(1 - \frac{F}{G}\right) 2hF\gamma,$$

folglich für $\frac{F}{G} = 0$:

$$V = R = 2hF\gamma.$$

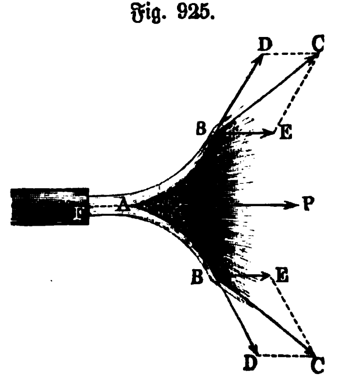
Um diese Kraft wird das ganze Gewicht des im Ausflußapparate befindlichen Wassers vermindert, wenn das letztere zum Ausflusse gelangt.

§. 524. **Stoss und Widerstand des Wassers.** Das Wasser oder eine andere Flüssigkeit übt gegen einen festen Körper einen Stoß aus, wenn sie mit diesem zusammentrifft und dadurch in ihrem Bewegungszustande verändert wird. Von dem Stoße ist der Widerstand, welchen das Wasser der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, nicht wesentlich verschieden. Man unterscheidet zunächst von einander: 1) den Stoß isolirter Wasserstrahlen, 2) den Stoß im begrenzten Wasser oder Gerinne, und 3) den Stoß im unbegrenzten Wasser. Ein Stoß der ersten Art findet statt, wenn sich dem aus einem Gefäße ausfließenden Wasserstrahle ein Körper, z. B. die Schaufel eines oberschlächtigen Wasserrades entgegenstellt; ein Stoß der zweiten Art tritt ein, wenn das Wasser in einem Canale oder Gerinne gegen einen, den Querschnitt des letzteren ganz ausfüllenden Körper, z. B. gegen die Schaufel eines unterschlächtigen Wasserrades trifft; die dritte Art kommt endlich vor, wenn ein fließendes Wasser gegen einen in dasselbe eingetauchten Körper trifft, dessen Querschnitt nur ein sehr kleiner Theil ist vom Querschnitte des Wasserstromes, wie z. B. wenn es gegen die Schaufeln eines Schiffmühlenrades stößt.

Uebrigens ist zu unterscheiden, der Wasserstoß gegen ruhende und der gegen bewegte Körper, ferner der Stoß gegen krumme Flächen und der gegen ebene Flächen, und bei letzterem wieder, der senkrechte und der schiefe Stoß.

Wir betrachten gleich einen allgemeineren Fall, nämlich den Stoß eines isolirten Strahles gegen eine Rotationsfläche, welche sich in ihrer eigenen, mit der Bewegungsrichtung des Strahles zusammenfallenden Axe bewegt.

Fig. 925.



§. 525. **Stoss isolirter Strahlen.** Es sei BAB, Fig. 925, eine Rotationsfläche, AP ihre Axe und FA ein in der Richtung dieser Axe antreffender Wasserstrahl; setzen wir die Geschwindigkeit des Wassers $= c$, die der Fläche $= v$ und den Winkel

BTP, welchen die Tangente DT am Ende B der Erzeugungscurve oder jeder die Fläche verlassende Wasserfaden BD mit der Axenrichtung BE einschließt, $= \alpha$, nehmen wir endlich noch an, daß das Wasser beim Hinlaufen an der Fläche durch Reibung an lebendiger Kraft nichts verliere. Das Wasser trifft die Fläche mit der relativen Geschwindigkeit $c - v$ und geht daher auch mit dieser an der Fläche hin, entfernt sich also auch mit derselben in den Tangentialrichtungen TB, TB u. s. w. von der Fläche. Aus der Tangentialgeschwindigkeit $BD = c - v$ und der Axengeschwindigkeit $BE = v$ ergiebt sich aber die absolute Geschwindigkeit $BC = c_1$ des Wassers nach dem Zusammenstoße mit der Fläche durch die bekannte Formel:

$$c_1 = \sqrt{(c - v)^2 + 2\,(c - v)\,v\cos.\alpha + v^2}.$$

Nun kann aber ein Wasserquantum Q durch seine lebendige Kraft die mechanische Arbeit $\frac{c^2}{2g} \cdot Q\gamma$ verrichten, wenn es hierbei seine Geschwindigkeit c vollkommen zusetzt; es ist demnach auch das im Wasser zurückbleibende Arbeitsvermögen $= \frac{c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$, folglich die auf die Fläche übertragene Arbeit:

$$Pv = \frac{c^2}{2g}\,Q\gamma - \frac{c_1^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{c^2 - c_1^2}{2g} \cdot Q\gamma$$

$$= \frac{[c^2 - (c - v)^2 - 2\,(c - v)\,v\cos.\alpha - v^2]}{2g}\,Q\gamma$$

$$= \frac{2cv - 2v^2 - 2\,(c - v)\,v\cos.\alpha}{2g}\,Q\gamma, \text{ d. i.:}$$

$$Pv = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma,$$

und die Kraft oder der Wasserstoß in der Axenrichtung:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{c - v}{g}\,Q\gamma.$$

Geht die Fläche dem Wasser mit der Geschwindigkeit v entgegen, so hat man:

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{c + v}{g}\,Q\gamma,$$

und ist dieselbe ohne Bewegung, also $v = 0$, so stellt sich der Stoß oder hydraulische Axendruck

$$P = (1 - \cos.\alpha)\,\frac{c}{g}\,Q\gamma$$

heraus.

Es folgt hieraus, daß der Stoß einer und derselben Wassermasse unter übrigens gleichen Umständen der relativen Geschwindigkeit $c \mp v$ des Wassers proportional ist.

Aus dem Inhalte F des Querschnittes vom Wasserstrahle folgt das zum Stoße gelangende Wasserquantum $Q = F(c \mp v)$; daher:

$$P = (1 - cos.\alpha)\frac{(c \mp v)^2}{g} F\gamma;$$

und für $v = 0$:

$$P = (1 - cos.\alpha)\frac{c^2}{g} F\gamma.$$

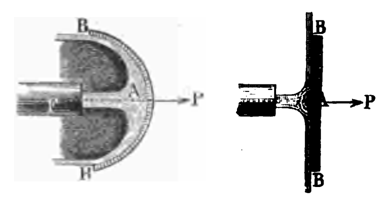
Bei gleichem Querschnitte des Strahles wächst also hiernach der Stoß gegen eine ruhende Fläche wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Wassers.

§. 526. **Stoss gegen ebene Flächen.** Der Stoß eines und desselben Wasserstrahles hängt vorzüglich von dem Winkel α ab, unter welchem das Wasser nach dem Stoße sich von der Axe entfernt; er ist Null, wenn dieser Winkel = Null ist, und dagegen ein Maximum, nämlich

$$P_{max.} = 2\frac{c \mp v}{g} Q\gamma,$$

wenn dieser Winkel 180°, also dessen Cosinus = — 1 ausfällt, wo das Wasser, wie Fig. 926 repräsentirt, in der entgegengesetzten Richtung die Fläche verläßt, in welcher es dieselbe trifft. Ueberhaupt ist derselbe bei concaven Flächen größer als bei convexen, weil dort der Winkel stumpf, also der Cosinus negativ ausfällt.

Fig. 926. Fig. 927.



Am häufigsten ist die Fläche, wie Fig. 927 vorstellt, eben, und daher $\alpha = 90°$, also $cos.\alpha = 0$ und der Stoß

$$P = \frac{c \mp v}{g} Q\gamma;$$

bei einer ruhenden Fläche:

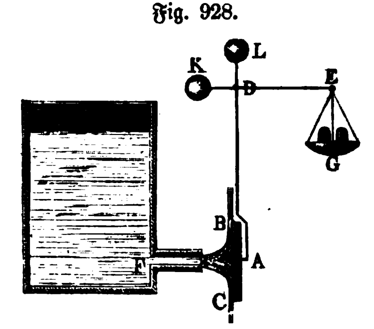
$$P = \frac{c}{g} Q\gamma = \frac{c^2}{g} F\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma = 2Fh\gamma.$$

Der Normalstoß des Wassers gegen eine ebene Fläche ist also gleich dem Gewichte einer Wassersäule, welche zur Basis den Querschnitt F des Strahles und zur Höhe die zweifache Geschwindigkeitshöhe $\left(2h = 2 \cdot \frac{c^2}{2g}\right)$ hat.

Die hierüber angestellten Versuche von Michelotti, Vince, Langsdorf, Bossut, Morosi und Bidone haben ziemlich zu dem nämlichen Ergebnisse

geführt, wenn der Querschnitt der gestoßenen Fläche mindestens 6mal so groß war, als der des Strahles, und wenn diese Fläche wenigstens zweimal so weit von der Ebene der Ausflußmündung abstand, als die Strahldicke maß. Der Apparat, welcher hierbei in Anwendung gekommen ist, bestand, ähnlich wie Poletti's Rheometer (§. 521), in einem Hebel, welcher auf der einen Seite den Wasserstoß aufnahm, dem durch Gewichte auf der anderen Seite das Gleichgewicht gehalten wurde. Das Instrument, welches Bidone angewendet hat, ist in Fig. 928 abgebildet. *BC* ist die vom Strahle *FA* gestoßene Fläche, *G* die Wagschale zur Aufnahme von Gewichten, ferner *D* die Drehungsaxe und *K* und *L* sind Gegengewichte.

Fig. 928.



Anmerkung. Die ausführlichsten Versuche über den Wasserstoß sind von Bidone. S. Memoire de la Reale Accademia delle Scienze di Torino. T. XL. 1838. Sie wurden bei einer Geschwindigkeit von mindestens 27 Fuß und an Messingplatten von 2 bis 9 Zoll Durchmesser angestellt. Im Allgemeinen fand Bidone den Normalstoß gegen eine ebene Fläche etwas größer als $2 Fh\gamma$, doch ist diese Abweichung wohl einer Vergrößerung des Hebelarmes beizumessen, welche durch das zurückfallende Wasser erzeugt wurde. S. Duchemin: Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides (ins Deutsche übersetzt von Schnuse). Wenn die gestoßene Fläche der Mündung ganz nahe war, so fiel bei Bidone P nur $1,5\, Fh\gamma$ aus. Wenn ferner die Fläche mit dem Strahle gleichen Querschnitt hat, in welchem Falle das Wasser nur um einen spitzen Winkel α abgelenkt wird, so ist nach du Buat und Langsdorf, P nur $= Fh\gamma$. Endlich hat sich auch bei Bidone und Anderen ergeben, daß der Stoß im ersten Augenblicke beinahe noch einmal so groß ist, als der permanente Stoß. Vergleichende Versuche über den Stoß und die Reaction des Wassers mit Hülfe eines Reactionsrades sind von dem Verfasser angestellt worden, siehe dessen „Experimentalhydraulik", sowie den „Civilingenieur" Bd. I. 1854.

Durch neuere Versuche über den Stoß isolirter Luft- und Wasserstrahlen (siehe „Civilingenieur", Bd. VII. Heft 5, und Bd. VIII. Heft 1) hat der Verfasser gefunden, daß der effective Stoß eines isolirten Luft- oder Wasserstrahles gegen eine normale Ebene 92 bis 96 Procent der theoretischen Kraft $P = \frac{c Q \gamma}{g}$ ist, daß dagegen der Stoß eines solchen Strahles gegen eine hohle Rotationsfläche, welche die Richtung des aufschlagenden Strahles um $\delta = 134$ Grad abändert, nur zu 83 bis 88 Procent der theoretischen Kraft $P = c\,(1 - \cos. \delta)\, \frac{Q\gamma}{g}$ ausfällt.

§. 527. **Maximalarbeit des Stosses.** Die mechanische Arbeit

$$Pv = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma$$

des Stoßes hängt vorzüglich von der Geschwindigkeit v der gestoßenen Fläche ab; sie ist z. B. Null, nicht nur für $v = c$, sondern auch für $v = 0$; es muß daher zwischen c und 0 auch eine Geschwindigkeit geben, bei welcher die Arbeit des Stoßes ein Maximum ist. Offenbar kommt es hierbei nur darauf an, daß $(c - v)\,v$ zu einem solchen wird. Sehen wir c als den halben Umfang eines Rechteckes und v als die Grundlinie desselben an, so haben wir für dessen Höhe $= c - v$ und für dessen Inhalt $= (c - v)\,v$; nun hat aber unter allen Rechtecken das Quadrat bei gegebenem Umfange $2c$ den größten Inhalt, es ist daher auch $(c - v)\,v$ ein Maximum, wenn $c - v = v$, d. i. $v = \frac{c}{2}$ gemacht wird*), und wir erhalten so den Maximalwerth der Arbeit des Wasserstoßes, wenn die Fläche mit der halben Geschwindigkeit des Wassers ausweicht, und zwar:

$$Pv = (1 - cos.\,\alpha)\cdot {}^1/_2 \cdot \frac{c^2}{2g}\cdot Q\gamma = (1 - cos.\,\alpha)\,.\,{}^1/_2\,Qh\gamma$$

Ist nun $\alpha = 180^0$, wird also die Bewegung des Wassers durch den Anstoß die entgegengesetzte, so hat man allerdings die Arbeit

$$= 2\,.\,{}^1/_2\,Qh\gamma = Qh\gamma;$$

ist aber $\alpha = 90^0$, wie beim Stoße gegen eine ebene Fläche, so stellt sich diese Arbeit nur ${}^1/_2\,Qh\gamma$ heraus, es wird also im letzteren Falle von der ganzen disponiblen oder der lebendigen Kraft des Wassers entsprechenden Arbeit nur die Hälfte gewonnen oder auf die Fläche übertragen.

Beispiele. 1) Wenn ein Wasserstrahl von 0,03 Quadratmeter Querschnitt eine Wassermenge von 0,1 Cubikmeter pro Secunde liefert und gegen eine ebene Fläche normal stößt, welche mit 2 Meter Geschwindigkeit ausweicht, so ist die Stoßkraft:

$$P = \frac{c - v}{g}\,Q\gamma = \left(\frac{0{,}1}{0{,}03} - 2\right)\frac{1}{9{,}81}\,0{,}1\,.\,1000 = 13{,}59 \text{ Kilogramm},$$

und die auf die Fläche übertragene Arbeit:

$$Pv = 13{,}59\,.\,2 = 27{,}18 \text{ Meterkilogramm.}$$

Die maximale Leistung wird bei einer Geschwindigkeit $v = \frac{c}{2} = 1{,}67$ Meter zu erwarten sein, und zwar:

$$L = {}^1/_2\,\frac{c^2}{2g}\,Q\gamma = 0{,}5\,.\,3{,}33^2\,.\,0{,}051\,.\,0{,}1\,.\,1000 = 28{,}28 \text{ Meterkilogramm;}$$

---

*) Die Differenzialrechnung giebt einfacher das Maximum von Pv durch:

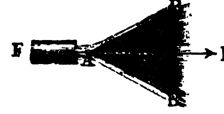
$$\frac{\partial\,(c - v)\,v}{\partial\,v} = c - 2v = 0; \text{ oder } v = \frac{c}{2}.$$

der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck beträgt:

$$P = \frac{28,28}{1,67} = 16,93 \text{ Kilogramm.}$$

2) Wenn ein Strahl FA, Fig. 929, von 0,04 Quadratmeter Querschnitt und 12 Meter Geschwindigkeit gegen einen unbeweglichen Kegel von dem Convergenzwinkel $BAB = 100^0$ stößt, so ist der hydraulische Druck in der Richtung des Strahles:

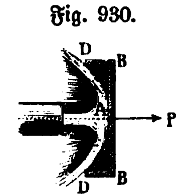
Fig. 929.



$$P = (1 - cos.\,\alpha)\,\frac{c}{g}\,Q\gamma$$
$$= (1 - cos.\,50^0)\,12\,.\,0{,}102\,.\,0{,}04\,.\,12\,.\,1000$$
$$= 209{,}86 \text{ Kilogramm.}$$

Stoss des begrenzten und unbegrenzten Wassers. Besetzt man den Umfang einer ebenen Fläche BB, Fig. 930, mit Leisten BD, BD, welche über der vom Wasser getroffenen Seite hervorragen, so wird das Wasser, ähnlich wie bei concaven Flächen, um einen stumpfen Winkel von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt, und es fällt daher der Stoß größer aus, als bei der einfachen ebenen Fläche. Die Wirkung dieses Stoßes hängt vorzüglich von der Höhe der Einfassung und von dem Querschnittsverhältnisse zwischen dem Strahle und dem eingefaßten Theile ab. Bei einem Versuche, wo der Strahl 1 Zoll Dicke, die cylindrische Einfassung aber 3 Zoll Weite und $3^1/_2$ Linien Höhe hatte, floß das Wasser beinahe in umgekehrter Richtung, und es betrug der Stoß: §. 528.

Fig. 930.

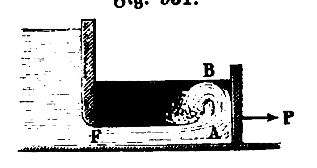


$$3{,}93\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma;$$

in jedem anderen Falle war diese Kraft eine kleinere. Wegen der Reibung des Wassers an der Fläche und Einfassung ist der theoretische Maximalwerth $4\,\frac{c^2}{2g}\,F\gamma$ nie ganz zu erreichen.

Bei dem Stoße des begrenzten Wassers FAB, Fig. 931, findet zwar auch eine Einfassung statt, es nimmt aber diese Einfassung nur einen Theil des Umfanges ein, und erstreckt sich dagegen auf die gestoßene Fläche und den Wasserstrahl zugleich. Das stoßende Wasser nimmt die Richtung nach dem uneingefaßten Theile des Umfanges hinein, wird also hier um den Rechtwinkel abgelenkt, weshalb hier auch die oben gefundene Formel für den isolirten Strahl

Fig. 931.



$$P = \frac{c - v}{g}\,Q\gamma = \frac{c - v}{g}\,cF\gamma$$

folglich das mechanische Arbeitsvermögen des fortfließenden Wassers:

$$L_2 = Q\gamma \cdot \frac{w^2}{2g} = Q\gamma \left(h_2 - \frac{(c-v)\,v}{g} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

Das mit der relativen Geschwindigkeit $w_1 = c_1 - v_1$ in das Rad einströmende Wasser verliert außerdem durch den Stoß (nach §. 463) das Arbeitsvermögen

$$L_1 = Q\gamma \frac{(c_1 - v_1)^2}{2g} = Q\gamma \left(h_1 - \frac{c_1 v_1}{g} + \frac{v_1^2}{2g}\right),$$

folglich geht von dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers auf das Rad

$$Q h \gamma = Q\,(h_1 + h_2)\,\gamma,$$

nur die mechanische Arbeit:

$$L = Q\gamma\,(h - h_1 - h_2) + Q\gamma \left(\frac{(c-v)\,v}{g} + \frac{c_1 v_1}{g}\right) \text{ über.}$$

Um eine möglichst große Arbeit des Rades zu erlangen, muß $w =$ Null, also $v = c$, und ebenso $w_1 =$ Null, also $v_1 = c_1$ sein, wonach dann

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_2, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_2}, \text{ sowie}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} = h_1, \text{ oder } v_1 = \sqrt{2gh_1} \text{ folgt.}$$

Es ist also in diesem Falle $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$, und die entsprechende Maximalleistung der Maschine:

$$L_m = Q\gamma \cdot \frac{c_1 v_1}{g} = Q\gamma \cdot \frac{v_1^2}{g} = 2\,Q h_1 \gamma = Q h \gamma,$$

d. i. gleich dem ganzen Arbeitsvermögen des Wassers.

Bezeichnet r_1 den Abstand des Eintrittspunktes und r den mittleren Abstand der Ausflußöffnungen des Rades von der Axe desselben, so hat man

$$\frac{v_1}{v} = \frac{r_1}{r}, \text{ daher } v_1 = \frac{r_1}{r}\,v$$

und die Radleistung überhaupt

$$L = Q\gamma \left(c - v + \frac{r_1}{r}\,c_1\right)\frac{v}{g};$$

so daß nun die Umdrehungskraft, im Abstande r gemessen:

$$P = \frac{L}{v} = \frac{Q\gamma}{g}\left(c - v + \frac{r_1}{r}\,c_1\right) \text{ folgt.}$$

Wenn die Last oder das angehangene Gewicht G am Hebelarme a wirkt, welcher z. B. im abgebildeten Apparate sehr nahe dem Halbmesser der Mittelröhre B gleich ist, so hat man $Ga = Pr$ und daher das anzuhängende und während der Umdrehung des Rades emporzuhebende Gewicht:

$$G = \frac{r}{a}\,P = \frac{Q\gamma}{ga}\,[(c - v)\,r + c_1 r_1],$$

also für $c = v$ und $c_1 = v_1$,

$$G = \frac{Q\gamma}{ga} c_1 r_1 = \frac{Q\gamma}{ga} v_1 r_1.$$

Bezeichnet F den Inhalt der Ausflußmündungen, sowie F_1 den der Eintrittsöffnungen des Rades zusammengenommen, so ist

$$Q = Fc = F_1 c_1, \text{ und daher}$$

$$F_1 = \frac{Q}{c_1} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_1}}, \text{ sowie}$$

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{Q}{\sqrt{2gh_2 + v^2 - v_1^2}} = F_1 \sqrt{\frac{2gh_1}{2gh_2 + v^2 - v_1^2}}.$$

Für $v = c$ und $v_1 = c_1$, wo $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} h$ ist, hat man $Q = Fv$, daher:

$$P = \frac{Qh\gamma}{v} = Fh\gamma,$$

dagegen für $v = 0$, ist $Q = F\sqrt{2gh_2}$, daher

$$P = \frac{Fc\gamma}{g}\left(c + \frac{r_1}{r} c_1\right).$$

Führt man noch das Wasser sehr langsam ins Rad ein, so läßt sich $c_1 = 0$, sowie $h_1 = 0$ setzen, und es folgt im letzteren Falle die Reactionskraft:

$$P = \frac{Fc\gamma}{g} c = \frac{2Fc^2\gamma}{2g} = 2Fh_2\gamma = 2Fh\gamma,$$

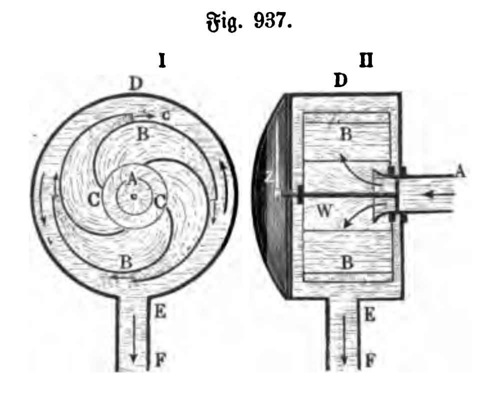
wie schon oben gefunden worden ist.

Da wir bei den vorstehenden Entwickelungen von den Nebenhindernissen abgesehen haben, so geben die Versuche an der abgebildeten Maschine nicht genau die gefundenen, sondern um einige Procent kleinere Kraftwerthe. Uebrigens stehen die Ergebnisse der Versuche an einem solchen Rade bei sorgfältiger Ausführung im besten Einklange mit der im Vorstehenden entwickelten Theorie.

Um diese Maschine zur Prüfung der Theorie des Wasserstoßes zu verwenden, befestigt man Stoßplatten, O, O, kleine Gefäße u. s. w. so an den Schwungröhren des Rades, daß dieselben den Stoß des ausfließenden Wassers aufnehmen können. Es ist dann die Umdrehungskraft gleich der Differenz zwischen der Reaction des Wassers im Rade und der Stoßkraft desselben außerhalb des Rades. Ganz der Theorie entsprechend bleibt dann das Rad stehen, wenn das ausströmende Wasser winkelrecht gegen ebene Stoßplatten oder in mit Wasser angefüllte Gefäße strömt; es behält dagegen noch eine Umdrehungsbewegung in der Richtung der Reaction, wenn es schief gegen ebene Stoßplatten oder gerade gegen convexe Stoßplatten stößt, und es dreht sich dagegen in der Richtung des ausfließenden Wassers um, wenn dasselbe von concaven Stoßplatten aufgefangen wird.

§. 533. **Wassermesser.** In neuerer Zeit bedient man sich auch zum Messen des fließenden Wassers der Wassermesser, welche durch die Reactionskraft des ausfließenden Wassers in Bewegung gesetzt werden und im Wesentlichen die Einrichtung eines Reactionsrades oder einer Turbine haben. Eine ideelle Darstellung eines solchen Wassermessers führt Fig. 937 im Durchschnitt vor Augen. Das zu messende Wasser fließt durch eine Röhre A in das Innere des Rades BB und gelangt durch vier Canäle CB, CB ... am äußern Umfang desselben zum Ausfluß in das Gehäuse DE, aus welchem es mittels einer Röhre EF weiter geführt wird. Die Welle W dieses Rades trägt einen Zeiger Z, oder vielmehr einen ganzen Zeigermechanismus, welcher die Umdrehungszahl des Rades und dadurch auch das derselben proportionale Quantum des durchgeflossenen Wassers zu jeder Zeit angiebt.

Fig. 937.



Bezeichnet h den durch die Höhe einer Wassersäule gemessenen Druckverlust beim Durchgange durch das Rad, ferner Q das durchfließende Wasserquantum pr. Secunde, c die Ausfluß- und v die in umgekehrter Richtung erfolgende Radgeschwindigkeit am Umfange, so hat man $c^2 - v^2 = 2gh$ und die Leistung des Rades:

$$L = \frac{(c - v)\, v}{g}\, Q\gamma \text{ (s. §. 532).}$$

Ist R der auf den Umfang reducirte Widerstand des Rades, in Folge seiner Axenreibung u. s. w., so kann man $L = Rv$ setzen, und erhält die Formel

$$R = \frac{c - v}{g}\, Q\gamma,$$

oder, wenn noch F die Summe der Inhalte sämmtlicher Ausmündungen bezeichnet, so daß $Q = Fc$, oder $c = \frac{Q}{F}$ gesetzt werden kann,

$$R = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{Q\gamma}{g}; \text{ so daß}$$

$$v = \frac{Q}{F} - \frac{gR}{Q\gamma} \text{ folgt.}$$

Wäre R Null, oder wenigstens sehr klein, so ließe sich $v = \frac{Q}{F}$ setzen,

also annehmen, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit v der Wassermenge Q proportional wäre, was allerdings auch zu fordern ist. Wenn dagegen $R = \psi v$ wäre, also der Widerstand des Rades mit v gleichmäßig zunähme, so würde

$$v + \frac{\psi g v}{Q\gamma} = \frac{Q}{F}, \text{ also}$$

$$v = \frac{Q}{F\left(1 + \frac{\psi g}{Q\gamma}\right)}, \text{ annähernd } = \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{\psi g}{Q\gamma}\right) \text{ zu setzen sein.}$$

Wenn also der Widerstand R des Rades nicht sehr klein ist, so nimmt das Instrument eine kleinere Umdrehungsgeschwindigkeit an, als wenn derselbe Null oder wenigstens unbeträchtlich ist, und es giebt dann auch das Instrument ein zu kleines Wasserquantum an.

Um den Einfluß des Widerstandes R wenigstens annähernd zu bestimmen, bezeichne c_0 die größte Ausflußgeschwindigkeit, welche das Wasser annehmen kann, ohne daß das Rad sich in Bewegung setzt, für welche also v noch gleich 0 ist, so hat man, unter $Q_0 \doteq F c_0$ die dieser Ausflußgeschwindigkeit entsprechende Wassermenge verstanden:

$$R = \frac{c_0 - 0}{g} Q_0 \gamma \text{ oder } c_0 = \frac{g R}{Q_0 \gamma}.$$

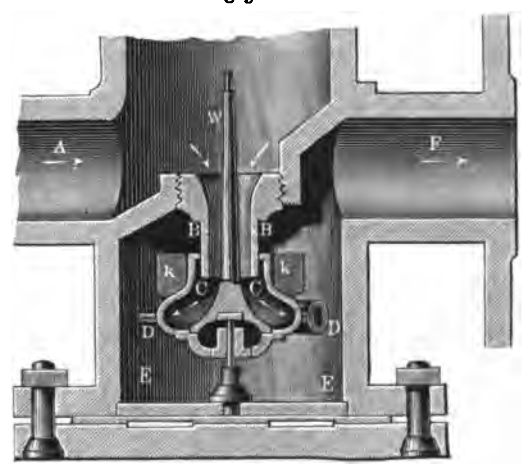
Es läßt sich dann wenigstens annähernd $v = c - c_0$, sowie

$$Q = F(v + c_0) = \frac{\pi F r u}{30} + Q_0 = \mu u + Q_0$$

setzen, wenn r den Radhalbmesser, u die Umdrehungszahl des Rades und μ einen durch Versuche zu bestimmenden Coefficienten bezeichnet.

Am meisten haben in der neuesten Zeit die Wassermesser dieser Art von Siemens Anwendung gefunden, wovon Fig. 938 den Haupttheil im Durch-

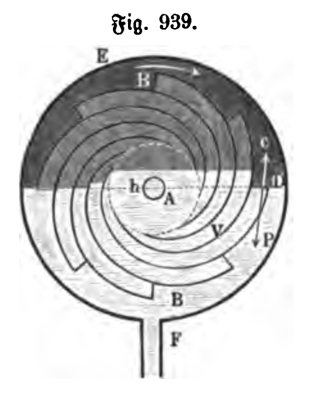
Fig. 938.



schnitt darstellt. Das aus *A* zufließende Wasser tritt durch die Röhre *BB* in das Rad *CC* und wird von da durch die Schwungröhren *DD* in das Gehäuse *EE* geführt, aus dem es die Röhre *F* weiter leitet. Die Welle *W* des Rades ist oben durch eine Stopfbüchse geführt und setzt mit ihrem schraubenförmigen Ende den Zählapparat in Bewegung. Die Flügel *k*, *k* auf dem Rade sollen durch den Widerstand, welchen sie im Wasser erleiden, zum Reguliren der Umdrehungsbewegung des Rades beitragen.

Man kann auch das Reactionsrad so einrichten, daß es bei jeder Umdrehung eine bestimmte Wassermenge durchführt. In dieser Absicht taucht man das Rad *BAB*, Fig. 939, nur zum Theil ins Wasser, so daß sich bei Umdrehung desselben die Röhren oder Spiralgänge abwechselnd mit Luft und Wasser füllen. Das Wasser wird auch hier durch eine Röhre ins Innere des Rades und von da durch die Spiralgänge in den übrigen Raum des Gehäuses *EF* geführt, aus dem es in der Röhre *F* abläuft. Das Wasser steht hier im Innern des Rades um eine gewisse Höhe *h* über dem Wasser im Gefäße, und wenn daher bei der Umdrehung des Rades in der angedeuteten Richtung eine Ausmündung *D* unter den Wasserspiegel im Inneren gelangt, so fängt das Wasser an durch dieselbe auszufließen, und übt dabei eine gewisse Reactionskraft *P* aus, wodurch die Umdrehungsbewegung des Rades unterhalten wird. Ist *V* die Wassermenge, welche ein Spiralgang faßt, und *n* die Anzahl dieser Canäle, so fließt bei der Umdrehungszahl *u* des Rades pr. Minute, die Wassermenge $Q = \frac{nuV}{60}$ pr. Secunde durch das Rad.

Fig. 939.

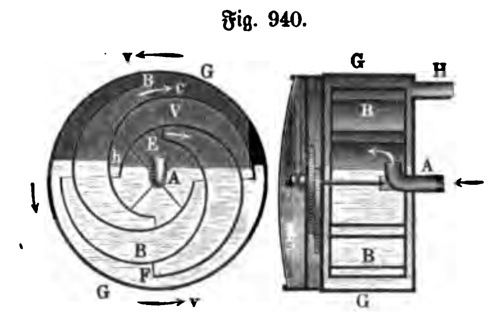


Anmerkung. Ueber den Siemens'schen Wassermesser ist nachzulesen: die Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Bd. I., 1857, wo auch noch ein nach dem Principe des Aichens construirter Wassermesser von Jopling beschrieben wird. Siehe auch die Schrift: Siemens and Adamsons Patent-Water-Meter. Ein ganz eigenthümlich construirter Wassermesser in Form eines Reactionsrades ist im Génie industrielle Tome XXI, No. 126, 1861, unter dem Namen: Compteur hydraulique pour la mesure d'écoulement des liquides, par Guyet beschrieben. Zwei Wassermesser sind auch in der englischen Schrift Hydraulia, by W. Matthews behandelt. Ein Compteur hydraulique, welcher auf dem Bahnhofe zu Chartres gebraucht wird, ist beschrieben im Bulletin de la Société d'encouragement, 51. Jahrgang (1852). Ueber Uhler's Meßapparat für Flüssigkeit handelt Dingler's Journal, Bd. 161. Die Beschreibung eines Controlapparates zum Messen des in den Branntweinbrennereien gewonnenen

Spiritus von Perels enthalten die Mittheilungen des Gewerbevereines für Hannover, Neue Folge 1861.

Gasmesser. Die sogenannten nassen Gasmesser oder Gasuhren sind ebenso, wie gewisse Wassermesser, kleine Räder mit Spiralgängen, welche zur größeren Hälfte ins Wasser eintauchen, und durch die Reaction des durchströmenden Gases in Umdrehung gesetzt werden, wobei jeder Spiralgang eine gewisse Gasmenge von innen nach außen führt. Die wesentliche Einrichtung eines solchen Gasmessers ist aus den beiden Durchschnitten in Fig. 940 ersichtlich. Das zuströmende Gas wird durch eine Kropfröhre A in das Innere eines Rades BB geleitet, wo es den Wasserspiegel um die Höhe h tiefer drückt, welche dem Spannungsverlust des Gases beim Durchgang durch das Instrument entspricht. Aus demselben tritt es nach und nach in die Einmündungen der Spiralgänge, füllt dieselben fast ganz aus, und strömt zuletzt durch die Mündungen am Radumfang in das Gehäuse GG, aus welchem es durch eine Röhre H nach dem Punkte des Bedarfes geführt wird. Damit durch einen Spiralgang des Rades eine bestimmte Gasmenge abgeführt werde, ist die Anordnung so zu treffen, daß sich von den beiden Mündungen einer Windung immer mindestens eine unter Wasser befindet, weil dann während des Anfüllens eines Ganges kein Abfluß statthat, und während des Abflusses nicht noch Gas ungemessen von innen nachströmt. Es ist dann die Gasmenge V, welche ein Spiralgang durchläßt, eine bestimmte, und daher das Gasquantum §. 534.

Fig. 940.



$$Q = \frac{nu \cdot V}{60}$$

zu setzen, wenn das Rad mit n Spiralgängen pr. Minute u Umdrehungen macht. Bezeichnet b den Barometerstand des abströmenden Gases, so ist $b + h$ der Barometerstand des zuströmenden Gases, daher, nach dem Mariotte'schen Gesetze, das Luftquantum eines Spiralganges, gemessen unter dem Drucke außerhalb des Rades:

$$V_1 = \frac{b + h}{b} V,$$

und folglich die Luftmenge, welche zunächst beim Austritt einer Außenmündung aus dem Wasser, aus dem Rade in den übrigen Gefäßraum strömt,

$$V_1 - V = \frac{h}{b} V.$$

Bei diesem Ausströmen wird die mechanische Arbeit

$$A = Vp \; Log.\, nat. \frac{b + h}{b}$$

frei (s. §. 415), welche, da wegen der Kleinheit von $\frac{h}{b}$ annähernd

$$Log.\, nat. \frac{b + h}{b} = Log.\, nat. \left(1 + \frac{h}{b}\right) = \frac{h}{b}$$

und bei dem specif. Gewichte γ der Manometerfüllung, $p = (b + h)\gamma = b\gamma$ ist, auch $A = Vh\gamma$ gesetzt werden kann.

Von dieser Arbeit wird ein Theil auf die Umdrehungsbewegung des Rades verwendet, und ein Theil von der Wirbelbildung aufgezehrt. Der erstere Theil ist durch den Ausdruck

$$A_1 = \frac{(c - v)\, v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1,$$

in welchem h den mittleren Manometerstand, c die mittlere Ausflußgeschwindigkeit, v die äußere Radgeschwindigkeit und γ_1 das specif. Gewicht des ausströmenden Gases bezeichnet, bestimmt. Ist R der auf den Radumfang reducirte Widerstand des Rades, sowie r der Halbmesser desselben, so hat man die von demselben beanspruchte Arbeit:

$$A_1 = R \frac{2 \pi r}{n}, \text{ und daher zu setzen:}$$

$$\frac{(c - v)\, v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{2 \pi r}{n} R, \text{ oder da } 2 \pi r = \frac{60 v}{u} \text{ ist,}$$

$$\frac{c - v}{g} \cdot \frac{h}{b} V \gamma_1 = \frac{60 R}{n u},$$

und es folgt daher die dem Abstande h zwischen den beiden Wasserspiegeln entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v = c - \frac{g b}{h V \gamma_1} \cdot \frac{60 R}{n u}$$

sowie die Umdrehungszahl der Gasuhr pro Minute:

$$u = \frac{30}{\pi r} \left(c - \frac{60 g b R}{n u V h \gamma_1}\right).$$

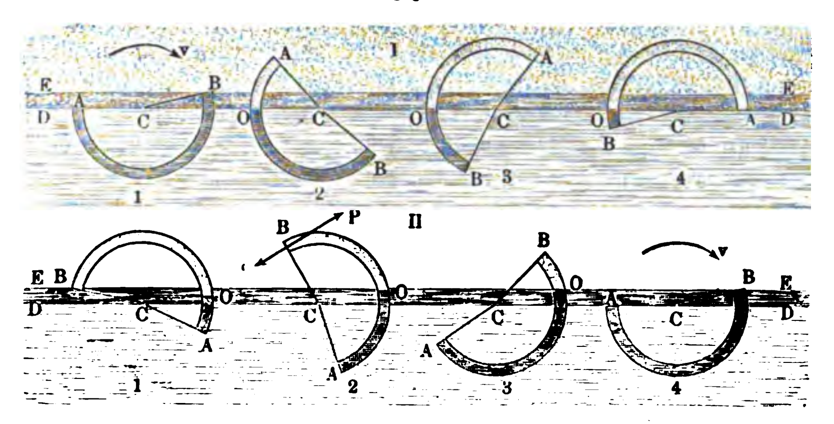
Annähernd fällt $c = \sqrt{2 g \frac{h \gamma}{\gamma_1}}$ aus, wenn γ das specif. Gewicht der Manometerfüllung bezeichnet. Das Gasquantum pro Secunde ist natürlich

$$Q = \frac{n u}{60} V,$$

also der Umdrehungszahl u proportional.

Neuere Gasuhren. Anstatt die Spiralgänge einer Gasuhr in einer §. 535.
Ebene um die Welle anzubringen, kann man dieselben auch schraubenförmig um dieselbe herumführen. Die Art und Weise der Wirkung eines solchen Gasmessers ist aus den Durchschnitten in I. und II., Fig. 941, zu ersehen, wo *DD* den Wasserspiegel an der vorderen und *EE* den Wasserspiegel an

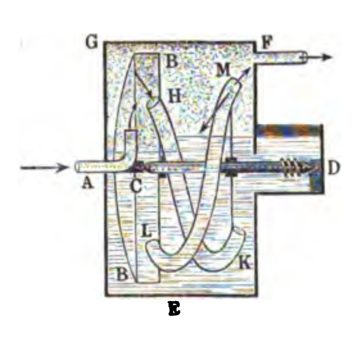
Fig. 941.



der hinteren Stirnfläche des eine liegende Trommel bildenden Rades vorstellt. Die Mündung *A* des Spiralganges *AOB* mündet in der Kammer an der vorderen Fläche aus und nimmt das zuströmende Gas auf, die Mündung *B* hingegen führt das Gas in die Kammer an der hinteren Stirnfläche, von welcher aus es mittels einer Röhre weiter geführt wird. In Fig. 941, I. sind die verschiedenen Stellungen eines Spiralganges von der vorderen Stirnfläche aus gesehen, abgebildet. Fig. 941, II. dagegen stellt verschiedene Stellungen dieses Ganges von der hinteren Stirnfläche des Rades aus betrachtet, dar. Bei der durch einen Pfeil angedeuteten Richtung der Umdrehung des Rades um die horizontale Axe *C* tritt in (I., 1) die Einmündung *A* eben aus dem vorderen Wasser heraus, während die Ausmündung *B* in das hintere Wasser zu treten beginnt; ferner sind in (I., 2) und (I., 3) Gasbögen *AO*, *AO* durch die Mündung *A* eingetreten, und es taucht in (I., 4) die Einmündung *A* wieder in das Vorderwasser, wobei nach Aufnahme einer gewissen Gasmenge *V* das weitere Einströmen von Gas durch *A* aufhört. Kurz darauf gelangt aber die Ausmündung *B* wie (II., 1) darstellt, aus dem Hinterwasser, und es beginnt das Ausströmen des vorher eingenommenen Gases, welches bei den Stellungen (II., 2) und (II., 3) vollkommen im Gange ist. Bei einer weiteren Drehung tritt *B* wieder in das Hinterwasser, wie (II., 4) darstellt, und es beginnt nun eine neue Aufnahme von Gas. Es wird also bei der einen Hälfte der Umdrehung von dem Spiralgange *AOB* ein Gasbogen *AO* (I., 4) von der größeren Pressung $b + h$ auf-

genommen, und bei der zweiten Hälfte von demselben in den Raum mit der kleineren Pressung geführt. Bei dem Uebergange aus der größeren Pressung in die kleinere wird wieder das Arbeitsquantum $A = Vh\gamma$ frei, von welchem ein Theil die Umdrehung des Rades bewirkt, wie bereits im vorigen Paragraphen angegeben worden ist. Die allgemeine Einrichtung und Thätigkeit einer solchen Gasuhr ist aus einer ideellen Darstellung in Fig. 942 noch besser zu erkennen. Das Gas wird zunächst durch ein Kropfrohr A in eine Kammer BB geführt, welche nur in der Mitte, um die Umdrehungsaxe C herum, mit dem Wasser im Gehäuse EFG communicirt, am äußeren Umfange aber, wo die Spiralgänge HK und LM einmünden, luftdicht abgeschlossen ist. In der Abbildung ist dargestellt, wie der Spiralgang HK aus BB Gas aufnimmt, und wie dagegen der Spiralgang LM das kurz vorher aufgenommene Gas bei M in den oberen Raum des Gehäuses EFG führt, aus dem es durch eine Röhre F weiter geleitet wird. Bei dieser Einrichtung der Gasuhr ist das Gas in der Vorkammer durch das Wasser von dem in dem Gehäuse ganz abgesperrt, und daher eine Liderung, welche durch die Reibung viel Kraft verzehrt, nicht nöthig. Das andere Ende D der Axe CD des Rades ist mit einem Schraubengewinde versehen, wodurch der Räder-mechanismus des Zählapparates in Bewegung gesetzt wird.


Fig. 942. Fig. 943.

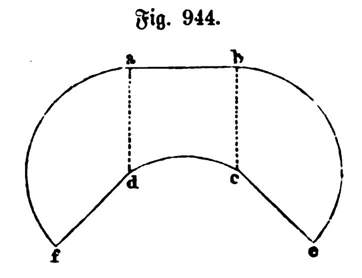


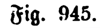


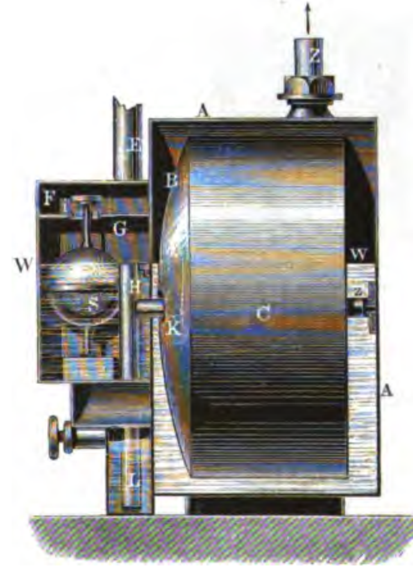
Die Crosley'schen Gasuhren, welche eine allgemeine Verbreitung erlangt haben, sind nach dem im Vorstehenden erklärten Principe construirt; nur sind hier die Spiralgänge nicht röhrenförmig, sondern wirkliche Kammern mit spiralförmigen Scheidewänden und durch Ausbiegung der Stirnwände gebildeten triangulären Ein- und Ausmündungscanälen. Figur 943 ist eine perspectivische Ansicht eines solchen Rades bei abgenommenem Mantel, welches sich aus 4 Blechstücken, wie Fig. 944 darstellt, zusammensetzen läßt. Man sieht in $agec$ die Ein- und in df . . . die Ausmündungen, sowie in AC . . . die Scheidewände des um die Axe zz umlaufenden

Rades. In Fig. 945 ist ein Längendurchschnitt der Gasuhr mit dem Aeußeren der Trommel abgebildet; man bemerkt bei *K* die Kropfröhre, welche das Gas in die Vorkammer des Rades oder der Trommel einführt, und in *Z* die Röhre, welche das Gas aus dem oberen Raume *A A* des Uhrgehäuses ableitet. Das Gas strömt nicht unmittelbar aus der Gasleitung nach *K*, sondern die Röhre *E* führt erst das Gas in eine Kammer *F* und von da durch die Ventilöffnung *i* in die Kammer *G*, von wo aus es durch den oberen Theil der verticalen Röhre *H* in die Kropfröhre *K* gelangt. Der äußere Wasserspiegel reicht gerade bis zur Einmündung der Röhre *H*, durch welche das überschüssige Wasser nach unten in einen Behälter *L* abgeführt wird. Damit jedoch das Wasser nicht zu tief sinke, ist ein Schwimmer *S* angebracht, welcher das Admissionsventil *i* trägt und dasselbe verschließt, wenn er bis auf eine gewisse Tiefe sinkt. Der Gaszufluß hört dann ganz auf, und man wird dadurch benachrichtigt, daß eine Nachfüllung von Wasser durch eine Mündung *M* in einer nur unten mit dem Wasserraume in Communication stehenden Kammer *N* nöthig ist.

Fig. 944.




Fig. 945.

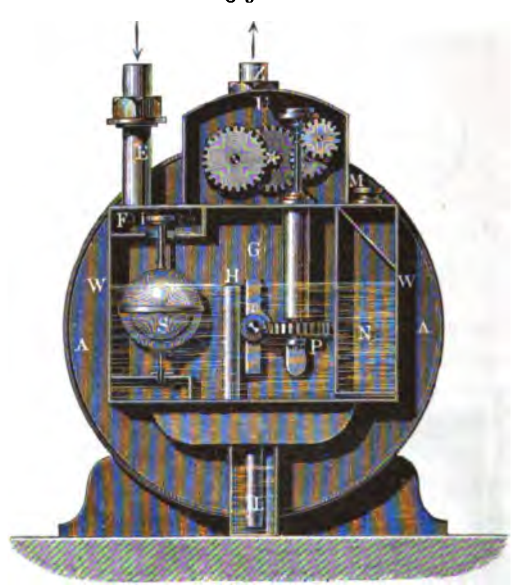


Die Abbildung in Fig. 946 (a. f. S.) führt die Gasuhr in einem vordern Durchschnitte vor Augen, worin außer der Kammer *N* mit der Mündung *M*, vorzüglich das Uhrwerk *U* des Zählapparates, welches mittels eines Schraubengewindes an der Axe der Trommel und durch eine stehende Welle mit Zahnrad *P* in Umtrieb gesetzt wird, zu sehen ist.

Ein wesentlicher Widerstand bei dem Gange der Crosley'schen Gasuhr geht aus dem Ein- und Austritte des Wassers durch die verengten trian-

gulären Mündungen hervor. Aus dem Inhalte F einer Ein- oder Ausmündung und der durchströmenden Wassermenge pr. Secunde, welche sich dem Gasquantum Q gleichsetzen läßt, folgt die Ein- und Austrittsgeschwindig-

Fig. 946.



keit des Wassers $v_1 = \frac{Q}{F}$, und daher der entsprechende Arbeitsverlust pr. Secunde:

$$L_1 = 2\,\frac{v_1^2}{2g}\,Q\gamma = \left(\frac{Q}{F}\right)^2 \frac{Q\gamma}{g}.$$

Anmerkung. Näheres über Gasuhren ist nachzulesen in Schilling's Handbuch der Steinkohlengasbeleuchtung, ferner Heeren's Aufsatz: „Die Einrichtung der Gasuhren" in den Mittheilungen des Gewerbevereins für das K. Hannover, Jahrgang 1859. Eine neue Gasuhr von Hansen ist beschrieben im Journal für Gasbeleuchtung, 1861.

§. 536. **Wirkungen unbegrenzter Flüssigkeiten.** Wenn sich ein Körper in einer unbegrenzten Flüssigkeit progressiv fortbewegt, oder wenn ein Körper in eine bewegte Flüssigkeit gebracht wird, so erleidet derselbe einen Druck, der von der Form und Größe dieses Körpers, sowie von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und von der Geschwindigkeit der einen oder der anderen Masse abhängt, und in einem Falle Widerstand, im anderen aber Stoß

der Flüssigkeit genannt wird. Dieser hydraulische Druck entspringt aber vorzüglich aus der Trägheit des Wassers, dessen Bewegungszustand durch das Zusammentreffen mit dem festen Körper verändert wird, dann aber auch noch aus der Kraft des Zusammenhängens der Wassertheilchen, die hierbei theilweise von einander getrennt oder an einander verschoben werden. Bewegt sich ein Körper AC, Fig. 947, im stillstehenden Wasser, so schiebt er eine gewisse Wassermasse mit erhöhtem Drucke vor sich her. Während diese Wassermasse beim weiteren Fortrücken des Körpers einerseits immer mehr Zuwachs erhält, findet andererseits nahe am Körper ein steter Abfluß statt, indem die der Vorderfläche AB zunächst liegenden Theilchen eine Bewegung

Fig. 947.

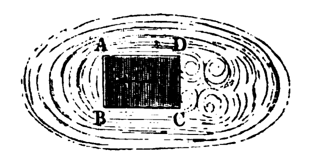
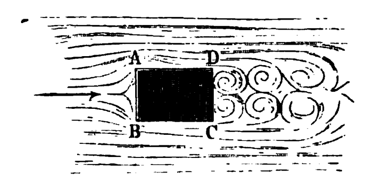


Fig. 948.



in der Richtung dieser Fläche annehmen. Trifft das bewegte Wasser einen in Ruhe befindlichen Körper AC, Fig. 948, so erzeugt sich vor demselben ebenfalls ein erhöhter Wasserdruck und macht, daß die Wassertheilchen vor dem Körper von ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt werden und sich an der Vorderfläche AB hinbewegen. Haben diese Wassertheilchen die Grenzen der Vorderfläche erreicht, so machen dieselben eine Wendung, und laufen nachher an den Seitenflächen des Körpers hin, bis sie an die Hinterfläche kommen, wo sie sich nicht sogleich wieder vereinigen, sondern zunächst wirbelnde Bewegungen annehmen. Man sieht, daß die allgemeinen Bewegungsverhältnisse der den Körper umgebenden Wasserelemente beim Stoße des bewegten Wassers dieselben sind, wie beim Widerstande eines im Wasser bewegten Körpers; nur findet bei den Wirbeln eine Verschiedenheit insofern statt, als bei kurzen Körpern die Wirbel im letzteren Falle einen kleineren Raum einnehmen als im ersteren. Die Geschwindigkeit der Wasserelemente nimmt in beiden Fällen von der Mitte der Vorderfläche an nach den Grenzen derselben mehr und mehr zu, erreicht am Anfange der Seitenflächen, wo in der Regel noch eine Contraction eintritt, ihr Maximum, nimmt nun bei dem an den Seitenflächen hingehenden Wasser allmälig ab, und erreicht endlich ihr Minimum bei dem Wasser, welches die Hinterfläche erlangt und in wirbelnde Bewegung übergeht.

Theorie des Stosses und Widerstandes. Der Normaldruck des ruhenden oder bewegten Wassers gegen einen in demselben bewegten oder in §. 537.

Ruhe befindlichen Körper ist an verschiedenen Punkten desselben sehr verschieden. Er ist in der Mitte der Vorderfläche desselben am größten und in der Mitte der Hinterfläche und nächstdem am Anfange der Seitenflächen am kleinsten, weil dort mehr ein Zu-, hier aber mehr ein Entströmen des Wassers in Hinsicht auf den Körper statt hat. Ist der Körper, wie wir in der Folge voraussetzen wollen, in Hinsicht auf die Bewegungsrichtung symmetrisch, so heben sich die sämmtlichen Pressungen rechtwinkelig gegen diese Richtung auf, und es kommen daher nur die Pressungen in der Bewegungsrichtung in Betracht. Nun sind aber die Pressungen auf der Hinterfläche des Körpers den Pressungen auf der Vorderfläche entgegengesetzt, es läßt sich daher der resultirende **Stoß** oder **Widerstand des Wassers gleichsetzen der Differenz zwischen dem Drucke gegen die Vorder- und dem gegen die Hinterfläche.**

Wenn wir auch die Größe dieser Drücke a priori nicht angeben können, so können wir doch wegen der großen Aehnlichkeit der Verhältnisse mit dem Stoße isolirter Strahlen annehmen, daß wenigstens das allgemeine Gesetz für den Stoß des unbegrenzten Wassers von dem für den Stoß isolirter Strahlen nicht abweiche. Ist also F der Inhalt einer Fläche, welche von einem unbegrenzten Strome, dessen specifisches Gewicht γ sein möge, mit der Geschwindigkeit v getroffen wird, so läßt sich der entsprechende Stoß oder hydraulische Druck:

$$P = \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$$

setzen, wobei ζ noch eine von der Form der Fläche abhängige Erfahrungszahl bezeichnet. Dieser Ausdruck läßt sich aber nicht nur auf die Wirkung gegen die Vorderfläche, sondern auch auf die gegen die Hinterfläche anwenden, nur besteht sie hier, wo das Wasser ein Bestreben hat, sich zu entfernen, in einem Zuge oder einem Negativdrucke. Ist nun $Fh\gamma$ der hydrostatische Druck gegen die Vorder- und gegen die Hinterfläche eines Körpers, so folgt der Gesammtdruck gegen die Vorderfläche:

$$P_1 = Fh\gamma + \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und der gegen die Hinterfläche:

$$P_2 = Fh\gamma - \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

und es ergiebt sich so der resultirende Stoß oder Widerstand des Wassers:

$$P = P_1 - P_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

wenn $\zeta_1 + \zeta_2 = \zeta$ gesetzt wird.

Diese allgemeine Formel für den **Stoß und Widerstand des unbegrenzten Wassers** findet auch ihre Anwendung auf den **Stoß des**

Windes und auf den Widerstand der Luft. Allerdings findet hier außer der Verschiedenheit des aërodynamischen Druckes an der Vorder- und Hinterfläche auch noch eine Verschiedenheit des aërostatischen Druckes statt, indem die Luft vor der Vorderfläche bei ihrer größeren Spannung auch eine größere Dichtigkeit (γ) hat, als an der Hinterfläche. Deshalb fallen wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, wie sie z. B. bei Geschützkugeln vorkommen, die Widerstandscoefficienten der Luft größer aus, als die des Wassers.

Anmerkung. Eine eigenthümliche Erscheinung beim Stoße und Widerstande unbegrenzter Mittel (Wasser oder Luft) ist das Anhängen einer gewissen Wasser- oder Luftmasse an den Körper, dessen Einfluß sich bei der ungleichförmigen Bewegung der Körper, wie z. B. bei Pendelschwingungen, besonders bemerkbar macht. Bei einer Kugel hat die dem bewegten Körper anhängende Luft- oder Wassermasse ein Volumen von 0,6 des Volumens der Kugel. Bei einem in der Axenrichtung bewegten prismatischen Körper ist das Verhältniß dieser Volumina

$$= 0{,}13 + 0{,}705 \frac{\sqrt{F}}{l},$$

wo l die Länge und F den Querschnitt des Körpers bezeichnet. Diese schon von du Buat aufgefundenen Verhältnisse haben durch die neueren Beobachtungen von Bessel, Sabine und Baily vollkommene Bestätigung gefunden.

Stoss und Widerstand gegen Flächen. Der Widerstands-coefficient ζ oder die Zahl, womit die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ zu multipliciren ist, um die Höhe einer den hydraulischen Druck messenden Wassersäule zu erhalten, ist bei Körpern von verschiedenen Formen sehr verschieden, und nur bei Platten, welche rechtwinkelig gegen die Bewegungsrichtung stehen, von beinahe bestimmter Größe. Nach den Versuchen von du Buat und nach denen von Thibault läßt sich für den Luft- und Wasserstoß gegen eine ruhende ebene Fläche $\zeta = 1{,}86$ setzen, wogegen, jedoch mit weniger Sicherheit, für den Widerstand der Luft und des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche $\zeta = 1{,}25$ anzunehmen sein möchte. In beiden Fällen kommen auf die Vorderfläche ungefähr zwei, und auf die Hinterfläche ein Drittel der ganzen Wirkung. Der Widerstand, welchen die Luft einer im Kreise umlaufenden Fläche entgegensetzt, ist von Borda, Hutton und Thibault sehr verschieden gefunden worden. Der Letztere fand mittels einer rotirenden ebenen Fläche von 0,1 Quadratmeter Inhalt den Widerstand: §. 538.

$$P = 0{,}108\, F v^2, \text{ wonach}$$

$$\zeta = 0{,}108 \cdot \frac{2g}{\gamma} = 0{,}108 \cdot \frac{19{,}62}{1{,}25} = 1{,}70 \text{ ist,}$$

wenn man das specifische Gewicht der Luft bei einer mittleren Temperatur von 10° C. zu

$$\frac{1{,}2935}{1 + 10 \,.\, 0{,}00367} = 1{,}25 \text{ Kilogramm annimmt.}$$

Dieser Widerstand bleibt, diesen Versuchen zufolge, fast unverändert, so lange der Winkel α, um welchen die Fläche von der Bewegungsrichtung abweicht, nicht unter 45 Grad herabgeht. Von 45 Grad an nimmt er mit dem Stoßwinkel α ab, so daß bei $\alpha = 10$ Grad, ζ nur $= 0{,}53$ ausfällt.

Nach den Versuchen von Didion u. s. w. ist für den Widerstand rotirender ebener Flächen von 0,2 . 0,2 = 0,04 Quadratmeter Inhalt:

$$\zeta = (0{,}1002 + 0{,}0434 v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}573 + 0{,}681 v^{-2},$$

wo v in Metern zu geben ist.

An einer ebenen Fläche von 1 Quadratmeter Inhalt fand dagegen Didion u. s. w. bei einer senkrechten Bewegung derselben, den Widerstandscoefficienten:

$$\zeta = (0{,}084 + 0{,}036 v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}318 + 0{,}565 v^{-2},$$

wogegen Thibault an solchen Flächen von 0,1 und 0,2 Quadratmeter Inhalt den Coefficienten

$$\zeta = (0{,}1188 + 0{,}036 v^{-2}) \cdot \frac{2g}{\gamma} = 1{,}865 + 0{,}565 v^{-2} \text{ findet.}$$

Vorstehende Formeln gelten nur für eine gleichförmige Bewegung der Fläche; erfolgt die Bewegung derselben ungleichförmig, so erfordern dieselben noch eine Ergänzung. Aendert sich die Geschwindigkeit eines in einem widerstehenden Mittel bewegten Körpers, so wird auch die von dem Körper in Bewegung gesetzte, oder von demselben mit fortgenommene Flüssigkeitsmasse eine andere, und deshalb läßt sich der Widerstand auch noch von der Acceleration p des Körpers abhängig darstellen. Nach den Versuchen von Didion u. s. w. an einer Fläche von 1 und an einer solchen von 1/4 Quadratmeter Inhalt, welche in einer verticalen Linie bewegt wurde, ist der Widerstand:

$$P = (0{,}084 v^2 + 0{,}036 + 0{,}164 p) F, \text{ und hiernach:}$$

$$\zeta = [0{,}084 + (0{,}036 + 0{,}164 p) v^{-2}] \cdot \frac{2g}{\gamma}$$

$$= 1{,}318 + (0{,}565 + 2{,}574 p) v^{-2}.$$

Uebrigens ist zu beachten, daß bei der ungleichförmigen Bewegung das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit von dem Quadrate der mittleren Geschwindigkeit verschieden ist.

Stoß und Widerstand unbegrenzter Mittel werden auch erhöht, wenn man die Flächen aushöhlt oder am Umfange mit vorstehenden Rändern versieht; doch ist man hierüber zu allgemeinen Ergebnissen noch nicht gelangt.

An einem Fallschirm von 1,2 Quadratmeter Querschnitt, 1,27 Meter mittlerem Durchmesser und 0,430 Meter Tiefe fand Didion u. s. w. bei einer accelerirten Bewegung, wobei die hohle Seite vorausging:

$$P = (0{,}163\,v^2 + 0{,}070 + 0{,}142\,p)\,F,$$

wonach also

$$\zeta = 2{,}559 + (1{,}099 + 2{,}229\,p)\,v^{-2} \text{ ist.}$$

Stoss und Widerstand gegen Körper. Der Stoß und Widerstand des Wassers gegen prismatische Körper, deren Axe mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, nimmt ab, wenn die Länge der Körper eine größere wird. Nach den Versuchen von du Buat und Duchemin ist der Stoß von der Vorderfläche unveränderlich und nur die Wirkung gegen die Hinterfläche veränderlich. Jenem entspricht der Coefficient $\zeta_1 = 1{,}186$, für die Gesammtwirkung aber ist bei den relativen Längen §. 539.

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$$

$$\zeta = 1{,}86;\ 1{,}47;\ 1{,}35;\ 1{,}33.$$

Bei noch größerem Verhältnisse zwischen der Länge l und der mittleren Breite $\sqrt{F}$ des Körpers nimmt ζ in Folge der Reibung des Wassers an den Seitenflächen des Körpers wieder zu. Bei dem Widerstande des Wassers treten umgekehrte Verhältnisse ein. Hier ist nach du Buat für die Wirkung gegen die Vorderfläche unveränderlich $\zeta_1 = 1$, für die Gesammtwirkung aber bei

$$\frac{l}{\sqrt{F}} = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3:$$

$$\zeta = 1{,}25;\ 1{,}28;\ 1{,}31;\ 1{,}33,$$

so daß also bei einem Prisma, welches dreimal so lang als dick ist, der Stoß mit dem Widerstande des Wassers gleich groß ausfällt.

Die von Newton, Borda, Hutton, Vince, Désaguilliers u. A. angestellten Versuche über den Widerstand von eckigen und runden Körpern lassen noch viel Unsicherheit zurück. Was die Kugeln betrifft, so scheint bei mäßigen Geschwindigkeiten der Widerstandscoefficient für die Bewegung in Luft oder Wasser 0,5 bis 0,6 gesetzt werden zu können. Bei großer Geschwindigkeit und für die Bewegung in der Luft ist aber nach Robins und Hutton zu setzen für die Geschwindigkeiten

$v = 1,\ 5,\ 25,\ 100,\ 200,\ 300,\ 400,\ 500,\ 600$ Meter:
$\zeta = 0{,}59;\ 0{,}63;\ 0{,}67;\ 0{,}71;\ 0{,}77;\ 0{,}88;\ 0{,}99;\ 1{,}04;\ 1{,}01.$

Duchemin und Piobert haben besondere Formeln für das Wachsen dieser Widerstandscoefficienten angegeben. Nach Piobert ist der Widerstand der Geschützkugeln in der Luft:

$$P = 0{,}029\,(1 + 0{,}0023\,v)\,F v^2 \text{ Kilogramm, wonach}$$

$$\zeta = 0{,}451\,(1 + 0{,}0023\,v) \text{ folgt.}$$

Für den Stoß des Wassers gegen eine Kugel findet Eytelwein:

$$\zeta = 0{,}7886,$$

wogegen nach den Versuchen Piobert's u. s. w., angestellt mit Geschützkugeln von 0,10 bis 0,22 Meter Durchmesser, der Widerstand der Kugeln im Wasser:

$$P = 23{,}8\, F v^2 \text{ Kilogramm; und daher}$$

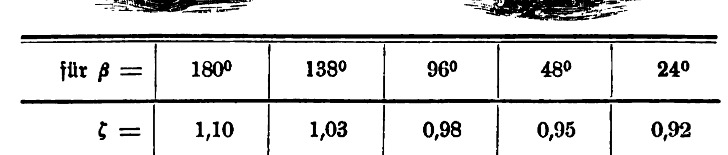
$$\zeta = 0{,}467 \text{ zu setzen ist.}$$

Die Widerstandscoefficienten fallen auch bei nur zum Theil eingetauchten Körpern anders aus, als bei ganz vom Wasser umgebenen Körpern. Für einen schwimmenden prismatischen Körper, welcher 5 bis 6 mal so lang als breit ist, und in der Axenrichtung bewegt wird, soll $\zeta = 1{,}10$ gesetzt werden. Ist der Körper durch zwei Verticalebenen vorn zugeschärft, wie ABC, Fig. 949, so nimmt ζ mit dem Zuschärfungswinkel $ACA = \beta$ ab, und es ist

für $\beta =$	180°	156°	132°	108°	84°	60°	36°	12°
$\zeta =$	1,10	1,06	0,93	0,84	0,59	0,48	0,45	0,44

Ist das Hintertheil des Körpers ACB, Fig. 950, zugeschärft, und β der Zuschärfungswinkel, so hat man dagegen

Fig. 949. Fig. 950.



für $\beta =$	180°	138°	96°	48°	24°
$\zeta =$	1,10	1,03	0,98	0,95	0,92

Bei zugespitzten Vorder- und Hintertheilen des schwimmenden Körpers fällt natürlich ζ noch kleiner aus; für Flußdampfschiffe ist $\zeta = 0{,}12$ bis $0{,}20$, und für große Seedampfschiffe $\zeta = 0{,}05$ bis $0{,}10$.

Anmerkung. Sehr ausführlich über diese Verhältnisse handeln Poncelet in seiner oben citirten Introduction, und Duchemin sowie Thibault in ihren Récherches expérimentales etc. Ueber den Widerstand gegen schwimmende Körper, namentlich gegen Schiffe, sowie auch vom Stoße des Windes gegen Räder, wird im zweiten und dritten Theile gehandelt.

Beispiel. Wenn man nach Borda den Widerstand und Stoß rechtwinkelig gegen die Axe eines Cylinders $\frac{1}{2}$mal so groß setzt, als den gegen ein Parallelepiped, welches mit ihm gleiche Dimensionen hat, so erhält man für den Widerstand den Coefficienten:

$$\zeta = \tfrac{1}{2} \,.\, 1{,}28 = 0{,}64,$$

und für den Stoß denselben

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, 1{,}47 = 0{,}735.$$

Wendet man nun diese Werthe auf den menschlichen Körper an, dessen verticaler Querschnitt etwa 0,7 Quadratmeter Inhalt hat, so findet man für den Widerstand und Stoß der Luft gegen denselben die Werthe:

$$P = 0{,}64 \,.\, 0{,}051 \,.\, 1{,}25 \,.\, 0{,}7 \,.\, v^2 = 0{,}0285\, v^2$$

und

$$P = 0{,}735 \,.\, 0{,}051 \,.\, 1{,}25 \,.\, 0{,}7 \,.\, v^2 = 0{,}0328\, v^2.$$

Bei einer Geschwindigkeit von 1 Meter ist daher der Widerstand der Luft nur 0,0285 Kilogramm und die entsprechende Leistung 0,0285 Meterkilogramm, während bei einer Geschwindigkeit von 2 Metern dieser Widerstand viermal und der Arbeitsaufwand achtmal so groß ausfällt. Bewegt sich ein Mensch mit der Geschwindigkeit von 1,2 Meter dem Winde von 12 Meter Geschwindigkeit entgegen, so hat er einen der relativen Geschwindigkeit von 13,2 Meter entsprechenden Widerstand von $0{,}0328 \,.\, 13{,}2^2 = 5{,}71$ Kilogramm zu überwinden und die bedeutende Arbeit von $5{,}71 \,.\, 1{,}2 = 6{,}85$ Meterkilogramm zu verrichten.

Bewegung in widerstehenden Mitteln. Die Gesetze der Bewegung eines Körpers in widerstehenden Mitteln sind nicht sehr einfach, weil man es hier mit einer veränderlichen, d. h. mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsenden Kraft zu thun hat. Aus der Kraft P, die einen §. 540.
Körper forttreibt, und aus dem Widerstande $P_1 = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma$, welchen das Mittel der Bewegung entgegensetzt, folgt die bewegende Kraft:

$$P_0 = P - P_1 = P - \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma.$$

Da aber die Masse des Körpers $M = \frac{G}{g}$ ist, so ergiebt sich die Beschleunigung desselben:

$$p = \frac{P_0}{M} = \left(P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma\right) : M = \frac{P - \zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G}\, g,$$

oder, wenn wir $\frac{\zeta F\gamma}{2gP}$ durch $\frac{1}{w^2}$ bezeichnen, also $\sqrt{\frac{2gP}{\zeta F\gamma}} = w$ setzen:

$$p = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G}\, g.$$

Ist die bewegende Kraft P constant, so nähert sich die Bewegung nach und nach der Gleichförmigkeit, denn die Acceleration p fällt immer kleiner und kleiner aus, je größer v wird, und die größte Geschwindigkeit, welche der Körper annehmen kann, ist

$$v = w = \sqrt{\frac{2gP}{\zeta F\gamma}}.$$

Nun nimmt aber bei der Acceleration p die Geschwindigkeit v in dem kleinen Zeittheilchen τ um $\varkappa = p\tau$ zu, daher läßt sich setzen:

$$\varkappa = \left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right] \frac{P}{G} g \tau, \text{ und umgekehrt:}$$

$$\tau = \frac{G}{P} \frac{\varkappa}{g\left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]}.$$

Um nun die einer gegebenen Geschwindigkeitsveränderung entsprechende Zeit zu finden, theilen wir die Differenz $v_n - v_0$ zwischen der End- und Anfangsgeschwindigkeit in n gleiche Theile, setzen einen solchen Theil:

$$\frac{v_n - v_0}{n} = \varkappa,$$

berechnen hiernach die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = v_0 + \varkappa,\ v_2 = v_0 + 2\varkappa,\ v_3 = v_0 + 3\varkappa \text{ u. s. w.},$$

und führen diese Werthe in die Simpson'sche Formel ein. Auf diese Weise erhalten wir die gesuchte Zeit, bei Annahme von vier Theilen:

$$1)\ t = \frac{G}{P} \cdot \frac{v_n - v_0}{12 g} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4}{1 - \left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2}{1 - \left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4}{1 - \left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{v_4}{w}\right)^2} \right).$$

Es ist ferner der in einem Zeittheilchen τ zurückgelegte Raumtheil (§. 19):

$$\sigma = v\tau, \text{ oder da sich } \tau = \frac{\varkappa}{p} \text{ setzen läßt:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{p}, \text{ also hier:}$$

$$\sigma = \frac{v\varkappa}{1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2} \cdot \frac{G}{Pg}.$$

Durch Anwendung der Simpson'schen Regel findet man nun den Raum, welcher zurückgelegt wird, während die Geschwindigkeit v_0 in v_n übergeht:

$$2)\ s = \frac{G}{P} \cdot \frac{v_n - v_0}{12 g} \left(\frac{v_0}{1 - \left(\frac{v_0}{w}\right)^2} + \frac{4 v_1}{1 - \left(\frac{v_1}{w}\right)^2} + \frac{2 v_2}{1 - \left(\frac{v_2}{w}\right)^2} + \frac{4 v_3}{1 - \left(\frac{v_3}{w}\right)^2} + \frac{v_4}{1 - \left(\frac{v_4}{w}\right)^2} \right).$$

Natürlich wird die Genauigkeit größer, wenn man 6, 8 oder noch mehr Theile annimmt. Uebrigens gestattet diese Formel auch eine Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Widerstandscoefficienten, welches bei bedeutenden Ge-

schwindigkeiten nothwendig ist. Beim freien Fall der Körper in der Luft oder im Wasser ist $P = G$ das scheinbare Gewicht des Körpers, und bei der Bewegung auf der Horizontalebene $P = 0$, oder richtiger, gleich der Reibung $f G$. Da diese ein Widerstand ist, so hat man sie negativ in Rechnung zu bringen, weshalb hier

$$P_0 = -(P + P_1) \text{ und}$$
$$p = -\left[1 + \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]\frac{P}{G}g$$

zu setzen ist. Da ferner hier nicht von einer Zu-, sondern nur von einer Abnahme der Geschwindigkeit die Rede sein kann, so haben wir hier statt $v_n - v_0$, $v_0 - v_n$ in den obigen Formeln zu setzen.

In dem Falle, wenn der Körper durch eine constante Kraft, z. B. durch sein Gewicht getrieben wird, nähert sich die Bewegung immer mehr und mehr einer gleichförmigen, so daß sie schon nach einer gewissen Zeit als eine solche angesehen werden kann, wiewohl sie es in Wahrheit nie wird. Es fällt die Acceleration p = Null aus, wenn $\zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma = P$, wenn also

$$v = \sqrt{\frac{2gP}{\zeta F\gamma}} = w \text{ ist.}$$

Diesem Ziele nähert sich also die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers immer mehr und mehr, ohne es je vollkommen zu erreichen.

Beispiele. 1) Piobert, Morin und Didion fanden für einen Fallschirm, dessen Tiefe 0,31 des Oeffnungsdurchmessers betrug, den Widerstandscoefficienten $\zeta = 1,94 \cdot 1,37 = 2,66$. Von welcher Höhe wird sich hiernach ein 72 Kilogramm schwerer Mensch mit einem ähnlichen Fallschirme von 8 Kilogramm Gewicht und 8 Quadratmeter Querschnitt herablassen können, ohne eine größere Geschwindigkeit anzunehmen, als diejenige ist, welche er erlangt, wenn er ohne Fallschirm von 3 Meter Höhe herabspringt?

Diese letztere Geschwindigkeit ist $v = 4,429\sqrt{3} = 7,671$ Meter, ferner die Kraft $P = G = 72 + 8 = 80$ Kilogramm; die Fläche $F = 8$ Quadratmeter; $\gamma = 1,25$ Kilogramm und der Widerstandscoefficient $\zeta = 2,66$, daher:

$$\frac{1}{w^2} = \frac{\zeta F\gamma}{2gP} = \frac{2,66 \cdot 8 \cdot 1,25}{2 \cdot 9,81 \cdot 80} = 0,0169.$$

Theilt man nun die Geschwindigkeit $v = 7,671$ in 6 gleiche Theile, setzt also: $v_0 = 0$; $v_1 = 1,278$; $v_2 = 2,557$; $v_3 = 3,836$; $v_4 = 5,114$; $v_5 = 6,393$; $v_6 = 7,671$ Meter,

so nimmt der Ausdruck $1 - \frac{v^2}{w^2}$ die entsprechenden Werthe an:

1; 0,9724; 0,8895; 0,7513; 0,5580; 0,3093; 0,0055.

Man hat daher nach der Simpson'schen Regel den gesuchten Fallraum:

$$s = \frac{7,671}{18 \cdot 9,81}\left(\frac{0}{1} + 4\frac{1,278}{0,9724} + 2\frac{2,557}{0,8895} + 4\frac{3,836}{0,7513} + 2\frac{5,114}{0,5580} + 4\frac{6,393}{0,3093} + \frac{7,671}{0,0055}\right)$$
$$= 0,0434 \cdot 1527 = 66,27 \text{ Meter.}$$

Die entsprechende Fallzeit ist:

$$t = \frac{7,671}{18 . 9,81}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{0,9724} + \frac{2}{0,8895} + \frac{4}{0,7513} + \frac{2}{0,5580} + \frac{4}{0,3093} + \frac{1}{0,0055}\right)$$
$$= 0,0434 \;.\; 211,0 = 9,16 \text{ Secunden.}$$

Ohne den Fallschirm würde die Geschwindigkeit nach dem Herabfallen von der Höhe 66,27 Meter, $v = 4,429 \sqrt{66,27} = 36,05$ Meter und die Fallzeit

$$t = \sqrt{\frac{2 . 66,27}{9,81}} = 3,67 \text{ Secunden}$$

betragen.

Die größte Geschwindigkeit, welche die mit dem Fallschirme versehene Person überhaupt erlangen kann, folgt aus $\frac{1}{w^2} = 0,0169$ zu:

$$w = \sqrt{\frac{1}{0,0169}} = \sqrt{59,17} = 7,69 \text{ Meter},$$

d. h. eine Geschwindigkeit, wie sie die ohne Schirm fallende Person bei einem Fallen von der Höhe

$$\frac{7,69^2}{2 . 9,81} = 3,016 \text{ Meter}$$

erlangen würde.

2) Welche Geschwindigkeit kann ein Regentropfen von 5 Millimeter Durchmesser höchstens annehmen?

Setzt man hierfür $\zeta = 0,5$, so hat man, da $P = {}^4/_3 \pi . 0,0025^3 . 1000$ Kilogramm ist:

$$w = 4,429 \sqrt{\frac{{}^4/_3 \pi . 0,0025^3 . 1000}{0,5 . \pi . 0,0025^2 . 1,25}} = 10,23 \text{ Meter},$$

entsprechend einer Fallhöhe von 5,333 Meter.

Anmerkung. Für einen constanten Widerstandscoefficienten ergiebt sich für den freien Fall durch den höheren Calcül:

$$v = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) w = \left(\frac{e^{\mu t} - 1}{e^{\mu t} + 1}\right) \sqrt{2g \cdot \frac{G}{\zeta F \gamma}}$$

und

$$s = Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4\, e^{\mu t}}\right) \frac{w^2}{2g} = Ln. \left(\frac{(e^{\mu t} + 1)^2}{4\, e^{\mu t}}\right) \frac{G}{\zeta F \gamma}$$
$$= Ln. \left(\frac{w^2}{w^2 - v^2}\right) \cdot \frac{w^2}{2g},$$

wobei

$$\mu = \sqrt{2g . \zeta \frac{F\gamma}{G}},$$

e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes und $Ln.$ den natürlichen Logarithmen bezeichnet.

§. 541. **Geworfene Körper.** Wir haben schon früher die Wurfbewegung im luftleeren Raume kennen gelernt und §. 39 gefunden, daß derselben eine Parabel entspricht. Jetzt können wir uns auch über diese Bewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. über die eines abgeschossenen Körpers in der Luft nähere Kenntniß verschaffen.

Jedenfalls ist die Bahn eines die Luft durchschneidenden Körpers keine Parabel wie im luftleeren Raume, sondern eine unsymmetrische Curve, mit einem schwächer auf- und stärker niedersteigenden Schenkel, wie aus Folgendem hervorgeht. Während der kleinen Zeit τ durchläuft der mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AT, Fig. 951, aufsteigende Körper in Folge seiner Trägheit einen Weg

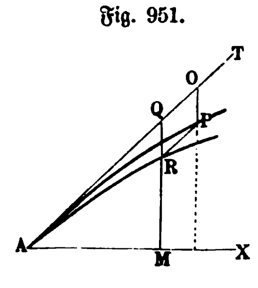


Fig. 951.

$$AO = s = v\tau,$$

sowie in Folge seiner Schwere den senkrechten Weg:

$$OP = h = \frac{g\tau^2}{2};$$

und es wird der erstere Weg durch den Widerstand $\zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma$ der Luft noch um eine Größe vermindert, welche sich durch den Ausdruck

$$OQ = \frac{\zeta \frac{v^2}{2g} F\gamma}{G} \cdot \frac{g\tau^2}{2} = \zeta \frac{F\gamma}{2G} \cdot \frac{v^2\tau^2}{2}$$

bestimmen läßt.

Setzt man $\zeta \frac{F\gamma}{2G} = \mu$, so hat man einfach:

$$OQ = \mu \frac{v^2\tau^2}{2}.$$

Der vierte Eckpunkt R des aus OP und OQ construirten Parallelogrammes $OPRQ$ giebt den Ort an, wo sich der Körper am Ende der Zeit τ befindet, während P der Ort ist, welchen der Körper in diesem Augenblicke einnehmen würde, wenn der Widerstand der Luft Null wäre. Es zieht sich folglich die Bahn AR des geworfenen Körpers unter der Parabel AP hin, welche der Körper im luftleeren Raume durchlaufen würde.

Ebenso sind für einen in der Richtung AT, Fig. 952 (a. f. S.), mit der Anfangsgeschwindigkeit v niedersteigenden Körper die in der Zeit τ gleichzeitig zurückgelegten Wege

$$AO = v\tau,$$

$$OP = g\frac{\tau^2}{2} \text{ und}$$

$$OQ = \mu \frac{v^2\tau^2}{2},$$

und es ergiebt sich aus denselben wieder der Ort R, welchen der Körper am Ende dieser Zeit einnimmt, sowie der Ort P, welchen er einnehmen würde, wenn die Bewegung im luftleeren Raume erfolgte. Es läuft also auch in

diesem Falle die Bahn AR des Körpers unter der parabolischen Bahn AP hin, welche der Körper verfolgen würde, wenn die Luft kein widerstehendes Mittel wäre.

Ist der Neigungswinkel, unter welchem der Körper von A aus mit der

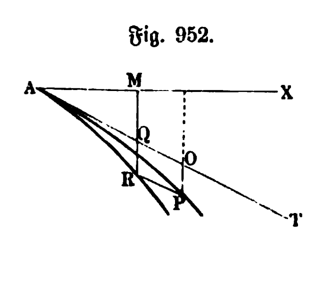


Fig. 952.

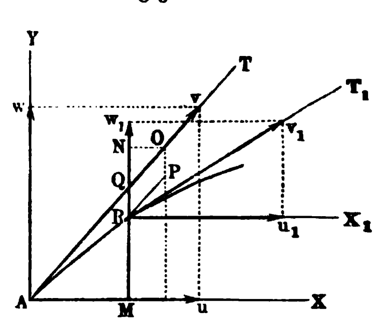


Fig. 953.

Anfangsgeschwindigkeit v emporsteigt, $TAX = \alpha$, Fig. 953, sind folglich die anfänglichen Coordinaten= oder Axengeschwindigkeiten:

$$u = v \cos. \alpha$$

und

$$w = v \sin. \alpha,$$

so hat man nach Verlauf der kleinen Zeit τ für den Ort R des bewegten Körpers die Abscisse:

$$AM = x = AQ \cos. \alpha = \left(v\tau - \frac{\mu v^2 \tau^2}{2}\right) \cos. \alpha$$

$$= \left(1 - \frac{\mu v \tau}{2}\right) v \tau \cos. \alpha$$

und die Ordinate:

$$MR = y = AQ \sin. \alpha - QR = \left(1 - \frac{\mu v \tau}{2}\right) v\tau \sin. \alpha - \frac{g\tau^2}{2};$$

ferner die Abscissengeschwindigkeit:

$$\overline{Ru_1} = u_1 = v \cos. \alpha - \mu v^2 \tau \cos. \alpha = (1 - \mu v \tau)\, v \cos. \alpha$$

und die Ordinatengeschwindigkeit:

$$\overline{Rw_1} = w_1 = v \sin. \alpha - \mu v^2 \tau \sin. \alpha - g\tau = (1 - \mu v \tau)\, v \sin. \alpha - g\tau.$$

Aus beiden Geschwindigkeiten folgt nun für den Neigungswinkel $T_1 R X_1 = \alpha_1$ der Bahn in R:

$$tang. \alpha_1 = \frac{w_1}{u_1} = tang. \alpha - \frac{g\tau}{(1 - \mu v \tau) v \cos. \alpha}$$

und die Curvengeschwindigkeit:

$$\overline{Rv_1} = v_1 = \sqrt{u_1^2 + w_1^2} = \sqrt{(1 - \mu v \tau)^2 v^2 - 2(1 - \mu v \tau) v g \tau \sin. \alpha + g^2 \tau^2}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln läßt sich der ganze Lauf der Wurflinie finden. Setzt man z. B. in die obigen Formeln für x und y statt α und v die durch die letzten Ausdrücke bestimmten Werthe für α_1 und v_1 ein, so erhält man durch dieselben die Coordinaten x_1 und y_1 eines neuen Punktes in Beziehung auf R u. s. w.

Beispiel. Eine massive gußeiserne Kugel von $2r = 0{,}10$ Meter Durchmesser werde unter dem Elevationswinkel $\alpha = 25^0$ mit der Geschwindigkeit $v = 300$ Meter abgeschossen; man soll den Ort derselben nach Verlauf von 0,1, 0,2, 0,3 . . . Secunde angeben.

Das specifische Gewicht des Gußeisens zu $\gamma_1 = 7500$ und das der Luft zu $\gamma = 1{,}25$ angenommen, hat man:

$$\mu = \frac{F\gamma}{2G}\zeta = \frac{\pi r^2 \gamma}{{}^8/_3 \pi r^3 \gamma_1}\zeta = {}^3/_8 \frac{1{,}25}{0{,}05 \,.\, 7500}\zeta = 0{,}00125\,\zeta.$$

Setzt man nach §. 539 für $v = 300$ Meter $\zeta = 0{,}88$, so wird

$$\mu = 0{,}00125 \,.\, 0{,}88 = 0{,}0011.$$

Für $\tau = 0{,}1$ Secunde erhält man daher:

$x = (1 - {}^1/_2\, 0{,}0011 \,.\, 300 \,.\, 0{,}1)\, 300 \,.\, 0{,}1 \,.\, cos.\, 25^0 = 0{,}9835 \,.\, 27{,}189 = 26{,}740$ Meter,

$y = 0{,}9835 \,.\, 300 \,.\, 0{,}1 \,.\, sin.\, 25^0 - 0{,}005 \,.\, 9{,}81 = 12{,}404$ Meter,

$$tang.\, \alpha_1 = tang.\, 25^0 - \frac{9{,}81 \,.\, 0{,}1}{(1 - 0{,}0011 \,.\, 30)\, 300 \,.\, cos.\, 25^0} = 0{,}46258,$$

daher:

$$\alpha_1 = 24^0\, 49'\, 28''.$$

Die Curvengeschwindigkeit folgt zu:

$v_1 = \sqrt{(0{,}967 \,.\, 300)^2 - 2 \,.\, 0{,}967 \,.\, 300 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}4226 + 0{,}981^2} = 289{,}7$ Meter.

Setzt man die gefundenen Werthe von α_1 und v_1 von Neuem in die obigen Gleichungen und ζ dem Werthe von $v_1 = 289{,}7$ entsprechend gleich 0,87 ein, so folgt in gleicher Weise:

$\mu = 0{,}00125 \,.\, 0{,}87 = 0{,}00109,$

$x_1 = (1 - {}^1/_2\, 0{,}00109 \,.\, 28{,}97)\, 28{,}97 \,.\, cos.\, 24^0\, 49'\, 28'' = 0{,}984 \,.\, 26{,}29 = 25{,}869$ Meter,

$y_1 = 0{,}984 \,.\, 28{,}97 \,.\, sin.\, 24^0\, 49'\, 28'' - 0{,}049 = 11{,}923$ Meter,

ferner:

$$tang.\, \alpha_2 = tang.\, 24^0\, 49'\, 28'' - \frac{0{,}981}{0{,}968 \,.\, 289{,}7 \,.\, cos.\, 24^0\, 49'\, 28''} = 0{,}4588;$$

daher $\alpha = 24^0\, 39'$ und

$$v_2 = \sqrt{(0{,}968 \,.\, 289{,}7)^2 - 2 \,.\, 0{,}968 \,.\, 289{,}7 \,.\, 0{,}981 \,.\, 0{,}4198 + 0{,}981^2} = 280 \text{ Meter}.$$

Nochmals $\tau = 0{,}1$ Secunde, $v = 280$ Meter und $\zeta = 0{,}86$ gesetzt, folgt ebenso:

$\mu = 0{,}00125 \,.\, 0{,}86 = 0{,}00107,$

$x_2 = (1 - {}^1/_2\, 0{,}00107 \,.\, 28) \,.\, 28 \,.\, cos.\, 24^0\, 39' = 0{,}985 \,.\, 25{,}44 = 25{,}05$ Meter,

sowie

$y_2 = 0{,}985 \,.\, 28 \,.\, sin.\, 24^0\, 39' - 0{,}049 = 11{,}472$ Meter.

Es ist hiernach der Ort des abgeschossenen Körpers nach 0,3 Secunden in Hinsicht auf den Anfangspunkt der Coordinaten durch

$$x + x_1 + x_2 = 26{,}74 + 25{,}87 + 25{,}05 = 77{,}66 \text{ Meter}$$

und

$$y + y_1 + y_2 = 12{,}404 + 11{,}923 + 11{,}472 = 35{,}80 \text{ Meter}$$

bestimmt.

Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes würde man haben:

$$x + x_1 + x_2 = 300 \,.\, 0{,}3 \,.\, cos.\, 25^0 = 81{,}567 \text{ Meter.}$$

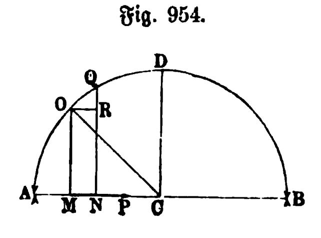
$$y + y_1 + y_2 = 300 \,.\, 0{,}3 \,.\, sin.\, 25^0 - \tfrac{1}{2} \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}09 = 38{,}034 - 0{,}442 = 37{,}592 \text{ Meter.}$$

Anhang.

I. Die Theorie der Schwingungen.

§. 1. **Schwingungen.** Ein Körper befindet sich in einer schwingenden Bewegung, wenn er, unter Einfluß des Strebens, die Gleichgewichtslage einzunehmen, wiederholt denselben geraden oder krummen Weg hin- und zurückläuft. Im Allgemeinen nähert sich hierbei der Körper abwechselnd seiner Gleichgewichtslage und entfernt sich von ihr, doch kann dieser Abstand (bei kreisförmigen Schwingungen) auch constant bleiben. Die Natur bietet uns außer der Bewegung des Pendels noch viele andere Schwingungsbewegungen dar. Die vorzüglichste Ursache einer solchen Bewegung ist eine Kraft, welche den schwingenden Körper nach einem bestimmten Punkte hinzieht oder treibt. So ist es z. B. die Schwerkraft, welche ein Pendel in Schwingungen versetzt. Wenn ein aus seiner Ruhelage herausgebrachter Körper, sich selbst überlassen, der Kraft ungestört folgen kann, welche ihn nach einem bestimmten Punkte hintreibt, so erfolgt die Schwingung in einer geraden Linie; außerdem aber nimmt er Schwingungen in einer Curve an, wie z. B. ein Pendel, bei welchem die Wirkung der Schwerkraft durch die Verbindung des Körpers mit einem festen Punkte fortwährend gestört wird. Ebenso erfolgen oft Schwingungen in krummen Linien, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des bewegten Körpers eine andere Richtung hat als die Kraft.

Fig. 954.



Der einfachste und am häufigsten vorkommende Fall ist der, wenn die Kraft der Entfernung von einem gewissen Punkte C proportional ist (s. auch §. 20). Es sei A, Fig. 954, der Anfangspunkt der Bewegung, C der Sitz der Kraft, d. i. der Ort des Körpers, wo die Kraft Null ist, und M der veränderliche Ort des Körpers. Be-

zeichnen wir nun den Abstand CM durch x und bedeutet μ eine constante Erfahrungszahl, so können wir die Acceleration des Körpers in M

$$p = \mu x$$

setzen. Bezeichnet nun v die veränderliche Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Punkte M seines Weges und ∂x das Wegelement MN während der Zeit ∂t, so hat man (s. §. 21, III.) allgemein:

$$v \partial v = p \partial x, \text{ also hier: } v \partial v = \mu x \,.\, \partial x \text{ und } \frac{v^2}{2} = \int \mu x \,.\, \partial x.$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit v in M, wenn der Körper den Weg $AM = AC - MC = a - x$ zurückgelegt hat, durch

$$\frac{v^2}{2} = \mu \int_x^a x\,dx = \mu \frac{a^2 - x^2}{2} \text{ zu:}$$

$$v = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}.$$

Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum für $x = 0$, also in C, und zwar ist hierfür

$$v = c = a \sqrt{\mu}.$$

Bewegt sich der Körper über C hinaus nach B hin, so nimmt die Geschwindigkeit allmälig wieder ab, indem sie in dem Abstande $CB = a$ wieder zu Null geworden ist. Nun kehrt der Körper wieder nach c zurück. Diese rückgängige Bewegung erfolgt genau nach demselben Gesetze wie die hingehende, es ist in C, $v = -c$ und $v = 0$ in A. Die Bewegung wiederholt sich auf solche Weise regelmäßig in dem Raume $AB = 2a$, welcher letztere die doppelte Schwingungsweite genannt wird.

Unter der Vibrationsintensität versteht man die Geschwindigkeit des Körpers in C und der Bewegungszustand an irgend einer Stelle heißt die dieser Stelle entsprechende Phase der Bewegung. Da obige Formel

$$v = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)}$$

denselben Werth giebt für $x = +x_1$ und $x = -x_1$, so folgt, daß je zweien beiderseits gleichweit von C abstehenden Punkten gleiche Phasen entsprechen, oder daß die Bewegung in Hinsicht auf C eine symmetrische ist.

Schwingungsdauer. Die Zeit, während welcher der Körper einen gewissen Weg $AM = a - x$ zurücklegt (Fig. 955 a. f. S.), bestimmt sich wie folgt. Man hat nach §. 21, I.: §. 2.

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}, \text{ oder } \partial t = \frac{\partial x}{v},$$

folglich hier, wo

$$v = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)} \text{ ist, auch:}$$

$$\partial t = \frac{\partial x}{\sqrt{\mu (a^2 - x^2)}}.$$

Die gesuchte Zeit, während welcher der Körper von A nach M passirt, also der Abstand von C aus a in x sich verändert, beträgt daher:

$$t = \int_x^a \frac{\partial x}{\sqrt{\mu (a^2 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_x^a \frac{\partial \frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(arc. sin. \frac{a}{a} - arc. sin. \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\pi}{2} - arc. sin. \frac{x}{a} \right).$$

Die Zeit, welche der Körper gebraucht, um von A nach C zu gelangen, erhält man, wenn hierin $x = 0$ gesetzt wird, zu:

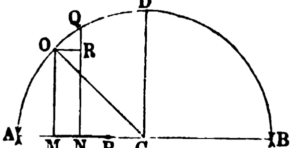
$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\pi}{2} - arc.\ sin.\ 0 \right) = \frac{\pi}{2 \sqrt{\mu}};$$

während die Zeit einer ganzen einfachen Schwingung von A bis B sich auf das Doppelte berechnet, wenn man $x = - a$ einsetzt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\pi}{2} - arc. sin. - \frac{a}{a} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Dieselbe Zeit gebraucht der Körper zur Rückbewegung von B nach A, so daß die ganze Schwingungsdauer zur Ausführung einer Hin- und Rückschwingung

Fig. 955.



$$t = \frac{2 \pi}{\sqrt{\mu}}$$

beträgt, also von der Schwingungsweite gar nicht abhängig ist.

Man kann sich die Bedeutung der erhaltenen Formeln graphisch veranschaulichen, wenn man um C mit dem Halbmesser $CA = a$ den Halbkreis $AODB$ schlägt und die Ordinate MO zieht. Hierin ist offenbar

$$MO = \sqrt{a^2 - x^2},$$

d. h. die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte M ist der Ordinate MO proportional. Ferner ist

$$\text{Bogen } DQO = a \cdot arc. sin. \frac{x}{a} \text{ und}$$

$$\text{Bogen } DQA = a \cdot \frac{\pi}{2};$$

folglich ist die Schwingungszeit, welche der Körper gebraucht, um von A nach M zu gelangen:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{\pi}{2} - arc. sin. \frac{x}{a} \right)$$

proportional der Differenz jener beiden Bögen, oder dem Bogen AO, nämlich

$$t = \frac{1}{a\sqrt{\mu}} \text{ Bogen } AO.$$

Dieses Gesetz gilt allgemein für die Bewegung des Körpers zwischen zwei beliebigen Punkten; es ist z. B. die Zeit, welche der Körper gebraucht, um von M nach C oder von C nach M zu gelangen, dem Bogen DQO proportional, und zwar:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{\overline{DQO}}{a} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \, arc. sin. \frac{x}{a},$$

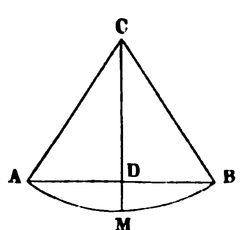
woraus umgekehrt

$$x = a \, . \, sin. (t\sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$v = \sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - a^2[sin. (t\sqrt{\mu})]^2} = \sqrt{\mu} \, . \, a \, . \, cos. (t\sqrt{\mu}) \text{ folgt.}$$

Anmerkung. Die vorstehende Schwingungstheorie läßt sich sogar auf das Kreispendel CM, Fig. 956, anwenden, wenn man kleine Schwingungsbögen voraussetzt. Es ist die Beschleunigung des im Bogen AMB schwingenden Punktes an der Stelle A:

Fig. 956.



$$p = g \, sin. ACD = \frac{DA}{CA} \cdot g,$$

oder da bei kleinen Elongationen $DA = MA$ gesetzt werden kann:

$$p = \frac{MA}{CA} \cdot g.$$

Bezeichnet man nun CA mit r und MA mit x, so erhält man:

$$p = \frac{gx}{r},$$

und daher durch Vergleichung mit der Formel $p = \mu x$ des vorigen Paragraphen:

$$\mu = \frac{g}{r}.$$

Folglich ist die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} \text{ (vergl. §. 345).}$$

Längenschwingungen. Die vorzüglichste Ursache schwingender Bewegungen ist die Elasticität der Körper. Den einfachsten Fall bietet ein Faden oder eine Stange (Draht) OC, Fig. 957 (a. f. S.), dar, wenn derselbe durch ein Gewicht G gespannt wird. Führt man dieses Gewicht von dem Ruhepunkte C in der Axenrichtung des Fadens um einen Weg $CA = a$ fort, und überläßt man es nun sich selbst, so wird es in Folge der Elasticität des Fadens wieder bis C gehoben, kommt daselbst mit einer gewissen Geschwin- §. 3.

digkeit c an und steigt durch seine lebendige Kraft bis zu einem Punkte B, von wo aus es wieder zurückfällt u. s. w. In dem Ruhepunkte wird das Gewicht G von der Elasticität $\frac{\lambda}{l} FE$ (s. §. 210) der Stange aufgehoben, es ist folglich hier die bewegende Kraft:

Fig. 957.

$$P = \frac{\lambda}{l} FE - G = 0, \text{ also } \frac{\lambda}{l} FE = G.$$

Ist aber das Gewicht in einem tieferen Punkte N, welcher um $CN = x$ von C absteht, so beträgt die bewegende Kraft

$$P = \frac{\lambda + x}{l} FE - G = \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE - G$$

$$= \frac{FE}{l} x,$$

und befindet es sich in einem höheren Punkte Q, so ist diese Kraft:

$$P = G - \frac{\lambda - x}{l} FE = G - \frac{\lambda}{l} FE + \frac{x}{l} FE = \frac{FE}{l} x.$$

Vernachlässigen wir die Masse der Stange, so ist folglich die Acceleration, mit welcher sich das Gewicht G nach C zurückbewegt:

$$p = \frac{P}{G} g = \frac{FE}{Gl} g x, \text{ und daher:}$$

$$\mu = \frac{FEg}{Gl},$$

wenn $p = \mu x$ gesetzt wird, F den Querschnitt, l die Länge und E den Elasticitätsmodul der Stange bezeichnet. Da dieses Gesetz mit dem in den vorigen Paragraphen behandelten Falle übereinstimmt, so haben wir auch hier die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{Gl}{FEg}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Wenn $G_1 = Fl\gamma$ das Gewicht der Stange und L den Elasticitätsmodul als Länge ausgedrückt (s. §. 210, Anmerk. 1) bezeichnet, so daß $E = L\gamma$ und $F = \frac{G_1}{l\gamma}$ ist, so hat man nach Einsetzung dieser Werthe auch:

$$t = \frac{\pi l}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G}{G_1 L}}.$$

Wenn man umgekehrt die Schwingungszeit t beobachtet, so kann man den Elasticitätsmodel berechnen, indem man setzt:

$$E = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G l}{F} \text{ oder } L = \frac{\pi^2 l^2}{g t^2} \cdot \frac{G}{G_1}.$$

Diese Formeln gelten auch dann, wenn die Schwingung der Stange nur durch bloßes Anhängen des Gewichtes (in B) und plötzliches Loslassen desselben hervorgebracht wird; es ist hier die Amplitude zu beiden Seiten von C:

$$a = \lambda = \frac{G}{FE} l.$$

Beispiel. Wenn ein Eisendraht von 5 Meter Länge und 2 Millimeter Dicke durch ein Gewicht von 60 Kilogramm in Längenschwingungen versetzt, pro Secunde 7,5 Doppelschwingungen macht, so hat man $t = \frac{1}{2 . 7,5} = 0,0667''$ und den Elasticitätsmodul des Drahts:

$$E = \frac{3,14^2}{9810 . 0,0667^2} \cdot \frac{60 . 5000}{1^2 . 3,14} = 0,2264 . 95541,4 = 21\,600 \text{ Kilogramm.}$$

Die vorstehenden Formeln lassen sich auch anwenden, wenn das Gewicht G zusammendrückend auf eine steife prismatische Stange wirkt. Ebenso finden dieselben noch ihre Anwendung, wenn das an das untere Stangenende angehängte Gewicht gleich anfangs mit einer gegebenen Geschwindigkeit v niedergeht. Nach dem Principe der mechanischen Arbeiten ist in diesem Falle für die Fallhöhe h von G: §. 4.

$$Gh + G \frac{v^2}{2g} = \frac{h}{l} FE \cdot \frac{h}{2} = \frac{FE}{2l} \cdot h^2, \text{ daher:}$$

$$h = \frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Nach Durchlaufung dieses Weges hat das Gewicht G seine Geschwindigkeit verloren und steigt nun in Folge der Elasticität bis zum Ausgangspunkte zurück, wo es wieder mit der Geschwindigkeit v ankommt. Endlich aber erhebt es sich in Folge seiner lebendigen Kraft $G \frac{v^2}{2g}$, indem es die Stange comprimirt, noch um eine Höhe h_1, ehe es wieder zurückkehrt und eine neue Schwingung beginnt. Für diese zweite Höhe ist

$$G \frac{v^2}{2g} = G h_1 + \frac{FE}{2l} h_1^2, \text{ und daher:}$$

$$h_1 = -\frac{Gl}{FE} + \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Durch Addition von h und h_1 erhält man nun die ganze Schwingungsamplitude:

$$2a = h + h_1 = 2\sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}},$$

und daher die einfache Elongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{Gl}{FE}\right)^2 + \frac{2\,Gl}{FE} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Da auch hier $p = \frac{FE}{Gl} gx = \mu x$ ist, so hat man, wie oben, die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gl}{FE}}.$$

Wenn die Anfangsgeschwindigkeit v des Gewichtes G_1 durch ein niederfallendes Gewicht G erzeugt wird, so hat man es mit dem in §. 372 abgehandelten Falle (Fig. 958) zu thun. Lassen wir das Gewicht G mit der Geschwindigkeit c aufschlagen, und setzen wir einen unelastischen Stoß voraus, so haben wir die Anfangsgeschwindigkeit von $G + G_1$:

Fig. 958.

$$v = \frac{Gc}{G + G_1},$$

daher die größte Schwingungselongation:

$$a = \sqrt{\left(\frac{(G + G_1)l}{FE}\right)^2 + \frac{2\,G^2 l}{(G + G_1)FE} \cdot \frac{c^2}{2g}},$$

und die Schwingungszeit:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{(G + G_1)l}{FE}}.$$

Die Elemente der Stange nehmen an den Schwingungen von G oder $G + G_1$ ebenfalls Antheil, nur ist die Amplitude um so kleiner, je näher das Element dem Aufhängepunkte liegt. Für ein Element C_1, Fig. 957, im Abstande $O\,C_1 = x$ vom Aufhängepunkte ist die Amplitude:

$$y = \frac{x}{l}\, a;$$

wogegen die Schwingungszeit, da diese gar nicht von y oder a abhängt, dieselbe ist wie für G. Es schwingen also alle Elemente der Stange in von C nach O stetig abnehmenden Amplituden isochron.

§. 5. **Querschwingungen.** Auch die Biegungs- sowie die Torsionselasticität bieten Gelegenheiten zu solchen Schwingungen dar, wie wir im Vorhergehenden kennen gelernt haben. Für eine an einem Ende O festgehaltene und am anderen Ende C durch ein Gewicht G gespannte Stange oder Feder $O\,C$ (Fig. 959) haben wir nach §. 235 die Einbiegung:

$$HC = a = \frac{Pl^3}{3\,WE}.$$

gefunden; es folgt daher umgekehrt die Kraft P, mit welcher die Stange gebogen ist,

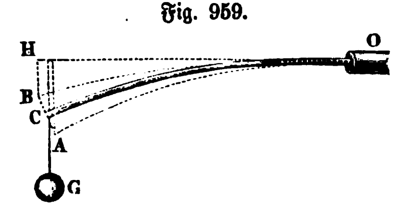


Fig. 959.

$$P = \frac{3\,W E a}{l^3}.$$

Wird nun diese Kraft durch ein angehängtes Gewicht G ersetzt, und a um $CA = CB = x$ vergrößert oder verkleinert, so hat man die Kraft, mit welcher das Stangenende nach der Ruhelage durch die Elasticität der Stange zurückgetrieben wird:

$$P = \frac{3\,WE(a+x)}{l^3} - G = \frac{3\,WE(a+x)}{l^3} - \frac{3\,WE}{l^3}a = \frac{3\,WE}{l^3}x;$$

daher die Acceleration, wenn wir bloß die Masse von G in Betracht ziehen:

$$p = \frac{P}{G}g = \frac{3\,WE}{Gl^3}gx, \text{ und, da hiernach } p = \mu x \text{ zu setzen ist:}$$

$$\mu = \frac{3\,WE}{Gl^3}g.$$

Die Proportionalität zwischen p und x gestattet die Anwendung der Formel in §. 2 (Anhang), weshalb nun die Schwingungszeit

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl^3}{3\,WE}}$$

folgt.

Für eine an beiden Enden frei aufliegende und in der Mitte C mit einem Gewichte G belastete Stange HO, Fig. 960, ist nach §. 241:

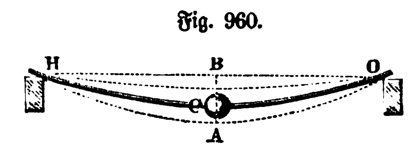


Fig. 960.

$$a = \frac{Pl^3}{48\,WE},$$

daher die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{Gl^3}{48\,WE}}.$$

Bei Berücksichtigung des Stangengewichtes G_1 hat man im ersten Falle, Fig. 959, statt G, $G + {}^3/_8\, G_1$, und im zweiten Falle, Fig. 960, statt, G, $G + {}^5/_8\, G_1$ einzusetzen.

Aus der beobachteten Schwingungszeit t, läßt sich nun der Elasticitätsmodul berechnen, und zwar für den ersten Fall, mittels der Formel

$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \frac{G + {}^3/_8\, G_1}{3\,g\,W}\, l^3,$$

oder, wenn $n = \frac{1}{t}$ die Anzahl der Doppelschwingungen pro Secunde bezeichnet,

$$E = (\pi n)^2 \frac{G + {}^3/_8\, G_1}{3\, g\, W}\, l^3.$$

Beispiel. Ein Fichtenholzstab von 10 Millimeter Breite und Dicke wurde in zwei um 1 Meter von einander abstehenden Punkten unterstützt und in der Mitte von dem Gewichte $G = 1,37$ Kilogramm um $a = 32$ Millimeter Breite niedergezogen. Deshalb ist hiernach der Elasticitätsmodul des Fichtenholzes:

$$E = \frac{P l^3}{48 \,.\, W a} = \frac{1,37 \,.\, 1000^3}{48 \,.\, {}^1/_{12}\, 10^4 \,.\, 32} = 1070,3 \text{ Kilogramm.}$$

Ferner wurde dieser Stab an einem Ende eingeklemmt, am anderen Ende mit dem Gewichte $G = 0,31$ Kilogramm belastet und in Schwingungen versetzt, wobei die Anzahl der Schwingungen in 35 Secunden zu 100 ausfiel. Das Gewicht G_1 des Stabes betrug 0,044 Kilogramm, folglich ist:

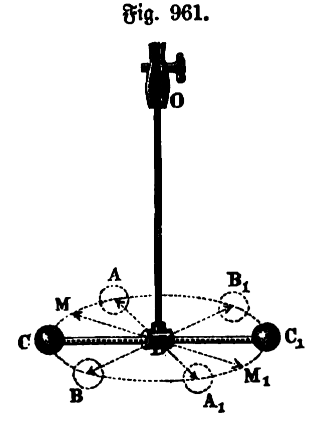
$$G + {}^3/_8\, G_1 = 0,3265 \text{ Kilogramm, und}$$

$$E = \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \frac{G + {}^3/_8\, G_1}{3\, g\, W}\, l^3 = \left(\frac{3,14}{0,35}\right)^2 \frac{0,3265 \,.\, 1000^3}{3 \,.\, 9810 \,.\, {}^1/_{12}\, 10^4} = 1071,2 \text{ Kilogramm,}$$

also sehr nahe dem durch den Biegungsversuch gefundenen Werthe. (Die Tabelle in §. 218 giebt $E = 1100$.)

§. 6. **Torsionsschwingungen.** Die Formel $t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$ gilt endlich auch für das Torsionspendel, d. i. für einen Faden oder eine Stange DO, Fig. 961, welche vermöge ihrer Torsion um ihre eigene Axe schwingt. In der Regel versieht man dieses Pendel mit einem belasteten Querarme CC_1, mittels dessen die anfängliche Drehung des Fadens hervorgebracht wird, indem man diesen Arm aus der Ruhelage CC_1 in die Lage AA_1 bringt. Die Torsion dreht dann den Arm nach CC_1 zurück, und vermöge der Trägheit geht derselbe auch noch weiter bis BB_1, von wo aus er nach CC_1 und AA_1 u. s. w. zurückkehrt. Wir haben oben (§. 269) das Torsionsmoment eines prismatischen Körpers

Fig. 961.



$$Pa = \frac{\alpha\, W C}{l}$$

gefunden und wissen hiernach, daß dasselbe umgekehrt wie die Länge $OD = l$ des Stabes und direct wie die Torsionswinkel $MDC = \alpha$ wächst; ist nun Gk^2 das Trägheitsmoment des Armes CDC_1, folglich $\frac{k^2}{a^2}\,\frac{G}{g}$ die auf die Armenden C und C_1 reducirte träge Masse M desselben, so folgt die Acceleration dieser Punkte:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\alpha W C}{l a} : \frac{k^2 G}{a^2 g} = \frac{\alpha a W C g}{G k^2 l}.$$

Bezeichnen wir noch den Bogen $CM = \alpha a$, welcher der Armlänge $DA = DC = a$ und dem veränderlichen Elongationswinkel $CDM = \alpha$ entspricht, durch x, so erhalten wir den Ausdruck:

$p = \frac{W C g}{G k^2 l} x$, und können wieder $p = \mu x$ setzen, also:

$\mu = \frac{W C g}{G k^2 l}$ annehmen.

Es ist folglich auch die Schwingungsdauer, der Schwingungsbogen $A C B = A_1 C_1 B_1$ mag groß oder klein sein:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2 l}{W C}}.$$

Umgekehrt folgt

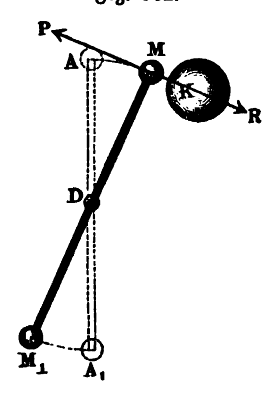
$$W C = \frac{\pi^2}{g t^2} G k^2 l,$$

und daher das Torsionsmoment

$$P a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \alpha G k^2.$$

Anmerkung. Vorstehende Formeln für die Schwingungen, welche durch die Elasticität fester Körper hervorgebracht werden, gelten natürlich nur so lange, als mit den Schwingungselongationen die Elasticitätsgrenze nicht erreicht wird. Bei allen Maschinentheilen sind die Schwingungen möglichst zu vermeiden, weil das Arbeitsquantum, welches auf dieselben verwendet wird, für die Maschinen verloren geht; deshalb sind diese Theile höchst sorgfältig mit einander zu verbinden, und es ist zumal ein sogenannter todter Gang zu vermeiden, der zu Stößen und Schwingungen Veranlassung giebt.


Fig. 962.



Dichtigkeit der Erde. Die Theorie des Torsionspendels findet ihre unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung des specifischen Gewichtes oder der mittleren Dichtigkeit ε unserer Erde. Nähert man dem einen Gewichte Q am Armende A, Fig. 962, eines Torsionspendels eine schwere Kugel K, so rückt dasselbe in Folge der Anziehung um einen Weg $AM = x$ näher; es setzt sich in diesem neuen Orte M von Q die Anziehungskraft R von K mit der Torsionskraft P ins Gleichgewicht, und es läßt sich daher auch die eine durch die andere bestimmen. Lassen wir nun nach Entfernung der Kugel K das Torsionspendel schwingen, so §. 7.

können wir die Schwingungsdauer desselben ermitteln und hieraus die Torsionskraft berechnen. Nach dem vorigen Paragraphen ist die Schwingungsdauer

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},\ \mu = \frac{p}{x} \text{ und } p = \frac{\text{Torsionskraft}}{\text{Masse des Pendels}} = \frac{P a^2}{G k^2} g,$$

wenn Gk^2 das Trägheitsmoment und a die Armlänge des Pendels bezeichnen; daher hat man umgekehrt die Torsions- oder Anziehungskraft:

$$P = \frac{G k^2 p}{g a^2} = \frac{\mu G k^2 x}{g a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 x}{a^2} = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2 \alpha}{a},$$

und das dem Drehungswinkel α entsprechende Torsionsmoment:

$$P a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \alpha G k^2.$$

Wenn nun die Anziehungskräfte der Körper wie die Massen derselben und umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen wachsen (s. §. 327, Beispiel 3), so können wir die von K hervorgebrachte Anziehungskraft P mit dem der Anziehungskraft der Erde entsprechenden Gewichte Q des kleinen Körpers an der Torsionswage wie folgt vergleichen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{K : s^2}{E : r^2},$$

wobei s die Entfernung MK der Mittelpunkte beider Massen Q und K von einander, r den Halbmesser der Erde und E das Gewicht derselben bezeichnet. Wir erhalten nun das letztere:

$$E = \frac{K Q r^2}{P s^2},$$

und wenn wir $E = \frac{4}{3} \pi r^3 . \varepsilon \gamma$ setzen, das specifische Gewicht der Erde:

$$\gamma_1 = \varepsilon \gamma = \frac{3E}{4\pi r^3} = \frac{3 K Q r^2}{4 \pi P r^3 s^2} = \frac{3 K Q}{4 \pi P r s^2} = \frac{3 K Q}{4 \pi r s^2} \cdot \frac{g t^2 a^2}{\pi^2 G k^2 x},$$

oder, wenn wir statt $\frac{g}{\pi^2}$ die Länge l des Secundenpendels (s. §. 347) einführen:

$$\gamma_1 = \varepsilon \gamma = \frac{3 K l t^2}{4 \pi r x s^2} \cdot \frac{Q a^2}{G k^2},$$

und daher die mittlere Dichte der Erde:

$$\varepsilon = \frac{3 K l t^2}{4 \pi r x s^2} \cdot \frac{Q a^2}{G k^2 \gamma}.$$

Setzt man annähernd $Gk^2 = 2 . Q a^2$, was in dem Falle immer geschehen kann, wenn die Masse der Pendelarme verschwindend klein gegen diejenige der Kugeln Q ist, so erhält man einfacher:

$$\varepsilon = \frac{3}{8} \frac{K l t^2}{\pi r x s^2 \gamma}.$$

Mittels des einfachen Torsionspendels oder der sogenannten Coulomb'schen Drehwage fand zuerst Cavendish: $\varepsilon = 5{,}48$;

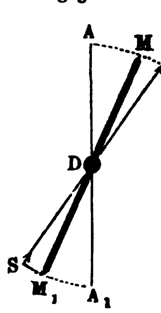
oder nach Hutton's Revision: $\varepsilon = 5{,}32$;
später bei Zuhülfenahme des Gauß-Poggendorff'schen Spiegelapparates Reich: $\varepsilon = 5{,}43$,
dagegen Baily, durch Versuche in größerem Maßstabe: $\varepsilon = 5{,}675$.

Bei Wiederholung der Versuche wurde von Reich $\varepsilon = 5{,}583$ gefunden. (S. „Neue Versuche mit der Drehwage, Leipzig 1852.") Es ist hiernach die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr gleich der Dichtigkeit des Eisenglanzes.

Anmerkung. Ueber die Ausführung der Versuche zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde ist nachzusehen: Gehler's physikal. Wörterbuch, Bd. III.; ferner die Abhandlung von Reich, „Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde, Freiberg 1838", und die von Baily, Experiments with the torsion rod for determining the mean density of the Earth, London 1843.

Magnetnadel. Die Torsionswage wird auch angewandt, um die Directionskraft oder das Drehungsmoment eines Magneten oder einer Magnetnadel zu finden. Ersetzen wir den Querarm einer solchen Wage durch eine Magnetnadel oder einen Magnetstab MDM_1, Fig. 963, so stellt sich derselbe so, daß seine Directionskraft von der Torsionskraft aufgehoben wird. Weicht der unmagnetische Arm in der Ruhelage AA_1 um den Winkel $ADN = \alpha$ vom magnetischen Meridiane NS ab, und stellt sich der Magnetstab MM_1 so, daß seine Axe um den Winkel $MDN = \delta$ von dem Meridiane NS absteht, so haben wir denjenigen Componenten R_1 der parallel NS wirkenden Directionskraft R, welcher die Umdrehung der Nadel bewirkt: $R_1 = R \sin.\delta$. §. 8.

Fig. 963.



Da diese Kraft von der Torsionskraft P im Gleichgewichte gehalten wird, so hat man $R \sin.\delta = P$, oder wenn die Declination δ klein ist: $R\delta = P$.

Nun ist nach dem vorigen Paragraphen das einem Drehungswinkel $\alpha - \delta$ entsprechende Torsionsmoment:

$$Pa = \frac{\pi^2}{gt^2}(\alpha - \delta)\, Gk^2,$$

wenn man daher das unmagnetische Torsionspendel schwingen läßt, so kann man aus der Schwingungsdauer t u. s. w. auch die Directionskraft des Magnetstabes R finden, und zwar hat man:

$$R \sin.\delta = \frac{\pi^2}{gt^2}(\alpha - \delta)\frac{Gk^2}{a}.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die magnetische Directionskraft R ihren Sitz im Abstande $DM = a$ von D habe; streng genommen kann weder die

Directionskraft R, noch der Abstand des Angriffspunktes derselben von M, sondern nur das Directionsmoment $R\ sin.\ \delta\ .\ a$ bestimmt werden, wofür man hat:

$$R\ sin.\ \delta\ .\ a = (\alpha - \delta)\ \frac{\pi^2}{g t^2}\ G k^2.$$

Dieses Moment ($R a\ sin.\ \delta$) ist für $sin.\ \delta = 1$, d. h. wenn die Magnetnadel rechtwinkelig gegen die Magnetrichtung steht, am größten, und zwar $= R a$, und dagegen für $\delta = 0$, d. h. wenn die Axe der Magnetnadel in den magnetischen Meridian fällt, am kleinsten, nämlich = Null.

§. 9. **Magnetismus.** Da die Directionskraft R der Magnetnadel keinen Druck auf die Drehaxe verursacht, also die Nadel kein Bestreben zum Fortschreiten, sondern nur ein Bestreben zur Drehung hat, wenn sie außerhalb des magnetischen Meridians steht, so folgt, daß die ganze Wirkung des Erdmagnetismus auf einen Magnet aus einem Kräftepaare $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ mit dem größten Momente $R a$ bestehen müsse. Da sich ferner jedes Kräftepaar $\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}$ durch unendlich viele andere Paare $\left(\frac{R_1}{2}, -\frac{R_1}{2}\right), \left(\frac{R_2}{2}, -\frac{R_2}{2}\right)$ u. s. w. ersetzen läßt, deren Momente $R a$, $R_1 a_1$, $R_2 a_2$ u. s. w. alle einander gleich sind, so folgt, daß weder R noch a, also weder die Directionskraft noch ihr Angriffspunkt, sondern nur ihr Moment $R a$ bestimmt ist. Dieses Drehungsmoment $R a$ ist überdies noch von zwei Factoren m_1 und S, wovon m_1 dem Erd- und S dem Stab- oder Nadelmagnetismus entspricht, abhängig, weshalb wir

$$R = m_1 S \text{ und } R a = m_1 S a$$

setzen können. Was endlich noch das Maß m_1 des Erdmagnetismus anlangt, so ist dieses bei einer horizontalschwingenden Nadel, wie wir seither angenommen haben, nur der horizontale Component der Intensität m des ganzen Erdmagnetismus, denn der verticale Component m_2 wird durch die Unterstützung oder Aufhängung der Nadel aufgehoben. Ist ι die Inclination oder die Abweichung der magnetischen Erdaxe von dem Horizonte, so haben wir für den betreffenden Ort den horizontalen Componenten:

$$m_1 = m\ cos.\ \iota,$$

dagegen den verticalen:

$$m_2 = m\ sin.\ \iota$$

und endlich das Drehungsmoment einer Magnetnadel:

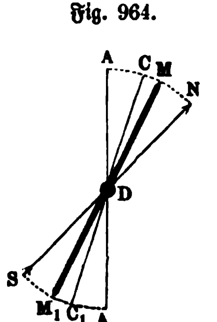
$$R a\ sin.\ \delta = m\ cos.\ \iota\ .\ S a\ sin.\ \delta,$$

also den größten Werth desselben:

$$R a = m\ S a\ cos.\ \iota.$$

Schwingungen einer Magnetnadel. Man kann auch das Drehungsmoment einer Magnetnadel aus der Schwingungszeit derselben selbst berechnen. Bringt man die aufgehängte Magnetnadel MDM_1, Fig. 964, aus ihrer durch das Gleichgewicht zwischen der Torsions- und der Magnetkraft bedingten Ruhelage, so daß sie von dieser um den kleinen Winkel $MDC = \varphi$ abweicht, so nimmt entweder die magnetische Directionskraft R um $R\varphi$ zu und die Torsionskraft um $P_1\varphi$ ab, worin P_1 nach §. 6, Anhang, den Werth §. 10.

Fig. 964.



$$\frac{\pi^2}{g t^2} \frac{G k^2}{a}$$

bedeutet, oder es tritt das Umgekehrte ein; in jedem Falle erwächst also aus beiden eine Kraft:

$$(R + P_1)\,\varphi,$$

oder ein Moment:

$$(R + P_1)\,\varphi a = (R + P_1)\,x,$$

welches den Magneten nach der Ruhelage zurücktreibt.

Ist nun Gk^2 das Trägheitsmoment der Nadel, so haben wir folglich die Beschleunigung, welche dieser Kraft entspricht:

$$p = \frac{(R + P_1)\,a x}{G k^2}\,g,$$

und setzen wir dieselbe $= \mu x$, so erhalten wir:

$$\mu = \frac{R + P_1}{G k^2}\,a g,$$

sowie die Schwingungsdauer:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{G k^2}{(R + P_1)\,a g}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2}{(R + P_1)\,a}},$$

oder, wenn ν das Verhältniß $\frac{P_1}{R} = \frac{\delta}{\alpha - \delta}$ der Torsionskraft zur magnetischen Kraft bezeichnet:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2}{(1 + \nu)\,R a}}.$$

Hat man t durch Beobachtungen gefunden, so kann man hiernach umgekehrt das magnetische Umdrehungsmoment finden, es ist nämlich

$$R a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot \frac{G k^2}{1 + \nu}.$$

Ist die Torsionskraft klein, fällt namentlich die Ruhelage MM_1 nahe in den magnetischen Meridian, so kann man v vernachlässigen und

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{Gk^2}{Ra}}, \text{ sowie}$$

$$Ra = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2 \text{ setzen.}$$

Noch können wir statt Ra den oben angegebenen Werth einführen und daher das Drehungsmoment durch die Formel

$$m S a \cos. \iota = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2 \text{ ausdrücken.}$$

Für eine im magnetischen Meridiane schwingende Inclinationsnadel ist dagegen:

$$m S a = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2$$

und für eine Nadel, deren Umdrehungsaxe in dem magnetischen Meridiane liegt, die sich daher selbst vertical zu stellen sucht:

$$m S a \sin. \iota = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2.$$

Die Formel $m S a \cos. \iota = \frac{\pi^2}{g t^2} \cdot G k^2$ giebt uns in $m S a \cos. \iota$ ein Product von vier Factoren; da sich aber die Inclination ι durch Beobachtungen an einer Magnetnadel bestimmen und sich Sa auf eine bestimmte Weise nicht in seine Factoren zerlegen läßt, so bleibt nur eine Zerlegung des bekannten Productes mSa in die Factoren m und Sa zu vollziehen übrig. Wie sich diese Zerlegung mittels Declinationsbeobachtungen ermöglichen läßt, wird aus Folgendem hervorgehen.

§. 11. **Magnetische Anziehungsgesetze.** Die Kräfte, mit welchen sich die ungleichnamigen Pole zweier Magnete anziehen und die gleichnamigen Pole derselben abstoßen, stehen im umgekehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen zu einander. Man überzeugt sich hiervon am einfachsten durch die Beobachtungen an einer kleinen Magnetnadel, welche man in der Nähe eines größeren Magnetstabes schwingen läßt. Zu diesem Zwecke legt man den Magnetstab horizontal und parallel dem magnetischen Meridiane, so daß sein Nordpol gegen Nord, also sein Südpol gegen Süd gekehrt ist, und bringt eine kleine Declinationsnadel in die Verlängerung der Axe des Magnetstabes. Ist der Abstand s des Stiftes dieser Nadel von dem einen Pole des Magnetstabes viel kleiner als der Abstand von dem anderen, so kann man die Wirkung des letzteren auf die Nadel Null setzen und an-

nehmen, daß durch die Wirkung des näheren Poles der Coefficient m_1 der erdmagnetischen Kraft noch um einen gewissen Werth $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ vergrößert werde. Ist nun die Schwingungszeit der Nadel $= t$, wenn der Magnetstab sich gar nicht in der Nähe derselben befindet, dagegen $= t_1$, wenn der nähere Pol dieses Stabes um s_1 von dem Stifte der Nadel absteht, und $= t_2$, wenn dieser Pol um s_2 von dem Nadelstifte absteht, so haben wir:

$$m_1 Sa = \frac{\pi^2}{gt^2} Gk^2, (m_1 + \varkappa_1) Sa = \frac{\pi^2}{gt_1^2} Gk^2 \text{ und } (m_1 + \varkappa_2) Sa = \frac{\pi^2}{gt_2^2} Gk^2;$$

daher folgt durch Division:

$$\frac{m_1 + \varkappa_1}{m_1} = \frac{t^2}{t_1^2} \text{ und } \frac{m_1 + \varkappa_2}{m_1} = \frac{t^2}{t_2^2}, \text{ folglich:}$$

$$\varkappa_1 = \left(\frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2}\right) m_1 \text{ und } \varkappa_2 = \left(\frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2}\right) m_1, \text{ endlich:}$$

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \frac{t^2 - t_1^2}{t_1^2} : \frac{t^2 - t_2^2}{t_2^2},$$

oder, wenn statt t, t_1 und t_2 die Schwingungszahlen

$$n = \frac{60''}{t}, n_1 = \frac{60''}{t_1} \text{ und } n_2 = \frac{60''}{t_2}$$

eingeführt werden,

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = n_1^2 - n^2 : n_2^2 - n^2.$$

Wenn nun die Wirkung des Magnetstabes auf die Nadel dem umgekehrten Quadrate der Entfernung proportional ist, so muß auch

$$\varkappa_1 : \varkappa_2 = s_2^2 : s_1^2, \text{ und folglich auch}$$

$$\frac{n_1^2 - n^2}{n_2^2 - n^2} = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

sein, welches durch die Beobachtungen bestätigt wird.

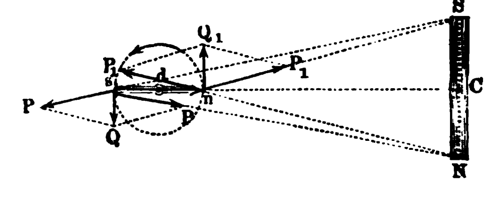
Die Wirkungen eines Magnetstabes NS auf eine Magnetnadel ns fallen §. 12.
am einfachsten aus, wenn der Magnetstab rechtwinkelig gegen den magnetischen Meridian gelegt wird, und zwar entweder so, daß sich der Stift d der Nadel ns, Fig. 965 (a. f. S.), in der Verlängerung von NS, oder so, daß er sich in dem durch die Mitte C gehenden Perpendikel von NS, Fig. 966 (a. f. S.), befindet. Setzen wir vor der Hand die Kraft, welche ein Pol von NS auf einen Pol von ns in der Entfernung Eins ausübt $= K$, so haben wir für den ersten Fall, Fig. 965, wenn a die Länge NS und e die Entfernung Cd der Mittelpunkte C und d der Körper NS und ns von einander bezeichnet, die Kraft, mit welcher der Nordpol n von S angezogen wird,

$$P = \frac{K}{Sn^2}, \text{ annähernd } = \frac{K}{(e - \frac{1}{2} a)^2},$$

und die Kraft, mit welcher n von N abgestoßen wird,

Fig. 965.

Fig. 966.



$$P_1 = \frac{K}{\overline{Nn}^2} = \frac{K}{(e + {}^1\!/_2\, a)^2},$$

daher die Mittelkraft aus P und P_1:

$$Q = P - P_1 = K\left(\frac{1}{(e - {}^1\!/_2\, a)^2} - \frac{1}{(e + {}^1\!/_2\, a)^2}\right)$$

$$= \frac{(e + {}^1\!/_2\, a)^2 - (e - {}^1\!/_2\, a)^2}{(e + {}^1\!/_2\, a)^2\,(e - {}^1\!/_2\, a)^2}\, K$$

$$= \frac{2\,a\,e\,K}{(e + {}^1\!/_2\, a)^2\,(e - {}^1\!/_2\, a)^2},$$

oder, wenn ${}^1\!/_2\, a$ gegen e klein ist,

$$Q = \frac{2\,a\,e\,K}{e^4} = \frac{2\,a\,K}{e^3}.$$

Ebenso ist die Mittelkraft aus der Anziehungs- und Abstoßungskraft des Südpoles s:

$$Q = -\frac{2\,a\,K}{e^3},$$

und daher das Moment des von diesen Mittelkräften gebildeten Kräftepaares, wenn l die Entfernung der Pole der Nadel von einander bezeichnet,

$$Ql = \frac{2\,a\,l\,K}{e^3}.$$

Für den zweiten Fall (Fig. 966) sind hingegen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte in s:

$$P = \frac{K}{\overline{Ns}^2} = \frac{K}{\overline{Ss}^2}, \text{ und die in } n:$$

$$P_1 = \frac{K}{\overline{Sn}^2} = \frac{K}{\overline{Nn}^2},$$

folglich die resultirenden Mittelkräfte:

$$Q = 2 \cdot \frac{CN}{Ns} \cdot P = \frac{a\,P}{Ns} = \frac{a\,K}{\overline{Ns}^3} \text{ und } Q_1 = \frac{a\,K}{\overline{Nn}^3}.$$

Wenn nun $^1/_2\, a$ und $^1/_2\, l$ ansehnlich kleiner sind als e, so können wir statt $\overline{Ns} = \overline{Ss}$ und $\overline{Nn} = \overline{Sn}$ den Mittelwerth $\overline{Nd} = \overline{Sd}$ und dafür den Näherungswerth $\overline{Cd} \doteq e$ einführen, erhalten demnach:

$$Q = Q_1 = \frac{a K}{e^3},$$

und daher das Moment des von Q und Q_1 gebildeten Kräftepaares:

$$Q l = \frac{a l K}{e^3},$$

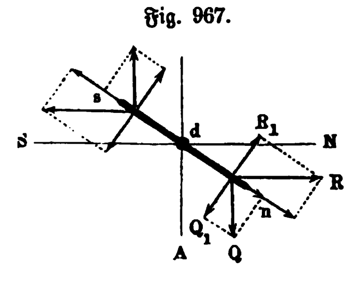
d. i. halb so groß als im vorigen Falle, was auch durch die Beobachtungen vollkommen bestätigt wird.

Uebrigens ist aber die Kraft K selbst noch ein Product von der Intensität $\varkappa$ des Magnetismus in ns und von der Intensität S in $\overline{NS}$, also $K = \varkappa S$ zu setzen, weshalb nun für den ersten Fall

$$Q = \frac{2 \varkappa S a}{e^3}, \text{ und für den zweiten: } Q = \frac{\varkappa S a}{e^3} \text{ resultirt.}$$

Bestimmung des Erdmagnetismus. Ueberlassen wir in den beiden vorher betrachteten Fällen die Magnetnadel ns der Einwirkung des größeren Magneten, so nimmt dieselbe eine neue Stellung ns, Fig. 967, ein, wobei §. 13.

Fig. 967.



sich die Kraft Q, mit welcher der Magnetstab auf die Nadel einwirkt, mit der Kraft R, die der Erdmagnetismus auf sie ausübt, ins Gleichgewicht setzt. Ist nun δ der Ablenkungswinkel $Ndn = Sds$ der Nadel von dem magnetischen Meridian, so haben wir die sich das Gleichgewicht haltenden Seitenkräfte von Q und R:

$$Q_1 = Q \cos. \delta$$

und $$R_1 = R \sin. \delta,$$

folglich ist $Q \cos. \delta = R \sin. \delta$, und sonach

$$\operatorname{tang.} \delta = \frac{Q}{R},$$

oder, wenn wir nach dem vorigen Paragraphen entweder

$$Q = \frac{2 \varkappa S a}{e^3} \text{ oder } Q = \frac{\varkappa S a}{e^3},$$

und nach §. 9 Anhang, $R = m_1 \varkappa$ setzen,

$$\text{entweder } \operatorname{tang.} \delta = \frac{2 \varkappa S a}{m_1 \varkappa e^3} = \frac{2 S a}{m_1 e^3} \text{ oder } \operatorname{tang.} \delta = \frac{S a}{m_1 e^3}.$$

Hiernach läßt sich nun umgekehrt das Verhältniß des magnetischen Momentes des Stabes zu der **Intensität des Erdmagnetismus** finden, denn es ist in dem einen Falle

$$\frac{Sa}{m_1} = \frac{1}{2} e^3 \, tang. \, \delta \text{ und im anderen Falle } \frac{Sa}{m_1} = e^3 \, tang. \, \delta.$$

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetstabes NS giebt uns aber (nach §. 10) das Product:

$$m_1 Sa = \frac{\pi^2}{g t^2} G k^2;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen mit einander das **magnetische Moment des Stabes**

$$\text{entweder } Sa = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\tfrac{1}{2} G k^2 e^3 \, tang. \, \delta}$$

$$\text{oder } \quad Sa = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{G k^2 e^3 \, tang. \, \delta},$$

und das Maß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus:

$$\text{entweder } m_1 = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{2 G k^2 \, cotang. \, \delta}{e^3}} \text{ oder } = \frac{\pi}{t\sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2 \, cotang. \, \delta}{e^3}},$$

je nachdem man δ auf die eine oder die andere Weise beobachtet hat.

Durch Division mit dem Cosinus der Inclination (ι) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus:

$$m = \frac{m_1}{cos. \, \iota}.$$

Um sich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maße m des Erdmagnetismus zu verschaffen, nehme man zunächst an, die Nadel ns, Fig. 966, habe die Intensität $\varkappa = 1$ (1 Milligramm) und die Länge $l = 1$ (1 Millimeter), und der Stab NS habe ebenfalls die Intensität $S = 1$ und die Länge $a = 1$. Setzt man endlich noch den Abstand e dieser Nadeln von einander ebenfalls gleich 1 voraus, so ergiebt sich nach Einsetzung dieser Werthe in die Formel §. 12 (Anhang):

$$Ql = \frac{\varkappa S a l}{e^3}$$

für das magnetische Moment des Magnetstabes der Werth:

$$Ql = 1.$$

Das **magnetische Moment** einer Magnetnadel ist daher gleich **Eins**, wenn diese Nadel einer ihr gleichen ($a = l$), mit ihr gleich starken ($\varkappa = S$) Magnetnadel bei der in Fig. 966 abgebildeten **zweiten** Stellung in der Entfernung Eins ein Moment gleich Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Setzt man nun eine solche Nadel vom magnetischen Moment Eins voraus, setzt also in der Formel $Ra = mSa$, sowohl $S = 1$ wie $a = 1$, so folgt:

$$m = Ra,$$

d. h. die Intensität des Erdmagnetismus m ist dasjenige Moment, mit welchem eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetisches Moment gleich der Einheit ist.

Nach Weber's Angaben ist, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $m = 1{,}774$ Millimetermilligramm,
in München $m = 1{,}905$ „ „
in Mailand $m = 2{,}018$ „ „ ;

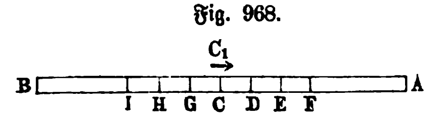
für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa sind aber diese Werthe nur $\frac{1}{\sqrt{9810}} = 0{,}0101$ mal so groß.

Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus sind außer Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen. Ferner: die Experimentalphysik von Quintus Icilius, sowie die Physik auf Grundlage der Erfahrung, von Mousson u. s. w.

Fortschreitende Schwingung oder Wellenbewegung. Wir §. 14.
haben bei den Längen- und Querschwingungen der Körper im Obigen (§§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Masse dieser Körper Rücksicht genommen, sondern nur die Masse des den Körper spannenden Gewichtes in Betracht gezogen und dessen Schwingungen wie die eines materiellen Punktes betrachtet, der unter dem Einflusse der Elasticitätskräfte steht, welche die Stange auf ihn ausübt, woran er befestigt ist. Im Folgenden wollen wir hingegen von der Masse des spannenden Gewichtes ganz absehen, dagegen die Masse des schwingenden Stabes berücksichtigen, indem wir annehmen, daß derselbe durch einen momentanen oder nur eine sehr kleine Zeit über wirkenden Impuls in eine schwingende Bewegung gesetzt worden sei.

Die schwingenden Bewegungen, in welche die einzelnen Massentheilchen eines Körpers gerathen können, sind zweierlei Art, nämlich fortschreitende und stehende, deren Charakter aus dem Folgenden sich ergeben wird.

Fig. 968.



Wenn man irgend einem Punkte C eines bei A und B, Fig. 968, festgehaltenen Stabes oder einer Saite in irgend einem Sinne, z. B. in der Richtung des Pfeiles, einen

Hiernach läßt sich nun umgekehrt das Verhältniß des magnetischen Momentes des Stabes zu der **Intensität des Erdmagnetismus** finden, denn es ist in dem einen Falle

$$\frac{Sa}{m_1} = \frac{1}{2} e^3 \, tang. \, \delta \text{ und im anderen Falle } \frac{Sa}{m_1} = e^3 \, tang. \, \delta .$$

Die Beobachtung der Schwingungsdauer des Magnetstabes NS giebt uns aber (nach §. 10) das Product:

$$m_1 Sa = \frac{\pi^2}{g t^2} \, G k^2 ;$$

daher folgt durch Combination beider Gleichungen mit einander das **magnetische Moment des Stabes**

$$\text{entweder } Sa = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\tfrac{1}{2} \, G k^2 e^3 \, tang. \, \delta}$$

$$\text{oder } \quad Sa = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{G k^2 e^3 \, tang. \, \delta} ,$$

und das Maß der horizontalen Componenten des Erdmagnetismus:

$$\text{entweder } m_1 = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\frac{2 \, G k^2 \, cotang. \, \delta}{e^3}} \text{ oder} = \frac{\pi}{t \sqrt{g}} \sqrt{\frac{G k^2 \, cotang. \, \delta}{e^3}} ,$$

je nachdem man δ auf die eine oder die andere Weise beobachtet hat.

Durch Division mit dem Cosinus der Inclination (ι) bekommt man die ganze Stärke des Erdmagnetismus:

$$m = \frac{m_1}{cos. \, \iota} .$$

Um sich einen klaren Begriff von dem Coefficienten oder dem Maße m des Erdmagnetismus zu verschaffen, nehme man zunächst an, die Nadel ns, Fig. 966, habe die Intensität $\varkappa = 1$ (1 Milligramm) und die Länge $l = 1$ (1 Millimeter), und der Stab NS habe ebenfalls die Intensität $S = 1$ und die Länge $a = 1$. Setzt man endlich noch den Abstand e dieser Nadeln von einander ebenfalls gleich 1 voraus, so ergiebt sich nach Einsetzung dieser Werthe in die Formel §. 12 (Anhang):

$$Ql = \frac{\varkappa S a l}{e^3}$$

für das magnetische Moment des Magnetstabes der Werth:

$$Ql = 1 .$$

Das magnetische Moment einer Magnetnadel ist daher gleich **Eins**, wenn diese Nadel einer ihr gleichen ($a = l$), mit ihr gleich starken ($\varkappa = S$) Magnetnadel bei der in Fig. 966 abgebildeten **zweiten** Stellung in der Entfernung Eins ein Moment gleich Eins (1 Millimetermilligramm) ertheilt.

Setzt man nun eine solche Nadel vom magnetischen Moment Eins voraus, setzt also in der Formel $Ra = m Sa$, sowohl $S = 1$ wie $a = 1$, so folgt:

$$m = Ra,$$

d. h. die Intensität des Erdmagnetismus m ist dasjenige Moment, mit welchem eine Magnetnadel umgedreht wird, deren magnetisches Moment gleich der Einheit ist.

Nach Weber's Angaben ist, wenn die Acceleration der Schwere 1 Millimeter wäre:

in Göttingen $m = 1{,}774$ Millimetermilligramm,
in München $m = 1{,}905$ " "
in Mailand $m = 2{,}018$ " " ;

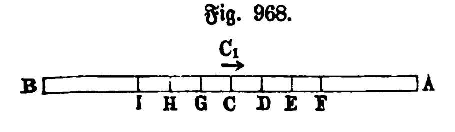
für die Acceleration der Schwere von 9810 Millimeter im mittleren Europa sind aber diese Werthe nur $\frac{1}{\sqrt{9810}} = 0{,}0101$ mal so groß.

Anmerkung. Zum tieferen Studium des Magnetismus sind außer Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik vorzüglich noch Lamont's Handbuch des Erdmagnetismus (Berlin 1849) und Gauß und Weber's Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, Göttingen und Leipzig 1837 bis 1843, zu empfehlen. Ferner: die Experimentalphysik von Quintus Icilius, sowie die Physik auf Grundlage der Erfahrung, von Mousson u. s. w.

Fortschreitende Schwingung oder Wellenbewegung. Wir §. 14.
haben bei den Längen- und Querschwingungen der Körper im Obigen (§§. 3, 4 und 5) gar nicht auf die Masse dieser Körper Rücksicht genommen, sondern nur die Masse des den Körper spannenden Gewichtes in Betracht gezogen und dessen Schwingungen wie die eines materiellen Punktes betrachtet, der unter dem Einflusse der Elasticitätskräfte steht, welche die Stange auf ihn ausübt, woran er befestigt ist. Im Folgenden wollen wir hingegen von der Masse des spannenden Gewichtes ganz absehen, dagegen die Masse des schwingenden Stabes berücksichtigen, indem wir annehmen, daß derselbe durch einen momentanen oder nur eine sehr kleine Zeit über wirkenden Impuls in eine schwingende Bewegung gesetzt worden sei.

Die schwingenden Bewegungen, in welche die einzelnen Massentheilchen eines Körpers gerathen können, sind zweierlei Art, nämlich fortschreitende und stehende, deren Charakter aus dem Folgenden sich ergeben wird.

Fig. 968.



Wenn man irgend einem Punkte C eines bei A und B, Fig. 968, festgehaltenen Stabes oder einer Saite in irgend einem Sinne, z. B. in der Richtung des Pfeiles, einen

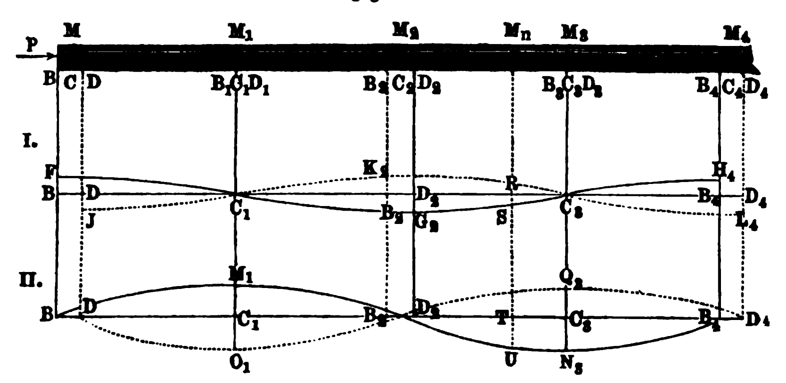
Stoß ertheilt, so pflanzt sich derselbe durch die ganze, noch so große Länge des Stabes mit einer großen Geschwindigkeit fort. In Folge der zwischen den einzelnen Massentheilchen des Körpers stattfindenden Spannungen kann das Theilchen C sich dem Theilchen D nicht nähern, ohne D zu veranlassen, in derselben Richtung von C nach A hin gegen das folgende Theilchen E zu wirken, welches seinerseits wieder nach F agirt. Der auf C ausgeübte Stoß wird sich daher in der Richtung nach A hin bis an das Ende des Stabes A fortpflanzen. In ebensolcher Weise muß aber auch die Fortpflanzung des Stoßes von C nach B hin fortschreiten, denn C kann sich von G nicht entfernen, ohne G ebenfalls zu einer Entfernung von H nach derselben Richtung hin zu veranlassen u. s. w. Somit wird der auf C ausgeübte Stoß sich von C aus sowohl nach A wie nach B hin fortpflanzen, mit dem Unterschiede, daß die Theilchen, welche von dem nach A hin fortschreitenden Stoße in Bewegung gesetzt werden, in der Richtung bewegt werden, in welcher der Stoß fortschreitet, während die Theilchen, welche der nach B hin fortschreitende Stoß trifft, sich in einer der Fortpflanzung dieses Stoßes entgegengesetzten Richtung bewegen. Die Folge dieser Wirkung wird eine Verdichtung der von C nach A hin und eine Verdünnnng der von C nach B hin gelegenen Theilchen sein. Die Geschwindigkeit, mit welcher diese Stoßwirkung fortschreitet, ist abhängig von der zwischen den einzelnen Theilchen stattfindenden Spannung und dem Gewichte oder der Masse der bewegten Theilchen.

Wenn der dem Theilchen C mitgetheilte Stoß nicht in der Längenrichtung von AB, sondern senkrecht gegen dieselbe stattfindet, wenn z. B. das Theilchen C durch den Stoß in die Lage C_1 gebracht wird, so kann dies nur dadurch geschehen, daß C von den beiden Theilchen D und G entfernt wird, und daher müssen dieselben ebenfalls in die Bewegung gezogen werden. Es werden diese Theile D und G daher bei einem steifen Körper ebenfalls zu Bewegungen parallel der CC_1 veranlaßt werden, und so wird weiter die Bewegung auf EF rc. sowohl wie HI u. s. w. übertragen. Auch hier wird daher der Stoß von C nach beiden Seiten hin sich fortpflanzen, und die Theilchen in eine Bewegung setzen, welche rechtwinkelig auf der Fortpflanzung des Stoßes steht.

Wenn daher eine prismatische Stange BM_4, Fig. 969, durch eine in ihrer Axenrichtung wirkende Kraft P ausgedehnt oder comprimirt wird, so werden die sämmtlichen Theile der Stange nach dem Obigen in Schwingungen versetzt. Nicht allein das Endelement M, sondern auch jedes andere Element M_1, M_2 ... der Stange schwingt dann innerhalb eines gewissen Raumes BD, B_1D_1, B_2D_2 ... hin und her, den man die Schwingungsamplitude nennt; auch läßt sich, wenn die Stange sehr lang ist, annehmen, daß dieser Raum bei allen Elementen einer und derselbe sei.

Wenn nun auch die Zeit, innerhalb welcher ein Stangenelement eine Schwingung vollendet, an allen Stellen der Stange eine und dieselbe ist, so können wir doch nicht voraussetzen, daß sich alle diese Elemente *M*, M_1, M_2 u. s. w. gleichzeitig in derselben Bewegungsphase, z. B. gleichzeitig in der Mitte ihrer Schwingung befinden, sondern wir müssen vielmehr annehmen,

Fig. 969.

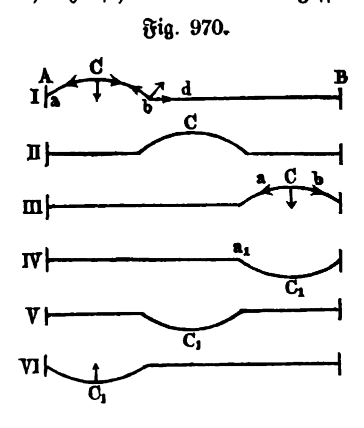


daß die Mittheilung der von *M* ausgehenden Bewegung Zeit erfordere, und derselbe Bewegungszustand eines Elementes um so später eintrete, je entfernter dieses Element von der Bewegungsquelle *P* entfernt ist. Es ist hiernach möglich, daß in dem Augenblicke, wenn *M* einen Schwung *BD* hin und zurück gemacht hat, das Element M_1 noch auf dem Rückwege begriffen, z. B. erst in C_1 sei, daß ferner das Element M_2 erst einen einfachen Schwung gemacht habe, also den Ort D_2 einnehme, daß das Element M_3 erst die Hälfte des Hinweges zurückgelegt habe, daher in C_3 stehe, daß endlich ein Element M_4 erst eine Schwingung beginne, also mit *M* gleichzeitig schwinge. Die Geschwindigkeit, mit welcher eine und dieselbe Bewegungsphase von *M* aus nach und nach in dem Körper fortschreitet, heißt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen des Körpers. Ferner bezeichnet man den Inbegriff aller derjenigen Elemente von *M* bis M_4 des Körpers, welche sich in den sämmtlichen Bewegungsphasen einer Schwingung befinden, also zwischen zwei Elementen *M* und M_4 von gleichem Bewegungszustande enthalten sind, mit dem Namen einer Welle des schwingenden Körpers, und nennt den Abstand MM_4 selbst die Länge der Welle. Eine Welle besteht aus einem Hintertheile BD_2, innerhalb dessen sich die rückkehrenden Elemente, wie M_1, M_2 . . . befinden, und aus einem Vordertheile D_2B_4, welcher die noch vorwärtsgehenden Elemente M_3, M_4 . . . einschließt; man nennt auch wohl BD_2 den verdünnten und D_2B_4 den verdichteten Theil der Welle, weil alle rückkehrenden Elemente innerhalb BD_2 in Aus-

dehnung, und alle hingehenden Elemente $D_2 B_4$ noch im Zusammendrücken begriffen sind.

Man kann sich von der hier besprochenen fortschreitenden Schwingung, welche das Charakteristische der **Wellenbewegung** bildet, eine deutliche Anschauung verschaffen, wenn man einem nicht zu dünnen, langen Seile, welches zwischen A und B ausgespannt ist (Fig. 970), an einer Stelle etwa bei C eine Ausbauchung nach oben durch einen schnellen Stoß oder auch dadurch ertheilt, daß man das in der Hand gehaltene Ende A des Seiles einem plötzlichen kurzen Rucke der Hand unterwirft. Man bemerkt alsdann, wie diese Ausbauchung C von A nach B fortschreitet, so daß sie die in Fig. I., II., III. angegebenen Stellungen nach und nach einnimmt. Diese Bewegung ist folgendermaßen zu erklären. Der gehobene Punkt oder Gipfel (Fig. I.) wird durch die beiderseitigen Seilspannungen Ca und Cb nach abwärts gezogen und folgt diesem Zuge, indem er sich in die Linie AB stellt. Gleichzeitig wirkt die in dem Seilstücke bC vorhandene Spannung aber auch auf den Punkt b in entgegengesetzter Richtung ein, und muß in Folge dessen der Punkt b sich erheben. Nachdem derselbe bis zum Gipfel der Ausbauchung gehoben ist, wird auch er durch die beiden abwärts ziehenden Spannungscomponenten wieder sinken, wobei der rechts daneben gelegene Punkt d in ebenderselben Weise gehoben und gesenkt wird. Es entsteht auf diese Weise eine fortschreitende Bewegung der Ausbauchung aCb von A nach B, wobei man aber die **wirkliche** von der **scheinbaren** Bewegung unterscheiden muß. Eine Bewegung von Massentheilchen in der Richtung von A nach B ist nur **scheinbar** vorhanden, die **wirklichen** Bewegungen der einzelnen Theile des Seiles gehen dagegen lediglich in auf- und abgehenden Bahnen vor sich, wobei jedes Theilchen, z. B. b, nach und nach alle den verschiedenen Punkten der Ausbauchung aCb entsprechenden Stellungen annimmt, sobald dieselbe den Punkt b passirt. Man erkennt, daß die Welle C nur eine Form ist, welche von immer anderen Theilen des Seiles gebildet wird, da die verschiedenen Theile des Seiles nicht alle gleichzeitig, sondern in allmäliger Folge in ihre Schwingung gerathen. Dabei haben diejenigen Punkte, welche in irgend einem Augenblicke zur Bildung des vorderen Theils Cb der Welle beitragen, nach aufwärts, diejenigen, welche den hinteren Theil Ca bilden, nach abwärts eine Bewegung.

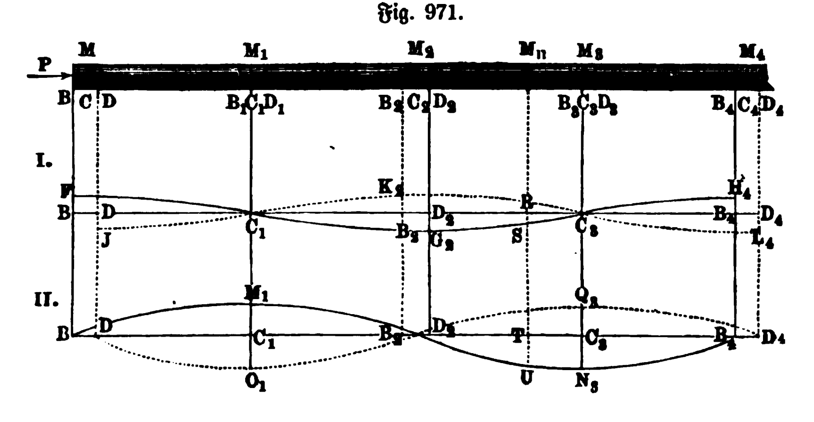
Fig. 970.



Wenn die Welle (Fig. III.) bei B angekommen ist, wo ein Erheben des festen Punktes B nicht möglich ist, wird C durch die beiden Zugkräfte Cb und Ca nach unten getrieben werden, und, sobald es die Mittellage AB passirt hat, wegen seines Beharrungsvermögens noch weiter schwingen nach C_1 (Fig. IV.), so daß aus der Ueberhöhung eine Vertiefung entsteht. Diese plötzlich entstandene Vertiefung C_1 wirkt aber auf die links benachbarten Punkte a_1 genau in derselben Art, wie bei A (Fig. I.) die hervorgebrachte Ueberhöhung auf die rechts benachbarten Punkte b, und es muß daher die Ausbeugung von B nach A (Fig. IV.—VI.) zurückkehren, um hier wieder nach oben umzuklappen und das Spiel zu wiederholen. Bei langen Seilen kann man derartig erzeugte Wellen oftmals von einem Ende zum anderen hin- und zurückgehen sehen.

Die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen innerhalb einer §. 15.
Welle lassen sich recht gut durch die Ordinaten von Schlangenlinien (I. und II., Fig. 971) wie $FC_1\,G_2\,C_3\,H_4$ und $BM_1\,D_2\,N_3\,B_4$ darstellen. In dem Augenblicke, wenn M in B eine neue Schwingung beginnt, und die größte

Fig. 971.



Elongation und Null Geschwindigkeit hat, befindet sich M_1 in der Ruhelage, hat also die Elongation Null und die größte Geschwindigkeit; beides wird auch durch die genannten Curven angezeigt, denn die erste oder Elongationscurve (I.) geht in B um die Amplitude $BF = CB$ über die Axe BD_4 hin und durchschneidet in C_1 diese Axe, wogegen die zweite oder Geschwindigkeitscurve (II.) in B durch die Axe hindurchgeht und in C_1 um die Maximalgeschwindigkeit C_1M_1 über der Axe hinläuft. In demselben Augenblicke befindet sich ferner das Element M_2 auf der anderen Seite im größten Abstande von seiner Ruhelage C_2 und es ist seine Geschwindigkeit wie bei M gleich Null; auch dies ist aus beiden Curven zu ersehen, denn die eine läuft

in D_2 um die Amplitude $D_2 G_2$ unterhalb der Axe hin, und die andere schneidet die Axe daselbst, hat also die der Geschwindigkeit entsprechende Ordinate Null. Ebenso werden durch diese Curven die Bewegungs- und Geschwindigkeitsphasen der Elemente M_3, M_4 u. s. w. angegeben. Da z. B. die erste Curve die Axe in C_3 schneidet und die zweite daselbst um den Maximalwerth $C_3 N_3$ unter der Axe hinläuft, so wird dadurch angezeigt, daß in diesem Augenblicke das Element M_3 durch seine Ruhelage mit der Maximalgeschwindigkeit in positiver Richtung hindurch gehe. Will man die Bewegungsphase irgend eines anderen Elementes M_n zwischen M, M_2, M_4 u. s. w. im Augenblicke kennen lernen, wo das erste Element M eine neue Schwingung beginnt, so darf man nur von demselben ein Perpendikel auf die besprochenen Curven herablassen. Das Stück RS dieses Perpendikels zwischen der ersten Curve und ihrer Axe entspricht der Elongation dieses Elementes, und das Stück TU zwischen der zweiten Curve und ihrer Axe giebt die Geschwindigkeit desselben an. Da beide Ordinaten abwärts gerichtet sind, so deuten sie auch an, daß sowohl die Elongation als auch die Geschwindigkeit positiv sei, d. i. die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit habe.

Befände sich das Element M in D, träte es also eine rückgängige Bewegung an, so würden sich die verschiedenen Elongationen der übrigen Elemente einer Welle durch die Ordinaten der punktirten Curve $J C_1 K_2 C_3 L_4$, und die Geschwindigkeiten derselben durch die Ordinaten der punktirten Curve $D O_1 B_2 Q_3 D_4$ repräsentiren lassen. Die doppelte Schwingungsdauer t eines Elementes, d. i. die Zeit, innerhalb welcher dasselbe den Weg $BD + DB$ zurücklegt, ist auch gleich der Zeit, innerhalb welcher die Schwingungsbewegung um die ganze Länge $MM_4 = l$ einer Welle fortgepflanzt wird; ist daher c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so hat man die ganze Länge der Welle:

$$BB_4 = l = c \, . \, 2t = 2ct.$$

Die Länge des Hintertheils der Welle ist aber

$$BD_2 = l_1 = BB_2 + B_2 D_2 = ct + \lambda,$$

und die des Vordertheiles:

$$D_2 B_4 = l_2 = D_2 D_4 - B_4 D_4 = ct - \lambda,$$

wo λ die ganze Schwingungsamplitude eines Elementes bezeichnet.

§. 16. **Fortpflanzungsgeschwindigkeit.** Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen läßt sich auf folgende Weise ausmitteln. Denken wir uns den schwingenden Körper BO, Fig. 972, aus unendlich kleinen Elementen, jedes vom Querschnitte A und von der Länge $BC = CD = \partial x$ bestehend, und nehmen wir an, daß der Bewegungszustand des einen Elementes

Fig. 972.

B C D M N N$_1$ N$_2$ O

$BC = A\partial x$ in einem Zeitelemente ∂t vollkommen auf das folgende Element $CD = A\partial x$ übergehe, daß also die Bewegungsphasen in der Axenrichtung des Körpers mit der Geschwindigkeit $c = \frac{\partial x}{\partial t}$ fortschreiten. Setzen wir voraus, daß die Elemente BC und CD in der Zeit t von C nach N schwingen und dadurch in die Lagen $MN = \partial x_1$ und $NO = \partial x_2$ kommen, und bezeichnen wir die entsprechende Elongation CN durch y. War nun die Trennungsfläche zwischen beiden Elementen vor ∂t Secunden in N_1 und gelangt diese ∂t Secunden später nach N_2, so haben wir die entsprechenden Wege der Elemente:

$$NN_1 = \partial y_1 \text{ und } NN_2 = \partial y_2,$$

ferner die Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{\partial y_1}{\partial t} \text{ und } v_2 = \frac{\partial y_2}{\partial t},$$

und daher die Retardation:

$$p = \frac{v_1 - v_2}{\partial t} = \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2}.$$

Da ∂t Secunden vor dem Zeitpunkte, wo die Elemente BC und CD die Stellen MN und NO einnehmen, N_1 genau in der Phase war, wie jetzt O, so hat man auch $CN_1 = DO$, d. i. $N_1O = CD = \partial x$; und da ∂t Secunden nach diesem Zeitpunkte N_2 in derselben Phase ist, in der jetzt M sich befindet, so folgt auch $CN_2 = BM$, d. i. $MN_2 = BC = \partial x$.

Da nun aus der Figur

$$N_1O = N_1N + NO = \partial y_1 + \partial x_2$$

sich ergiebt, so hat man auch:

$$\partial y_1 = \partial x - \partial x_2, \text{ und ebenso:}$$
$$\partial y_2 = \partial x - \partial x_1.$$

Es ist also das Wegelement ∂y_1 zugleich die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_2$ des Elementes NO, und das Wegelement ∂y_2 die Zusammendrückung $\partial x - \partial x_1$ des Elementes MN. Bezeichnet nun noch E den Elasticitätsmodul des schwingenden Stabes, so hat man die aus diesen Zusammendrückungen hervorgehenden Spannungen der Elemente MN und NO:

$$S_1 = \frac{\partial x - \partial x_1}{\partial x} AE = \frac{\partial y_2}{\partial x} AE \text{ und}$$
$$S_2 = \frac{\partial x - \partial x_2}{\partial x} AE = \frac{\partial y_1}{\partial x} AE.$$

Durch Subtraction dieser beiden Spannungen von einander erhält man nun die verzögernde Kraft:

$$P = S_2 - S_1 = \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x} AE,$$

und ist nun noch γ das specifische Gewicht der Stangenelemente BC, CD, also $A\partial x \,.\, \gamma$ das Gewicht und $\frac{A\partial x \,.\, \gamma}{g}$ die Masse M eines Stangenelementes, so hat man die Beschleunigung desselben in N auch

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x} A E \cdot \frac{g}{A \partial x \gamma} = \frac{gE}{\gamma} \cdot \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2}.$$

Durch Gleichsetzen beider Werthe für p erhält man nun die Gleichung

$$\frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial t^2} = \frac{gE}{\gamma} \cdot \frac{\partial y_1 - \partial y_2}{\partial x^2},$$

woraus

$$\frac{\partial x^2}{\partial t^2} = \frac{gE}{\gamma}, \text{ oder } c^2 = \frac{gE}{\gamma},$$

also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen (Schallgeschwindigkeit),

$$c = \sqrt{\frac{gE}{\gamma}} = \sqrt{gL}$$

folgt, wo L den Elasticitätsmodul nach Länge bezeichnet.

Beispiel. Nimmt man den Elasticitätsmodul des Tannenholzes zu $E = 1100$ Kilogramm und das Gewicht eines Cubikmillimeters zu 0,000 000 56 Kilogramm, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im Tannenholze zu:

$$c = \sqrt{\frac{9810 \,.\, 1100}{0{,}000\,000\,56}} = 4391 \text{ Meter},$$

d. i. ungefähr 13,2 mal so groß wie in der Luft.

Anmerkung. Diese Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gilt auch für eine gespannte Saite, und sogar für das Wasser und für die Luft. Ist p der Druck der Luft auf die Flächeneinheit, so hat man die den Verdichtungsverhältnissen $\frac{\partial y_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial y_2}{\partial x}$ entsprechenden Spannungen nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$S_2 = \frac{p \partial x}{\partial x_2} = \frac{p \partial x}{\partial x - \partial y_1} \text{ und } S_1 = \frac{p \partial x}{\partial x_1} = \frac{p \partial x}{\partial x - \partial y_2},$$

und daher die bewegende Kraft auf ein Element vom Querschnitte A:

$$P = A\,(S_2 - S_1) = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2)\, A p \partial x}{(\partial x - \partial y_1)\,(\partial x - \partial y_2)},$$

oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur ein kleiner Bruch ist, also $(\partial x - \partial y_1)\,(\partial x - \partial y_2) = \partial x^2$ gesetzt werden kann,

$$P = \frac{(\partial y_1 - \partial y_2)\, A p}{\partial x}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem obigen, wenn man statt p, E einsetzt, vollkommen überein, es ist folglich die Schallgeschwindigkeit in der Luft:

$$c = \sqrt{g \frac{p}{\gamma}}.$$

Bei der Lehre von der Wärme wird im zweiten Bande gezeigt, daß wegen der Wärmeveränderung, welche mit der Dichtigkeitsveränderung der Luft nothwendig verbunden ist, an dieser Formel noch ein Coefficient anzubringen ist. Da die Dichtigkeit γ der Luft ihrer Spannung p proportional ist, so fällt auch p aus der Formel heraus, und es bleibt nur noch die Temperatur τ in derselben zurück. Gewöhnlich nimmt man für Luft

$$c = 333\sqrt{1 + 0{,}00367\,.\,\tau} \text{ Meter} = 1061\sqrt{1 + 0{,}00367\,.\,\tau} \text{ Fuß an.}$$

Beispiel. Wenn nach der Anmerkung des §. 376 eine Wassersäule durch eine Kraft von 10 336 Kilogramm um 0,00005 ihres Volumens zusammengedrückt wird, und hiernach der Elasticitätsmodul dieser Flüssigkeit

$$E = \frac{0{,}010336}{0{,}00005} = 207 \text{ Kilogramm}$$

zu setzen ist, so hat man hiernach die Schallgeschwindigkeit im Wasser:

$$c = \sqrt{9810\,\frac{207}{0{,}000\,001}} = 1425 \text{ Meter},$$

also ungefähr 4,3 mal so groß, wie die Geschwindigkeit in der Luft.

Schwingungszeit. Wir können nun auch die Zeit einer Schwingung finden, indem wir zunächst die Gleichung suchen, welche die Abhängigkeit der Schwingungselongation y von der Zeit und von der die Ruhelage des schwingenden Elementes bestimmenden Abscisse x ausdrückt. Sicherlich ist y sowohl eine Function von t als auch eine solche von x, es läßt sich folglich $y = \varphi\,(t)$ und auch $y = \psi\,(x)$ setzen. §. 17.

Aus der ersten dieser beiden Functionen folgt durch Differenziren die variable Schwingungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1\,(t)$$

und ebenso die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2\,(t),$$

wo $\varphi_1\,(t)$ und $\varphi_2\,(t)$ andere Functionen von t ausdrücken (vergl. §. 19).

Die zweite Function giebt das Spannungsverhältniß

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1\,(x), \text{ also die Spannung}$$

$$S = AE\frac{\partial y}{\partial x} = AE\,.\,\psi_1\,(x),$$

daher die bewegende Kraft des Massenelementes $\partial M = A\partial x \cdot \frac{\gamma}{g}$,

$$\partial S = AE\,\frac{\partial\,[\psi_1(x)]}{\partial x}\,\partial x = AE\,.\,\psi_2\,(x)\,\partial x$$

und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial S}{\partial M} = \frac{gE}{\gamma} \psi_2(x);$$

wobei unter $\psi_1(x)$ und $\psi_2(x)$ die derivirten Functionen von $\psi(x)$ zu verstehen sind.

Setzen wir die beiden Ausdrücke für p einander gleich, so erhalten wir folgende Endgleichung:

$$\varphi_2(t) = \frac{gE}{\gamma} \cdot \psi_2(x), \text{ oder, da } \frac{gE}{\gamma} = c^2 \text{ ist,}$$

$$\varphi_2(t) = c^2 \,.\, \psi_2(x).$$

Dieser Differenzialgleichung wird durch folgende Integralgleichung:

$$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x)$$

genügt, worin F und f ganz beliebige, vorläufig noch unbekannte Functionen von den in den Parenthesen enthaltenen Größen bedeuten. Es ist nämlich jederzeit

$$\varphi_1(t) = \frac{\partial[\varphi(t)]}{\partial t} = cF_1(ct + x) + cf_1(ct - x),$$

$$\varphi_2(t) = \frac{\partial[\varphi_1(t)]}{\partial t} = c^2F_2(ct + x) + c^2f_2(ct - x)$$

$$= c^2[F_2(ct + x) + f_2(ct - x)],$$

ferner:

$$\psi_1(x) = \frac{\partial[\psi(x)]}{\partial x} = F_1(ct + x) - f_1(ct - x) \text{ und}$$

$$\psi_2(x) = \frac{\partial[\psi_1(x)]}{\partial x} = F_2(ct + x) + f_2(ct - x),$$

also wirklich:

$$\varphi_2(t) = c^2 \,.\, \psi_2(x).$$

Obgleich die Function

$$y = F(ct + x) + f(ct - x)$$

eine unbestimmte ist, so läßt sie sich doch, wenn man noch nähere Bestimmungen des schwingenden Körpers giebt, dazu benutzen, um die Schwingungszeit des schwingenden Körpers zu finden. Wie dies in einigen Fällen möglich ist, wird aus Folgendem erhellen.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln $\partial y = v\partial t$ und $\partial x = c\partial t$, ∂t eliminirt, so erhält man den Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{c}$, oder, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ die Verdichtung σ des schwingenden Elementes ausdrückt, $\sigma = \frac{v}{c}$; es ist also die Verdichtung an jeder Stelle des schwingenden Stabes in einem und demselben Augenblicke der Schwingungsgeschwindigkeit dieser Stelle proportional.

Bestimmung der Elasticitätsmodul. Nehmen wir zunächst an, der schwingende Körper habe die Länge l und sei an beiden Enden festgeklemmt. In diesem Falle ist sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$, $y = 0$, folglich: §. 18.

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F(ct + l) + f(ct - l) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $f = -F$, und bringen wir diese Beziehung in der zweiten Gleichung an, so erhält man:

$$f(ct + l) - f(ct - l) = 0, \text{ d. i. } f(ct + l) = f(ct - l),$$

oder, wenn man $ct - l = ct_1$ setzt,

$$f(ct_1 + 2l) = f(ct_1).$$

Es nimmt also die Function f stets denselben Werth wieder an, wenn ct_1 um $2l$, also die Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ größer wird, und es ist folglich auch

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

die Zeit eines Doppelschwunges.

Setzen wir zweitens voraus, daß der schwingende Körper an beiden Enden frei sei, so haben wir für $x = 0$ und $x = l$, S und also auch $\psi_1(x)$, $= 0$, daher:

$$F_1(ct) - f_1(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0.$$

Hiernach ist:

$$f_1 = F_1 \text{ und } f_1(ct + l) = f_1(ct - l), \text{ oder } f_1(ct_1 + 2l) = f_1(ct_1),$$

und folglich wieder die Schwingungsdauer:

$$t_1 = \frac{2l}{c}.$$

Ist ferner der Körper an einem Ende frei und an dem anderen fest, so hat man für $x = 0$, $y = 0$, und für $x = l$, $S = 0$, daher:

$$F(ct) + f(ct) = 0 \text{ und } F_1(ct + l) - f_1(ct - l) = 0,$$

es folgt nun $f = -F$, sowie auch $f_1 = -F_1$, und daher:

$$f_1(ct + l) + f_1(ct - l) = 0, \text{ oder } f_1(ct_1 + 2l) = -f_1(ct_1).$$

Hiernach nimmt also der Körper nach der Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$ stets den umgekehrten Bewegungszustand an, und es ist folglich erst in der doppelten Zeit $2t_1 = \frac{4l}{c}$ eine Schwingung vollendet. Man hat also hier die Schwingungsdauer:

$$t_2 = \frac{4l}{c} = 4l\sqrt{\frac{\gamma}{gE}},$$

also doppelt so groß wie in den beiden ersten Fällen.

Mittels der gefundenen Formeln kann man aus der beobachteten Schwingungszeit t, oder vielmehr aus der Anzahl n der Längenschwingungen, welche ein prismatischer Körper in einer gewissen Zeit macht, den Elasticitätsmodul $E = \left(\frac{2\,l}{t}\right)^2 \cdot \frac{\gamma}{g}$ und die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in demselben, $c = \frac{2\,l}{t}$ berechnen.

Beispiel. Ein an beiden Enden eingeklemmter Eisendraht von 2 Meter Länge wurde durch Reibung nach seiner Axenrichtung in Longitudinalschwingungen versetzt, deren 1250 auf eine Secunde gingen. Wie groß ist hiernach der Elasticitätsmodul des Eisendrahts und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in demselben?

Man hat, die Dichte des Eisens zu 7,6 angenommen:

$$E = \left(\frac{2l}{t}\right)^2 \frac{\gamma}{g} = (2\ .\ 2000\ .\ 1250)^2\ \frac{0{,}0000076}{9810} = 19\,368 \text{ Kilogramm.}$$

Die Fortpflanzungs- oder Schallgeschwindigkeit in dem Drahte ist:

$$c = \sqrt{\frac{g\,E}{\gamma}} = \sqrt{\frac{9810\ .\ 19\,368}{0{,}000\,0076}} = 5000 \text{ Meter,}$$

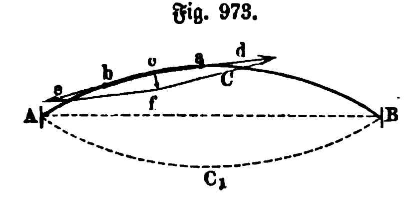
oder, die Schallgeschwindigkeit $c_1 = 333$ Meter der Luft als Einheit genommen:

$$c = \frac{5000}{333} = 15.$$

Anmerkung. Ist der schwingende Stab sehr lang, so können sich in demselben Schwingungsknoten (s. den folgenden Paragraphen) bilden, und es ist dann unter l in der Formel $t = \frac{2\,l}{c}$ nicht mehr die Länge des Stabes, sondern die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Schwingungsknoten zu verstehen. Die Schwingungszeit t bestimmt auch die Höhe des mit den Schwingungen verbundenen Tones; je größer oder kleiner t ist, desto tiefer oder höher fällt der Ton aus. Die Stärke des Schalles hingegen wächst und nimmt ab mit den Schwingungselongationen. Bei den sphärischen Wellen, in welchen sich der Schall in der Luft und im Wasser ausbreitet, bleiben c und t unverändert, und es nimmt nur die Schwingungselongation, also die Stärke des Schalles allmälig ab. Bei der Fortpflanzung der Schwingungen in stab- und röhrenförmigen Körpern bleibt auch die Elongation unverändert, daher solche Körper den Schall mit ungeschwächter Intensität in ihrer Längenrichtung fortpflanzen.

§. 19. **Stehende Schwingungen.** Außer den fortschreitenden Schwingungen oder Wellen giebt es eine zweite Art von Oscillationen, die man mit dem Namen der stehenden Schwingungen bezeichnet. Das einfachste Beispiel von stehenden Schwingungen bietet eine zwischen den beiden Punkten A und B, Fig. 973, ausgespannte Saite dar,

Fig. 973.



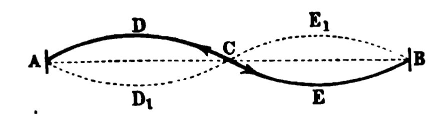
welche durch äußere Kräfte aus ihrer Gleichgewichtslage AB herausgebracht und dann sich selbst überlassen wird.

Denkt man sich die Saite in eine solche Lage ACB gebracht, in welcher die Spannung in allen ihren Punkten constant und etwa gleich p sei, so wird irgend ein Element ab zweien auf seine Endpunkte a und b nach den Richtungen ad und be wirkenden gleichen Kräften unterworfen sein, deren Resultirende cf dem Elemente ab die Tendenz zur Rückkehr nach der Ruhelage in AB ertheilt. Da dieselbe Wirkung zu gleicher Zeit bei allen Elementen vorhanden ist, so wird auch die Saite mit allen Punkten zu gleicher Zeit dem Zuge nachgeben und die Gleichgewichtslage AB erreichen. Es erhellt aber ferner, daß vermöge der lebendigen Kraft, welche die einzelnen Massentheilchen bei der Ankunft in AB angenommen haben, ein Ueberschreiten der Gleichgewichtslage bis zu derjenigen in AC_1B erfolgen und ein regelmäßiges Hin- und Herschwingen zwischen ACB und AC_1B eintreten muß.

Die Eigenthümlichkeit dieser Schwingungsart besteht darin, daß wegen der in allen Punkten gleichen Spannung alle Elemente gleichzeitig schwingen; eine fortschreitende Mittheilung von Impulsen kommt daher hier nicht vor, wie wir sie in §. 14 an dem Seile kennen gelernt haben, bei welchem jedes in Spannung versetzte Element auf das ihm benachbarte noch in Ruhe befindliche eine hebende resp. senkende Wirkung ausübt, wodurch das successive Fortschreiten der Welle erzeugt wird.

Denkt man sich die Saite AB, Fig. 974, in eine Lage wie $ADCEB$ gebracht, so daß auch die Spannung in allen Punkten gleich groß ist, so werden alle in der Strecke ADC gelegenen Punkte in Folge der Spannungen nach abwärts und alle Punkte der Strecke CEB nach aufwärts getrieben. Auf den Punkt C der Saite wird auf der einen Seite eine ebenso große Kraft nach aufwärts und nach A hin ausgeübt, wie andererseits nach abwärts und nach B hin, weshalb dieser Punkt eine Bewegung nicht annehmen kann. Da die auf C wirkenden Kräfte nicht nur im Anfange, sondern in jedem Augenblicke sich das Gleichgewicht halten, so entsteht in C ein an der Schwingung unbetheiligter fester Punkt oder Schwingungsknoten, um welchen die Saite entsprechend den äußersten Lagen $ADCEB$ und AD_1CE_1B schwingt. Ebenso kann in dem schwingenden Körper eine größere Anzahl von Schwingungsknoten sich bilden.

Fig. 974.

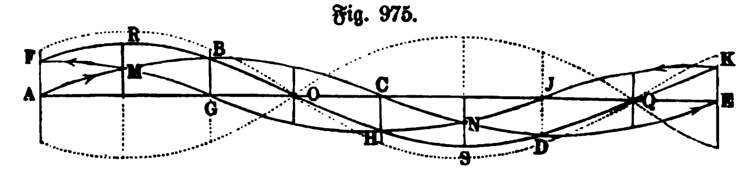


Zu den stehenden Schwingungen gehören immer diejenigen der tönenden Körper, also der Saiten, Stäbe, Scheiben und Glocken; auch die Schwingungen der Luft in Orgelpfeifen sind stehende, endlich können auch das Wasser und überhaupt tropfbare Flüssigkeiten in stehende Schwingungen versetzt werden.

§. 20. **Entstehung stehender Schwingungen.** Im vorigen Paragraphen ist schon der Weg angedeutet worden, wie man Körper zu stehenden Schwingungen dadurch veranlassen kann, daß man die einzelnen Theile in eine solche Lage bringt, in welcher sie vermöge der gleichen Spannung alle zugleich in Schwingung gerathen, ohne daß ein Theilchen das daneben befindliche stört. Diese Art der Erregung stehender Schwingungen kommt aber in Wirklichkeit nur selten vor; es entstehen diese Oscillationen vielmehr meist in anderer Weise, nämlich durch die sogenannte Interferenz der fortschreitenden Schwingungen oder Wellen.

Mit Hülfe der Schwingungscurven (vergl. Anhang §. 15) lassen sich die Erscheinungen vor Augen führen, welche bei der Interferenz der Wellen auftreten. Zieht man zwei gleiche und entgegengesetzt laufende Wellenzüge in Betracht, und seien hiervon *ABCDE* und *FGHJK*, Fig. 975, diejenigen Curven, deren Ordinaten die Schwingungselongationen darstellen. Aus den

Fig. 975.



Schwingungsexcursionen eines zweien Wellen angehörigen Elementes entspringt eine mittlere Elongation, welche genau so gefunden wird, wie jede mittlere Bewegung aus zwei Seitenbewegungen (s. §. 30), und zwar hier durch die algebraische Addition der einfachen Elongationen. Hiernach werden in den Punkten *M* und *N*, wo sich beide Wellencurven begegnen, die Ordinaten verdoppelt, dagegen in den Punkten *O* und *Q*, wo beide Curven auf entgegengesetzten Seiten von der Axe *AE* gleich viel abstehen, die Ordinaten zu Null; und es resultirt aus beiden Wellencurven eine dritte *FRBOHSDQK*, deren Ordinaten die Elongationen aller Elemente von der Axe *AE* angeben. Während die Wellenzüge *ABC* und *FGH* einander entgegenrücken, ändert sich natürlich auch die resultirende Wellencurve *FRBO* u. s. w.; es ist indessen leicht zu ermessen, daß hierbei die Punkte *O* und *Q* stets Ruhepunkte bleiben müssen, da in ihnen die Ordinaten der beiden entgegengesetzten Wellenzüge in jeder Stellung derselben gleich groß und entgegengesetzt bleiben. Es bilden sich daher stehende Oscillationen, für welche *O* und *Q* die Schwingungsknoten sind. Die tönenden Schwingungen der Luft in Orgelpfeifen rc. entstehen auf diese Weise durch die Interferenz der directen und reflectirten Luftwellen.

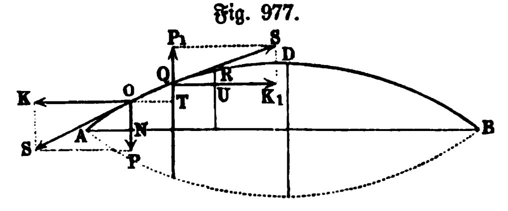
Mit Hülfe eines bei *A* und *B*, Fig. 976, befestigten Seiles kann man sich leicht die Entstehung stehender Wellen durch Interferenz in folgender Weise deutlich machen. Ertheilt man dem Seile bei *a*, Fig. 976 I., durch einen kurzen Stoß eine Ausbeugung nach oben, so schreitet dieselbe nach *B*

hin fort und hat nach einem gewissen Zeitraume die Stellung a_1, Fig. II., angenommen. Nach einem zweiten Zeittheilchen, wenn die Ausbauchung bis a_2 in III. fortgeschritten ist, sei gleichzeitig bei A eine zweite Ausbauchung b erzeugt, welche nun ebenfalls nach B hin fortschreitet. Während die Ausbauchung a_2 an B abprallt und sich in die Einsenkung a_3 in IV. verwandelt, ist b nach b_1 in IV. gekommen. Während nun b_1 seinen Weg nach rechts und a_3 den Weg nach links fortsetzt, und beide in V. in die Lagen b_2 und a_4 gekommen sind, sei bei A in V. eine neue Ausbauchung c erzeugt, welche nun ebenfalls nach rechts fortschreitet, so daß sie nach dem nächsten Zeitabschnitte nach c_1 in VI. gelangt ist. Jetzt bietet das Seil nur noch die beiden in V. und VI. dargestellten Lagen dar. Man kann sich zwar denken, daß die Wellen in den durch die Pfeile angegebenen Richtungen sich fortwährend hin und her bewegen, indem sie einander ohne gegenseitige Störung durchdringen; da wir aber gesehen, daß das Fortschreiten der Wellen überhaupt nur eine scheinbare Bewegung, die **wirkliche** Bewegung der Seilelemente indessen eine auf- und abschwingende ist, so ergiebt sich, daß das Seil eine stehende Schwingungsbewegung angenommen hat, wobei die Punkte C und D die Schwingungsknoten bilden.

Fig. 976.

Querschwingungen einer Saite. Die **Querschwingungen** der **Saiten** und elastischen Stäbe lassen sich auf ähnliche Weise ausmitteln, wie die Longitudinalschwingungen. Die **gespannten Saiten** bieten den einfacheren Fall dar, daher sei auch von diesen zunächst die Rede. Es sei ADB, Fig. 977, irgend eine Position der schwingenden Saite, A der eine, B der andere Festpunkt, $l = AB$ ihre Länge, G ihr Gewicht und S ihre als constant anzusehende Spannung. Faßt man einen den Coordinaten $AN = x$ §. 21.

Fig. 977.



und $NO = y$ entsprechenden Punkt O der Saite ins Auge und zerlegt dessen Spannkraft S parallel zu AB und rechtwinkelig gegen AB in die

Seitenkräfte K und P, so kann man die letztere als die bewegende Kraft an einem Ende O des Elementes OQ ansehen. Läßt man den Bogen $AO = s$ um das Element $OQ = \partial s$ und eben dadurch auch die Ordinate y um ein Element $QT = \partial y$ wachsen, so erhält man in P, S, ∂y und ∂s die gleichliegenden Seitenpaare von zwei ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken OPS und QTO, und es ist:

$$\frac{P}{S} = \frac{QT}{OQ} = \frac{\partial y}{\partial s}; \text{ also } P = \frac{\partial y}{\partial s} S.$$

Auf dasselbe Element OQ wirkt aber auch noch eine aus der Zerlegung der Gegenspannung hervorgehende Kraft $P_1 = \frac{RU}{QR} \cdot S = \frac{\partial y_1}{\partial s} S$ in entgegengesetzter Richtung, daher bleibt die bewegende, das Element OQ nach der Axe AB zurückführende Kraft:

$$P - P_1 = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s} S$$

übrig.

Die Masse M des Elementes ist zwar der Länge $OQ = \partial s$ desselben proportional, setzen wir indessen nur kleine Schwingungselongationen y voraus, so können wir auch dieselbe dem Elemente $OT = QU = \partial x$ der Abscisse proportional wachsend annehmen, also $M = \frac{\partial x}{l} \cdot \frac{G}{g}$ setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun die Acceleration, mit welcher das Element OQ sich der Ruhelage in AB nähert:

$$p = \frac{P - P_1}{M} = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial s \,.\, \partial x} \cdot \frac{g S l}{G},$$

oder $\partial s = \partial x$ gesetzt,

$$p = \frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} \cdot \frac{g S l}{G}.$$

Nun ist y irgend eine Function von x, z. B. $\psi(x)$, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine andere Function $\psi_1(x)$ und $\frac{\partial y - \partial y_1}{\partial x^2} = \frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = \frac{\partial [\psi_1(x)]}{\partial x}$ eine dritte Function $\psi_2(x)$ von dieser Größe, sowie

$$p = \psi_2(x) \cdot \frac{g S l}{G}.$$

Da aber y auch eine Function der Zeit t, also etwa $y = \varphi(t)$ ist, so hat man ebenso die Geschwindigkeit, mit welcher OQ zur Ruhelage zurückkehrt:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t)$$

und die entsprechende Acceleration:

$$p = \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t} = \varphi_2(t).$$

Wenn man nun beide Ausdrücke für p einander gleichsetzt, so erhält man ganz wie im Anhang §. 17, die Differenzialgleichung:

$$\varphi_2(t) = \psi_2(x) \cdot \frac{g S l}{G} = c^2 \psi_2(x),$$

und es läßt sich daher auch wie dort

$y = \varphi(t) = \psi(x) = F(ct + x) + f(ct - x)$ sowie
$v = c[F_1(ct + x) + f_1(ct - x)]$ setzen.

Da auch hier für $x = 0$ und $x = l$, y und $v = 0$ sind, so haben wir wieder $f_1 = -F_1$ und $f(ct + l) = f(ct - l)$, oder $f(ct_1 + 2l) = f(ct_1)$; es ist daher die Zeit einer ganzen Schwingung:

$$t_1 = \frac{2l}{c} = 2l\sqrt{\frac{G}{gSl}},\text{ oder, wenn man } G = Al\gamma \text{ setzt,}$$

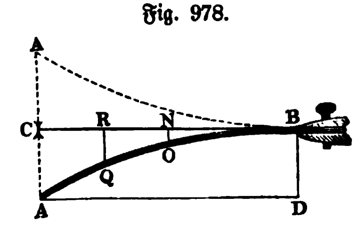
$$t_1 = 2l\sqrt{\frac{A\gamma}{gS}}.$$

Es wächst also die Schwingungsdauer einer Saite direct wie die Länge l, wie die Quadratwurzel aus dem Gewichte $A\gamma$ der Längeneinheit und umgekehrt wie die Quadratwurzel aus der Spannung S der Saite.

Anmerkung. Da der halben Schwingungszeit der nächste Octaventon entspricht, so wird nach dieser Regel eine Saite die Octave zu dem anfänglichen Grundton geben, wenn man sie bis zur Hälfte abkürzt, oder in ihrer Mitte unterstützt, oder wenn man sie viermal so stark spannt, oder wenn man sie bei gleicher Spannung durch eine Saite ersetzt, von der die laufende Längeneinheit nur $^1/_4$ so viel wiegt wie bei der ersten Saite.

Querschwingungen eines Stabes. Die Bestimmung der Schwingungsdauer eines elastischen Stabes AB, Fig. 978, welcher an einem Ende B festgehalten wird, läßt sich auf folgendem, allerdings etwas umständlichen Wege finden. Nach §. 220 ist, wenn r den Krümmungshalbmesser des Stabes an einer durch die Coordinaten $CN = x_1$ und $NO = y_1$ bestimmten Stelle O bezeichnet, das Biegungsmoment des Bogens $AO = s_1$: §. 22.

Fig. 978.



$$M = \frac{WE}{r}.$$

Setzen wir nun die Kraft, mit welcher sich ein den Coordinaten $CR = x$ und $RQ = y$ entsprechendes Element Q der Axe oder Ruhelage CB nähert, gleich $P\partial x$, also dessen Moment in Bezug auf O oder N:

$$\overline{NR} \,.\, P\partial x = (x_1 - x)\, P\partial x,$$

so haben wir das Moment des Bogens $A\,O$:

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x = \int_0^{x_1} P x_1 \partial x - \int_0^{x_1} P x \partial x$$

$$= x_1 \int_0^{x_1} P\partial x - \int_0^{x_1} P x \partial x.$$

Setzt man $\int_0^{x_1} P\partial x = P_1$ und dann nach der Reductionsformel (analyt. Hülfsl. §. 28):

$$\int_0^{x_1} P x \partial x = \int_0^{x_1} P\partial x \,.\, x = P_1 x_1 - \int_0^{x_1} P_1 \partial x, \text{ so hat man:}$$

$$\int_0^{x_1} (x_1 - x)\, P\partial x = \int_0^{x_1} P_1 \partial x, \text{ daher auch:}$$

$$\frac{WE}{r} = \int_0^{x_1} P_1 \partial x.$$

Ferner ist $r = -\dfrac{\partial s^3}{\partial x^2 \partial (tang.\alpha)}$ (s. §. 33 der analytischen Hülfslehren), oder, da bei einer kleinen Biegung $\partial s = \partial x$ gesetzt werden kann,

$$r = -\frac{\partial x}{\partial (tang.\alpha)}; \text{ daher folgt:}$$

$$-\,WE\,\frac{\partial (tang.\alpha)}{\partial x} = \int_0^{x_1} P_1 \partial x$$

und durch Differenziren:

$$-\,WE \,.\, \partial\, \frac{\partial (tang.\alpha)}{\partial x} = P_1 \partial x.$$

Setzt man nun $y = \psi(x)$, ferner

$$tang.\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \psi_1(x), \frac{\partial (tang.\alpha)}{\partial x} = \psi_2(x) \text{ und } \partial\left(\frac{\partial (tang.\alpha)}{\partial x^2}\right) = \psi_3(x),$$

so erhält man die einfache Gleichung:
$$P_1 = - WE \, . \, \psi_3(x),$$
woraus durch nochmaliges Differenziren
$$\partial P_1 = - WE\partial\psi_3(x), \text{ d. i. } P\partial x = - WE\partial\psi_3(x) \text{ oder}$$
$$P = - WE\frac{\partial\psi_3(x)}{\partial x} = - WE\psi_4(x) \text{ folgt.}$$

Damit der Stab symmetrisch schwinge, können wir nun noch annehmen, daß P proportional mit y wachse, also $P = - Ky$ sei; und hiernach erhalten wir:
$$WE\psi_4(x) = Ky, \text{ oder } \psi_4(x) = \frac{K}{WE} \cdot y = k^4 y,$$
wenn wir $\frac{K}{WE}$ mit k^4 bezeichnen.

Dieser Differenzialgleichung $\psi_4(x) = k^4 y$ entspricht die Gleichung:
$$y = \psi(x) = A\,cos.(kx) + B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx},$$
worin A, B, C und D willkührliche Constante sind. Von der Richtigkeit überzeugt man sich leicht durch viermaliges Differenziren, wodurch man erhält:
$$\psi_1(x) = k\,[- A\,sin.(kx) + B\,cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}],$$
$$\psi_2(x) = k^2[- A\,cos.(kx) - B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{-kx}],$$
$$\psi_3(x) = k^3[A\,sin.(kx) - B\,cos.(kx) + Ce^{kx} - De^{-kx}] \text{ und}$$
$$\psi_4(x) = k^4[A\,cos.(kx) + B\,sin.(kx) + Ce^{kx} + De^{kx}],$$
also wirklich:
$$\psi_4(x) = k^4 y.$$

Die Schwingungszeit t des elastischen Stabes finden wir wieder §. 23. wie oben, wenn wir $p = \varphi_2(t) = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}$ setzen. Nun ist aber die Kraft eines Elementes:
$$= P\partial x = - Ky\partial x = - WEk^4 y\partial x,$$
und bei dem Querschnitte F und dem specifischen Gewichte γ die Masse desselben:
$$= F\partial x\,\frac{\gamma}{g}, \text{ daher folgt die Gleichung:}$$
$$\varphi_2(t) = - \frac{g\,WEk^4}{F\gamma} \cdot y = - \mu^2 y,$$
wenn wir den Ausdruck
$$\frac{g\,WEk^4}{F\gamma} \text{ durch } \mu^2 \text{ bezeichnen.}$$

Dieser Differenzialgleichung entspricht schon die einfache Formel
$$y = \varphi(t) = sin.(\mu t + \tau),$$
wo τ eine beliebige Anfangszeit ausdrückt, denn es ist:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \varphi_1(t) = \mu \,.\, cos.(\mu t + \tau) \text{ und}$$

$$p = \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi_2(t) = -\mu^2 sin.(\mu t + \tau), \text{ d. i.:}$$

$$\varphi_2(t) = -\mu^2 y.$$

Nehmen wir nun in der Gleichung $y = sin.\,(\mu t + \tau)$, $\tau = 0$, so bekommen wir $y = sin.\,(\mu t)$, daher für $\mu t = 0, \pi, 2\pi$ u. s. w., $y = 0$; und es ist folglich

$$t_1 = \frac{\pi}{\mu} \text{ die halbe, und}$$

$$t = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{k^2}\sqrt{\frac{F\gamma}{g\,WE}} \text{ die ganze Schwingungsdauer.}$$

Um hiernach die Zeit einer Schwingung berechnen zu können, muß nicht allein die Größe k, sondern auch das Verhältniß $\frac{F}{W}$ bekannt sein.

Ist der Stab cylindrisch und der Halbmesser desselben $= r$, so hat man:

$$\frac{F}{W} = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{4}\pi r^4} = \frac{4}{r^2} \text{ (s. §. 231),}$$

und ist er parallelepipedisch, seine Breite b und Höhe h, so fällt

$$\frac{F}{W} = \frac{b h}{\frac{1}{12} b h^3} = \frac{12}{h^2} \text{ aus (s. §. 227).}$$

Hiernach folgt für die erste Stabform:

$$t = \frac{4\pi}{r k^2}\sqrt{\frac{\gamma}{g E}},$$

und für den Stab von der zweiten Form:

$$t = \frac{4\pi}{h k^2}\sqrt{\frac{3\gamma}{g E}}.$$

Die Größe k wird aus der Gleichung:

$$y = A\, cos.(kx) + B\, sin.(kx) + C e^{kx} + D e^{-kx}$$

auf folgende Weise gefunden.

Setzen wir in diese Formel die zusammengehörigen Werthe $x = l$ und $y = 0$, so erhalten wir:

1) $0 = A\, cos.(kl) + B\, sin.(kl) + C e^{kl} + D e^{-kl}$.

Thun wir ferner dasselbe auch in der Gleichung

$$tang.\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial s} = \psi_1(x), \text{ so erhalten wir:}$$

2) $0 = -A\, sin.(kl) + B\, cos.(kl) + C e^{kl} - D e^{-kl}$.

Da ferner das Biegungsmoment am Ende A des Stabes = Null und folglich der Krümmungshalbmesser $r = \infty$, also $\psi_2(x) = 0$ und ebenso $\varphi_3(x) = 0$ ist, so folgt

$0 = -A \cos. 0 - B \sin. 0 + Ce^0 + De^{-0}$, d. i. $-A + C + D = 0$, und

$0 = A \sin. 0 - B \cos. 0 + Ce^0 - De^{-0}$, d. i. $-B + C - D = 0$, daher

3) $A = C + D$ und

4) $B = C - D$.

Eliminirt man nun aus diesen vier Gleichungen A und B, so erhält man:

$$(C + D) \cos. (kl) + (C - D) \sin. (kl) + Ce^{kl} + De^{-kl} = 0$$

und

$$-(C + D) \sin. (kl) + (C - D) \cos. (kl) + Ce^{kl} - De^{-kl} = 0.$$

Hieraus folgt durch Addition:

$$C \cos. (kl) - D \sin. (kl) + Ce^{kl} = 0,$$

und durch Subtraction:

$$D \cos. (kl) + C \sin. (kl) + De^{-kl} = 0, \text{ oder:}$$

$$C[\cos. (kl) + e^{kl}] = D \sin. (kl) \text{ und}$$

$$D[\cos. (kl) + e^{-kl}] = - C \sin. (kl);$$

daher durch Division:

$$-\frac{\cos. (kl) + e^{kl}}{\sin. (kl)} = \frac{\sin. (kl)}{\cos. (kl) + e^{-kl}}, \text{ endlich}$$

$$2 + \cos. (kl) (e^{kl} + e^{-kl}) = 0, \text{ oder}$$

$$\cos. (kl) = -\frac{2}{e^{kl} + e^{-kl}}.$$

Von den verschiedenen Werthen, entsprechend den verschiedenen Tönen, welche der Stab je nach der Anzahl seiner Schwingungsknoten geben kann, ist der kleinste $kl = 1{,}8751$, wogegen die größeren nahe

$$k = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2} \text{ u. s. w.}$$

ausfallen. Kommt es darauf an, aus der beobachteten Schwingungsdauer t den Elasticitätsmodul E zu finden, so hat man in der Regel nur den kleinsten Werth in Betracht zu ziehen, es ist daher:

$$k = \frac{1{,}8751}{l} \text{ und } k^2 = \frac{3{,}516}{l^2},$$

folglich für einen cylindrischen Stab:

$$E = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{rk^2t}\right)^2 = \frac{\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\, r t}\right)^2 = 12{,}774 \frac{\gamma}{g}\frac{l^4}{r^2t^2},$$

und für einen parallelepipedischen:

$$E = \frac{3\gamma}{g}\left(\frac{4\pi}{hk^2t}\right)^2 = \frac{3\gamma}{g}\left(\frac{4\pi l^2}{3{,}516\, ht}\right)^2 = 38{,}322 \cdot \frac{\gamma}{g}\frac{l^4}{h^2t^2}.$$

Anmerkung 1. Vergleicht man die Formeln

$$t = \frac{4\pi}{rk^2}\sqrt{\frac{\gamma}{gE}} \text{ und } t_1 = 2l_1\sqrt{\frac{\gamma}{gE}}$$

für die Quer- und Längenschwingungen eines und desselben Stabes mit einander, so erhält man die Proportion:

$$t : t_1 = \frac{l^2}{r} \cdot \frac{3,516}{2\pi} l_1, \text{ d. i. } t : t_1 = \frac{l^2}{r} : 0,5596\, l_1.$$

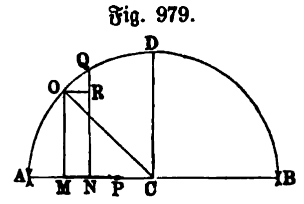
Wertheim hat für Gußstahl und Messing dieses Verhältniß durch Versuche bestätigt gefunden.

Anmerkung 2. Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe handelt ausführlich Seebeck in einer Abhandlung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig 1849, sowie in dem Programme der technischen Bildungsanstalt in Dresden vom Jahre 1846. Wertheim's Untersuchungen über die Elasticität der Metalle und des Holzes mittels Längen- und Querschwingungen werden in Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband II. 1845, ziemlich ausführlich abgehandelt.

Anmerkung 3. Die Schwingungsdauer, oder vielmehr die Anzahl der Schwingungen eines Stabes in einer gewissen Zeit läßt sich wegen ihrer Kürze in der Regel nicht unmittelbar beobachten, sondern man muß sich hierbei besonderer Hülfsmittel bedienen. Man benutzt hierzu, entweder nach Chladni, Savart ꝛc., die Höhe des von den Schwingungen erzeugten Tones, oder man wendet das zuerst von Duhamel angegebene Verfahren an, welches darin besteht, daß man von dem schwingenden Stabe mittels eines feinen Häkchens auf eine ganz gleichförmig umlaufende und mit Kienruß überzogene Glastafel eine Wellenlinie aufreißen läßt. Zur Erzielung einer möglichst gleichförmigen Umdrehungsbewegung kann man sich eines chronometrischen Apparates bedienen, welcher mit einem Windfange, ähnlich wie ein Bratenwender oder das Schlagwerk einer Thurmuhr, ausgerüstet ist, und von Morin in der Abhandlung „Description des appareils dynamometriques etc., Paris 1838“, sowie in dessen Notions fondamentales de mécanique beschrieben wird. Wertheim fand die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit dadurch, daß er mit dem zu untersuchenden Stabe noch einen anderen Körper, z. B. eine Stimmgabel, schwingen ließ, dessen Schwingungszahl bekannt war. Wenn man nun von beiden Körpern Wellencurven in die Rußschicht der rotirenden Glastafel einkratzen läßt und die Wellen derselben zählt, welche einem und demselben Centriwinkel entsprechen, so erhält man in dem Verhältnisse dieser Zahlen auch das Verhältniß der Schwingungszahlen. Was die Longitudinalschwingungen anlangt, so sind diese in der Regel auch mit kleinen Querschwingungen verbunden, weshalb hier die Stäbe zweifache Wellenlinien beschreiben, und die Anzahl der Längenschwingungen mit der der Querschwingungen leicht verglichen werden kann, wenn man die kleinen Wellen innerhalb einer Welle der großen Wellencurve auszählt.

§. 24. **Schwingungshindernisse.** Zu den Kräften, welche die Schwingungen eines Körpers erzeugen, gesellen sich noch gewisse Bewegungshindernisse, deren Einfluß wir nun noch kennen lernen müssen. Ist ein solches Hinderniß constant, wie z. B. die Reibung an der Drehaxe eines Pendels oder an dem Stifte einer Magnetnadel, so hat dasselbe auf die Schwin-

Fig. 979.



gungsdauer gar keinen Einfluß, sondern es wird nur durch dasselbe die Schwingungsweite bei jedem Ausschlag um eine gewisse Größe kleiner. Wir haben oben in §. 1 (Anhang) in dem Falle, wenn die bewegende Kraft der Entfernung x vom Ruhe- oder Mittelpunkte C der Bewegung AB, Fig. 980, proportional ist,

$$p = \mu x = \mu (a - x_1)$$

gesetzt, wo x_1 den durchlaufenen Weg AM bezeichnet. Bei Berücksichtigung der Verminderung k des Weges durch die Reibung haben wir dagegen für das Durchlaufen der ersten Weghälfte AC:

$$p = \mu (a - k - x_1),$$

und für das der zweiten Weghälfte CB:

$$p = - \mu [x_1 - (a + k)]$$

zu schreiben; es besteht also der Einfluß der Reibung k nur darin, daß durch sie bei der einen Weghälfte, a in $a - k$ und bei der anderen, a in $a + k$, also der ganze Schwingungsweg $2a$, in $2a - 2k$ umgeändert, d. i. die Schwingungsweite bei jedem Ausschlage um eine constante Größe $2k$ abgekürzt wird. Da endlich in der Formel

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$$

die Schwingungsweite gar nicht vorkommt, so kann folglich auch k keinen Einfluß auf dieselbe ausüben.

Anders ist es dagegen mit dem Widerstande der Luft. Dieser wächst bei kleinen Geschwindigkeiten, wie sie bei Pendelbewegungen vorkommen, mehr nach der einfachen Geschwindigkeit als nach dem Quadrate derselben, wie besonders aus Bessel's Untersuchungen (über die Länge des einfachen Pendels, Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin, 1826) hervorgeht, und sich auch dadurch erklären läßt, daß dieses Hinderniß vorzüglich aus der mit der Geschwindigkeit v des schwingenden Körpers wachsenden Verdichtung und Verdünnung der Luft vor und hinter demselben (s. §. 537, sowie den Anhang §. 17, Anmerkung) erwächst. Dies vorausgesetzt, können wir die Acceleration des schwingenden Körpers, wenn wir denselben im Auswärtsschwingen begriffen annehmen, und seinen Weg vom Ruhepunkte aus messen, $p = -(\mu x + \nu v)$ oder $p + \nu v + \mu x = 0$ annehmen.

Setzen wir nun

$$x = f(t),\ \ v = \frac{\partial x}{\partial t} = f_1(t) \text{ und } p = \frac{\partial v}{\partial t} = f_2(t),$$

so können wir auch $f_2(t) + \nu f_1(t) + \mu f(t) = 0$ schreiben, und diesem Ausdruck durch die Integralgleichung

$$x = [b \cos. (\psi t \sqrt{\mu}) + b_1 \sin. (\psi t \sqrt{\mu})]\, e^{-\frac{\nu t}{2}}$$

entsprechen, wo b und b_1 noch zu bestimmende Constanten sind und

$$\psi = \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}$$

ist. Nun ist aber für $t = 0$ auch $x = 0$, daher $b = 0$ und einfacher:

$$x = b_1 \sin. (\psi t \sqrt{\mu}) \, e^{-\frac{\nu t}{2}}.$$

Da dieser Werth für $\psi t \sqrt{\mu} = \pi$ wieder Null wird, so ist folglich die Zeit einer einfachen Schwingung

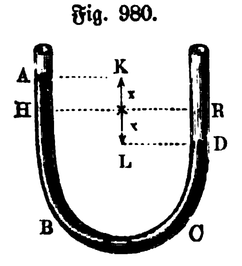
$$t = \frac{\pi}{\psi \sqrt{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu + \frac{\nu^2}{4}}}, \text{ d. i. } \frac{1}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\nu^2}{4\mu}}}$$

mal so groß, als wenn der Widerstand der Luft nicht vorhanden wäre.

Anmerkung. Es ist leicht zu erklären, weshalb die in Schwingungen versetzten Körper nach und nach immer kleinere und kleinere Schwingungen machen und zuletzt in Ruhe übergehen. Die Ursache dieser Erscheinung ist zwar zunächst der Widerstand der Luft, dann aber auch noch die Unvollkommenheit der Elasticität der schwingenden Körper, vermöge welcher sich diese Körper, namentlich innerhalb kurzer Zeiten den auf sie wirkenden Kräften nicht vollkommen proportional ausdehnen und zusammendrücken.

§. 25. **Schwingungen des Wassers.** Den einfachsten Fall der Wellenbewegung des Wassers bieten die Schwingungen desselben in zwei communicirenden Röhren $ABCD$, Fig. 980, dar. Nehmen wir zunächst an, daß dieselben von gleichem Querschnitte A seien, und denken wir uns das Wasser in dem einen Schenkel um $HA = x$ über dem der Ruhelage entsprechenden Niveau HR gehoben und im anderen um $RD = x$ gesunken. Wir haben dann die bewegende Kraft

Fig. 980.



$$P = A \,.\, 2x\gamma,$$

ferner, wenn l die ganze Länge $ABCD = HBCR$ der Wassermasse bezeichnet, die bewegte Masse $M = \frac{Al\gamma}{g}$ und daher die Beschleunigung, mit welcher der eine Wasserspiegel sinkt und der andere steigt:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{2Ax\gamma}{Al\gamma} g = \frac{2gx}{l}.$$

Da diese Formel ganz dem im Anhange §. 1 und 2 abgehandelten Schwingungsgesetze $p = \mu x$ entspricht, so haben wir auch hier die Zeit einer Schwingung:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Da ferner beim einfachen Kreispendel von der Länge $\frac{l}{2}$ ebenfalls

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

ist, so schwingt also das Wasser in den communicirenden Röhren von gleicher Weite mit diesem Pendel isochron.

Sind die beiden Schenkel der Röhre $ABCD$, Fig. 981, gegen den Horizont geneigt, bildet z. B. die Axe des einen den Winkel α, und die des anderen den Winkel β mit dem Horizonte, so entspricht dem Wege $AH = DR = x$, welchen der Wasserspiegel in dem einen Schenkel auf- und in dem anderen abwärts gemacht hat, der Niveauabstand:

$$z = x \sin.\alpha + x \sin.\beta = x (\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

Fig. 981.

daher ist die Kraft:

$$P = A\gamma x (\sin.\alpha + \sin.\beta),$$

ferner die Acceleration:

$$p = \frac{g (\sin.\alpha + \sin.\beta) . x}{l},$$

und die Schwingungsdauer:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g (\sin.\alpha + \sin.\beta)}}.$$

Sind endlich die Röhren von ungleicher Weite, so fällt die Bestimmung der Schwingungsdauer bedeutend complicirter aus. Es sei A der Querschnitt und l die Länge der Mittelröhre, ferner α_1, A_1 und l_1 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der einen, sowie α_2, A_2 und l_2 Neigungswinkel, Querschnitt und Länge der anderen Seitenröhre; denken wir uns endlich das Wasser in der Axe des einen Schenkels um x_1 gestiegen und im anderen um x_2 gesunken. Wir haben zunächst

$$A_1 x_1 = A_2 x_2, \text{ daher } x_2 = \frac{A_1}{A_2} x_1$$

und die bewegende Kraft, auf A_1 reducirt:

$$P = A_1 (x_1 \sin.\alpha_1 + x_2 \sin.\alpha_2) \gamma = \frac{A_1 \gamma}{A_2} (A_2 \sin.\alpha_1 + A_1 \sin.\alpha_2) x_1.$$

Die Wassermasse in der Zwischenröhre ist constant, und zwar $= \frac{A l \gamma}{g}$, und da ihre Geschwindigkeit in dem Verhältnisse $\frac{A_1}{A}$ zu der der Kraft steht, dieselbe auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \frac{Al\gamma}{g}.$$

Die Wassermasse im ersten Schenkel ist:

$$= \frac{A_1 (l_1 + x_1)\gamma}{g}$$

und die im zweiten:

$$= \frac{A_2 (l_2 - x_2)\gamma}{g},$$

oder auf den Kraftpunkt reducirt:

$$= \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{A_2 (l_2 - x_2)\gamma}{g}.$$

Endlich folgt die von P zu bewegende Masse:

$$M = A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g} \left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + x_1}{A_1} + \frac{l_2 - x_2}{A_2}\right)$$

$$= A_1^2 \cdot \frac{\gamma}{g} \left(\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{x_1}{A_1} - \frac{A_1 x_1}{A_2^2}\right)$$

$$= \frac{A_1^2 \gamma}{g} \left[\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1\right],$$

und die Acceleration:

$$p = \frac{P}{M} = \frac{\left(\frac{sin.\alpha_1}{A_1} + \frac{sin.\alpha_2}{A_2}\right) g x_1}{\frac{l}{A} + \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_1 x_1}.$$

Wären die beiden Seitenröhren von gleichem Querschnitte, so hätte man $A_1 = A_2$, daher:

$$p = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\left(\frac{l}{A} + \frac{l_1 + l_2}{A_1}\right) A_1} = \frac{(sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2) g x_1}{\frac{A_1 l}{A} + l_1 + l_2}$$

und die Schwingungszeit:

$$t = \pi \sqrt{\frac{A_1 l + A (l_1 + l_2)}{g A (sin.\alpha_1 + sin.\alpha_2)}}.$$

Anmerkung. Durch die Reibung und durch den Krümmungswiderstand erleiden natürlich diese Formeln noch einige Modificationen (vergl. Anhang §. 24).

§. 26. **Elliptische Schwingungen.** Wenn der Körper M, welcher durch eine Kraft P nach einem festen Punkte C, Fig. 982, mit einer Acceleration $p = \mu z = \mu\,.\,\overline{CM}$ hingetrieben wird, eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, deren Richtung von der Kraftrichtung abweicht, so erfolgen seine Schwingungen nicht mehr in der geraden Linie, sondern in einer Ellipse, wie aus Folgendem hervorgehen wird. Es sei in dem Anfangspunkte A der Bewegung die Bewegungsrichtung rechtwinkelig auf dem Abstande $CA = a$ und die

entsprechende Geschwindigkeit $= c$. Legen wir die Coordinatenaxen durch C und zwar die eine auf die andere rechtwinkelig gegen CA. Bezeichnen wir nun die Coordinaten CK und KM durch x und y, so haben wir die mit den Axen parallel gehenden Componenten q und r von $p = \mu z$, da

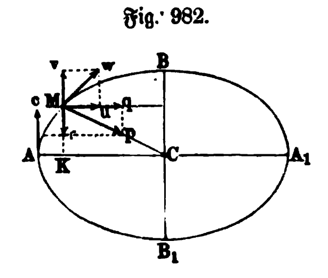


Fig. 982.

$$\frac{q}{p} = \frac{x}{z} \text{ und } \frac{r}{p} = \frac{y}{z} \text{ ist:}$$
$$q = \mu x \text{ und } r = \mu y.$$

Sind nun u und v die ebenfalls den Axen parallel gerichteten Componenten der Geschwindigkeit w des Körpers M, so haben wir nach §. 1, Anhang:

$$u = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)};$$

zugleich

$$c^2 - v^2 = 2\int r \partial y = 2\mu \int y \partial y = \mu y^2, \text{ und daher } v = \sqrt{c^2 - \mu y^2}.$$

Wenn für $y = b$, $v = 0$ ist, so folgt:

$$0 = c^2 - \mu b^2, \text{ daher } c = b\sqrt{\mu} \text{ und } v = \sqrt{\mu (b^2 - y^2)}.$$

Nun ist aber $u = \frac{\partial x}{\partial t}$ und $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, daher folgt auch:

$$\frac{u}{v} = \frac{\partial x}{\partial y} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{b^2 - y^2}}, \text{ oder } \frac{\partial x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\partial y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{\partial \left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}},$$

und daher (nach §. 26, V. der analytischen Hülfslehren):

$$arc. \sin. \frac{x}{a} = arc. \sin. \frac{y}{b} + Const.$$

Die Constante bestimmt sich mit Rücksicht darauf, daß für $x = a$, $y = 0$ ist, durch

$$arc. \sin. 1 = arc. \sin. 0 + Const., \text{ zu } Const. = \frac{\pi}{2},$$

und folgt sonach:

$$arc. \sin. \frac{x}{a} - arc. \sin. \frac{y}{b} = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn aber die Differenz zweier Bögen $\frac{\pi}{2}$ beträgt, so ist der Sinus des einen gleich dem Cosinus des anderen, d. i.:

$$\frac{x}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \text{ oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Da dies die Gleichung einer Ellipse ist, so folgt auch, daß der Punkt, welcher mit der Acceleration μz nach C getrieben oder gezogen wird, in einer Ellipse von den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ um C läuft.

Auch folgt nun:

$$\partial t = \frac{\partial y}{v} = \frac{\partial y}{\sqrt{\mu (b^2 - y^2)}}, \text{ daher die Zeit:}$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \cdot arc. sin. \frac{y}{b}, \text{ ferner umgekehrt:}$$

$$y = b \; sin. (t \sqrt{\mu}), \text{ sowie } x = a \; cos. (t \sqrt{\mu}).$$

Man erhält hieraus die Zeit zum Durchlaufen eines elliptischen Quadranten, wenn man $y = b$ setzt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \, arc. sin. \frac{b}{b} = \sqrt{\frac{1}{\mu}} \, arc. sin. \, 1 = \frac{\pi}{2 \sqrt{\mu}},$$

also die Zeit zum Durchlaufen der halben Ellipse:

$$2 t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$$

und die Zeit einer ganzen Umdrehung oder Schwingung:

$$4 t_1 = \frac{2 \pi}{\sqrt{\mu}};$$

also genau so groß, als wenn die Bewegung eine geradlinig wiederkehrende wäre. Noch folgt:

$$u = \sqrt{\mu (a^2 - x^2)} = \sqrt{\mu \left(a^2 - a^2 [cos. (t \sqrt{\mu})]^2\right)} = \sqrt{\mu} \, . \, a \; sin. (t \sqrt{\mu})$$

und

$$v = \sqrt{\mu (b^2 - y^2)} = \sqrt{\mu} \, . \, b \; cos. (t \sqrt{\mu}),$$

und daher die Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\mu} \sqrt{(a \; sin. \, t \sqrt{\mu})^2 + (b \; cos. \, t \sqrt{\mu})^2}.$$

Endlich kann man noch

$$x = \frac{a + b}{2} cos. (t \sqrt{\mu}) + \frac{a - b}{2} cos. (t \sqrt{\mu}) \text{ und}$$

$$y = \frac{a + b}{2} sin. (t \sqrt{\mu}) - \frac{a - b}{2} sin. (t \sqrt{\mu})$$

setzen, und da nun die ersten Glieder

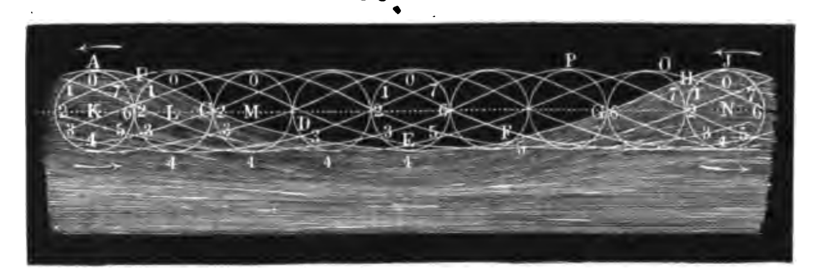
$$\frac{a+b}{2}\cos.(t\sqrt{\mu}) \text{ und } \frac{a+b}{2}\sin.(t\sqrt{\mu})$$

einer gleichförmigen Bewegung in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ und die beiden anderen Glieder einer entgegengesetzten gleichförmigen in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ entsprechen, so kann man auch annehmen, daß die elliptische Bewegung des Punktes aus zwei kreisförmigen Bewegungen zusammengesetzt sei, daß nämlich der Punkt gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a-b}{2}$ umlaufe, während sich das Centrum dieses Kreises gleichförmig in einem Kreise vom Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ fortbewegt.

Ist $b = 0$, so erfolgt zwar die Schwingung in einer geraden Linie, allein man kann sich auch denken, daß diese Schwingung aus zwei gleichen und entgegengesetzten Kreisbewegungen zusammengesetzt sei.

Wasserwellen. Die elliptischen Schwingungsbewegungen §. 27.
finden sich den genauen Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge bei den Bewegungen der Wasserwellen vor. Danach beschreibt nicht allein jedes Wassertheilchen in der Oberfläche, sondern auch jedes Wassertheilchen unter derselben während der Wellenbewegung des Wassers eine Ellipse. Wegen des Widerstandes am Boden sind jedoch die Ellipsen unter dem Wasser kleiner als die an der Oberfläche, und nehmen überhaupt mit dem Abstande von der Oberfläche ab. Die verschiedenen Elemente im Wasserspiegel, sowie in jeder anderen Fläche parallel zu demselben, befinden sich in demselben Augenblicke in den verschiedensten Bewegungsphasen; während ein Element A, Fig. 983, seine Bahn in (0) beginnt, ist ein Element B schon in (1), ein anderes C

Fig. 983.

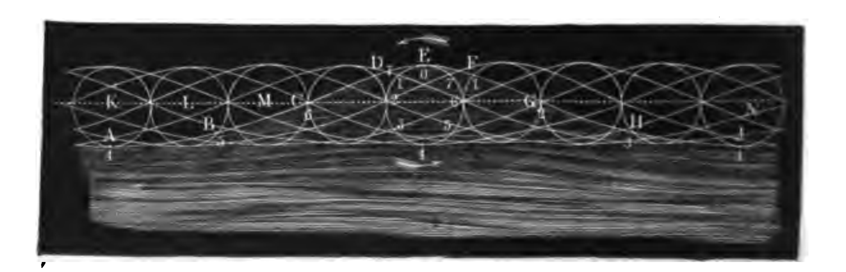


in (2), ein drittes D in (3), ein viertes E in (4) u. s. w.; es bildet also in diesem Augenblicke der verticale Durchschnitt der Oberfläche des Wassers eine

cykloiden- oder trochoidenförmige Curve *ABCDEFGHJ*. Vor dem Eintritte der Wellenbewegung waren die Elemente in den Mittelpunkten *K, L ... N* ihrer Bahnen und bildeten den horizontalen Wasserspiegel *KN*, während der Wellenbewegung hingegen befinden sie sich zum Theil über, zum Theil unter dieser Ebene, und haben natürlich stets ein Bestreben, nach ihren Ruhepunkten *K, L ... N* zurückzukehren. Die elliptischen Schwingungen finden jedoch nur so lange statt, als die Wellen unverändert bleiben; nimmt aber die Größe derselben allmälig ab, so wird auch die Bahn eines Elementes nach und nach eine engere und engere, und bildet daher keine Ellipse mehr, sondern eine Spirallinie. Umgekehrt bildet sich sicherlich bei der Entstehung und dem Wachsen der Wellen die elliptische Bahn erst allmälig aus einer Spirallinie heraus.

Nach einem Zeittheilchen ist *A* in seiner Bahn nach (1), *B* nach (2), *C* nach (3) u. s. w. gerückt, und dadurch die Welle um den Horizontalabstand *KL* zwischen je zwei Elementen fortgeschoben worden; nach Verlauf eines zweiten Zeittheilchens befindet sich ferner *A* in (2), *B* in (3), *C* in (4), und es ist die Welle wieder um den Abstand *KL* = *LM* fortgerückt; und so bewegt sich bei dem ferneren Umlaufe der Wasserelemente die Welle immer weiter und weiter fort, bis sie am Ende einer vollständigen Umdrehung eines Elementes in seiner Bahn ihre eigene Länge *KN* durchlaufen hat. Nach einer halben Umdrehung eines Wasserelementes ist, wie Fig. 984 zeigt, an

Fig. 984.



die Stelle eines Wellenberges ein Wellenthal und an die des letzteren ein Wellenberg gekommen. Dieses Fortschreiten der Welle besteht natürlich in keiner besonderen Bewegung des Wassers, sondern nur in einem Fortrücken einer und derselben Bewegungsphase, z. B. in dem Fortrücken des Wellengipfels *J* (Fig. 983) nach *O*, *P* u. s. w. Es ist ersichtlich, daß bei dieser Bewegung alle in dem vorderen Theile *ACE* der Welle (Fig. 984) gelegenen Elemente wie *B*, *C*, *D* im Steigen begriffen sind, während die in dem hinteren Theile *EGJ* der Welle befindlichen Elemente, wie *E*, *G*, *H*, eine niedergehende Bewegung haben. Kennt man die Umlaufszeit *t* eines

Wasserelementes und die Länge $AJ = s$ einer Welle, so kann man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben durch die Formel $c = \frac{s}{t}$ berechnen.

Die Höhe einer Welle, oder die Summe von der Höhe eines Wellenberges und der Tiefe eines Wellenthales ist der verticalen Axe $2b$ der Ellipse gleich, in welcher die Wasserelemente an der Oberfläche umlaufen; die Länge CG des Wellenthales übertrifft die halbe Wellenlänge um die horizontale Axe $2a$ jener Ellipse, und die des Wellenberges ist natürlich um so viel kürzer als die halbe Länge der ganzen Welle. Hiernach wäre der Querschnitt eines Wellenthales größer als der eines Wellenberges; da dies aber wegen der Unveränderlichkeit des Wasservolumens nicht möglich ist, so müssen die Mittelpunkte der elliptischen Bahnen noch etwas über dem Niveau des ruhigen Wasserspiegels stehen.

Weber's Versuche. Nach Weber's Versuchen ist die Bahn, in welcher sich jedes Wasserelement an der Oberfläche einer Welle bewegt, eine wenig gedrückte Ellipse, nach Emy sollen hingegen bei den Meereswellen die Wasserelemente aufrechtstehende Ellipsen durchlaufen. Mit der Tiefe der Elemente unter der Oberfläche nehmen beide Axen ihrer elliptischen Bahnen ab, jedoch, besonders nach Weber, die verticalen Axen mehr als die horizontalen Axen. Nach der Tiefe zu scheint ein Fortschreiten der Wellen nicht stattzufinden: senkrecht unter einander befindliche Wasserelemente befinden sich, den Beobachtungen der Gebrüder Weber zufolge, gleichzeitig in einer und derselben Bewegungsphase, wogegen die in einer horizontalen Linie liegenden Elemente eine stetige Folge der Bewegungsphasen bilden. Aus den erwähnten Beobachtungen geht ferner noch hervor, daß die Umlaufszeit eines Elementes, oder die Zeit, innerhalb welcher eine Welle um ihre eigene Länge fortschreitet, vorzüglich von dem Verhältnisse der beiden Bahnaxen abhängt; je größer das Verhältniß der horizontalen Axe $2a$ zur verticalen Axe $2b$ der Bahn ist, desto größer ist auch die Umlaufszeit. Die tiefer liegenden Wassertheile durchlaufen ferner ihre Bahnen in kürzerer Zeit, als die in der Oberfläche, woraus wieder gefolgert werden muß, daß auch die Wellenlängen nach dem Boden zu abnehmen. §. 28.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ einer Welle hängt, da die Umlaufszeit t mit dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ wächst, nicht allein von der Länge s, sondern auch von der Höhe b ab. Wenn eine Welle zwischen parallelen Wänden, z. B. in einem Canale, fortschreitet, so bleibt ihre Breite unverändert; es nimmt aber ihre Höhe b allmälig ab und ihre Länge allmälig so

zu, daß in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur diejenige Veränderung eintritt, welche aus der Reibung des Wassers an den Wänden resultirt. Wenn hingegen eine Welle auf keiner Seite in ihrem Fortschreiten gehindert wird, und dieselbe einen in sich selbst zurücklaufenden Wall bildet, so vergrößert sich ihre Länge und Breite zugleich, und zwar auf Unkosten ihrer Höhe, und sie wird allmälig so flach, daß sie in kurzer Zeit von dem Auge nicht mehr wahrgenommen werden kann. Ist eine solche Welle anfangs nicht kreisförmig, so nähert sie sich wenigstens der Kreisgestalt immer mehr und mehr, je weiter sie fortschreitet. Nach den Weber'schen Versuchen soll die Höhe in arithmetischer Progression abnehmen, wenn die Welle in geometrischer Progression fortschreitet. Die Geschwindigkeit des Fortschreitens einer solchen Welle nimmt allmälig ab, je weiter dieselbe fortschreitet. Wenn umgekehrt eine Welle von außen nach innen fortschreitet, und sich dabei immer mehr und mehr zusammenzieht, so nimmt dieselbe an Höhe und Länge, sowie auch an Geschwindigkeit, allmälig zu.

Es findet hiernach ein großer Unterschied zwischen den Wasserwellen und den Schallwellen statt. Während bei diesen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nur von der Elasticität und Dichtigkeit des Mediums abhängt, ist dieselbe bei jenen Wellen nur eine Function der Wellenhöhe und Wellenlänge. Wenn die Wellenbewegung des Wassers durch eine fast momentan wirkende Kraft, z. B. durch Eintauchen und schnelles Herausziehen eines festen Körpers aus dem Wasser, veranlaßt wird, so beschreiben die Wasserelemente immer kleiner und kleiner werdende elliptische Bahnen, oder vielmehr im Ganzen sich immer mehr und mehr zusammenziehende Spirallinien, und es fallen hierbei auch die Umdrehungszeiten immer kleiner und kleiner aus. Diesem Bewegungsverhältnisse ist die Entstehung einer ganzen Reihe immer kleiner und kleiner ausfallender Wellen beizumessen. Bei dem weiteren Fortschreiten werden die folgenden Wellen von den vorhergehenden immer mehr und mehr verstärkt, während die vorderste Welle sich in kurzer Zeit so sehr verflacht, daß sie von dem Auge nicht mehr wahrgenommen wird. Dieses Zusammenfließen der Wellen verursacht die Entstehung kleiner Wellensysteme, welche besonders auf den Vorderflächen der Hauptwellen zahnförmig auftreten. Diese kleineren Wellen oder Zähne schreiten, nach Poisson und Cauchy gleichförmig beschleunigt fort.

§. 29. **Hagen's Versuche.** Nach den neuesten Forschungen des Herrn Geh. Oberbauraths Hagen*) beschreiben die Wassertheile bei Wellen über einem

*) s. G. Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst, III. Theil, Seeufer und Hafenbau, 1. Band, ebenso auch die Abhandlung desselben Verfassers: „Ueber Wellen auf Gewässern von gleichmäßiger Tiefe“, in den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1861.

sehr tiefen Grunde sämmtlich **kreisförmige** Bahnen mit durchweg **constanter Winkelgeschwindigkeit**. Der Durchmesser dieser Bahnen nimmt von der Oberfläche nach dem Grunde hin nach einem bestimmten Gesetze ab und würde in unendlicher Tiefe gleich Null ausfallen. Alle im Zustande der Ruhe in gleicher Tiefe unter der Oberfläche befindlichen Wassertheilchen beschreiben gleich große kreisförmige Bahnen, doch sind die Stellungen dieser Theilchen oder ihre Phasen verschieden, so nämlich, daß jedes Theilchen von dem durch den Mittelpunkt seiner Bahn gehenden Lothe um einen größeren Centriwinkel absteht, als das in der Richtung der fortschreitenden Wellenbewegung folgende Theilchen. Die sämmtlichen, ursprünglich in einer Horizontalebene liegenden Theilchen sind daher in jedem Augenblicke während der Wellenbewegung in einer Fläche gelegen, deren Durchschnitt mit einer verticalen Ebene eine Cykloide und zwar eine gestreckte Cykloide ist. In Figur 985 (a. f. S.) stellen $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_8$ die Lagen einzelner auf einander folgender Punkte der ursprünglich horizontalen Oberfläche vor. Die entsprechende Verbindungslinie dieser Lagen macht die Form der Wellenoberfläche deutlich, und es ist ersichtlich, daß die gesammte Höhe der Welle, d. h. der Verticalabstand eines höchsten Gipfels a_0 von dem tiefsten Gipfel a_4 gleich dem Durchmesser $2r$ der Kreisbahn ist, welche jedes Theilchen der Oberfläche beschreibt. Ebenso bewegen sich sämmtliche Theilchen b einer ursprünglich horizontalen Ebene, welche um eine gewisse Tiefe unter der Oberfläche gelegen ist, in Kreisen von dem Halbmesser ϱ, dessen Größe von dieser Tiefe abhängig ist, und es bildet der Verlauf der verschiedenen Lagen $b_0\, b_1\, b_2 \ldots b_8$ ebenfalls eine gestreckte Cykloide, für welche der gesammte Abstand zwischen Berg und Thal gleich dem Durchmesser 2ϱ der zugehörigen Kreisbahn ist. Je tiefer man nach dem Grunde vorschreitet, desto kleiner wird ϱ und desto mehr nähert sich die gestreckte Cykloide einer Geraden. Denkt man sich dem Abhängigkeitsgesetze zwischen dem Bahnhalbmesser ϱ und der Höhenlage eines Wassertheilchens entsprechend die Halbmesser und Wellenlinien auch oberhalb der Wasseroberfläche fortgesetzt, so kommt man auf eine Ebene oberhalb der Oberfläche, für welche der Halbmesser ϱ der zugehörigen Kreisbahnen so groß ist, daß aus der gestreckten Cykloide eine gemeine Cykloide wird, d. h. es ist der Halbmesser R dieser Bahn durch die Beziehung $2R\pi = l$ gegeben, unter l die ganze Länge der Welle verstanden. In Figur 985 ist diese Cykloide in $c_0\, c_1\, c_2 \ldots c_8$ dargestellt. In der Wirklichkeit erscheint diese Fläche niemals als wirkliche Wasseroberfläche, letztere bleibt vielmehr, wie $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_8$ darstellt, immer beträchtlich darunter zurück, indem die Wellenberge stets abgerundete Kuppen a_0 und keine scharfen Spitzen wie c_0 bilden. Man hat sich die Cykloide $c_0\, c_1\, c_2 \ldots$ nur als einen ideellen Wellendurchschnitt zu denken, auf welchen die Theorie geführt hat.

Da alle Wasserelemente ihre verschiedenen Kreisbahnen mit constanter

Winkelgeschwindigkeit durchlaufen, so vollführen sie auch sämmtlich in gleicher Zeit einen vollen Umlauf, woraus folgt, daß alle diejenigen Wassertheilchen in denselben Phasen ihrer Bewegung sich befinden, welche wie $a_0\, b_0 \ldots$, $a_1\, b_1 \ldots$

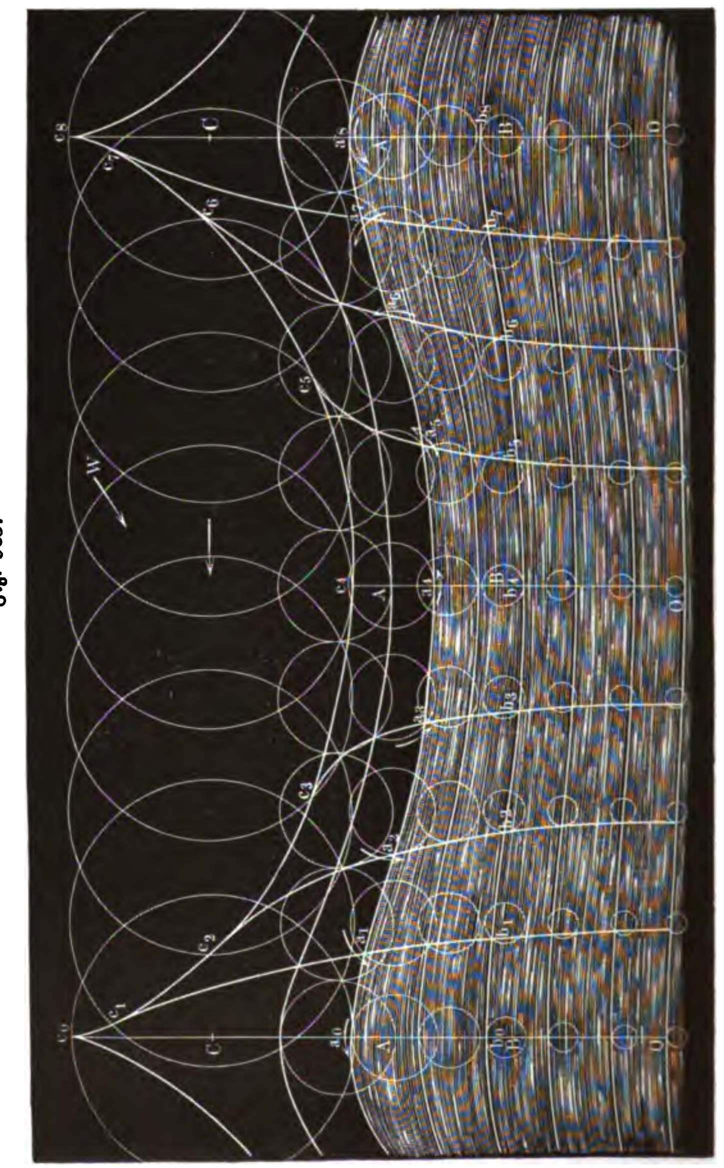


Fig. 985.

im Zustande der Ruhe vertical unter einander befindlich waren. Denkt man sich im Zustande der Ruhe einen solchen verticalen Wasserfaden, und seien A, B ... einzelne Punkte desselben, so nimmt derselbe nach eingetretener Wellenbewegung eine um sein Fußende schwankende Bewegung an, indem er successive alle die Lagen einnimmt, welche in der Figur durch $b_0\ a_0\ c_0$, $b_1\ a_1\ c_1$, $b_2\ a_2\ c_2$ ... bezeichnet sind.

Man kann diese Bewegung des Wasserfadens etwa vergleichen mit derjenigen von Getreidehalmen, welche unter dem Einflusse des Windes ebenfalls um ihre Wurzelenden hin und her schwanken und dadurch in der That auf der Oberfläche des Kornfeldes die bekannte, der Wellenbewegung analoge Erscheinung hervorrufen. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, daß, während die Getreidehalme ihre Länge beibehalten, die Wasserfäden ihre ursprüngliche Länge $CABO$ bald verlängern auf diejenige $c_0 a_0 b_0 O$, bald verkürzen zu derjenigen $c_4 a_4 b_4 O$. Mit dieser Verlängerung und Verkürzung ist natürlich eine entsprechende Verdünnung, bezw. Verdickung der prismatisch gedachten Wasserfäden verbunden, welche auch aus der Figur und besonders in der Nähe der Oberfläche ersichtlich ist. Man erkennt dies nämlich daraus, daß die in gleichen Abständen gedachten verticalen Wasserfäden in der Nähe der Wellenberge sich dichter an einander schmiegen, während sie in der Nähe der Thäler bei $b_4\ a_4\ c_4$ größere Abstände von einander zeigen. Die Bewegungsrichtungen der einzelnen Wassertheilchen sind durch die eingezeichneten Pfeile ersichtlich gemacht, und ist daraus leicht zu erkennen, daß die den vorderen Theil der Welle zwischen a_8 und a_4 bildenden Wasserelemente eine steigende, die den hinteren Theil zwischen a_0 und a_4 bildenden Elemente eine niedergehende Bewegung haben. Daraus erklärt sich denn auch der die Wellenbewegung befördernde Einfluß, welchen ein in der Richtung des Fortschreitens der Wellen wehender Wind ausübt. Denkt man denselben etwa in der Richtung des Pfeils W einfallend, so wird er die Wasserelemente auf dem hinteren Wellentheile $a_0\ a_4$ in ihrer abwärtsgerichteten Bewegung verstärken, während die das Vordertheil $a_8\ a_4$ bildenden aufsteigenden Elemente nicht in dieser Bewegung behindert werden, da sie durch den Gipfel a_8 wesentlich geschützt sind.

Da sämmtliche Theile ihre Kreisbahn in derselben Zeit vollbringen, so folgt weiter, daß die Wellenlänge *) in allen Tiefen dieselbe sein muß, was auch deswegen sehr wahrscheinlich ist, weil bei Annahme verschiedener Wellenlängen jedenfalls die Theilchen wegen ihrer verschiedenen Geschwindigkeiten großen Reibungswiderständen gegen einander ausgesetzt wären, und dies mit

*) Wenn nach den Weber'schen Versuchen die Wellenlänge nach unten hin ab- und die Umlaufsgeschwindigkeit zunimmt, so liegt der Grund davon wohl in der Einwirkung des Bodens, welcher bei der geringen Tiefe, bei welcher die Versuche angestellt wurden, sehr beträchtlich sein mußte; wogegen die Hagen'sche Theorie eine unendlich große Tiefe voraussetzt.

der Wahrnehmung nicht im Einklang stände, daß bei sehr großen Tiefen der Wellenschlag noch lange anhält, nachdem der erzeugende Sturm vorüber ist.

Die Verhältnisse dieser Wellenbewegung sind nach der Hagen'schen Theorie durch folgende Formeln ausgedrückt:

Bezeichnet R, wie schon oben erwähnt, den Halbmesser der Kreisbahn, in welcher sich die Theilchen in der Horizontalebene durch C bewegen würden, wobei diese Fläche im Durchschnitt eine gemeine Cykloide $c_0\ c_1\ c_2 \ldots c_8$ werden würde (vorausgesetzt, daß dies möglich wäre), so hat man die Länge der Welle:

$$l = 2 R \pi,$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben:

$$c = \sqrt{2 g R} = \sqrt{\frac{g l}{\pi}}.$$

Hieraus folgt die Periode der Welle oder die Zeit, in welcher eine volle Welle an einem festen Punkte vorüberläuft:

$$t = \frac{l}{c} = \pi \sqrt{\frac{2 R}{g}} = \sqrt{\frac{\pi l}{g}}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die einzelnen Wassertheilchen ihre Kreisbahnen beschreiben, ist für alle Theile constant:

$$w = \frac{c}{R}.$$

Der Halbmesser ϱ der Kreisbahn irgend eines Elementes b, welches in der Ruhelage in B und um $CB = y$ unter der gedachten Ebene C liegt, welcher der Halbmesser R entspricht, ergiebt sich zu:

$$\varrho = R e^{-\frac{y}{R}},$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems bedeutet. Umgekehrt hat man daher die Tiefe unter C:

$$y = R \, Log. nat. \frac{R}{\varrho}.$$

Anmerkung. Die Höhe der Wellen auf dem Meere ist von sehr vielen Umständen abhängig, so namentlich von der Wassertiefe und Größe des Meeres, wie von der Dauer und Heftigkeit des Sturmes. Die größten, von Scoresby gemessenen Wellen hatten durchschnittlich 26, zuweilen bis 30 Fuß Höhe bei 534 Fuß Länge. Das Verhältniß der Höhe 2ϱ zur Länge l ist ebenfalls sehr verschieden, Hagen giebt dafür die Zahlen $1/_{12}$ bis $1/_{20}$ an.

Beispiel. Wenn die Höhe einer Welle zu 5 Meter und ihre Länge l zu 80 Meter gemessen wurde, so ergiebt sich R zu:

$$R = \frac{l}{2 \pi} = 12{,}73 \text{ Meter}.$$

Die Höhe derjenigen Ebene, welcher dieser Halbmesser, also die gemeine Cykloide, entspricht, über der Oberfläche des Wassers im Ruhezustande ergiebt sich alsdann, da für die Oberfläche $\varrho = 2{,}5$ Meter ist, durch:

$$y = R \,.\, Log.nat.\ \frac{R}{\varrho} = 12{,}73 \,.\, Log.\ nat.\ \frac{12{,}73}{2{,}5} = 21{,}72 \text{ Meter.}$$

Für die Punkte, die um 20, resp. 50 Meter unter der Wasseroberfläche, also um 41,72 resp. 71,72 Meter unter der mehrgedachten Ebene liegen, ergeben sich nun die Halbmesser ϱ_1 und ϱ_2 der kreisförmigen Bahnen durch $\varrho = R e^{-\frac{y}{R}}$ zu:

$$\varrho_1 = \frac{12{,}73}{e^{3{,}277}} = 0{,}480 \text{ Meter, und}$$

$$\varrho_2 = \frac{12{,}73}{e^{5{,}634}} = 0{,}045 \text{ Meter.}$$

Man erkennt hieraus, wie schnell die Schwingungskreise der Wassertheilchen mit der Tiefe abnehmen.

Bei Wellen von geringer constanter Tiefe sind dagegen, wie auch schon Scott Russell angegeben hat, die horizontalen Bewegungen der über einander befindlichen Wassertheile gleich groß; es behält daher der anfangs verticale Wasserfaden bei der Wellenbewegung seine verticale Stellung, verändert dagegen hierbei seine Länge und Dicke. Die einzelnen Wassertheilchen beschreiben hier geschlossene Curven von gleichem horizontalen, und von einem veränderlichen, mit der Tiefe allmälig abnehmenden verticalen Durchmesser; dieselben sind jedoch nur unter der Voraussetzung, daß die Wellenhöhe gegen die Wassertiefe unendlich klein ist, Ellipsen.

Bei endlicher Tiefe des Wassers und großer Wellenhöhe sind die Gesetze der Wellenbewegung sehr complicirt.

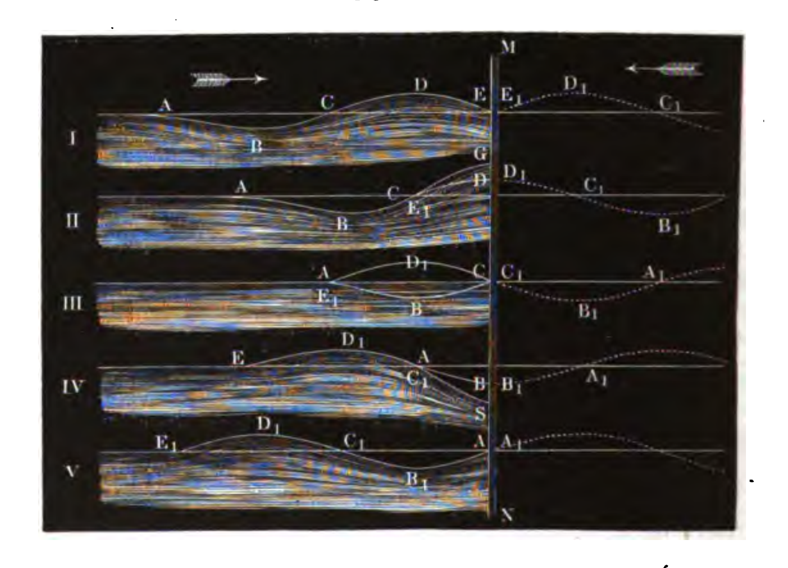
Interferenz der Wasserwellen. Wenn sich zwei Wasserwellen durchkreuzen, so treten im Allgemeinen dieselben Erscheinungen ein, wie bei den Luft- und anderen Wellen; es setzt auch hier jede Welle nach dem Zusammentreffen ihre Bewegung fort, als wenn es gar nicht stattgefunden hätte; nur findet, nach Weber's Beobachtungen, ein kleiner Zeitverlust statt, so daß eine Welle ein wenig mehr Zeit braucht, einen gewissen Weg zu durchlaufen, wenn sie durch eine andere Welle hindurchgeht, als wenn sie frei fortschreitet. Kommen zwei Wellenberge zusammen, so entsteht ein fast doppelt so hoher Berg, und ebenso geben zwei Wellenthäler bei ihrem Zusammentreffen ein fast doppelt so tiefes Thal, als bei einer einfachen Welle. Die Weber'schen Versuche führen auf das Verhältniß 1 : 1,79 zwischen den Berghöhen der einfachen und der Doppelwelle. Bei der Interferenz oder dem Zusammenkommen eines Wellenberges mit einem Wellenthale heben sich beide gegenseitig auf und es bleibt die betreffende Stelle im Niveau des ruhigen Wasserspiegels. Was die Bahnen der einzelnen Wasserelemente anlangt, so gehen diese bei dem Zusammentreffen von zwei gleichen §. 30.

Wellen in gerade Linien über, die im Berggipfel vertical, entfernt von demselben aber schief, jedoch so stehen, daß sie sich oben gegen den Gipfel neigen.

Wenn ferner eine Wasserwelle gegen eine feste Wand anstößt, so wird sie von derselben so zurückgeworfen, als wenn sie von einem Orte herkäme, der eben so weit hinter der Wand absteht, als der Ausgangspunkt der Welle vor derselben, und es geht die zurückgeworfene Welle ebenso durch die ankommende hindurch wie zwei sich kreuzende Wellen überhaupt.

In Figur 986, I., II. bis V., sind die Erscheinungen, welche sich beim Zurückwerfen einer Welle *ABCDE* durch eine feste Wand *MN* darbieten,

Fig. 986.



vor Augen geführt. In I. kommt eben der Wellenberg *CDE* an der Wand *MN* an, und es beginnt das Reflectiren in Form einer umgekehrt laufenden Welle $C_1 D_1 E_1$; in II. ist der Gipfel *D* des Wellenberges an der Wand angekommen, und es hat sich mit demselben die Hälfte $D_1 E_1$ des zurückgeworfenen Wellenberges vereinigt, folglich entsteht ein halber Wellenberg *CG* von fast doppelter Höhe. In III. erreicht eben erst das Wellenthal *ABC* die feste Wand, während der zurückgeworfene Wellenberg $C_1 D_1 E_1$ über demselben hinweggeht; es tritt daher eine Interferenz ein, wobei die Welle einen Augenblick lang ganz verschwindet. In IV. trifft die Thalsohle *B* der ankommenden Welle mit der Thalsohle B_1 der zurückgeworfenen Welle an der Wand zusammen, es bildet sich folglich ein halbes Thal *AS* von der doppelten Tiefe. In V. ist endlich die ankommende Welle *ABCDE* voll-

ständig durch die Wand *MN* zurückgeworfen, und dadurch in die umgekehrt laufende Welle $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ verwandelt worden.

Die Bahnen der Wasserelemente erleiden durch den Anstoß an die feste Wand dieselben Veränderungen, wie bei dem Durchkreuzen zweier Wellen; es wird auch hier in der Nähe der Wand der horizontale Theil dieser Bewegung immer mehr und mehr aufgehoben, und dagegen der verticale Component mehr und mehr verstärkt, so daß nahe an der Wand diese Bahn in eine verticale und entfernter davon in eine schiefe Linie übergeht. Stößt die Welle schief gegen eine feste Wand, so wird sie, wie jeder elastische Körper, unter demselben Winkel zurückgeworfen, unter welchem sie auftrifft.

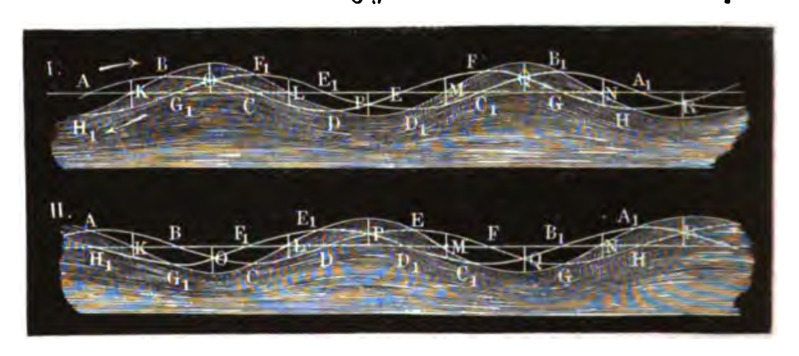
Indeß besteht doch ein wesentlicher Unterschied zwischen den Erscheinungen der Reflexion von Wasserwellen und der Zurückwerfung fester Körper. Denkt man sich nämlich einen elastischen Körper, etwa eine Kugel, gegen eine feste Wand stoßend, so wird der in der Bewegungsrichtung vorderste Punkt der Kugel, welcher zuerst den Stoß empfängt, beim Zurückprallen der Kugel der hinterste Punkt werden, und die Kugel geht, wenn nicht etwa eine Drehung eintritt, in derselben Lage zurück, in welcher sie ankam. Bei der Wasserwelle hingegen findet eine Umkehr in der Lage von Wellenberg und Wellenthal statt, denn wenn, wie aus Figur 986 ersichtlich, die Welle (in I.) so ankommt, daß ihr Wellenberg vorangeht, so geht beim Zurückprallen (in V.) ebenfalls ihr Wellenberg wieder voran. Es hat also bei dem Abprallen der Welle an der festen Wand gleichzeitig eine Vertauschung in der Lage von Berg und Thal stattgefunden, was man sich so vorstellen kann, als ob Wellenberg und Wellenthal bei der Reflexion durch einander durchgingen.

Trifft die Welle nur theilweise gegen ein Hinderniß, so treten die Erscheinungen der sogenannten Inflexion ein, wobei sich neue Wellen um die äußersten Enden dieser Hindernisse herum bilden, und unter Anderem z. B. zur Entstehung von Wirbeln Veranlassung geben.

Endlich entstehen die stehenden Wellen des Wassers, wie die einer Saite oder eines anderen festen Körpers, wenn sich zwei gleich lange Wellen kreuzen, deren Ausgangspunkte um das 1-, 3-, 5-, 7- ... fache des Viertels einer Wellenlänge von einander abstehen. Es sei *ABCDEFGH*, Fig. 987 I. und II. (a. f. S.), die eine und $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ die andere Welle. In den Punkten *K*, *L*, *M*, *N*, wo beide Wellenzüge von der Mittellinie gleich weit abstehen, sich also die Bewegungen aufheben, bilden sich feste Interferenzpunkte, dagegen über und unter den Punkten *O*, *P*, *Q*, *R*, wo sich beide Wellenlinien schneiden und daher die Wege verdoppeln, entstehen abwechselnd Berggipfel und Thalsohlen. Durch ein Kreuzen mehrerer aus verschiedenen Richtungen ankommenden Wellenzüge entstehen die unter dem Namen der Sturzseen oder Teifuns bekannten Wellen von außerordentlicher Höhe.

Anmerkung. Den vollständigsten Unterricht über die Wellenbewegung ertheilt folgendes Werk: Wellenlehre, auf Experimente gegründet, u. s. w., von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber, Leipzig 1825. Einen guten Auszug hiervon findet man in dem Lehrbuche der mechanischen Naturlehre von August.

Fig. 987.



Auch ist hierüber nachzulesen: Müller's Lehrbuch der Physik und Meteorologie, Bd. I. Die Abhandlungen über die Wellen von Laplace, Lagrange, Flaugergues, Gerstner und Poisson findet man in dem Weber'schen Werke sehr vollständig mitgetheilt und kritisirt. Ueber Cauchy's „Wellen-Theorie" und Bidone's „Versuche" findet man Ausführlicheres in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Art. Wellen. Emy's „Wellen-Theorie" ist unter dem Titel: „Ueber die Bewegung der Wellen und über den Bau am Meere und im Meere" von Wiesenfeld übersetzt und 1839 in Wien erschienen. Die Schriften von Hagen sind oben §. 29 citirt worden. Auch handelt Airy von der Theorie der Wasserwellen im Artikel Tides and Waves der Encyclopaedia metropolitana, Vol. V.

II. Die Elemente der graphischen Statik.

§. 31. **Graphische Methoden überhaupt.** Bei den Entwickelungen der vorstehenden Abschnitte ist im Allgemeinen ein analytisches Verfahren eingehalten worden, indem aus den gegebenen, durch Zahlen ausgedrückten Größen mittelst der bekannten Rechnungsoperationen der Arithmetik die gesuchten Größen gefunden wurden. Diesem rechnerischen Verfahren steht

eine andere zeichnerische oder graphische Methode gegenüber, welche aus den gegebenen, durch Linien dargestellten Größen nach den Regeln der Geometrie die gesuchten Größen gleichfalls in Form von Linien construirt. Beide Wege führen natürlich zu demselben Resultate, nur ist in den verschiedenen Fällen bald der eine, bald der andere der kürzere und bequemere, daher vorzuziehende. Zur Erläuterung mag ein einfaches Beispiel dienen: Wenn von einem rechtwinkeligen Dreiecke die Maße der Katheten gegeben sind, so findet man das Maß der Hypotenuse durch Rechnung, wenn man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Katheten zieht. Zu demselben Resultate wird man natürlich gelangen, wenn man nach einem bestimmten Maßstabe die Kathetenlängen auf den Schenkeln eines rechten Winkels vom Scheitel aus aufträgt und die Länge der Verbindungslinie der beiden Endpunkte mit demselben Maßstabe mißt. Wenn nun zwar in diesem Beispiele die Ausführung der Zeichnung mindestens ebenso viel Zeit erfordern dürfte, als die ersterwähnte Rechnung, so ist doch in dem Falle das graphische Verfahren das kürzere, wo ohnehin das betreffende Dreieck gezeichnet werden muß, und daher die ganze Operation nur auf das Abgreifen einer Länge mit dem Zirkel hinausläuft. Dieses einfache Beispiel läßt daher schon erkennen, wie die graphischen Methoden für den Constructeur in vielen Fällen besondere Bequemlichkeiten darbieten, indem sie ihn der Ausführung von das Construiren immer störenden analytischen Rechnungen überheben. Hierbei ist die große Anschaulichkeit von besonderem Werthe, welche mit dem graphischen Verfahren immer verbunden ist, indem das durch die Zeichnung erlangte Resultat als räumliches Gebilde ohne Weiteres dem Auge sich darbietet, wogegen der auf algebraischem Wege gefundenen Zahl eine solche Unmittelbarkeit der Erscheinung nicht innewohnt. Bedenkt man ferner, daß das Zeichenbrett die eigentliche Heimstätte für die Wirksamkeit des Ingenieurs ist, welcher in Folge dessen mit graphischen Methoden meist vertrauter sein wird als mit analytischen, so ist die Beliebtheit erklärlich, welche die ersteren sich in der neueren Zeit unter den Ingenieuren erworben haben.

Da das graphische Verfahren sich nur mit Linien beschäftigt, so ist es zunächst erforderlich, die Größen, mit denen operirt werden soll, durch Linien, am einfachsten durch gerade Linien darzustellen. Man kann alle Größen, Längen, Flächen, Körper, Kräfte, Momente u. s. w. ihrem Werthe nach durch gerade Linien von bestimmter Länge (Strecken) darstellen, wenn man die Einheit der betreffenden Größe (Meter, Quadratmeter, Cubikmeter, Kilogramm, Meterkilogramm u. s. w.) durch eine gewisse Längeneinheit sich dargestellt denkt und der repräsentirenden Strecke so viele solcher Längeneinheiten giebt, als die darzustellende Größe Wertheinheiten enthält. Handelt es sich dabei nur um die absolute Größe oder die Anzahl von Einheiten, so kommt auch nur die absolute Länge der Strecke in Betracht. Vielfach aber sind zur

Bestimmung von Größen die absoluten Werthe allein nicht ausreichend; es ist dabei oft, wie z. B. bei Wegen, Kräften, Geschwindigkeiten u. s. w., auch deren Richtung und Lage näher zu bestimmen. Gerade für solche Fälle ist eine Darstellung durch Strecken meist viel geeigneter als durch Zahlen, weil eine Strecke sowohl eine Größe, wie auch eine Richtung und Lage repräsentiren kann. Handelt es sich z. B. um die Darstellung einer Kraft, so erfordert deren zweifellose Feststellung vermittelst Zahlen, außer der Bestimmung ihrer Größe (n Kilogramm), die Angabe ihrer Richtung, etwa durch Angabe der Winkel (α, β, γ), welche sie mit drei festen Coordinatenaxen bildet, ferner die Bestimmung ihrer Lage durch Angabe der Ordinaten (a, b, c) eines ihrer Punkte und endlich noch die Angabe des Sinnes, in welchem sie wirkt, d. h. ob in der betreffenden Richtung von dem gegebenen Punkte nach der einen oder anderen Seite hin. Bei der Bestimmung der Kraft durch eine Strecke hat man, um über die Kraft jeden Zweifel auszuschließen, nur nöthig, an den Punkt, durch welchen die Kraft hindurchgehen soll, die Strecke von der erforderlichen Größe parallel mit der Richtungslinie der Kraft und in dem Sinne der letzteren anzutragen. Gerade diese einfache Darstellungsweise von Kräften durch Strecken hat dem graphischen Verfahren in der Statik, die es ausschließlich mit Kräften zu thun hat, eine so vortheilhafte Anwendbarkeit gegeben und zu derjenigen Art der Behandlung der Statik geführt, welche unter dem Namen der graphischen Statik oder Graphostatik*) bekannt geworden ist.

Bei der graphischen Auflösung von Aufgaben der Statik kommen gewisse geometrische Constructionen sehr häufig vor, welche den Rechnungen des Addirens, Multiplicirens u. s. w. bei analytischen Auflösungen entsprechen. Ebenso wie zur Ausführung der letzteren die bezüglichen Operationen der Arithmetik bekannt sein müssen, so ist zur graphischen Lösung eine Kenntniß der entsprechenden geometrischen Constructionen erforderlich. Dieselben sind zwar nur Anwendungen bekannter, meist einfacher Lehrsätze der Geometrie, doch sollen des Zusammenhangs und leichteren Verständnisses halber und zur Vermeidung steter Wiederholungen in den folgenden Paragraphen die hauptsächlichsten Constructionen angeführt werden.

§. 32. **Addition und Subtraction von Strecken.** Wenn zwei oder mehrere Größen ganz beliebiger, aber unter sich gleicher Art durch die Strecken a_1, a_2, a_3, Fig. 988, gegeben sind, und es sich nur um die ab-

---

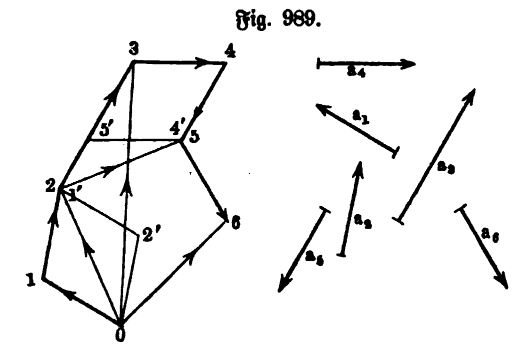
*) Als Begründer der graphischen Statik muß K. Culmann, Professor der Ingenieurwissenschaft am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, genannt werden, dessen Werk: „Die graphische Statik“, Zürich 1866, auch der vorliegenden Bearbeitung im Wesentlichen zu Grunde gelegen hat. Die Bezeichnung Graphostatik rührt von Reuleaux her, s. dessen „Constructeur“, 3. Aufl., 1869.

soluten Werthe oder um die Anzahl von Einheiten derselben handelt, (wenn die Größen z. B. Zeiten darstellen), so ist eine Addirung der Strecken durch bloßes Aneinanderreihen derselben in richtiger Länge in einer beliebigen geraden Linie zu bewirken, und man erhält als Summe der Strecken a_1, a_2, a_3 die Länge 03, d. h. so viele Einheiten der betrachteten Größen, als in den einzelnen Strecken zusammen Längeneinheiten nach dem der Zeichnung zu Grunde gelegten Maßstabe enthalten sind.

Fig. 988.

Wenn jedoch die darzustellenden Größen, z. B. Weggrößen, durch die Strecken nicht nur ihrem absoluten Werthe, sondern auch ihrer Richtung und ihrem Sinne nach dargestellt sind, so besteht das Addiren zwar auch in einem Aneinanderfügen der einzelnen Strecken, so jedoch, daß hierbei die Richtung und der Sinn jeder Strecke unverändert beibehalten wird. Sollen z. B. die mit a_1, a_2, a_3 . . . a_6 bezeichneten Strecken, Fig. 989, welche etwa die Wege eines Punktes der Größe und Richtung nach darstellen, und in denen der Sinn durch die Pfeilspitzen angezeigt sein möge, addirt werden, so kann die Addition dadurch bewirkt werden, daß man von dem beliebigen Punkte 0 aus die den Strecken parallelen und gleich langen Geraden 0 1 # a_1, 1 2 # a_2, 2 3 # a_3 . . . anträgt. Als Resultat dieser graphischen Addition ist dann die Strecke 06 anzusehen, welche den Anfangspunkt 0 dieses Linienzuges mit dem Endpunkte 6 desselben verbindet. Von der Richtigkeit dieses Verfahrens überzeugt man sich leicht, wenn man eine Strecke überhaupt als den Weg eines Punktes ansieht und nun nach dem Parallelogramm der Bewegungen (§. 32) zunächst zwei Strecken, etwa a_1 und a_2, zusammensetzt. Man erhält dann in der Diagonale 0 2 des aus a_1 und a_2 construirten Parallelogramms 0 1 2 2′ dieselbe Linie, welche nach der angegebenen Regel durch Anfügen von a_2 an a_1 unmittelbar sich ergiebt. Wenn die erhaltene Summe 0 2 der Strecken a_1 und a_2 in derselben Weise mit a_3 durch ein Parallelogramm zusammengesetzt wird, so erhält man als Summe von 0 2 und a_3, d. h. als Summe von a_1, a_2 und a_3, ebenso dieselbe Strecke 0 3, wie durch directes Anfügen der Strecken a_1, a_2 und a_3 an einander, u. s. w.

Fig. 989.



Man ersieht hieraus, daß nicht nur 0 6 die Summe der Strecken $a_1, a_2, a_3 \ldots a_5$ vorstellt, sondern daß man in 0 2 die Summe von a_1 und a_2, in 0 3 die Summe von a_1, a_2 und a_3 erhält, u. s. w.; ferner, daß die Strecke 1 3 die Summe von a_2 und a_3, sowie, daß 2 5 die Summe der Strecken a_3, a_4 und a_5 repräsentirt. Ueberhaupt läßt sich allgemein sagen, daß jede Diagonale in dem entstandenen Streckenzuge der Größe und Richtung nach als Summe aller derjenigen Strecken angesehen werden muß, welche von dieser Diagonale unterspannt werden. Der Sinn einer solchen Diagonale ist mit demjenigen des von ihr unterspannten Streckenzuges übereinstimmend zu wählen, so daß derjenige Eckpunkt (2), von welchem die erste der addirten Strecken (2 3) ausgeht, als Anfangspunkt, und derjenige Eckpunkt (5), in welchem die letzte Strecke (4 5) endigt, als Endpunkt der Diagonale anzusehen ist.

Bei dieser Addition ist die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Strecken aneinandergereiht werden, gleichgültig, ebenso wie die Reihenfolge der Summanden beim Addiren von Zahlen gleichgültig ist. Man überzeugt sich ohne Weiteres durch die Figur, daß eine Vertauschung von a_2 und a_1, d. h. eine Antragung erst der Strecke a_2 im Punkte 0 und darauf folgende Anfügung von a_1 an a_2 zwar zu dem geänderten Streckenzuge 02′ 1′, aber zu derselben Summe 0 1′ oder 0 2 führt. Eine gleiche Betrachtung läßt sich bei irgend welcher Veränderung in der Reihenfolge der Strecken anstellen.

Unter den in Fig. 989 gegebenen Strecken sind zwei unter sich parallel, nämlich a_3 und a_5; es sind in Folge dessen die entsprechenden Seiten des Streckenzuges 2 3 und 4 5 ebenfalls parallel. Vertauscht man nun a_5 mit a_4, d. h. fügt man an die Strecke 2 3 diejenige 3 5′ # a_5 und darauf 5′ 4′ # a_4 an, so nimmt der Streckenzug den Verlauf 0 1 2 3 5′ 4′ 6. Durch die Addition der beiden parallelen und entgegengesetzten Strecken a_3 und a_5 hat man hier die Summe 2 5′ erhalten, deren Absolutwerth gleich der Differenz der Werthe von a_3 und a_5 ist. Die Addition der Strecke a_5 zu der entgegengesetzt gerichteten a_3 bringt daher denselben Effect hervor, wie in der Arithmetik die Addition einer negativen Größe zu einer positiven. Da nun die Addition einer negativen Größe gleichbedeutend ist mit der Subtraction eben derselben positiven Größe, so darf man auch hier die Strecke 2 5′ als die Differenz der Strecke a_3 und der entgegengesetzten Strecke $-a_5$ ansehen, und es folgt daher für die graphische Subtraction die Regel, daß man zur Ausführung der Subtraction einer Strecke dieselbe mit entgegengesetzt genommenem Sinne zu addiren habe. Hierdurch ist die Ausführung einer Subtraction auf eine Addition zurückgeführt.

Soll z. B. die Strecke a_2 von der Strecke a_1, Fig. 990, subtrahirt werden, so addire man zu der Strecke 0 1, welche parallel und gleich a_1 ist, die Strecke 1 2, welche mit a_2 gleiche Größe und Richtung, aber entgegengesetzten Sinn hat, und man erhält in 0 2 die Differenz der Strecken a_1 und a_2.

Wenn der durch eine Addition erhaltene Streckenzug von solcher Beschaffenheit ist, daß der Endpunkt der letzten Strecke mit dem Anfangspunkte der ersten zusammenfällt, wenn also der Streckenzug ein geschlossenes Polygon darstellt, so ist die Summe aller Strecken gleich Null.

Fig. 990.

Graphische Multiplication und Division. Es liegt im Begriffe der Multiplication, daß man eine Größe irgendwelcher Art (Länge, Fläche Kraft ...) nur mit einer unbenannten oder Verhältnißzahl multipliciren kann, und ist dann das erhaltene Resultat wieder von derselben Art (Länge, Fläche, Kraft ...) wie der Multiplicand. Es hat an sich keinen Sinn, zu sagen, man multiplicire z. B. zwei Linien mit einander, und wenn dies doch geschieht, wenn z. B. der Ausdruck ganz gebräuchlich ist, der Inhalt eines Rechteckes sei gleich dem Producte aus Grundlinie und Höhe, so hat man den Ausdruck folgendermaßen zu verstehen: Wenn man als Einheit für den Flächeninhalt des Rechtecks dasjenige Quadrat annimmt (Quadratmeter), dessen Seite gleich derjenigen Längeneinheit ist (Meter), mit welcher die Rechteckseiten gemessen werden, so giebt das Product ab aus den Maßen a und b der Seiten die Anzahl der in dem Rechtecke enthaltenen Flächeneinheiten an. Das Maß einer Seite ist aber nur die Verhältnißzahl zweier Längen, nämlich der Rechteckseite und der Längeneinheit, so daß man hier unter dem Producte der beiden Seiten nur das zweier abstracter Zahlen a und b zu verstehen hat, indem man dabei nur stillschweigend die erwähnte Flächeneinheit hinzudenkt. Man kann auch übrigens die eine Seite, deren Maß a ist, als Repräsentanten von a Flächeneinheiten denken, entsprechend einem rechteckigen Streifen von der Länge a und der Höhe 1, und man erhält dann den Inhalt des Rechteckes durch so viele solcher Streifen, als die andere Seite b Einheiten enthält; es ist daher in diesem Falle unter ab das Product einer Flächengröße a, die durch eine Linie dargestellt ist, mit einer Verhältnißzahl $\frac{b \text{ Meter}}{1 \text{ Meter}}$ zu verstehen. §. 33.

In gleicher Art hat man sich den Zusammenhang zu denken, wenn in der Folge schlechtweg von der Multiplication zweier Strecken a und b die Rede ist, von denen die eine z. B. eine Länge a Meter, die andere eine Kraft b Kilogramm vorstellt. Man hat hier als Einheit des Productes 1 Meterkilogramm, d. h. das Moment einer Kraft von 1 Kilogramm, deren Arm 1 Meter beträgt, anzunehmen, und kann sich die Multiplication entweder so denken, daß die durch eine Strecke a dargestellte Größe a Meterkilogramm mit der Verhältnißzahl $\frac{b \text{ Kilogramm}}{1 \text{ Kilogramm}}$ multiplicirt werde, oder daß eine durch

die Strecke b dargestellte Größe b Meterkilogramm so oft genommen werde, als die Verhältnißzahl $\frac{a \text{ Meter}}{1 \text{ Meter}}$ angiebt.

Unter Berücksichtigung des Vorstehenden kann jede Multiplication zweier Strecken a und b sehr leicht ausgeführt werden, wenn man den Ausdruck $x = a\,\frac{b}{c}$ construiren kann, indem man darin nur c gleich 1 zu setzen braucht, um ab zu erhalten. Schreibt man obige Gleichung als Proportion

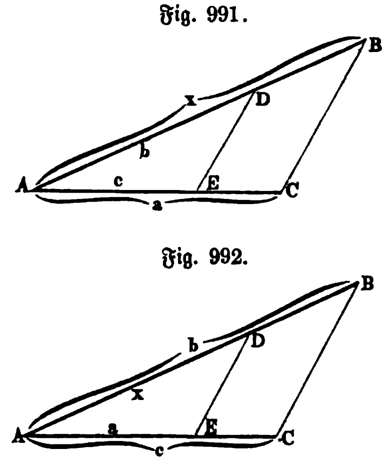
$$x : a = b : c,$$

so erkennt man sofort, daß die gegebenen drei Strecken und die gesuchte als zwei Paar entsprechende Seiten in ähnlichen Dreiecken aufgefaßt werden können, und ist mit Rücksicht hierauf die Construction leicht auszuführen.

In den Figuren 991 bis 994 ist der Ausdruck $x = \frac{ab}{c}$ in verschiedener Art mit Hülfe ähnlicher Dreiecke construirt, indem in allen Figuren $DE \parallel BC$ gezogen wurde. Offenbar gilt für sämmtliche Figuren die Proportion

$$x : a = b : c,$$

worin der Beweis für die Richtigkeit der Construction enthalten ist. Die Lösung der Aufgabe kann natürlich noch in mancherlei anderer Weise geschehen, indem alle diejenigen geometrischen Constructionen benutzt werden können, welche zu ähnlichen Dreiecken führen. In der Praxis sind oftmals einzelne Strecken in der Zeichnung schon aufgetragen, und es empfiehlt sich in solchen Fällen, dieselbe zu benutzen, wozu man natürlich unter den verschiedenen Methoden die geeignetste auszuwählen hat. Bestimmte Regeln lassen sich hierfür natürlich nicht angeben; einige Uebung führt hier indessen sehr bald zum Ziele. Als Anhalt für das Auftragen der Strecken und zur Vermeidung von Verwechselungen kann man bemerken, daß, wie auch aus den Figuren 991 bis 994 ersichtlich ist, die zu multiplicirenden Factoren a und b **niemals Seiten desselben Dreiecks** und auch **niemals gleichliegende Seiten der beiden Dreiecke** sein dürfen. Gleiches läßt sich natürlich auch in Beziehung zu x und c behaupten.



Durch die angegebenen Constructionen von $\frac{ab}{c}$ ist auch ohne Weiteres die Darstellung des Productes ab gegeben, denn man hat nur nöthig, für diesen Fall c gleich der Einheit des Maßstabes zu machen, nach welchem die Figur gezeichnet ist.

Macht man ferner b gleich der Einheit, so erhält man in derselben Weise in x den Ausdruck $\frac{a}{c}$, und es sind natürlich für die Division alle diejenigen Methoden brauchbar, welche für die Multiplication dienen, da ja die Division immer als eine Multiplication mit dem reciproken Werthe des Divisors angesehen werden kann. Einer besonderen Betrachtung bedarf aber noch die Bezeichnung der Einheit, welche dem Quotienten zweier Strecken gegeben werden muß. Wenn der Divisor eine abstracte Verhältnißzahl ist, so stellt der Quotient ebensolche Einheiten vor, wie der Dividendus, wie ja auch bei der Multiplication einer Strecke mit einer Verhältnißzahl an dem Charakter der Größe, welche der andere Factor vorstellt, nichts geändert wird. Wenn jedoch der Divisor eine benannte Größe ist, d. h. wenn derselbe eine Anzahl von Einheiten einer bestimmten Art vorstellt, so erfordert es immer eine Prüfung, welcher Art die Einheiten sind, die durch die als Quotient erhaltene Strecke dargestellt werden. Dies wird jedoch in keinem Falle schwierig zu entscheiden sein. Stellen z. B. beide Strecken, die des Divisors wie des Dividenden, gleichartige Größen vor, so ist der Quotient immer als abstracte oder Verhältnißzahl aufzufassen. Ebenso ergiebt sich der Quotient als Länge, wenn der Dividend eine Fläche und der Divisor eine Länge bedeutet, oder wenn der Dividend ein Moment und der Divisor eine Kraft ist. In gleicher Weise wird man natürlich für den Quotienten eine Kraft erhalten, wenn der Dividend ein Moment und der Divisor eine Länge vorstellt*).

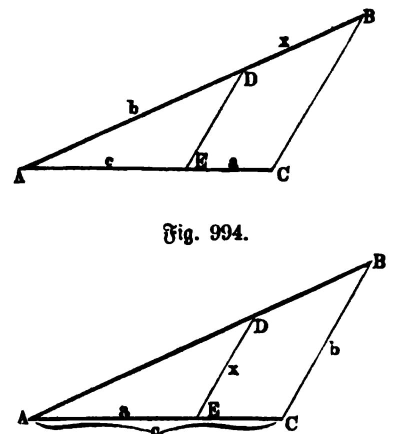


Fig. 993.

Fig. 994.

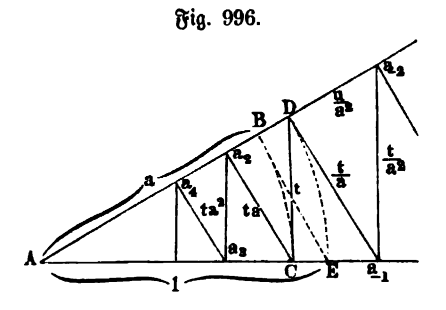
*) Unter Moment ist hier ein statisches Moment verstanden (Kraft mal Länge) stellt der Dividend ein Trägheitsmoment vor, so muß der Divisor eine Fläche sein, wenn als Quotient eine Kraft resultiren soll; und wäre der Divisor eine Länge, so würde der Quotient ein statisches Moment repräsentiren.

§. 34. Graphisches Potenziren. Die $n$te Potenz a^n einer Strecke a entsteht durch $n - 1$maliges Multipliciren der Basis a mit sich selbst und kann daher in der im vorigen Paragraphen angegebenen Art geschehen. Man setze, um zunächst a^2 zu zeichnen, in dem Ausdrucke $\frac{ab}{c}$ für c die Einheit und $b = a$, und mache (entsprechend den in den Figuren 991 und 992 angegebenen Constructionen) in den Figuren 995 und 996

Fig. 995.

auf den Schenkeln des beliebigen Winkels BAC: $AB = AC = a$ und $AE = 1$. Zieht man nun $Ca_2 \parallel EB$, so ist $Aa_2 = a^2$. Um diese Strecke Aa_2 mit a zu multipliciren, hat man jetzt noch $AD = 1$ zu machen, und von a_2 aus die Parallele $a_2 a_3$ mit DC zu ziehen, so erhält man in Aa_3 offenbar den Werth für a^3, denn es ist $Aa_3 : Aa_2 = AC : AD$ oder $Aa_3 = \frac{Aa_2 \,.\, AC}{AD} = \frac{a^2 \,.\, a}{1} = a^3$. In derselben Art liefert die Linie $a_3 a_4$, welche parallel mit EB gezogen wird, in Aa_4 den Werth für a^4 u. s. w. Es ist natürlich, daß in dem Falle (Fig. 995), wo $a > 1$ ist, die steigenden Potenzen größer und größer werden, die Schnittpunkte $a_2\, a_3\, a_4 \ldots$ sich daher von dem Scheitel A mehr und mehr entfernen, während in dem Falle der Figur 996, wo $a < 1$ ist, die wachsenden Potenzen von a sich mehr und mehr verkleinern und sich in demselben Maße der Null nähern, ohne sie jemals zu erreichen, wie die Schnittpunkte $a_2, a_3, a_4 \ldots$ sich dem Scheitel A nähern, mit welchem sie aber auch niemals zusammenfallen.

Fig. 996.



Die beiden Geraden BE und DC, mit welchen die Leitstrahlen $a_2 a_3, a_3 a_4 \ldots$ parallel sind, bilden mit den beiden Schenkeln AB und AC ein Antiparallelogramm, d. h. sie bilden mit AB und AC bei D und E, resp. bei B und C gleiche Winkel. Man kann daher die Regel zum Potenziren folgendermaßen fassen. Nachdem man zwischen den Schenkeln eines belie-

bigen Winkels die beiden dem Verhältnisse $\frac{a}{1}$ resp. $\frac{1}{a}$ entsprechenden Antiparallelen BE und DC festgestellt hat, ziehe man von dem Endpunkte einer Strecke gleich der Grundzahl a abwechselnd Parallelen mit den gedachten beiden Antiparallelen von einem Schenkel zum anderen.

In dem Vorstehenden sind durch die zwischen den Schenkeln AB und AC gezogenen antiparallelen Transversalen nur die positiven Potenzen von a, also a^2, a^3, a^4 ... bestimmt worden, indem der Antiparallelenzug von C aus nur nach der einen Seite geführt wurde. Setzt man jedoch in demselben Sinne den Zug von C aus auch nach der anderen Seite fort, so erhält man, wie aus der Figur ohne Weiteres ersichtlich ist, auch die negativen Potenzen von a. Zieht man nämlich zuerst von C aus eine Parallele mit DC, so fällt dieselbe mit DC zusammen, und man erhält in der Strecke $AD = 1$ den Werth für a^0. Hierauf liefert die Antiparallele Da_{-1} in der Strecke Aa_{-1} den Werth für $a^{-1} = \frac{1}{a}$, denn es verhält sich:

$$Aa_{-1} : AD = AE : AB; \text{ d. h. es ist } Aa_{-1} = \frac{1}{a}.$$

Ebenso liefert die Antiparallele $a_{-1}\,a_{-2}$ in der Strecke Aa_{-2} den Werth für $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ u. s. f. Da der Winkel BAC ganz willkürlich gewählt werden kann, so darf bezüglich der Winkel bei C und D noch eine Annahme gemacht werden. Für das praktische Zeichnen thut man gut, die Winkel bei E in Fig. 995, resp. bei B in Fig. 996 als Rechte anzunehmen. Um dies zu erreichen, hat man nur nöthig, in E resp. B ein Loth auf dem Schenkel AE resp. AB zu errichten und von A aus mit der Zirkelöffnung gleich a bei B (Fig. 995) resp. gleich Eins bei E (Fig. 996) in dieses Loth einzuschneiden.

Durch die Antiparallelen entstehen zwischen den Schenkeln des Winkels BAC eine Reihe von Dreiecken, von denen leicht ersichtlich ist, daß alle diejenigen unter einander ähnlich sind, welche den Scheitel A und die beiden Endpunkte einer antiparallelen Strecke zu Eckpunkten haben, also z. B. die Dreiecke ADC, ACa_2, Aa_2a_3 u. s. w. Hieraus folgt, daß auch das Verhältniß zwischen zwei auf einander folgenden Transversalen gleich a ist. Bezeichnet z. B. t die Länge der Strecke CD, so folgt die Strecke Ca_2 zu $t\,.\,a$ aus der Proportion $Ca_2 : AC = DC : AD$, oder $Ca_2 = a\,.\,t$.

Da ferner auch alle diejenigen Dreiecke unter sich ähnlich sind, welche wie CDa_2, a_2Ca_3, $a_3a_2a_4$ ... durch je einen Abschnitt auf den Schenkeln des Winkels BAC und zwei Antiparallelen gebildet werden, so stehen auch die betreffenden, auf einander folgenden Abschnitte in dem Verhältnisse $1 : a$ zu einander. Bezeichnet man z. B. den Abschnitt Da_2 mit u, so folgt aus

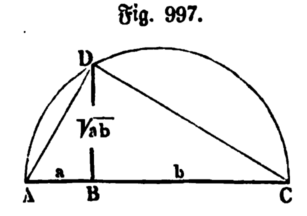
$$Ca_3 : Da_2 = Ca_2 : DC$$

der Abschnitt:

$$Ca_3 = \frac{Da_2 \,.\, Ca_2}{DC} = \frac{u \,.\, ta}{t} = u \,.\, a.$$

§. 35. **Graphisches Radiciren.** Um die Quadratwurzel aus einer Strecke zu ziehen, kann man sich der Eigenschaft eines rechtwinkeligen Dreiecks bedienen, vermöge welcher dasselbe durch die Höhe zur Hypotenuse in zwei unter sich und mit dem Urdreiecke ähnliche Dreiecke zerlegt wird. Demzufolge hat man in Fig. 997: $DB^2 = AB \,.\, BC$ und in Fig. 998: $AD^2 = AB \,.\, AC$. Trägt man deshalb zwei Strecken $AB = a$ und $BC = b$ hinter einander auf der Geraden AC (Fig. 997) an und schlägt über $a + b$ einen Halbkreis, so hat man in dem Lothe BD zwischen dem Halbkreise und der Basis das Maß für $\sqrt{ab}$.

Fig. 997.



Ebenso folgt die Construction in Fig. 998 sofort; man mache $AC = a$, $AB = b$, zeichne den Halbkreis über a, ziehe das Loth BD und findet in AD die Strecke für $\sqrt{ab}$.

Man kann auch nach Fig. 999 über $a - b$ einen Halbkreis beschreiben und erhält nach einem bekannten Lehrsatze der Geometrie in der tangentialen Strecke AD den Werth für $\sqrt{ab}$.

Fig. 998.

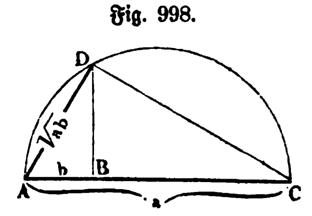
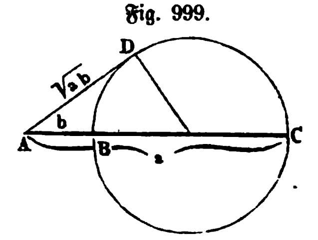


Fig. 999.

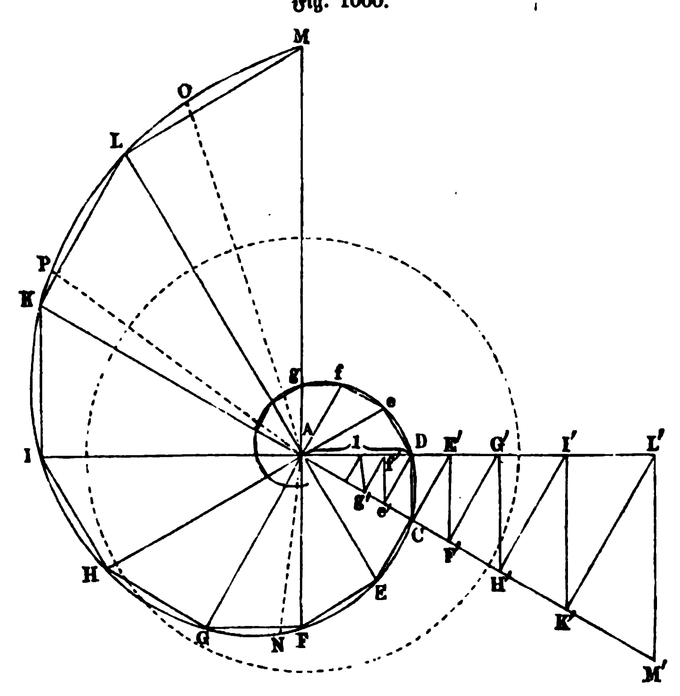


Handelt es sich nicht darum, die Wurzel aus dem Producte zweier Strecken a und b, sondern aus einer Strecke a zu finden, so ist in vorstehenden Constructionen b gleich der Maßeinheit zu nehmen.

Wenn es sich darum handelt, eine andere als die Quadratwurzel aus einer Strecke zu finden, so ist die Construction nicht so einfach. Culmann verwendet hierzu die logarithmische Spirale als Hülfscurve, und es kann dieselbe nicht nur zum graphischen Wurzelausziehen, sondern auch zum graphischen Multipliciren, Dividiren und Potenziren gebraucht werden, so daß sie gewissermaßen die Logarithmentafeln ersetzt, wie sich aus Folgendem ergeben wird.

Man trage in Fig. 1000 auf den Schenkeln des Winkels $L'AM'$ von A aus $AD = 1$ und $AC = a$ auf und ziehe nach Anweisung von §. 34 zur Ausführung der Potenzirung die Antiparallelen DC, CE', $E'F'$, $F'G'$ 2c.

Fig. 1000.



nach außen, sowie De', $e'f'$, $f'g'$ ... nach innen. Hierauf trage man den Winkel DAC wiederholt nach beiden Richtungen im Kreise herum bei A an, so daß $DAC = CAE = EAF \ldots = DAe$, eAf, $fAg \ldots$ wird; und mache endlich $AE = AE'$, $AF = AF'$, $AG = AG' \ldots$, sowie $Ae = Ae'$, $Af = Af'$, $Ag = Ag' \ldots$ Hierdurch erhält man um den Punkt A herum eine Anzahl von Dreiecken, welche sämmtlich unter sich ähnlich sind, da jedes derselben einem der zwischen AL' und AM' gelegenen, von A ausgehenden Dreiecke congruent ist, und es folgt ohne Weiteres aus dem vorigen Paragraphen, daß die von A ausgehenden Strahlen Ag, Af, Ae, AD, AC, $AE \ldots$ die geometrische Progression $\frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2 \ldots$ bilden. Auch sind die Winkel ACD, AEC, $AFE \ldots$ einander gleich, welche die Seiten CD, EC, $FE \ldots$ mit den von A ausgehenden Strahlen bilden. Da diese Beziehungen ganz unabhängig von der Größe des Winkels

DAC sind, so finden sie auch noch statt in dem Falle, wo dieser Winkel unendlich klein wird. Alsdann rücken die Punkte $g, f, e, D, C, E \ldots$ unendlich nahe zusammen, aus dem Polygon wird eine stetige Curve und die Sehnen DC, CE, $EF \ldots$ gehen in Tangenten über, welche sämmtlich unter constantem Winkel gegen den Strahl geneigt sind, der von A aus nach ihrem Berührungspunkte gezogen ist. Die so erhaltene Curve ist bekanntlich eine logarithmische Spirale, welche in der analytischen Geometrie durch die Gleichung dargestellt ist:

$$r = b^{\varphi},$$

worin r irgend einen Leitstrahl, z. B. AE und φ den Winkel bezeichnet, welchen dieser Strahl mit demjenigen Strahl AD bildet, dessen Länge zwischen Ursprung A und Curve gleich Eins ist. Für b hat man die Beziehung $cotg.\, \alpha = log.\, nat.\, b$, wenn α den constanten Winkel bezeichnet, welchen die Tangente an die Curve mit dem an ihren Berührungspunkt gezogenen Leitstrahl r bildet.

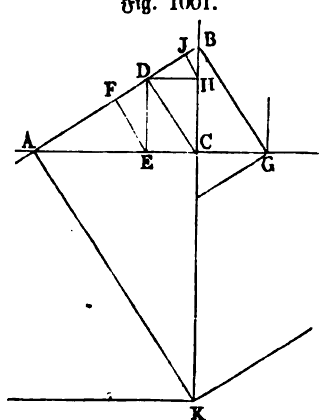
Die obige Gleichung $r = b^{\varphi}$ läßt sich auch $\varphi = log.^{(b)} r$ schreiben, und man ersieht daraus, daß für irgend einen Leitstrahl, z. B. AE, der Logarithmus zur Grundzahl b durch den Winkel φ gegeben ist, welchen dieser Strahl mit dem Anfangsstrahle AD bildet, welchen die Curve in der Entfernung Eins vom Pol A schneidet. In Folge dieser Eigenschaft der logarithmischen Spirale kann letztere dazu dienen, die Rechnungsoperationen des Multiplicirens, Dividirens, Potenzirens und Radicirens auszuführen. Seien nämlich r_1 und r_2 zwei Leitstrahlen der Spirale und φ_1 resp. φ_2 die Winkel, welche sie mit dem Anfangsstrahl AD bilden (positiv oder negativ, je nach der Richtung, in welcher die Winkel von AD aus gemessen werden), so findet man nach den Regeln der logarithmischen Rechnung in $\varphi_1 + \varphi_2$ denjenigen Winkel, welchem der Strahl von der Größe $r_1 r_2$ entspricht, während ebenso der Strahl, dessen Größe $\frac{r_1}{r_2}$ beträgt, einen Winkelabstand $\varphi_1 - \varphi_2$ von dem Anfangsstrahle hat. Ein Strahl r wird ferner zur $n$ten Potenz erhoben, wenn man seinen Winkel φ mit n multiplicirt und den dem Producte $n\varphi$ zugehörigen Leitstrahl aufsucht, während $\frac{1}{n}\varphi$ denjenigen Winkel ergiebt, dessen zugehöriger Leitstrahl gleich $\sqrt[n]{r}$ ist. Man ersieht hieraus, daß die logarithmische Spirale innerhalb derjenigen Grenzen der Genauigkeit, welche die Zeichnung zuläßt, und welche in sehr vielen Fällen für die praktische Anwendung genügend ist, als Ersatz der Logarithmentafeln benutzt werden kann.

Beispiel. Man soll $\left(\sqrt[5]{\frac{3,4}{1,6}}\right)^7$ mit Hülfe der logarithmischen Spirale bestimmen.

Der Leitstrahl 3,4, nach dem Maßstabe, dessen Einheit gleich AD ist, eingetragen, geht nach dem Punkte O der Curve und entspricht dem Winkel $DAO = 252^0$, ebenso wie der Leitstrahl $AN = 1,6$ dem Winkel $DAN = 97,2^0$ zugehört. Die Differenz $DAO - DAN = NAO = 154,8^0$ mit $^7/_5$ multiplicirt, liefert den Winkel $DAP = 216,7^0$, zu welchem ein Leitstrahl $AP = 2,87$ gehört. (Die logarithmische Rechnung liefert genauer $\left(\sqrt[5]{\frac{3,4}{1,6}}\right)^7 = 2,87278$.)

Anmerkung. Potenziren trigonometrischer Functionen. Das Potenziren der trigonometrischen Functionen führt sich in der §. 34 angegebenen Weise sehr leicht aus, wenn man (Fig. 1001) den Winkel $BAC = \varphi$, $AC = 1$, $BC \perp AC$ und $CD \perp AB$ macht und die Antiparallelen hin und her zieht. Man hat dann:

Fig. 1001.



$AD = cos.\,\varphi,\ AE = cos.\,\varphi^2 \ldots$

$AB = \frac{1}{cos.\,\varphi},\ AG = \frac{1}{cos.\,\varphi^2} \ldots$

$DC = sin.\,\varphi,\ DH = sin.\,\varphi^2 \ldots$

$AK = \frac{1}{sin.\,\varphi} \ldots$

$BC = tang.\,\varphi,\ CG = tang.\,\varphi^2 \ldots$

$CK = cotang.\,\varphi.$

Inhalt von Flächen. Der Flächeninhalt einer Figur drückt sich aus §. 36. durch das Product zweier Strecken, wofür die in §. 33 (Anhang) gemachte allgemeine Bemerkung gilt, daß die eine Strecke nur als die Verhältnißzahl betrachtet werden muß, welche angiebt, wie oft die Einheit des Maßstabes (auch Basis genannt) in ihr enthalten ist. Das Maß für den gesuchten Flächeninhalt ist dann wieder durch eine Strecke gegeben.

Am häufigsten kommt die Inhaltsbestimmung von Dreiecken in der Praxis vor, weil der Inhalt eines mehrseitigen Polygons leicht auf den des Dreiecks zurückgeführt werden kann.

Sind a und h die Maße für die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks, so ist der Inhalt $F = \frac{ah}{2}$ desselben nach dem Früheren leicht gefunden, wenn man die Einheit e ergänzt, also schreibt:

$$F = \frac{ah}{2e} = \frac{ah}{2 \,.\, 1},\ \text{oder}\ F : a = h : 2.$$

Trägt man daher in dem Dreiecke ABC (Fig. 1002 a. f. S.) auf einer Seite die doppelte Einheit $AD = 2$ ab, zieht DB und dazu parallel CE, so giebt das Loth EG von dem Durchschnittspunkte der Parallelen mit AB

das Maß für die Fläche F, denn es ist in den ähnlichen Dreiecken AEC und ABD:

$$EG : BH = AC : AD, \text{ oder } EG = \frac{ah}{2} = F.$$

Während hier die doppelte Einheit AD zur Grundlage eines Dreiecks AED gemacht worden ist, welches mit dem Dreiecke ABC flächengleich ist, und die Höhe EG als Maß des Inhalts sich ergeben hat, kann man nach Fig. 1003 auch die Strecke $EG = 2$ in dem Dreiecke ACB zwischen die

Fig. 1002.

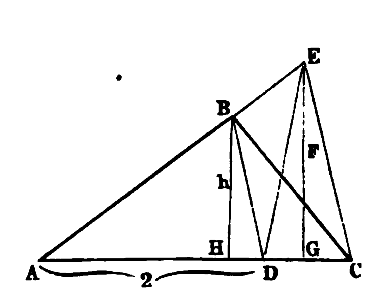
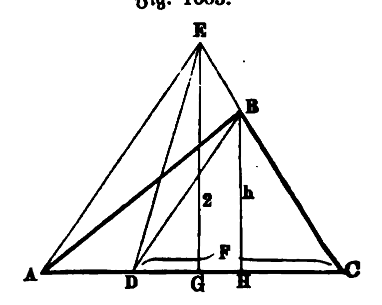


Fig. 1003.

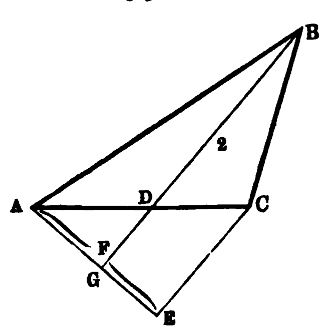


Seiten AC und CE eintragen und durch die Verbindende AE und die Parallele BD ein mit Dreieck ABC flächengleiches Dreieck DEC construiren, dessen Grundlinie DC als Maß des Flächeninhaltes angesehen werden kann, denn die ähnlichen Dreiecke DBC und AEC liefern wieder:

$$DC : BH = AC : EG \text{ oder } DC = \frac{ah}{2} = F.$$

Endlich möge noch eine sehr gebräuchliche und bequeme Methode der Inhaltsbestimmung für Dreiecke in Folgendem angegeben werden.

Fig. 1004.



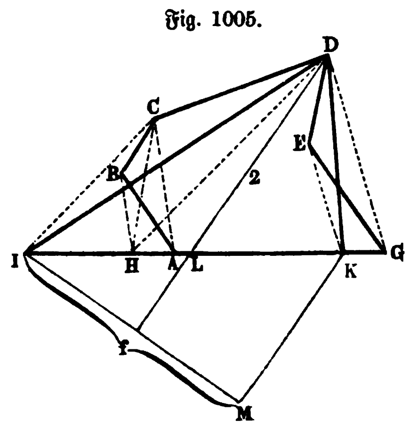
Man schneide mit der doppelten Basis $2 = BD$ von einer Ecke B des Dreieckes ABC, Fig. 1004, in die gegenüberliegende Seite AC ein, so ist die Projection von AC auf eine zu BD senkrechte Gerade AE das Maß für den Flächeninhalt des Dreiecks, denn es ist:

$\triangle ABD = \frac{1}{2} . BD . AG$ und
$\triangle CBD = \frac{1}{2} . BD . GE$, daher:
$\triangle ABC = \frac{1}{2} . BD . AE = AE.$

Man nennt die Strecke AE wohl die Antiprojection der Seite AC auf BD.

Wenn es sich um die Bestimmung des Flächeninhalts eines beliebigen Polygons handelt, so könnte man dasselbe zwar durch Diagonalen in einzelne Dreiecke zerlegen und deren Inhalt nach dem Vorigen bestimmen, doch wird es sich im Allgemeinen empfehlen, das Polygon in bekannter Weise in ein gleich großes Dreieck zu verwandeln und dessen Flächeninhalt zu ermitteln.

Fig. 1005.



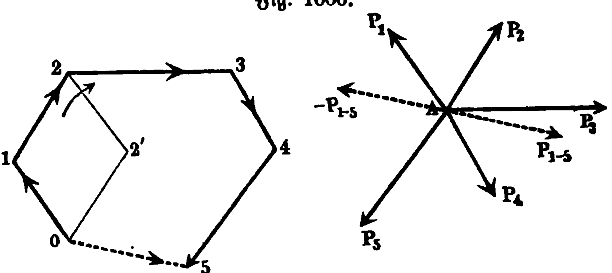
Ist z. B. der Inhalt F des Sechsecks $ABCDEG$ (Fig. 1005) zu ermitteln, so kann man durch die Diagonale CA und die damit parallele BH die Ecke B eliminiren, indem man für das Dreieck CBA das ebenso große CHA setzt, und verwandelt sich hierdurch das Sechseck in das gleich große Fünfeck $HCDEG$. In derselben Weise kann durch Ziehen der Diagonalen HD und DG und der damit parallelen CI und EK eine Eliminirung der Ecken C und E bewirkt werden, und man erhält dadurch in IDK ein Dreieck von gleicher Größe mit dem Sechseck $ABCDEG$. Macht man daher DL gleich der doppelten Einheit, so giebt die Antiprojection IM der Grundlinie IK auf DL das Maß für den Flächeninhalt F des Sechsecks. In der Ausführung wird man sich das Ziehen der Diagonalen und Parallelen meistens sparen können, da es sich nur um die Ermittelung der Schnittpunkte H, I, K . . . handelt.

Zusammensetzung von Kräften, die an einem Punkte angreifen. Nach dem, was in §. 31 über die Darstellung von Kräften durch Strecken ihrer Größe, Richtung, Lage und ihrem Sinne nach gesagt worden, ist es nun leicht, Kräfte, die an einem Punkte angreifen, zusammenzusetzen. Es kommt hierbei offenbar nur auf eine graphische Addition der die Kräfte darstellenden Strecken an. Sind P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5, Fig. 1006 (a. f. S), die zu vereinigenden Kräfte, welche sämmtlich durch den Punkt A hindurchgehen, und welche als in einer Ebene liegend zu denken sind, so kann man zuvörderst zwei Kräfte, etwa P_1 und P_2, durch das Kräfteparallelogramm $0122'$ vereinigen, indem man an einen willkürlich gewählten Punkt 0 die Strecken 01 und 02' parallel und gleich den Strecken P_1 und P_2 anträgt. Die Diagonale 02 giebt dann offenbar der Größe und Richtung nach die Resultante der beiden Kräfte P_1 und P_2, und ihre Lage ist dadurch bestimmt, daß sie durch den Durchschnittspunkt A der Seitenkräfte P_1 und P_2 hindurchgehen muß. §. 37.

Diese Mittelkraft 02 kann nun ferner mit einer dritten Kraft P_3 in der-

selben Weise zu einer Resultante und diese wieder mit einer folgenden Kraft P_4 zusammengesetzt werden u. s. f., bis alle gegebenen Kräfte zu einer Mittelkraft vereinigt sind. Die so ausgeführte Construction führt aber offenbar zu demselben Resultate, wie die in §. 32 (Anhang) angegebene Addition der Strecken, und man hat daher, um beliebige auf einen Punkt wirkende, in einer Ebene liegende Kräfte zusammenzusetzen, dieselben derart an

Fig. 1006.



einander zu fügen, daß jede einzelne Kraft in dem Punkte beginnt, in welchem die vorhergehende aufhört. Als Resultante aller Kräfte, d. h. als Resultat dieser Addition der Strecken, erhält man diejenige Strecke 05, welche den Ausgangspunkt der ersten Kraft mit dem Endpunkte der letzten Kraft verbindet, und stellt diese Strecke die gesuchte Mittelkraft sowohl der Größe, wie der Richtung und dem Sinne nach vor; ihre Lage ist dadurch bestimmt, daß sie durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt A der Seitenkräfte gehen muß. Macht man daher die Strecke $A P_{1-5}$ parallel und gleich 05, so hat man in P_{1-5} diejenige Kraft, welche die sämmtlichen gegebenen Kräfte P_1, $P_2 \ldots P_5$ ersetzen kann. Den aus den einzelnen Strecken gebildeten fortlaufenden Linienzug 0 1 2 3 4 5 nennt man das Kräftepolygon.

Wie in §. 32 ergiebt sich auch hier, daß das bei der Zusammensetzung erhaltene Resultat von der Reihenfolge, in welcher die Kräfte addirt werden, unabhängig ist, und daß man also die Kräfte beliebig mit einander vertauschen kann. Ebenso ist es klar, daß die von dem Ausgangspunkte 0 ausgehenden Diagonalen im Kräftepolygon wie 02, 03, 04 der Größe und Richtung nach die Mittelkräfte von resp. P_1 und P_2; P_1, P_2 und P_3 und P_1, P_2, P_3 und P_4 darstellen. Aehnliches gilt übrigens auch von jeder anderen Diagonale, die nicht von 0 ausgeht, und stellt z. B. 1 3 die Resultante von P_2 und P_3 dar, da ja der Anfangspunkt 0 ganz willkürlich gewählt war und man auch den Punkt 1 als solchen ansehen kann. Man kann daher den Satz aussprechen, daß jede Diagonale im Kräftepolygon der Größe und Richtung nach die Mittelkraft aller derjenigen Kräfte darstellt, welche von ihr unterspannt werden.

Wenn bei dem Aneinanderfügen der einzelnen Kräfte der Endpunkt der letzten Strecke mit dem Ausgangspunkte 0 der ersten Strecke zusammenfällt,

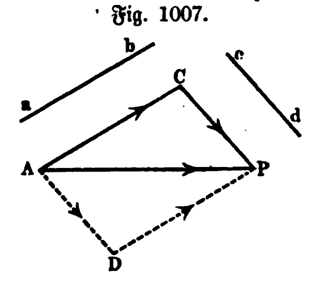
so halten sich die Kräfte im Gleichgewichte, denn ihre Mittelkraft ist Null. Das Kräftepolygon ist dann ein geschlossenes und es folgt hieraus für das Gleichgewicht beliebiger, auf einen Punkt wirkender Kräfte die Bedingung, daß das Kräftepolygon ein geschlossenes sein muß.

Wenn das Kräftepolygon nicht geschlossen ist, also eine Mittelkraft existirt, so läßt sich das Gleichgewicht jederzeit dadurch herstellen, daß man den gegebenen Kräften $P_1, P_2 \ldots P_5$ noch eine Kraft hinzufügt, welche der Größe und Richtung nach durch die Schlußlinie des Polygons 5 0 (das Polygon im Sinne des Pfeils, d. h. der Kräfte umfahren gedacht), ausgedrückt ist, denn diese Kraft $- P_{1-5}$ ist der Mittelkraft P_{1-5} der übrigen Kräfte gleich und entgegengesetzt. Es erhellt übrigens von selbst, daß in einem geschlossenen Kräftepolygon jede Seite, wie 2 1, als Mittelkraft aller übrigen erscheint, und daß durch irgend eine Diagonale, wie 1 3, sämmtliche Kräfte in zwei Gruppen getheilt werden, welchen beiden Gruppen gleiche und entgegengesetzte, durch die Diagonale repräsentirte Mittelkräfte entsprechen.

Die hier gefundenen Beziehungen gelten auch ungeändert in dem Falle, daß die Kräfte nicht in derselben Ebene wirken, vorausgesetzt nur, daß ihre Richtungslinien sämmtlich durch einen Punkt hindurchgehen. Natürlich sind die Kräfte dann durch ihre Projectionen in zwei verschiedenen Ebenen zu geben. Die Projectionen aller Kräfte in einer Ebene gehen dann durch die Projection des gemeinsamen Angriffspunktes, und man kann von einem beliebigen, durch seine Projectionen gegebenen Punkte 0 aus das Polygon construirt denken, welches, da es hier ein räumliches sein wird, durch seine Projectionen in den beiden Ebenen dargestellt werden muß. Diese beiden Projectionen des Kräftepolygons erhält man aber leicht dadurch, daß man in der oben erläuterten Art in jeder Ebene ein Polygon von der Projection des Punktes 0 aus zeichnet, dessen Seiten den beziehentlichen Projectionen parallel und gleich sind. Auf diese Weise erhält man in jedem dieser Polygone in der Schlußlinie die entsprechende Projection der Mittelkraft im Raume, deren Lage natürlich durch den gemeinschaftlichen Angriffspunkt aller Kräfte gegeben ist.

Zerlegung von Kräften. Wenn die Diagonale 0 2 (Fig. 1006) als §. 38.
Mittelkraft der beiden Kräfte P_1 und P_2 gefunden worden ist, so wird man natürlich, wenn diese Kraft 0 2 gegeben ist, und man sie in zwei Componenten nach den Richtungen 0 1 und 1 2 zerlegt, die Kräfte P_1 und P_2 als Componenten erhalten. Ist also eine Kraft AP, Fig. 1007, ihrer Richtung und Größe nach gegeben und die Aufgabe gestellt, sie in zwei Componenten nach zwei gegebenen Richtungen ab und cd zu zerlegen, so hat man nur

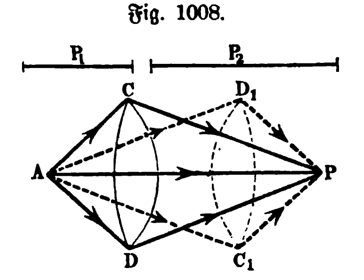
Fig. 1007.



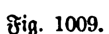
durch die Endpunkte A und P der Kraft die Parallelen AC und CP mit diesen Richtungen zu ziehen, um in AC und CP die gesuchten beiden Seitenkräfte auch ihrer Größe nach zu erhalten. Man hat sich natürlich diese Kräfte in dem Angriffspunkte A der Kraft P angreifend zu denken. Man kommt übrigens zu demselben Resultate, wenn man die Parallele mit cd durch A und mit ab durch P legt, indem man dann zu den Strecken AD und DP gelangt.

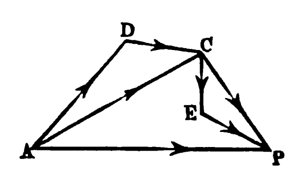
Die beiden Componenten AC und CP, in welche die gegebene Kraft AP zerfällt, sind vollkommen bestimmt, wenn zwei Stücke derselben, hier ihre Richtungen, gegeben sind. Statt dessen kann man auch von einer der Seitenkräfte, z. B. AC, die Richtung und Größe gegeben denken; es bestimmt sich dann durch die Verbindungslinie von C mit P die zweite Componente ihrer Richtung und Größe nach. Sind die beiden Componenten, in welche die Kraft P zerlegt werden soll, ihrer Größe nach durch P_1 und P_2, Fig. 1008, gegeben, so sind im Allgemeinen zwei verschiedene Zerlegungen möglich. Zeichnet man nämlich um A mit P_1 und um P mit P_2 einen Kreisbogen, so erhält man die beiden Schnittpunkte C und D, welche der Zerlegung von AP in AC und CP resp. in AD und DP entsprechen. Die beiden Schnittpunkte C_1 und D_1, welche man erhält, wenn man um A einen Kreisbogen mit P_2 und um P einen Kreisbogen mit P_1 beschreibt, liefern nichts Neues, da der Punkt C_1 auf dieselbe Zerlegung führt wie C und der Punkt D_1 auf dieselbe wie D.

Fig. 1008.



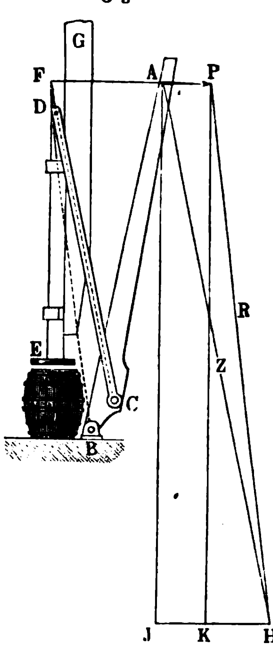
Da man jede der beiden Kräfte AC und CP, Fig. 1009, in welche die Kraft AP zerlegt werden kann, in ähnlicher Weise wiederum zerlegen kann, z. B. AC in AD und DC, sowie CP in CE und EP, und diese Zerlegung beliebig oft wiederholt werden kann, so folgt hieraus, daß man jede Kraft, z. B. AP, in beliebig viele Seitenkräfte wie AD, DC, CE und EP zerlegen kann, vorausgesetzt, daß diese Kräfte solche Größe und Richtung haben, daß sie, von dem Anfangspunkte A der Hauptkraft aus in beliebiger Reihenfolge an einander gefügt, einen Kräftezug $ADCEP$ bilden, der in dem Endpunkte von P endigt. Natürlich sind alle diese Kräfte in A angreifend zu denken. Soll eine Kraft in n Seitenkräfte zerlegt werden, so können von den $2n$ Bestimmungsstücken derselben (n Richtungen, n Größen) alle bis auf zwei willkürlich angenommen werden.


Fig. 1009.



Beispiele. 1) In Mahlmühlen bedient man sich zum Verpacken des Mehls in Fässer einer Vorrichtung, wie sie in Fig. 1010 im Wesentlichen dargestellt ist.

Fig. 1010.



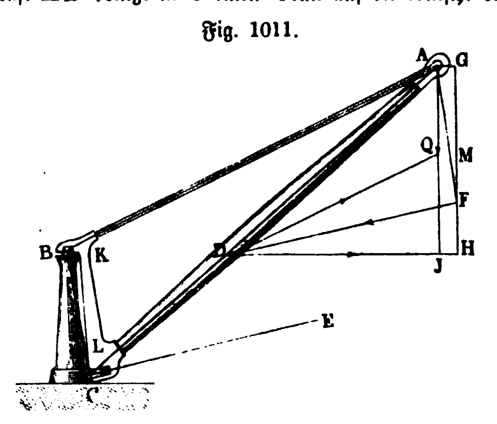
Dabei wird ein Stempel E vermittelst des um B drehbaren Hebels AB, welchen der Arbeiter bei A erfaßt und nach sich zieht, nach unten bewegt, indem die beiderseits an den Hebel AB bei C scharnierartig angeschlossenen Schienen DC bei D an einem Zapfen in dem Stiele FE des Druckstempels E angreifen. Wie groß ist die Kraft, mit welcher der Stempel E in das Faß hineingepreßt wird, wenn der Arbeiter bei A mit einer Kraft gleich AP wirkt, und von den Reibungswiderständen abgesehen wird? Durch den Bolzen C wird auf die Schiene DC eine Zugkraft Z übertragen, welche wegen des scharnierartigen Anschlusses bei C und D nur in der Richtung DC wirken kann. Gleichzeitig wird der feste Drehzapfen B einem gewissen Drucke R unterworfen. Diese beiden Kräfte Z und R sind das Resultat der Kraft AP, welche letztere daher als ihre Mittelkraft angesehen werden kann. Da nun die Resultirende zweier Kräfte durch deren Schnittpunkt hindurchgehen muß, so folgt, daß die Richtung der Zapfenkraft R durch denjenigen Punkt F hindurchgeht, in welchem sich die Richtungen CD und AP der beiden anderen Kräfte schneiden, d. h. BF ist die Richtung der Druckkraft R auf den Stützzapfen B. Zerlegt man daher AP nach den Richtungen FC und BF, d. h. zieht man $AH \parallel FC$ und $PH \parallel BF$, so erhält man $AH = Z$ und $HP = R$. Die Zugkraft $AH = Z$ läßt sich nun nach verticaler und horizontaler Richtung in AJ und JH zerlegen, und man erhält in AJ die Kraft zum Zusammenpressen des Mehls und in JH diejenige Kraft, welche in den Führungen der Stange DE Reibung erzeugt. Der Zapfendruck HP läßt sich in gleicher Art in den Horizontalschub HK, welcher das Lager bei B seitlich zu verschieben trachtet, und den Verticaldruck (nach oben gerichtet) KP zerlegen, welcher auf Abreißen der Lagerbolzen wirkt. Im Ganzen ist also die Kraft AP zerlegt worden in die vier Kräfte AJ, JH, HK, KP, welche an einander gereiht ein Polygon $AJHKP$ bilden, welches bei A anfängt und bei P endigt.

2) Der Ausleger AC eines Uferkrahns, Fig. 1011 a. f. S., stützt sich in C mittelst einer Rolle gegen den conischen Fuß der Krahnsäule, deren Spurzapfen B den Zug der Zugstangen BA aufnimmt. Es sollen die Kräfte in der Strebe AC, den Stangen BA, der Säule BC und dem Gestell KL, sowie die Wirkungen auf den Zapfen bei B und die Rollenbahn C ermittelt werden, welche durch eine bei A angehängte Last AQ hervorgerufen werden.

Die Kraft AQ zerlegt sich zunächst parallel den Richtungen AC der Strebe und BA der Zugstangen in die auf Zerknicken wirkende Strebenkraft AD und

die Zugkraft DQ, welche ein Abreißen der Zugstangen anstrebt. Die Strebenkraft AD bringt in C einen Druck auf die conische Rollenbahn hervor, welcher, wenn man von der Reibung daselbst absieht, nur in der Normalen CE zur Kegelfläche aufgenommen werden kann. Außerdem wird die Strebenkraft vermöge des Gestells KL eine Wirkung auf den Zapfen B hervorbringen, welche durch denselben Punkt C gehen muß, in welchem die Strebenkraft AD und der normale Rollendruck sich schneiden, welche also die Richtung BC haben muß. Zerlegt man daher die Strebenkraft AD nach den Richtungen BC und EC, so zerfällt dieselbe in die Kräfte AF, welche das Gestell KL beansprucht, und FD, welche den Druck repräsentirt, mit welchem die Laufrolle normal gegen ihre Bahn bei C gepreßt wird.

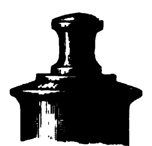
Fig. 1011.



Die Kraft DQ, welche in den Zugstangen BA thätig ist, kann man in den Horizontalzug DJ und den Verticalzug JQ (nach oben gerichtet) zerlegen, und wenn man auch AF und FD nach horizontaler und verticaler Richtung zerlegt, so erhält man $AG + GF$ für AF, sowie $HD + FH$ für FD. Während also an dem Zapfen B die Horizontalkraft $AG + DJ$ nach rechts wirkt, ist an dem Fußpunkte C der Säule die ebenso große Kraft HD nach links wirkend, und durch dieses Kräftepaar das auf Abbrechen der Krahnsäule wirksame Moment gegeben.

Zur Bestimmung des auf den Zapfen B wirkenden verticalen Druckes bemerke man, daß auf den Zapfen durch das Gestell KL, in welchem die Kraft AF thätig ist, GF nach unten, und durch die Zugstangenkraft DQ die Componente JQ nach oben wirkt; es wird daher die verticale Inanspruchnahme des Zapfens B durch $GF - JQ$ gegeben sein, welcher Werth, wenn er, wie hier der Fall ist, positiv ausfällt, die Richtung abwärts hat, also einer Belastung des Zapfens entspricht. Ein negativer Werth dieser Größe deutet auf einen nach oben gerichteten Zug hin, und man würde einem solchen, um einem Abstreifen des Gestells nach oben hin vorzubeugen, durch irgend ein Mittel, etwa einen Stoßring am Zapfen, Fig. 1012, Rechnung tragen müssen. Der verticale Druck nach abwärts, mit welchem der Fuß der Säule durch die in C wirksame Rollenkraft FD beansprucht wird, ist endlich durch FH gegeben. Wie aus der Figur ohne Weiteres ersichtlich ist, gilt stets die Gleichung:

Fig. 1012.



$$AQ + JQ = GF + FH,$$

d. h.: $AQ = GF - JQ + FH$.

Man erkennt hieraus, daß von der Belastung AQ des Krahns der Betrag $GF - JQ$ von dem Zapfen in B getragen wird, während der Rest oder FH

von dem conischen Ansatze der Säule bei C aufgenommen wird. Wenn daher die Richtung DF oder CE horizontal ausfällt, d. h. der conische Ansatz der Säule in einen verticalen Cylinder übergeht, so fällt F in H, also wird $FH = 0$ und $GF - JQ = AQ$, d. h. die ganze an dem Krahne hängende Last wird durch den Zapfen B getragen; von C kann keine Last aufgenommen werden. Die Säule wird durch diese Kraft auf rückwirkende Festigkeit beansprucht.

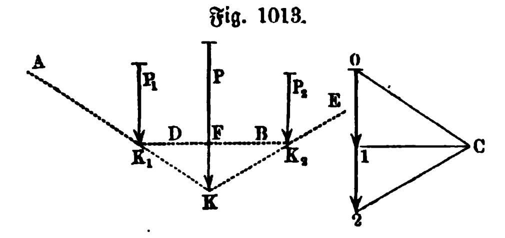
Bezeichnet M einen Punkt, dessen verticaler Abstand unter A gleich QJ ist, und giebt man der Normalen CE zur conischen Rollenbahn eine solche Neigung, daß die damit Parallele durch D nach M gerichtet ist, daß also F in M fällt, so beträgt der verticale Zapfendruck in B die Größe $GM - JQ = 0$; während die Rollenbahn bei C den Verticaldruck $MH = AQ$, also die ganze Belastung aufzunehmen hat. Die Säule wird jetzt nur auf Abbrechen, nicht auf Zerdrücken in Anspruch genommen.

Wenn endlich die conische Rollenbahn bei C und die dazu Normale CE eine solche Richtung haben, daß die durch D mit CE parallele Gerade mit der durch A parallel zu BC gezogenen Geraden oberhalb M sich schneidet, so wird der Verticaldruck auf den Zapfen B negativ, es wirkt daher diese Kraft als nach oben gerichteter Zug auf den Zapfen und die Säule. In diesem Falle muß man, um ein Abstreifen des oberen Lagers von dem Zapfen zu vermeiden, dem Zapfen die gehörige Gestalt geben, ihn z. B. mit einem eingedrehten Halslager oder einer den Zug nach oben aufnehmenden Brust, Fig. 1012, versehen.

Man kann die oben beschriebenen Operationen als eine Zerlegung der Belastung AQ in die Kräfte $AG + GF + FH + HD + DJ + JQ$ ansehen, derart also, daß die von A aus aneinander gefügten Kräfte das in Q endigende Polygon bilden $AGFHDJQ$, wie durch die Bedingung der Zerlegung vorgeschrieben ist.

Parallele Kräfte. Wenn zwei parallele Kräfte P_1 und P_2, Fig. 1013 und 1014, zu einer Mittelkraft zusammengesetzt werden sollen, so geht das an einen beliebigen Punkt 0 angetragene Kräftepolygon in eine gerade Linie 0 1 2 über, und es ist die Resultante gleich der Strecke 0 2, deren Größe bei gleichgerichteten Kräften (s. Fig. 1013) gleich der §. 39.

Fig. 1013.

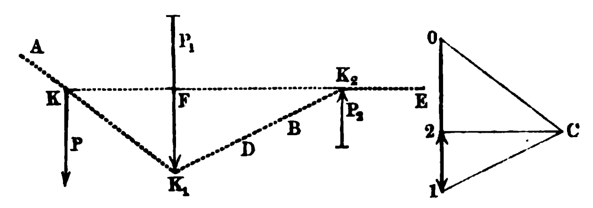


Summe und bei entgegengesetzten Kräften (s. Fig. 1014) gleich der Differenz der absoluten Werthe von P_1 und P_2 ist. Hierdurch ist die Größe der Mittelkraft bestimmt, deren Richtung parallel mit den beiden Kräften sein muß. Ihre Lage ist nicht so ohne Weiteres bestimmt wie die zweier sich schneidender Kräfte, da die beiden parallelen Kräfte sich erst in der Unendlichkeit schneiden.

Um die Lage der Mittelkraft graphisch zu bestimmen, kann man sich des folgenden Verfahrens bedienen. Man denke sich jede der beiden Kräfte P_1

und P_2 so in zwei Kräfte S_1 und R_1 resp. R_2 und S_2 zerlegt, daß R_1 gleich und entgegengesetzt mit R_2 ist. Alsdann kann man anstatt der beiden Parallelkräfte P_1 und P_2 die ihnen äquivalenten vier Kräfte S_1, R_1, R_2 und S_2 setzen, in welchem Falle, da R_1 und R_2 sich gegenseitig aufheben,

Fig. 1014.



nur die Kräfte S_1 und S_2 übrig bleiben, welche nicht parallel sind. Durch den Durchschnittspunkt dieser Kräfte S_1 und S_2 muß nun offenbar die Mittelkraft der beiden Parallelkräfte P_1 und P_2 hindurchgehen, da sie mit der Mittelkraft von S_1 und S_2 identisch ist, wodurch daher ihre Lage bestimmt wird.

Um die hier angedeutete Operation auszuführen, denke man die Kraft P_1 gleich $0\,1$ in die beiden Componenten $0\,C + C\,1$ und ebenso die Kraft P_2 gleich $1\,2$ in die Componenten $1\,C + C\,2$ zerlegt. Trägt man nun in einem beliebigen Punkte K_1 der Kraft P_1 die beiden Componenten $A K_1 \# 0\,C$ und $B K_1 \# C\,1$ an, verlängert $B K_1$ bis zum Durchschnitte K_2 mit P_2 und trägt ebenso von K_2 aus die Strecken $D K_2 \# 1\,C$ und $E K_2 \# C\,2$ an, so heben sich die gleichen und entgegengesetzten Kräfte $B K_1$ und $D K_2$ auf, und es bleiben nur noch die beiden Kräfte $A K_1$ und $E K_2$ übrig, durch deren Durchschnittspunkt K, wie eben nachgewiesen, die gesuchte Mittelkraft P von P_1 und P_2 gehen muß. Da dieselbe gleich der Strecke $0\,2$ und parallel den gegebenen Kräften ist, so ist sie vollkommen bestimmt.

Man kann leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $K_1 F K$ und $C\,1\,0$, Fig. 1013, sowie derjenigen $K F K_2$ und $2\,1\,C$ den bekannten Satz erweisen, daß die senkrecht oder schräg gemessenen Abstände der Mittelkraft von den Componenten sich umgekehrt wie diese letzteren verhalten, denn man hat wegen jener Aehnlichkeiten:

$$K_1 F : K F = C1 : 01, \text{ und}$$
$$K F : K_2 F = 21 : C1, \text{ daher:}$$
$$K_1 F : K_2 F = 21 : 01 = P_2 : P_1.$$

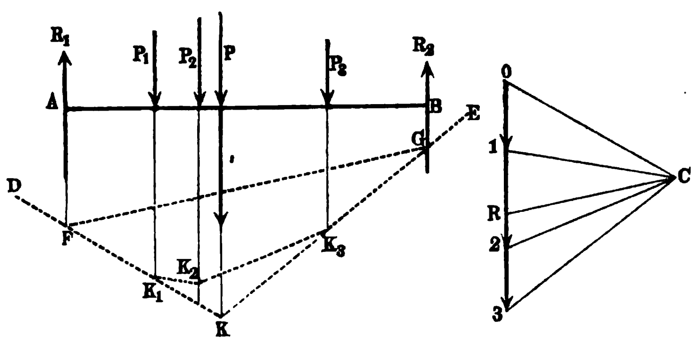
Ebenso findet man in Fig. 1014 die Gleichung:

$$F K : K_2 K = 12 : 01 = P_2 : P_1.$$

Das hier angegebene Verfahren ist ohne Aenderung auch anwendbar, wenn es sich um die Bestimmung der Mittelkraft beliebig vieler paralleler Kräfte

und, wie aus dem folgenden Paragraphen sich ergeben wird, auch beliebig vieler nicht paralleler in einer Ebene liegender Kräfte handelt. Ebenso läßt sich durch Umkehrung des Verfahrens eine gegebene Kraft leicht in zwei zu ihr parallele Componenten zerlegen. Als Beispiel sei ein auf zwei Stützen A und B liegender horizontaler Balken, Fig. 1015, gegeben, welcher die


Fig. 1015.



Belastungen P_1, P_2, P_3 zu tragen habe. Man soll die Mittelkraft P und die Auflagerdrucke in A und B bestimmen.

Trägt man die Kräfte P_1, P_2 und P_3 von 0 aus zu dem Kräftepolygon 0 1 2 3 zusammen und verbindet einen beliebigen Punkt C mit 0, 1, 2 und 3, so wird man, wenn man $DK_1 \# 0C$, $K_1K_2 \parallel C1$, $K_2K_3 \parallel C2$ und $EK_3 \# C3$ macht, offenbar die sämmtlichen Kräfte P_1, P_2 und P_3 durch die beiden Kräfte $DK_1 \# 0C$ und $EK_3 \# C3$ ersetzen können, denn die angegebene Construction läuft darauf hinaus, daß P_1 oder 0 1 durch $0C + C1$; ferner P_2 oder 1 2 durch $1C + C2$ und P_3 oder 2 3 durch $2C + C3$ ersetzt worden ist, und da hierbei $C1$ mit $1C$ und $C2$ mit $2C$ sich aufhebt, so bleiben nur $0C$ und $C3$ übrig. Durch den Durchschnittspunkt K dieser Richtungen DK_1 und EK_3 muß daher die Mittelkraft P gleich 0 3 hindurchgehen.

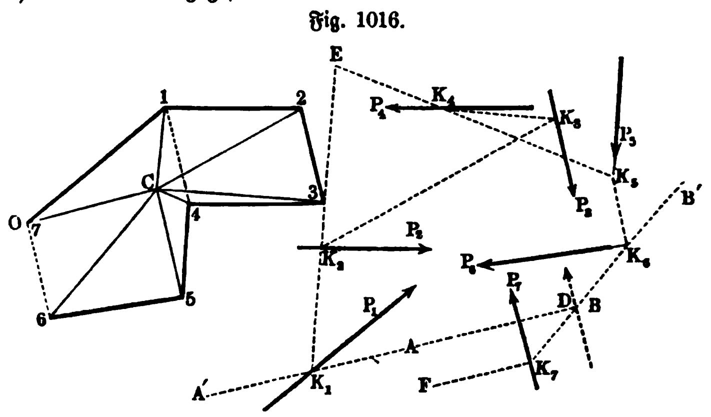
Soll nun diese Resultante in die beiden Auflagerdrucke R_1 und R_2 in A und B zerlegt werden, so verbinde man die Punkte F und G, in welchen die durch die Auflager gehenden Verticalen von den Kraftrichtungen DK_1 und EK_3 geschnitten werden, und denke sich die Kraft DK_1 oder $0C$ in eine durch F gehende Verticalkraft und eine andere ebenfalls durch F gehende und in die Richtung FG fallende Componente zerlegt. Ebenso zerlege man die Kraft EK_3 oder $C3$ in eine Verticalkraft durch G und eine andere in die Richtung GF fallende Componente. Um dies auszuführen, hat man nur nöthig, durch C eine Parallele CR mit GF zu ziehen, und man erhält

in OR die Größe des Auflagerdruckes R_1 in A und in $R3$ diejenige des Auflagerdruckes R_2 in B. Die beiden in F und G wirkenden, in die Linie FG hineinfallenden Componenten sind nach dem Früheren resp. durch RC und CR ausgedrückt; sie sind gleich und entgegengesetzt und heben sich daher auf.

§. 40. **Beliebige Kräfte in einer Ebene.** Wenn eine beliebige Anzahl irgend welcher Kräfte in einer Ebene gegeben ist, so läßt sich die Mittelkraft derselben immer finden, wenn man zuerst zwei Kräfte zu einer Resultirenden zusammensetzt, die durch den Schnittpunkt der beiden Componenten geht, diese Resultirende mit einer dritten Kraft zu einer Mittelkraft vereinigt, welche wieder mit einer vierten Kraft zusammengesetzt wird u. s. f. Auf diese Weise erhält man immer eine Gesammtmittelkraft, und eine nähere Betrachtung des hier angedeuteten Verfahrens zeigt, daß die Größe sowie Richtung dieser Resultante unverändert bleiben müßte, wenn man sämmtliche Kräfte unter Beibehaltung ihrer Größe und Richtung an einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt versetzen wollte. Nur die Lage der Mittelkraft wird dadurch geändert werden. Hieraus folgt denn, daß die Bestimmung der Größe und Richtung der gesuchten Mittelkraft in derselben Weise mit Hülfe des Kräftepolygons geschehen kann, wie es in §. 37, Anhang, für Kräfte gelehrt worden ist, die durch einen Punkt gehen.

Um auch die Lage der Resultante zu bestimmen, kann man mit Vortheil die im vorigen Paragraphen für parallele Kräfte angegebene Methode anwenden, welche Methode überhaupt in vielen Fällen der Praxis eine sehr fruchtbare Anwendung gestattet.

Fig. 1016.



Seien, Fig. 1016, die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_6$ gegeben und dafür das Kräftepolygon 0123456 gezeichnet. Nimmt man nun einen Punkt C

willkürlich an und verbindet denselben mit den Ecken 0, 1, 2 ... des Kräftepolygons, so kann man die Kräfte in folgender Weise zerlegt denken. Für P_1 oder 01 kann man die Kräfte $0C + C1$ setzen, ebenso für P_2 oder 12 diejenigen $1C$ und $C2$, für P_3 oder 23 diejenigen $2C + C3$ u. s. f., und schließlich läßt sich P_6 oder 56 durch $5C + C6$ ersetzen. Es ergiebt sich dann sofort, daß bei dieser Zerlegung je zwei und zwei Componenten, wie $C1$ und $1C$, $C2$ und $2C$ u. s. w. als gleich und entgegengesetzt gerichtet sich aufheben müssen, und also nur die beiden Kräfte $0C$ und $C6$ übrig bleiben. Um sich hiervon zu überzeugen, trage man von irgend einem Punkte K_1 der Kraft P_1 die Seitenkräfte $0C$ und $C1$ in den Richtungen K_1A und K_1K_2 an; ebenso trage man von dem Durchschnittspunkte K_2 der letzteren Kraft mit P_2 die beiden Kräfte $1C$ in der Richtung K_2K_1 und $C2$ in der Richtung K_2K_3 an und fahre so fort, indem man immer den Durchschnittspunkt der zuletzt angetragenen Seitenkraft mit der nächstfolgenden Kraft als denjenigen wählt, in welchem man die Seitenkräfte dieser letzteren angreifend denkt. Auf diese Weise erhält man einen Linienzug oder ein Polygon $AK_1K_2K_3K_4K_5K_6B$, dessen Ecken in den entsprechenden Kräften liegen. Dieses Polygon hat dem Vorstehenden zufolge die Eigenschaft, daß in jeder seiner Seiten K_1K_2, K_2K_3 ... K_5K_6 zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirksam sind, die sich gegenseitig aufheben, und daß zwei in den äußersten Punkten K_1 und K_6 angebrachte Kräfte $K_1A \# 0C$ und $K_6B \# C6$ die sämmtlichen gegebenen Kräfte ersetzen können.

In den Geraden K_1K_2, K_2K_3 ..., in denen gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirken, werden durch die letzteren natürlich Zug- oder Druckspannungen erzeugt, und es folgt aus dem Vorstehenden, daß man den materiellen Körper nebst den auf ihn wirkenden Kräften $P_1, P_2 \ldots P_6$ ersetzt denken kann durch ein System starrer Linien oder Stangen, welche mit den Seiten des Polygons $K_1K_2 \ldots K_6$ zusammenfallend, in den Ecken durch Scharniere verbunden sind und durch die beiden an den äußersten Polygonecken wirkenden Kräfte $K_1A \# 0C$ und $K_6B \# C6$ angegriffen werden. Für den Fall, daß in den Polygonseiten nur Zugspannungen hervorgerufen werden, können die Stangen sogar durch biegsame Organe, wie Seile oder Ketten, ersetzt werden, wogegen jedoch beim Auftreten von Druckkräften in einer Polygonseite letztere als ein Druckkraftorgan, also eine steife Stange construirt sein muß. Mit Rücksicht auf diese Eigenthümlichkeit des Polygons $K_1K_2 \ldots K_6$ hat man demselben den Namen Gelenkpolygon oder Seilpolygon gegeben, namentlich ist letztere Bezeichnung allgemein und auch dann gebräuchlich, wenn die Polygonseiten wegen der in ihnen auftretenden Druckspannungen nicht durch Seile, sondern nur durch steife Organe sich ersetzen lassen. Es soll daher diese Bezeichnung im Folgenden festgehalten werden, ohne Rücksicht darauf, ob in den Seiten Zug- oder Druckspannungen auftreten. Die Ecken

K_1, K_2 . . . des Seilpolygons pflegt man wohl Knoten zu nennen, die Seilpolygonseiten kann man auch kurz als Seile bezeichnen. Der Punkt C im Kräftepolygon, mit Hülfe dessen das Seilpolygon gezeichnet worden, heißt der Pol des Kräftepolygons.

§. 41. **Das Seilpolygon.** Nach dem Vorstehenden erhält man in jedem besonderen Falle das zu einem Systeme äußerer Kräfte gehörige Seilpolygon einfach dadurch, daß man von einem willkürlich zu wählenden Pole des Kräftepolygons nach dessen Ecken Strahlen zieht und mit diesen Strahlen parallel die Seilpolygonseiten zeichnet, indem man an beliebiger Stelle das äußerste Seil $K_1 A$ parallel dem äußersten Strahl $0\,C$ zieht, von dem Durchschnittspunkte K_1 dieses Seils mit der Kraft P_1 eine Parallele mit dem zweiten Strahl $C1$ und von deren Durchschnittspunkte K_2 mit der folgenden Kraft P_2 eine Parallele mit dem nächsten Strahle $C2$ zieht u. s. f., bis man in der Parallelen mit dem letzten Strahle $C6$ die Richtung des äußersten Seils findet. Wie hieraus ersichtlich ist, kann man zu einem gegebenen System äußerer Kräfte auf unendlich mannichfaltige Art das Seilpolygon zeichnen, denn es ist bei dieser Construction nicht nur die Wahl des Pols C und damit die Richtung der Strahlen oder Seile ins Belieben gestellt, sondern man hat auch volle Freiheit in der Wahl des ersten Knotens K_1, welcher die Lage des Seilpolygons bestimmt, indem eine Verschiebung von K_1 auf P_1 eine Parallelverschiebung des Seilpolygons hervorbringt.

Hinsichtlich des Zusammenhangs des Kräftepolygons und des Seilpolygons kann man Folgendes bemerken. Ebenso wie im Kräftepolygon jede Kraft zwischen zwei Strahlen gefaßt ist, ebenso schneiden sich die diesen Strahlen parallelen Seile in einem Punkte dieser Kraft, welcher als ihr Angriffspunkt gedacht werden mag, und ebenso wie im Kräftepolygon jeder Strahl (mit Ausnahme der äußersten beiden) nach dem zweien Kräften gemeinsamen Durchschnitte derselben geht, verbindet die diesem Strahle parallele Seilpolygonseite die beiden Kräfte. Ferner stellt jeder Strahl des Kräftepolygons nicht nur der Richtung, sondern auch der Größe nach die in den Seilen auftretenden Kräfte (Pressungen oder Spannungen) dar, so zwar, daß die äußersten Strahlen $0\,C$ und $C6$ die in den Außenseilen $K_1 A$ und $K_6 B$ auftretenden Wirkungen, die anderen Strahlen die inneren Kräfte repräsentiren, welche in den Seilen auftreten.

Ob die inneren Kräfte eines Seils in demselben Druck- oder Zugspannungen erzeugen, läßt sich in jedem Falle sehr leicht erkennen, wenn man die an einem Endpunkte des Seils wirkende äußere Kraft nach den Richtungen der beiden Strahlen zerlegt, welche diese Kraft im Kräftepolygon einschließen. Wirkt dann die in eine Seilrichtung fallende Componente von dem betreffenden Knoten aus in das Seil hinein, so wird dasselbe auf

Druck beansprucht, dagegen stellen sich Zugspannungen in dem Seile ein, sobald die in dasselbe fallende Componente von dem Seile weg oder aus demselben heraus gerichtet erscheint. Zerlegt man z. B. die Kraft P_5 oder 4 5 in K_5 nach den Richtungen 4 C und C 5, so haben diese Componenten die Richtungen $K_5 K_4$ und $K_5 K_6$, es werden somit diese beiden Seilpolygonseiten gepreßt. Wenn man andererseits P_3 oder 2 3 in K_3 nach den Richtungen 2 C und C 3 zerlegt, so findet man die Componente in $K_3 K_2$ nach K_2 hin gerichtet, während in $K_3 K_4$ die Componente die Richtung $K_4 K_3$ also aus dem Seil heraus hat, folglich wird $K_4 K_3$ gezogen, $K_3 K_2$ gedrückt.

Wenn nach dem Vorstehenden die beiden in den Außenseilen $K_1 A$ und $K_6 B$ auftretenden Kräfte 0 C und C 6 das System aller äußeren Kräfte P_1, P_2 . . . zu ersetzen vermögen, so muß die Resultirende dieser beiden Kräfte auch identisch sein mit der Mittelkraft des ganzen Systems. Diese Mittelkraft, deren Größe und Richtung übrigens bereits in der Schlußlinie 0 6 des Kräftepolygons gefunden ist, muß daher auch durch den Durchschnittspunkt D der beiden Außenseile $K_1 A$ und $K_6 B$ hindurchgehen. Die Mittelkraft des ganzen Systems der Kräfte P_1, P_2 . . . P_6 ist daher vollkommen bestimmt, wenn man in D eine Strecke parallel und gleich der Schlußlinie 0 6 im Kräftepolygon anträgt.

In derselben Weise kann das Seilpolygon auch dazu dienen, die Mittelkraft einer beliebigen Anzahl von Kräften zu bestimmen, wenn dieselben im Kräftepolygon nur auf einander folgend angetragen sind. Soll z. B. die Mittelkraft von P_2, P_3 und P_4 bestimmt werden, deren Richtung und Größe das Kräftepolygon durch die Diagonale 1 4 ergiebt, so hat man nur die den äußersten Strahlen C 1 und C 4 entsprechenden Seile $K_1 K_2$ und $K_4 K_5$, welche für die Kräfte P_2, P_3 und P_4 als Außenseile zu betrachten sind, bis zu ihrem Durchschnitt E zu verlängern, um einen Punkt zu erhalten, durch welchen die Mittelkraft von P_2, P_3, P_4 hindurchgeht.

Wenn, wie in dem Vorstehenden mehrfach angegeben worden, die Wirkung aller äußeren Kräfte sich auf die beiden in den Außenseilen $K_1 A$ und $K_6 B$ auftretenden Componenten 0 C und C 6 reducirt, so müssen in dem Falle, daß die äußeren Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, auch diese beiden Componenten sich das Gleichgewicht halten. Dies giebt ein Mittel an die Hand, um die Bedingungen des Gleichgewichts beliebiger Kräfte in der Ebene zu untersuchen. Die beiden in den Außenseilen wirkenden Kräfte 0 C und C 6 können nur im Gleichgewichte sein, wenn sie gleich groß und in derselben Geraden entgegengesetzt gerichtet sind. Die gleiche Größe bedingt, daß 0 und 6 gleichen Abstand von C haben, während die entgegengesetzte Richtung nur möglich ist, wenn C 6 in C 0 also 6 in 0 fällt. Es ergiebt sich also auch hier für das Gleichgewicht die Bedingung, daß das Kräftepolygon geschlossen sein muß. Diese Bedingung, welche genügend war für das Gleich-

gewicht von Kräften, die durch denselben Punkt gehen, ist aber in dem vorliegenden Falle, wo die Kräfte willkürlich zerstreut in einer Ebene liegen, nicht mehr ausreichend, wovon man sich durch folgende Betrachtung leicht überzeugt.

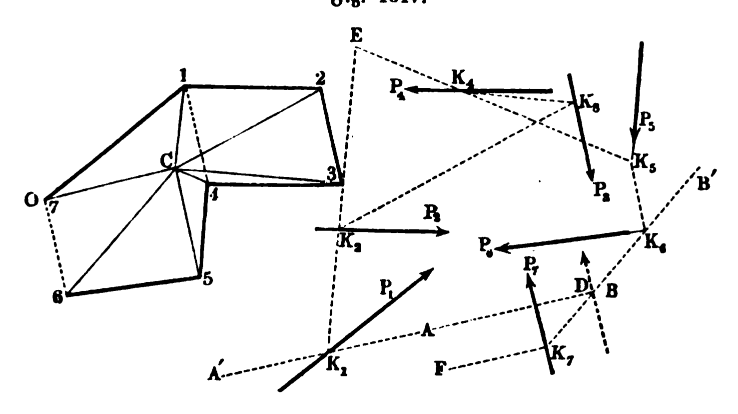
Denkt man sich zu den Kräften P_1, P_2, P_3 . . . P_6 noch eine siebente Kraft P_7 hinzugefügt, welche der Richtung und Größe nach durch 6 0 dargestellt ist, so schließt sich das Kräftepolygon und der Strahl $C7$ fällt mit $C0$ zusammen. Zeichnet man nun auch das Seilpolygon, so behält dasselbe bis zum Knoten K_6 unverändert die ursprüngliche Form $A K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6$. Nun hat man aber von K_6 parallel mit $C6$ die Seite $K_6 K_7$ bis zum Durchschnitt K_7 mit P_7 und von K_7 aus die Parallele $K_7 F$ mit dem Strahl $C7$ zu ziehen. Als Resultat aller äußeren Kräfte einschließlich P_7 erhält man daher jetzt wieder die beiden in den Außenseilen $K_1 A$ und $K_7 F$ wirkenden Componenten, deren Größe und Sinn resp. durch $0\,C$ und $C7$ dargestellt ist, die also als gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte ein Gegenpaar bilden. Wollte man durch die Hinzufügung von P_7 gleich und parallel 6 0 in der That das Gleichgewicht herstellen, so müßten die beiden Außenseile $K_7 F$ und $K_1 A$ nicht nur parallel sein, sondern in dieselbe Gerade fallen, damit die gedachten Componenten sich aufheben. Dies ist aber nur dann möglich, wenn der Punkt K_7 in D, d. h. in die Richtung von $K_1 A$ fällt, oder wenn die hinzugefügte Kraft P_7 durch den Durchschnitt D der beiden Außenseile geht. Letzteres ist auch schon daraus ohne Weiteres ersichtlich, daß die hinzugefügte Kraft P_7 der Mittelkraft von P_1, P_2 . . . P_6 gleich und in derselben Geraden entgegengesetzt sein, daher mit dieser auch durch D gehen muß. Für diesen Fall müssen die beiden Außenseile $K_1 A$ und $K_7 F$ in eine Gerade $D K_1$ zusammenfallen; das Seilpolygon schließt sich und es folgt daraus:

1) damit beliebig in der Ebene zerstreut wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, muß sowohl das Kräftepolygon, wie auch das Seilpolygon sich schließen, und
2) wenn das Kräftepolygon beliebig in einer Ebene zerstreuter Kräfte sich schließt, das Seilpolygon aber nicht, so resultirt aus allen Kräften ein Gegenpaar, dessen Kräfte in der ersten und letzten Seilpolygonseite wirken und eine Größe gleich dem diesen Seilen parallelen Strahle haben.

Wenn die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . P_6 nicht im Gleichgewichte sind, so kann man dasselbe durch Einführung einer der Mittelkraft 0 6 gleichen und in derselben Geraden entgegengesetzt wirkenden Kraft stets herbeiführen. Anstatt nun eine dieser Mittelkraft selbst entgegengesetzte Kraft einzuführen, kann man dasselbe auch erreichen durch Einführung zweier, den Componenten der Mittelkraft gleichen und entgegengesetzten Kräfte. Denkt man sich daher

in den Richtungen der Außenseile AK_1 und BK_6 Kräfte gleich $C0$ resp. $6\,C$ angebracht, so muß das Gleichgewicht ebenfalls hergestellt sein. Diese den Componenten $0\,C$ und $C\,6$ der Mittelkraft entgegengesetzten Kräfte entsprechen offenbar den Auflagerreactionen, welche durch das System der Kräfte in zweien, in den Richtungen der Außenseile angebrachten festen Stützpunkten hervorgerufen werden. Sind A und B solche Stützpunkte, so werden im vorliegenden Falle, Fig. 1017, die Polygonseiten K_1A und K_6B

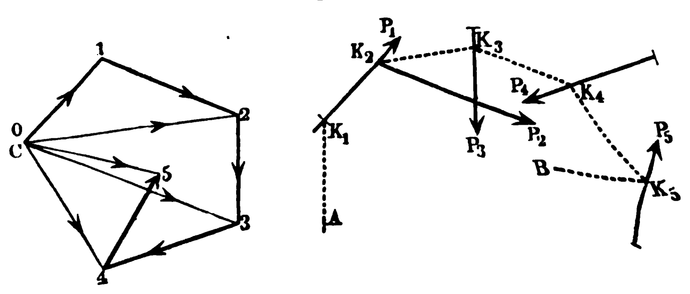
Fig. 1017.



Druckspannungen ausgesetzt sein und müßten daher als steife Constructionsglieder ausgeführt werden. Würde man die Festpunkte dagegen in A' und B' wählen, so würden die Strecken $A'K_1$ und $B'K_6$ gezogen werden und könnten Seile oder Ketten sein.

Wenn man zum Pol C des Kräftepolygons, welcher ganz beliebig angenommen werden kann, eine Ecke 0 des Kräftepolygons, Fig. 1018, wählt,

Fig. 1018.



so hat das Seilpolygon $AK_1K_2K_3K_4K_5B$, welches dazu gehört, eine besondere interessante Eigenschaft, wie sich aus Folgendem ergiebt. Zieht man von C aus die beiden ersten Strahlen nach 0 und 1, so [illegible] $C0$

in einen Punkt zusammen, während $C1$ in die Richtung der Kraft P_1 hineinfällt. Die Annahme des Pols C in der Ecke 0 hat also die statische Bedeutung, daß die Zerlegung der Kraft P_1 in die beiden nach dem Pol gerichteten Componenten hier so vorgenommen werden soll, daß die eine Componente (die in $C0$ fallende) Null und die andere Componente identisch mit P_1 ausfallen soll. Zeichnet man daher von einem beliebigen Knotenpunkte K_1 in der Richtung von P_1 die erste und zweite Seilpolygonseite parallel mit dem ersten und zweiten Strahl $C0$ und $C1$, so fällt, da $C0$ ein Punkt ist, also ihm jede beliebige Richtung beigelegt werden kann, die erste Seilpolygonseite ganz beliebig aus, also z. B. in der Richtung AK_1 liegend, während das zweite Seil K_1K_2 parallel zu P_1 gerichtet ist, d. h. mit P_1 zusammenfällt. Der nächstfolgende Knoten K_2 liegt daher im Durchschnittspunkte von P_1 mit P_2 und von diesem Knoten geht die folgende Seilpolygonseite parallel mit dem Strahl $C2$ bis zum Durchschnitt K_3 mit P_3 u. s. f.

Es ist nun nach dem Früheren bekannt, daß die Strahlen $C2$, $C3$, $C4$ u. s. w. hier als Diagonalen des Kräftepolygons der Richtung und Größe nach die Mittelkräfte derjenigen Kräfte P_1, P_2, resp. P_1, P_2, P_3, resp. P_1, P_2, P_3, P_4 u. s. w. darstellen, welche von ihnen unterspannt werden, und es ist aus der Figur ebenfalls leicht zu erkennen, daß die mit diesen Strahlen parallelen Seile diese entsprechenden Mittelkräfte auch ihrer Lage nach repräsentiren. Denn da die Mittelkraft von P_1 und P_2 durch den Durchschnitt der beiden letzteren Kräfte, d. h. den Knoten K_2 gehen muß, und mit der Diagonale $C2$ parallel geht, so muß diese Mittelkraft in das zweite Seil K_2K_3 hineinfallen. In derselben Art folgt weiter, daß die mit $C3$ parallele und gleiche Mittelkraft von P_1, P_2 und P_3 oder die Mittelkraft von der Resultante von P_1 und P_2 und von P_3, die durch den Durchschnitt K_3 dieser letzteren Kräfte hindurchgehen muß, in das folgende Seil K_3K_4 hineinfällt. Das Seilpolygon hat also in dem Falle, wo der Pol C in einer Ecke des Kräftepolygons angenommen wird, die Eigenschaft, daß von dem jener Ecke entsprechenden Knoten an jede einzelne Seilpolygonseite die Lage der Resultirenden derjenigen Kräfte angiebt, welche von dem mit ihr parallelen Strahle unterspannt werden. Man nennt daher dieses Seilpolygon auch wohl die Mittelkraftslinie.

§. 42. **Kräftepaare.** Sucht man in der vorbemerkten Weise die Resultirende von zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften, welche nicht in derselben Geraden wirken, so ist zunächst das Kräftepolygon ein geschlossenes, und zwar durch die gerade Linie 012, Fig. 1019, ausgedrückt. Wählt man daher den beliebigen Pol C, und zeichnet den Strahlen $C0$, $C1$ und $C2$ parallel das Seilpolygon AK_1K_2B, so müssen die beiden Außenseile AK_1 und K_2B immer parallel ausfallen, da die ihnen parallelen Strahlen im Kräfte-

polygon zusammenfallen. Nach dem Bisherigen kann man nun stets die sämmtlichen gegebenen Kräfte durch die in den beiden Außenseilen wirkenden Kräfte ersetzt denken, welche ihrer Größe nach mit dem Anfangs- und Endstrahl übereinstimmen, und welche also hier, bei geschlossenem Kräftepolygon, von gleicher Größe, nämlich gleich $0C$ resp. gleich $C2$ sind.

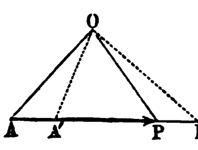
Das ursprüngliche Kräftepaar $P_1 P_2$ ist also durch ein anderes solches von gleicher Drehrichtung $K_1 A$, $K_2 B$ ersetzt worden, und es ist leicht zu erkennen, daß dieses neue Kräftepaar mit dem ursprünglichen ein gleiches Moment hat. Macht man nämlich $K_1 D$ gleich P_1 oder gleich 01 und $K_1 A = 0C$, so fällt die Verbindungslinie AD parallel $C1$ oder $K_1 K_2$ aus, da die Dreiecke $C01$ und $AK_1 D$ congruent sind. In Folge dessen sind die beiden zwischen den Parallelen $K_1 K_2$ und AD gelegenen und auf der gemeinschaftlichen Grundlinie $K_1 K_2$ stehenden Dreiecke $AK_1 K_2$ und $DK_1 K_2$ einander flächengleich. Jedes dieser beiden Dreiecke repräsentirt aber offenbar durch seinen Inhalt das halbe Moment eines der beiden Kräftepaare, denn das Dreieck $DK_1 K_2$ hat zur Grundlage DK_1 die eine Kraft des gegebenen Paars und zur Höhe den Arm $K_2 E$ desselben, während das Dreieck $AK_1 K_2$ zur Grundlinie die eine Kraft AK_1 des neuen Paars und zur Höhe den senkrechten Abstand $K_2 F$ der beiden Kräfte desselben hat.

Fig. 1019.

Die Graphostatik führt uns hier auf einen eigenthümlichen Ausdruck für das halbe Moment eines Kräftepaars durch dasjenige Dreieck, dessen Grundlinie die eine Kraft ist und dessen Spitze in der anderen Kraft liegt. Dabei ist es ganz gleichgültig, wo man die Grundlinie und Spitze in diesen Kraftrichtungen annehmen möge, denn alle zwischen diesen Parallelen liegenden Dreiecke von derselben Grundlinie sind flächengleich.

In gleicher Weise wird im Folgenden unter dem statischen Momente einer einzelnen Kraft AP, Fig. 1020, in Beziehung auf einen Punkt 0 das doppelte Dreieck $AP0$ zu verstehen sein, dessen Grundlinie die Kraft P und dessen Spitze der Momentenpunkt 0 ist. Da man die Kraft AP in ihrer Richtung beliebig verschieben darf, etwa nach $A'P'$, so kann für das Moment natürlich auch das doppelte Dreieck $A'P'0$ gesetzt werden, das mit $AP0$ von gleicher Größe ist.

Fig. 1020.



Natürlich gelten die in den §§. 92 bis 96 gefundenen Beziehungen zwischen den Momenten von Kräften und Gegen... laren auch, wenn das Moment

geometrisch als doppelter Dreiecksinhalt aufgefaßt wird, insbesondere gilt der Satz, daß das Moment der Mittelkraft beliebiger Kräfte gleich der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte ist, und läßt sich dieser Satz aus der Aehnlichkeit der Dreiecke leicht geometrisch beweisen. Ebenso ersieht man sofort, daß das Moment eines Kräftepaars gleichbedeutend ist mit der algebraischen Summe der Momente der einzelnen Kräfte. Wählt man nämlich in Fig. 1021 zu dem Kräftepaare AP_1 und BP_2 ganz beliebig einen Momentenpol O, so sind die Momente der Kräfte AP_1 und BP_2 für diesen Punkt durch die doppelten Dreiecke AP_1O und BP_2O gegeben. Macht man $ED = AP_1$, so ist $\triangle AP_1O = \triangle EDO$ und da $DP_2 \parallel EB$ wird, auch $\triangle EDO = \triangle EP_2O$; folglich hat man die algebraische Summe der Momente der beiden Kräfte durch die Differenz der doppelten Dreiecke BP_2O und EP_2O, also durch das doppelte Dreieck BP_2E gegeben, d. h. durch das Moment des Kräftepaars. Es folgt hieraus weiter, wie in §. 96, daß die Zusammensetzung von Kräftepaaren in einer Ebene einfach auf eine algebraische Addition ihrer Momente hinausläuft.

Fig. 1021.

Hat man ein Kräftepaar P_1, P_2, Fig. 1022, mit einer Kraft P_3 zu vereinigen, so zeichne man das Kräftepolygon 0 1 2 3, in welchem die beiden Seiten 0 1 und 1 2 auf einander fallen, und man erhält in der Strecke 0 3 die Resultirende der drei Kräfte P_1, P_2 und P_3. Auf diese Resultirende, welche mit der Kraft P_3 der Größe und Richtung nach übereinstimmt, hat das Kräftepaar in Hinsicht der Größe wie der Richtung also keinen Einfluß ausüben können, und nur ihre Lage wird durch das Kräftepaar beeinflußt. Zeichnet man nämlich für einen beliebigen Pol C das Seilpolygon $AK_1K_2K_3B$, so erhält man nach der bekannten Regel im Durchschnittspunkte D der Außenseile AK_1 und BK_3 einen Punkt der mit P_3 oder 0 3 parallelen Mittelkraft P. Die Kraft P_3 ist daher durch die Vereinigung mit dem Gegenpaare P_1, P_2 in Größe und Richtung nicht verändert, sondern nur parallel ihrer Lage um ein gewisses Stück, nämlich von K_3P_3 nach DP verschoben. Um die Größe dieser Verschiebung allgemein zu kennzeichnen, hat man sich nur zu vergegenwärtigen, daß das Moment der Mittelkraft P in Bezug auf irgend welchen Punkt gleich sein muß der algebraischen Summe der Momente der Seitenkräfte P_1, P_2 und P_3, mit anderen Worten, das Moment der

Fig. 1022.

Mittelkraft DP ist um das Moment des Kräftepaares P_1, P_2 algebraisch größer, als das Moment der Kraft P_3. Man kann daher sagen: Um eine Kraft mit einem Gegenpaare zu vereinigen, hat man die Kraft parallel mit sich selbst um so viel zu verschieben, daß ein Dreieck, dessen Grundlinie die noch nicht verschobene Kraft ist, und dessen Spitze in der verschobenen Kraft liegt, gleich dem halben Momente des Kräftepaares ist. Die Richtung der Verschiebung, ob nach der einen oder anderen Seite der Kraft, ist so vorzunehmen, daß die verschobene Kraft die Ebene um einen Punkt der noch nicht verschobenen Kraft in demselben Sinne zu drehen strebt, wie das gegebene Kräftepaar.

Umgekehrt folgt natürlich auch, daß man jede Kraft, z. B. DP, zerlegen kann in eine mit ihr parallele gleichgroße und gleichgerichtete Kraft P_3 und ein Kräftepaar P_1, P_2, dessen Moment gleich dem doppelten Flächeninhalte desjenigen Dreiecks ist, welches die ursprüngliche Kraft DP zur Grundlinie und seine Spitze in der Seitenkraft P_3 hat, und dessen Drehungssinn derselbe ist, in welchem die ursprüngliche Kraft die Ebene um einen Punkt der neuen Kraft zu drehen strebt.

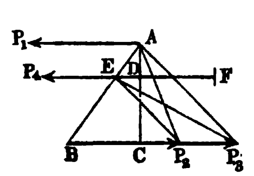
Beispiele. 1) Das Kräftepaar AP_1, BP_2, Fig. 1023, soll durch ein anderes ersetzt werden, dessen Kraft P_3 gegeben ist. Man trage die gegebene Kraft P_3 von B aus gleich BP_3 an, zeichne durch Verbindung von A mit B und P_2 das halbe Moment des Kräftepaares, d. h. das Dreieck BAP_2, und verwandele dieses Dreieck in das mit ihm flächengleiche BCP_3, indem man AP_3 zieht, durch P_2 die Parallele P_2C zu P_3A legt und C mit P_3 verbindet. (Es ist offenbar $\triangle CP_2A$ gleich $\triangle CP_2P_3$, daher auch $\triangle BAP_2 = \triangle BCP_3$). Legt man nun durch die Spitze C die Kraft $DP_4 \# BP_3$, so ist das gesuchte Kräftepaar gefunden.

Fig. 1023.

2) Das Kräftepaar AP_1, BP_2 soll durch ein anderes von gegebenem Hebelarm DC ersetzt werden.

Man zeichne das halbe Moment des Kräftepaares oder das Dreieck BP_2A, Fig. 1024, trage auf der Höhe AC den gegebenen Arm gleich CD an, ziehe durch D parallel zu BP_2 bis zu E und verwandele das Dreieck BP_2A in das flächengleiche BP_3E, indem man E mit P_2 verbindet und AP_3 parallel zu EP_2 zieht. Die Strecke BP_3 ist die eine Kraft des neuen Kräftepaares, dessen andere Kraft auf DE als $FP_4 \# BP_3$ angetragen werden muß.

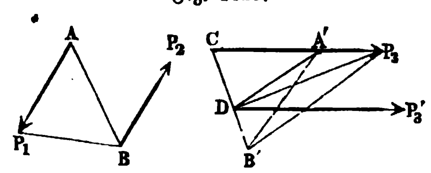
Fig. 1024.



3) Wie weit wird die Kraft CP_3 durch Zusammensetzung mit dem Kräftepaare AP_1, BP_2, Fig. 1025, verschoben?

Man zeichne das halbe Moment des Kräftepaares in dem Dreiecke AP_1B, trage dieses Dreieck an CP_3 als das Dreieck $A'CB'$ an, und verwandele $\Delta\, CA'B'$ in das flächengleiche $\Delta\, CP_3D$ (nach Beispiel 1), so giebt die Spitze D einen Punkt, durch welchen die verschobene Kraft $DP'_3 = CP_3$ hindurchgehen muß; dennn es ist

Fig. 1025.



$$\Delta\, AP_1B = \Delta\, CP_3D$$

und DP'_3 dreht die Ebene um einen Punkt der ursprünglichen Kraft, z. B. C, nach derselben Richtung (umgekehrt dem Zeiger einer Uhr) wie das gegebene Kräftepaar. Natürlich kann man jederzeit die Kraft DP'_3 nach CP_3 versetzen, wenn man das Kräftepaar AP_1, BP_2 hinzufügt, welches die Ebene in demselben Sinne und mit gleichem Momente, wie die ursprüngliche Kraft DP'_3, um einen Punkt der verschobenen Kraft CP_3 dreht.

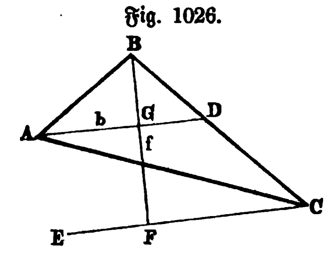
§. 43. **Reduction der Momente.** Wie aus dem vorigen Paragraphen sich ergiebt, handelt es sich in der Statik vielfach um Zusammensetzung von Momenten, welche durch Flächen, meist durch Dreiecke gegeben sind. Um diese Addition bequem ausführen zu können, und da die graphische Statik der Anschaulichkeit und Uebersichtlichkeit wegen ihre Größen überhaupt durch gerade Linien ausdrückt, ist es nothwendig, die erwähnten Momentenflächen durch Strecken darzustellen. Dies ist offenbar immer möglich, wenn man die betreffenden Flächen stets in solche Rechtecke verwandelt oder sich verwandelt denkt, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie haben. Alsdann stellen die den einzelnen Rechtecken zugehörigen Höhen die Momente dar, vorausgesetzt nur, daß man unter einer Einheit der Strecke, welche die Höhe darstellt, nicht eine Länge, sondern eine Fläche versteht, deren Grundlinie die gemeinschaftliche Basis und deren Höhe die Längeneinheit ist. Stellt nun bei den Momenten, die ja als Product aus Kraft mal Länge aufgefaßt werden müssen, die gemeinsame Basis nach dem zu Grunde gelegten Maßstabe für die Kräfte etwa b Kilogramm dar, so entspricht natürlich jeder Längeneinheit einer Höhe (1 Meter) offenbar ein Moment von $b\,.\,1$ Meterkilogramm, und eine Höhe, die also nach dem gewählten Längenmaßstabe a Meter beträgt, wird ein Moment von ab Meterkilogramm darstellen. Es ist übrigens ganz gleichgültig, ob die Basis und die Höhe Kräfte, resp. Längen, oder umgekehrt Längen, resp. Kräfte, darstellen, denn wenn die gemeinschaftliche Basis als Länge von b Metern gedacht wird, und die Höhe nach dem Kräftemaßstabe gleich a Kilogramm sich ergiebt, so ist das Moment wie vorher zu ab Meterkilogramm gegeben.

Man nennt diese Umwandlung der Momentenflächen in Rechtecke von gemeinschaftlicher Grundlinie die Reduction der Momente auf eine gemeinschaftliche Basis. Es handelt sich daher zunächst darum, für die

Ausführung dieser Reduction auf eine gemeinschaftliche Basis eine bequeme Methode anzugeben. Die Basis ist dabei im Allgemeinen zwar gleichgültig, man wird aber immer gut thun, dafür eine die Rechnung vereinfachende abgerundete Zahl (seien es Meter oder Kilogramme) anzunehmen.

Wenn ein Moment durch die doppelte Fläche eines Dreiecks ABC, Fig. 1026, gegeben ist, so hat man, um es auf eine bestimmte Basis zu reduciren, das Dreieck nur in ein anderes flächengleiches zu verwandeln, dessen Grundlinie gleich der gegebenen Basis ist. Hierzu giebt es mancherlei Methoden, eine der einfachsten ist folgende:

Fig. 1026.



Man schneide von einer Ecke A des Dreiecks mit der zu Grunde gelegten Basis b in die gegenüberliegende Dreieckseite BC ein, so daß $AD = b$ ist, und ziehe durch eine andere Ecke C eine Parallele CE mit b, so ist das Perpendikel BF von der dritten Ecke B auf diese Parallele gleich der Höhe eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich der gegebenen Basis ist, und dessen Inhalt mit dem des gegebenen Dreiecks übereinstimmt. Dies ist leicht ersichtlich, da das Dreieck ABC durch die Basis AD in die beiden Dreiecke ADB und ADC zertheilt ist, welche die gemeinschaftliche Basis $AD = b$ und zu dieser Basis die Höhen BG und GF haben, das Dreieck ABC ist daher gleich einem anderen Dreiecke von der Grundlinie $AD = b$ und der Höhe $BG + GF = f$. Stellt nun das Dreieck ABC die Hälfte von dem Momente einer Kraft z. B. AB um einen Punkt C dar, so kann man dieses Moment gleich dem Rechtecke aus $AD = b$ und $BF = f$, also gleich bf setzen, und man hat nach dem, was hinsichtlich der Reduction von Momentenflächen auf eine gemeinschaftliche Basis b gesagt worden ist, in f den Werth des Momentes. Man pflegt wohl die Strecke BF als die Antiprojection der Grundlinie BC auf die eingetragene Basis AD zu nennen (vergl. §. 36, Anhang).

Wenn verschiedene Kräfte $A_1 P_1$, $A_2 P_2$ in einer Ebene durch Strecken ihrer Größe und Lage nach gegeben sind, und man soll die Momente derselben in Bezug auf einen in derselben Ebene liegenden Drehpunkt O auf eine gemeinschaftliche Basis b reduciren, so kann dies am einfachsten dadurch geschehen, daß man jede Kraft in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine gleich der gegebenen Basis b ist, während die andere durch den Momentenpunkt hindurchgeht. Dann ist der Abstand der ersten Componente von dem Momentenpunkte offenbar das reducirte Moment. Diese Construction ist aus Fig. 1027 (a. f. S.) leicht zu erkennen. Man ziehe nach einer beliebigen Richtung eine gerade Linie $D_3 O D_1$ durch den Momentenmittelpunkt O. Trägt man

damit parallel von den Angriffspunkten A_1, A_2, A_3 aus die Seitenkräfte $A_1 B_1 = A_2 B_2 = A_3 B_3 = b$ überall nach derselben Richtung an, so sind offenbar die Verbindungslinien $B_1 P_1$, $B_2 P_2$, $B_3 P_3$ die zweiten Componenten, in welche die Kräfte $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ zerfallen, wenn $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 P_3$ die ersten Componenten sind. Sollen nun diese zweiten Componenten $B_1 P_1$ ... durch den Momentenpunkt O hindurchgehen, so hat man nur die Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 der Kräfte in diejenigen Punkte C_1, C_2, C_3 verlegt zu denken, in welchen die von O aus zu den zweiten Componenten $B_1 P_1$, $B_2 P_2$, $B_3 P_3$ gezogenen Parallelen die Kraftrichtungen schneiden. Während in diesem Falle die gedachten zweiten Componenten BP durch den Momentenpunkt O hindurchgehen, also ihr Moment Null ist, haben die ersten Seitenkräfte AB, welche sämmtlich gleich der Basis b sind, Hebelarme, die durch die Abstände der Angriffspunkte C_1, C_2, C_3 von der mit diesen Kräften parallel gezogenen $D_3 O D_2$ gegeben sind. Diese Abstände $C_1 D_1 = f_1$; $C_2 D_2 = f_2$; $C_3 D_3 = f_3$ repräsentiren daher die auf die gemeinschaftliche Basis b reducirten Momente der gegebenen Kräfte um den Punkt O. Es ist übrigens aus der Figur leicht zu erkennen, daß alle diejenigen Abstände f, welche auf derselben Seite der zuerst gezogenen Geraden $D_3 O D_2$ liegen, demselben Sinne der Drehung entsprechen, während die auf den entgegengesetzten Seiten von $D_3 O D_2$ gelegenen Abstände entgegengesetzten Drehungssinn andeuten. So streben die Kräfte $A_2 P_2$ und $A_3 P_3$ in der Figur, deren Abstände f_2, f_3 unterhalb $D_3 O D_2$ liegen, die Ebene um den Punkt O nach rechts (entsprechend dem Zeiger einer Uhr) zu drehen, während der Kraft $A_1 P_1$, deren Abstand oberhalb der Geraden $D_3 O D_2$ gelegen ist, die entgegengesetzte Drehungsrichtung zukommt.

Fig. 1027.

§. 44. **Reduction der Momente paralleler Kräfte in einer Ebene.** Hat man es mit parallelen Kräften in einer Ebene zu thun, so bietet das Seilpolygon eine besonders einfache Methode dar, um die Momente dieser Kräfte um einen beliebigen Punkt der Ebene auf eine gemeinschaftliche Basis zu reduciren. Dieser Fall gewährt ein besonderes Interesse wegen seines häufigen Vorkommens bei der Untersuchung von Balken und Trägern, die durch parallele Kräfte (Belastungen) angegriffen werden, und deren Dimen-

sionen von den angreifenden Momenten abhängen. Seien in Fig. 1028 die parallelen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben und aus ihnen das Kräftepolygon 0, 1, 2, 3, 4 gezeichnet; hierauf der Pol C beliebig angenommen und in bekannter Art das Seilpolygon $A K_1 K_2 K_3 K_4 B$ construirt. Um die Momente dieser Kräfte für irgend einen Punkt O zu ermitteln, sei durch O eine Parallele $O f_0$ zu den Kräften gezogen, und man denke sich die Seilpolygonseiten bis zu den Durchschnitten f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 mit dieser Parallele durch O verlängert. Es ist jetzt leicht ersichtlich, daß jedes einzelne der durch die Parallele $O f_0$ und zwei auf einander folgende Seile gebildeten Dreiecke einem im Kräftepolygon gelegenen Dreiecke wegen Parallelismus der Seiten ähnlich ist. So ist z. B.:

Fig. 1028.

$$\triangle f_0 f_1 K_1 \backsim \triangle 0 1 C,$$

und daraus folgt:

$$f_0 f_1 : 0 1 = K_1 D : CE = h_1 : b,$$

wenn man den Abstand $K_1 D$ des Knotens K_1 von der Parallelen $O f_0$ mit h_1 und den Abstand CE des Pols C von der Kräftelinie 0 4 mit b bezeichnet. Da nun 0 1 gleich der Kraft P_1 ist, so kann man für obige Gleichung auch schreiben:

$$f_0 f_1 \,.\, b = P_1 \,.\, h_1.$$

Der rechtsseitige Ausdruck $P_1 \,.\, h_1$ ist aber offenbar das Drehungsmoment der Kraft P_1 um den Punkt O, und man hat also dieses Drehungsmoment gleich dem Producte $f_0 f_1 \,.\, b$ gefunden aus dem Abschnitte $f_0 f_1$, den die beiden in der Kraft P_1 zusammenstoßenden Seile auf der Parallelen $O f_0$ abschneiden in den Abstand b des Pols C von der Kräftelinie des Kräftepolygons. Da diese Beziehung sich ganz allgemein für jede Kraft beweisen läßt, z. B. das Moment von P_2 sich ausdrückt durch $P_2 \,.\, h_2 = f_1 f_2 \,.\, b$, so erhält man in dieser Weise ohne Weiteres die Momente der einzelnen Kräfte als Producte, deren einer Factor b allen gemeinschaftlich ist, und deren andere Factoren die Abschnitte der betreffenden Seile auf der durch den Momentenpunkt O zu den Kräften gezogenen Parallelen bedeuten. Nimmt man daher den Abstand $CE = b$ des Pols von der Kräftelinie 0 4 als Basis an, so stellen die Abschnitte auf

Of_0 die betreffenden reducirten Momente der Kräfte dar, und zwar ist in der Figur das Moment von P_1 durch $f_0 f_1$, das von P_2 durch $f_1 f_2$, das von P_3 durch $f_2 f_3$ und das von P_4 durch $f_3 f_4$ dargestellt. Die beiden Abschnitte $f_0 f_1$ und $f_1 f_2$ haben gleiche Richtung (von unten nach oben, wenn man die Nummern der f in derselben Reihenfolge wie die der Knoten K annimmt) und die zugehörigen Kräfte P_1 und P_2 haben ebenfalls gleiche Drehungsrichtung um O (linksum, d. h. umgekehrt wie der Zeiger einer Uhr). Die beiden anderen Abschnitte $f_2 f_3$ und $f_3 f_4$ haben beide die entgegengesetzte, von oben nach unten gehende Richtung, und die ihnen zugehörigen Kräfte P_3 und P_4 streben, die Ebene dementsprechend nach rechts um den Punkt O zu drehen. Daraus erkennt man, daß die einzelnen Abschnitte auf Of die bezüglichen Momente nicht nur der Größe, sondern auch dem Sinne der Drehung nach darstellen.

Ebenso folgt ohne Weiteres aus der Betrachtung der Figur, daß die Summe der Momente zweier oder beliebig vieler aufeinanderfolgender Kräfte dargestellt wird durch denjenigen Abschnitt auf der durch O gezogenen Parallelen Of_0, welcher zwischen den beiden Seilpolygonseiten enthalten ist, zwischen welchen die betreffenden Kräfte P eingeschlossen sind. So stellt z. B. $f_0 f_2$ als Abschnitt zwischen den Seilen AK_1 und $K_2 K_3$ das Moment der Kräfte P_1 und P_2 dar, ebenso ist in $f_0 f_3$ das Moment der Kräfte P_1, P_2 und P_3 und in $f_0 f_4$ das Moment aller Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 gegeben. Alle diese Abschnitte sind von unten nach oben gerichtet und entsprechen daher linksdrehenden Kräften. In der That erkennt man auch aus dem Seilpolygon, wie die Resultante von P_1, P_2 nnd P_3, deren Größe durch 0 3 gegeben ist, und welche in dem Durchschnittspunkte zwischen AK_1 und $K_4 K_3$ wirkt (dieser Durchschnitt ist links in der Figur nicht mehr sichtbar), eine linke Drehung anstrebt. Dasselbe ist auch mit der durch K_5 hindurchgehenden, der Größe nach durch 0 4 gegebenen Resultante der vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 der Fall. Fügt man zu den gegebenen Kräften P_1, P_2, P_3, P_4 noch eine Kraft P_5 gleich 4 0, also der Mittelkraft jener gleich und entgegengesetzt hinzu, und läßt dieselbe im Durchschnitte K_5 der Außenseile AK_1 und $K_4 B$ angreifen, so ist nicht nur das Kräfte-, sondern auch das Seilpolygon geschlossen; sämmtliche Kräfte stehen daher im Gleichgewichte, und es ist auch das Moment von P_5 durch $f_4 f_0$ also gleich, aber von entgegengesetztem Drehungssinne mit dem Momente $f_0 f_4$, welches der Mittelkraft der vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4 angehört. Die Summe aller Momente ist daher gleich Null und zwar für jede beliebige Lage des Punktes O.

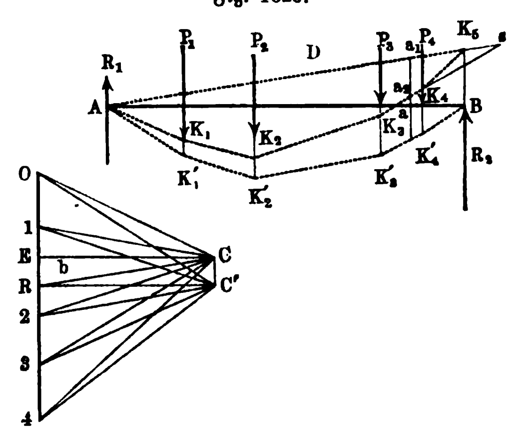
Würde man die Kraft P_5 zwar gleich 4 0 annehmen, aber nicht in K_5, sondern etwa in K_x angreifen lassen, so schließt sich das Seilpolygon nicht, indem die Außenseile $K_1 A$ und $K_x f_x$ jetzt nur parallel ausfallen, und es resultirt nach §. 41, Anhang, aus der Summe aller Kräfte ein Kräftepaar, dessen

reducirtes Moment (zur Basis $CE = b$) durch $f_0 f_x$ ausgedrückt ist. Auch diese Größe ist offenbar constant, wo man auch den Momentenpunkt O wählen möge.

Beispiele. Die Anwendung der im vorigen Paragraphen gezeigten Methode zur Bestimmung der reducirten Momente von Parallelkräften möge durch einige Beispiele erläutert werden. §. 45.

Ein auf den beiden Stützen A und B, Fig. 1029, aufruhender, horizontaler Balken sei durch die beliebigen Belastungen P_1, P_2, P_3, P_4 angegriffen; zur Bestimmung der Dimensionen sollen für jeden beliebigen Querschnitt die Transversalkräfte und das Drehungsmoment ermittelt werden. Man

Fig. 1029.



trage auf einer Verticalen 04 die Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 auf und wähle zu diesem Kräftepolygon den Pol C in solchem Abstande von der Kräftelinie, daß $CE = b$ gleich der Momentenbasis ist. Zeichnet man nun in bekannter Weise von einem beliebigen Punkte etwa A aus das Seilpolygon $A K_1 K_2 K_3 K_4 K_5$, so erhält man in $K_5 A$ die Schlußlinie des Seilpolygons, und eine von C aus damit parallel gezogene Gerade CR giebt offenbar in $0R$ und $R4$ die Auflagerdrucke, also in $R0$ und $4R$ die Auflagerreactionen in den Stützpunkten A und B (vergl. auch Anhang §. 39). Denkt man sich diese Reactionen $R_1 = R0$ in A und $R_2 = 4R$ in B als vertical aufwärts wirkende Kräfte hinzugefügt, so ist der Balken im Gleichgewichte, das Kräftepolygon $R01234R$ ist geschlossen und ebenso auch das Seilpolygon $DAK_1 K_2 K_3 K_4 K_5 D$.

Für irgend einen Querschnitt, z. B. a, bestimmt sich offenbar die Summe aller auf das links von a liegende Balkenstück Aa wirkenden Kräfte R_1, P_1, P_2, P_3 aus dem Kräftepolygon zu $R3$, während die Summe aller rechts von a wirkenden Kräfte P_4 und R_2 durch $3R$ also ebenso groß,

aber entgegengesetzt sich ergiebt. Diese Kräftesumme oder Mittelkraft $R3$ von R_1, P_1, P_2 und P_3 geht durch den Durchschnittspunkt s der Außenseile AK_5 und $K_3 K_4$. Das in dem Querschnitte a wirksame Drehungsmoment der Kräfte, welche auf den linksseitigen Theil wirken, ist nach dem Vorigen durch den Abschnitt $a_1 a_2$ gegeben, welcher auf der durch den Punkt a gezogenen Verticalen durch die beiden Außenseile, d. h. durch die der ersten Kraft R_1 vorausgehende Seilpolygonseite AK_5 und die der letzten Kraft P_3 nachfolgende Seilpolygonseite $K_3 K_4$ abgeschnitten wird. Natürlich ist das Moment der auf das rechtsliegende Balkenstück Ba wirkenden Kräfte P_4 und R_2 ebenso groß, aber von entgegengesetztem Drehungssinne. Um den größten Werth des Drehungsmomentes und damit den sogenannten gefährlichen Querschnitt des Balkens zu bestimmen, hat man nur diejenige Stelle des Balkens aufzusuchen, wo die vertical gemessene Ordinate innerhalb des Seilpolygons ein Maximum wird. Zieht man also parallel zu AK_5 eine Berührungslinie an das Seilpolygon, welche hier durch den Eckpunkt K_2 geht, so erhält man in dem Querschnitte durch $K_2 P_2$ das größte Bruchmoment. Der Punkt, in welchem die gedachte, mit der Schlußlinie des Seilpolygons parallel gezogene Gerade das Seilpolygon berührt, wird im Allgemeinen immer in einen Knoten desselben treffen, nur in dem Falle, wo eine Seite des Polygons (etwa $K_2 K_3$) mit der Schlußlinie parallel läuft, wird in allen über dieser Seite des Seilpolygons gelegenen Balkenquerschnitten das Moment der äußeren Kräfte, also auch die Gefährlichkeit gleich groß sein. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn sämmtliche Belastungen symmetrisch gegen die Mitte des Balkens vertheilt sind.

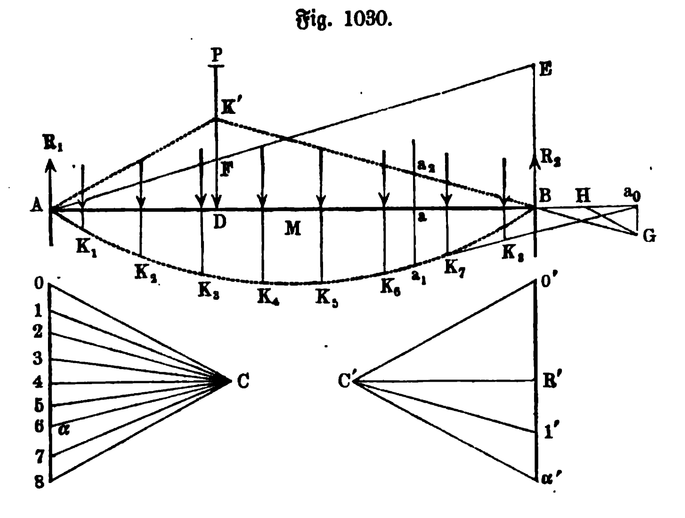
Die Schlußlinie AK_5 ist in Fig. 1029 gegen den horizontalen Balken AB geneigt; der Grund davon liegt darin, daß die Höhenlage des Pols C im Kräftepolygon ganz willkürlich angenommen worden ist. Es ist aber ein Leichtes, durch eine entsprechende Veränderung des Pols C dem Seilpolygon eine solche Lage zu geben, daß die Schlußlinie AK_5 in eine vorgeschriebene Richtung, etwa in die horizontale Richtung AB des Balkens fällt. Zu dem Ende ziehe man von dem Punkte R im Kräftepolygon, welcher die beiden Auflagerdrucke $0R$ und $R4$ bestimmt, eine Parallele RC' zu der für die Schlußlinie vorgeschriebenen Geraden, also etwa zu AB, und nehme auf dieser Linie den Pol C' an, natürlich so, daß der Abstand des Pols von der Kräftelinie unverändert gleich der Momentenbasis bleibt. Alsdann wird das neue Seilpolygon $AK'_1 K'_2 K'_3 K'_4 B$, welches für diesen Pol C' gezeichnet wird, wie leicht zu ersehen, eine in AB hineinfallende Schlußlinie erhalten müssen.

Wenn ein Balken nicht durch in einzelnen Punkten concentrirte, sondern durch auf größere Längen stetig vertheilte Belastungen angegriffen wird, so geht das Seilpolygon natürlich in eine stetige Curve über. Man kann diese

Curve näherungsweise immer leicht construiren, wenn man den Balken in eine größere Anzahl hinreichend kleiner Theile zerlegt denkt, und die auf diese Theile entfallenden Belastungen in deren Mittelpunkten resp. Schwerpunkten wirkend annimmt. Man erhält auf diese Art ebenso wie im Vorstehenden ein Seilpolygon, welches sich um so mehr der eigentlichen Seilcurve nähert, je kleiner die Balkenelemente angenommen worden sind. Um diese Bestimmung der auf die Balkentheile wirkenden Theillasten ebenfalls graphisch leicht vornehmen zu können, kann man passend das Belastungsgesetz des Balkens durch eine Curve über demselben derart ausdrücken, daß die einzelnen Ordinaten dieser Curve über der als Abscissenaxe genommenen Balkenaxe die specifischen Belastungen angeben. Man hat dann gewissermaßen die auf dem Balken liegende Last als die materiell zu denkende Fläche dargestellt, welche zwischen dem Balken und der Belastungscurve enthalten ist, und deren Gewicht der Balken zu tragen hat.

Eine sehr häufig bei der Berechnung von Trägern rc. zu berücksichtigende, stetig vertheilte Belastung ist in dem Eigengewichte der Träger selbst zu erkennen, welches in vielen Fällen der Praxis als gleichmäßig über die ganze Balkenlänge vertheilt angenommen werden kann. Demgemäß fällt die das Belastungsgesetz darstellende Belastungscurve geradlinig und parallel zur Balkenaxe aus. Theilt man nun die ganze Balkenlänge AB, Fig. 1030, in etwa acht gleiche Theile, construirt das Kräftepolygon 0 8, wählt den Pol C

Fig. 1030.



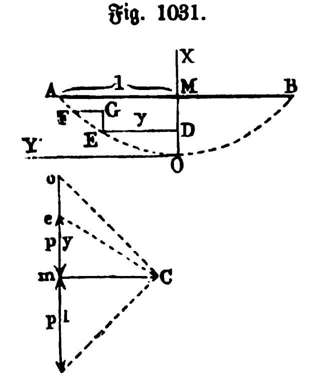
in einem Abstande gleich der Momentenbasis b von 0 8 und zwar in dem in der Mitte von 0 8 auf der Kräftelinie errichteten Perpendikel, so läßt sich das Seilpolygon $AK_1 K_2 \ldots B$ zeichnen. Dieses Polygon geht in dem

Falle, wo man die einzelnen Balkentheile unendlich klein annimmt, in eine Parabel über, deren Axe durch die Verticale in der Balkenmitte gegeben ist. Der Beweis hierfür ist mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke, welche im Kräfte- und Seilpolygon vorhanden sind, nicht schwer zu führen*). Die Schlußlinie des Seilpolygons AB muß hier nach dem vorigen Paragraphen mit der horizontalen Balkenaxe zusammenfallen, weil der Pol C so gewählt ist, daß die Verbindungslinie desselben mit der Mitte 4 der Kräftelinie parallel dem Balken AB gerichtet ist, dieser Mittelpunkt 4 aber derjenige ist, welcher im vorliegenden Falle die beiden gleichen Auflagerdrucke 0 4 und 4 8 bestimmt. Nimmt man diesen Drucken gleich und entgegengesetzt die Auflagerreactionen in A und B gleich $40 = 84$, d. h. gleich der halben Belastung an, so ist der Balken im Gleichgewicht.

In Betreff dieser der stetig vertheilten Last entsprechenden Seilcurve gilt dasselbe, was bei concentrirten Kräften im Vorstehenden von dem Seilpolygon nachgewiesen worden ist. Man findet z. B. für irgend einen Querschnitt a das Gesammtmoment aller äußeren Kräfte dargestellt durch den Abschnitt aa_1 der durch a gehenden Verticalen zwischen der Seilcurve und ihrer Schlußlinie. Ebenso erhält man die in demselben Querschnitte a wirkende Verticalkraft oder die Summe aller auf einer Seite von a auf das Balkenstück Aa wirkenden äußeren Kräfte, wenn man durch den Schnittpunkt a_1 eine Tangente

*) Wählt man den vertical unter der Mitte M des Balkens AB, Fig. 1031, gelegenen Punkt O der Curve als Coordinatenanfang, legt die Axe OX vertical durch M und die Y-Axe parallel mit AB, bezeichnet ferner l die halbe Balkenlänge MA und p die Belastung pro Längeneinheit, so ist im Kräftepolygon $om = pl$ zu machen. Für irgend einen Punkt E der Seilcurve, dessen Coordinaten $ED = y$ und $OD = x$ sind, muß nach der Construction die Tangente EF parallel dem Strahl Ce des Kräftepolygons sein, für welchen die Kraft $em = py$ ist. Daher hat man aus den ähnlichen Dreiecken EFG und eCm die Gleichung:

Fig. 1031.



$$EG : GF = em : mC = py : b,$$

oder:

$$\partial x = \frac{p}{b}\, y\, \partial y,$$

woraus durch Integration die Scheitelgleichung einer Parabel

$$x = \frac{p}{2b}\, y^2$$

folgt.

an die Seilcurve legt, und mit dieser parallel den Strahl $C\alpha$ im Kräftepolygon legt. Die Strecke 4α stellt dann der Richtung und Größe nach die Mittelkraft der auf das Balkenstück Aa wirkenden Kräfte dar, und zwar geht diese Mittelkraft durch den Schnittpunkt a_0 zwischen den entsprechenden Außenseilen, d. h. der Schlußlinie AB und der Tangente $a_1 a_0$.

Wenn der Balken außer der stetig vertheilten Last Q noch eine oder mehrere concentrirte Belastungen wie P zu tragen hat, so könnte man zwar für P und Q gemeinschaftlich das Kräfte- und Seilpolygon construiren, doch empfiehlt es sich in vielen Fällen, für die concentrirten Kräfte ebenso wie für die stetig vertheilten gesondert diese Polygone zu zeichnen. Man hat dann zur Ermittelung der gesammten Transversalkräfte und Drehungsmomente nur nöthig, die aus den einzelnen Polygonen sich ergebenden Strecken algebraisch zu addiren. In Fig. 1030 ist diese Zeichnung für eine Kraft P gemacht, indem die Kraft P als $0'\,1'$ aufgetragen und der Pol C' in einem Abstande gleich der Momentenbasis b von dieser Linie angenommen ist, also in demselben Abstande wie C ihn von $0\,8$ hat. Damit ferner die Schlußlinie dieses Polygons ebenfalls mit der Balkenaxe AB und also mit der Schlußlinie der Seilcurve der stetigen Last zusammenfalle, ist C' in solcher Höhenlage angenommen, daß die durch C' parallel zu AB gezogene Gerade $C'R'$ die Kräftelinie $0'1'$ in demselben Verhältnisse theilt, in welchem die durch P erzeugten Auflagerdrucke zu einander stehen, oder mit anderen Worten, es ist R' so gewählt, daß die Proportion stattfindet:

$$0'R' : R'1' = BD : AD.$$

Um dies graphisch auszuführen, hat man nur nöthig, die Strecke BE senkrecht zu AB gleich P oder gleich $0'\,1'$ zu machen und AE zu ziehen, dann stellt die Größe FD offenbar den Auflagerdruck in B dar, und man hat daher $1'R' = DF$ zu machen. Nachdem in dieser Art der Pol C' gewählt worden, construirt sich das Seilpolygon für die Kraft P durch $AK'B$, und dasselbe schließt sich, wenn man wieder in A und B die durch P veranlaßten Reactionen gleich $R'0'$ und $1'R'$ zu den durch die Last Q hervorgerufenen Reactionen $4\,0$ und $8\,4$ hinzufügt, so daß man jetzt hat:

$$R_1 = 4\,0 + R'0', \text{ und}$$
$$R_2 = 8\,4 + 1'R'.$$

Aus der Seilcurve der stetigen Last $AK_1K_2 \ldots B$ und aus dem Seilpolygon der concentrirten Kraft $AK'B$, welche beide wegen der besonderen Lage der Pole C und C' mit den Schlußlinien AB auf einander fallen, ergiebt sich nun die Combination $AK_1K_2K_3 \ldots BK'A$.

Die Verticalkraft in irgend einem Querschnitte a besteht jetzt aus zwei Theilen, und zwar erstens aus dem durch Q hervorgerufenen Antheile, welcher bereits oben zu 4α gefunden wurde, und welcher in dem Schnittpunkte a_0

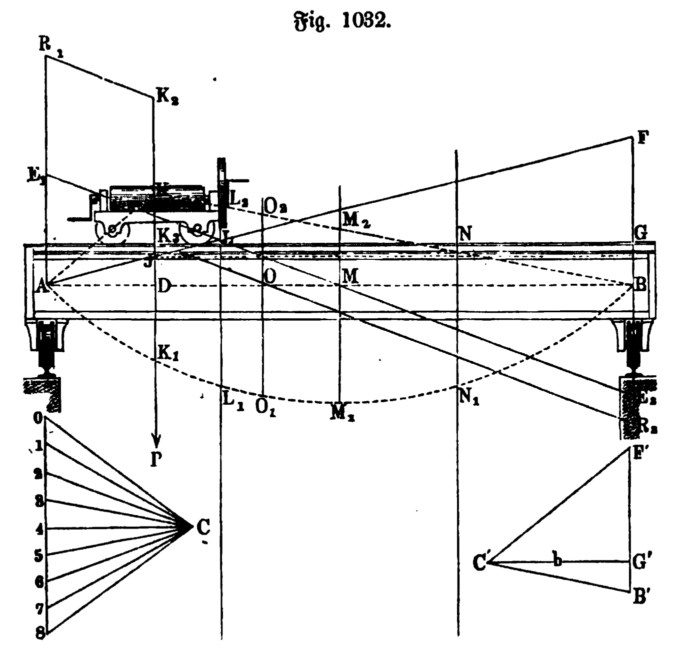
seinen Angriffspunkt hat. Hierzu kommt die durch P hervorgerufene Kraft, die der Größe nach durch $P - 0'R'$ oder durch die Strecke $R'1'$ dargestellt ist. Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt in dem Durchschnittspunkte B der betreffenden Außenseile AB und $K'B$, zwischen denen die Kräfte R_1 und P gelegen sind. Diese beiden Transversalkräfte 4α in a_0 und $R'1'$ in B lassen sich in bekannter Art leicht zu einer einzigen Mittelkraft zusammensetzen, indem man $1'\alpha' = 4\alpha$ anträgt und zu dem Kräftepolygon $R'1'\alpha'$ und dem Pol C' das Seilpolygon BGH construirt. (Man macht $BH \parallel C'R'$; $BG \parallel C'1'$ und $GH \parallel C'\alpha'$.) Auf diese Weise erhält man im Durchschnittspunkte H den Angriff der ganzen den Querschnitt a angreifenden Verticalkraft $4\alpha + R'1' = R'\alpha'$. Ferner erhält man wie früher für jeden Querschnitt a des Balkens das Moment der äußeren Kräfte durch den Abschnitt $a_1 a_2 = a_1 a + a a_2$, welcher zwischen der Curve und dem Polygon enthalten ist. Man ersieht auch, daß das Maximum des Momentes jetzt nicht mehr in der Mitte M des Balkens gelegen ist, sondern im Allgemeinen zwischen dem Mittelpunkte M und dem Angriffspunkte D der Kraft P (in dem Falle der Figur in D selbst) stattfindet. Es ist also der gefährliche Querschnitt des Balkens, welcher, bei allein vorhandener gleichmäßig vertheilter Belastung, in der Balkenmitte gelegen ist, von dieser Stelle aus in der Richtung nach der Stütze A hin verschoben worden dadurch, daß über A herein die concentrirte Last P getreten ist, und beide Punkte, der gefährliche Querschnitt und der Angriffspunkt D der Kraft P, haben sich bei dieser entgegengesetzten Bewegung begegnen und zusammenfallen müssen.

Um diese Verschiebung, welche der gefährliche Querschnitt erfährt, wenn die Last P über den Träger sich bewegt, näher kennen zu lernen, sei AB, Fig. 1032, ein Träger (etwa eines Laufkrahns), auf welchem die bewegliche Belastung P in Form eines kleinen Wagens, welcher die Winde trägt, verschiebbar angebracht ist. Sei $AL_1M_1N_1B$ die dem Eigengewichte Q des Trägers von der Länge l sammt darauf ruhender Bahn entsprechende Seilcurve, welche bei der nahezu gleichmäßigen Vertheilung der Eigenlast als Parabel angenommen werden kann. Sei ferner für eine beliebige Stellung des Windewagens, z. B. wenn der Schwerpunkt desselben über D steht, das Seilpolygon AKB so gezeichnet, daß die Schlußlinie AB desselben mit derjenigen der Seilcurve zusammentrifft. Hierzu ist nur nöthig, den Pol C' im Kräftepolygon $C'F'G'B'$ so zu wählen, daß die Horizontale $C'G'$ die Kraft $F'B'$ in solchem Verhältnisse theilt, daß die beiden Abschnitte $F'G'$ und $G'B'$ die beiden Auflagerdrucke in A und B darstellen. Zu dem Ende ist BF gleich P gemacht und die Verbindungslinie AF gezogen, die Horizontale JG durch den Punkt J, in welchem diese Verbindende von der Kraftrichtung P geschnitten wird, theilt dann die Strecke BF in G derart, daß GB den Auflagerdruck in B und FG denjenigen in A angiebt. Macht man daher

$G'B' = GB$ und $G'F' = GF$, so erhält man in der Horizontalen durch G' in der Entfernung $G'C'$ gleich der Momentenbasis b den gesuchten Pol C'.

Nach dem Vorstehenden stellt nun die Strecke $M_1 M_2$ das Bruchmoment in dem mittleren, durch M gehenden Querschnitte vor, während $K_1 K$ das

Fig. 1032.



Moment in dem Querschnitte D bedeutet. Wie die Figur erkennen läßt, ist das Drehungsmoment in allen Balkenquerschnitten durch die Last P vergrößert worden, und zwar in der Mitte um MM_2, in D am meisten, nämlich um DK. Man kann mit dem Zirkel durch Abgreifen auch das Maximum des Moments finden, welches irgendwo zwischen M und D liegen muß. Diese Stelle des größten Moments oder der augenblickliche gefährliche Querschnitt läßt sich aber auch in folgender Art bestimmen.

Wenn man sich vergegenwärtigt, daß bei einem auf relative Elasticität in Anspruch genommenen Balken das maximale Bruchmoment immer an derjenigen Stelle stattfindet, für welche die Transversalkraft zu Null wird, so handelt es sich also nur um die Ermittelung dieses Punktes. Nun kann dies graphisch sehr leicht folgendermaßen geschehen. Denkt man sich auf der Linie AB als Abscissenaxe in jedem Punkte eine Ordinate aufgetragen, welche der dort herrschenden Transversalkraft gleich ist, so erhält man in der

Verbindung der Endpunkte dieser Ordinaten eine graphische Darstellung der Größe dieser Transversalkraft. Zunächst hat man für die gleichförmig vertheilte Last Q in dem Punkte A die Ordinate $AE_1 = \frac{1}{2} Q$ als Auflagerreaction vertical aufwärts anzutragen. In jedem, um die beliebige Länge x horizontal von A entfernten Trägerquerschnitte wird dieser Druck um den Theil $\frac{x}{l} Q$ vermindert sein, und man erkennt sehr leicht, daß die betreffende Linie der Transversalkraft für die gleichförmig vertheilte Last eine Gerade sein muß, welche von dem Punkte E_1 ausgehend die Balkenaxe AB in der Mitte M durchschneidet, und die Verticale durch den Auflagerpunkt B in einer Entfernung $BE_2 = \frac{Q}{2}$ trifft. Die Druckkräfte sind in der ersten Hälfte AM des Balkens nach oben, in der zweiten Hälfte MB nach unten gerichtet, wie die Ordinaten der Linie $E_1 M E_2$ auch andeuten. Tritt nun die concentrirte Kraft P in dem Punkte D hinzu, so wird, wie schon oben angeführt, die Auflagerreaction in A um die Größe GF vergrößert, und es ist daher in jedem Querschnitte zwischen A und D die Transversalkraft um diese nach oben gerichtete Reaction GF größer geworden als vorher. In dem Punkte D hingegen kommt zu der so vergrößerten Transversalkraft eine nach unten gerichtete Kraft $P = FB$ hinzu. Aus diesen beiden Aenderungen folgt, daß in allen Punkten rechts von D zur Transversalkraft eine nach unten gerichtete Kraft gleich $FB - FG = GB$ hinzutritt. Macht man daher $E_1 R_1 = GF$, ferner $R_1 K_2 \parallel E_1 E_2$ und $K_2 K_3 = FB$, sowie $K_3 R_2 \parallel E_1 E_2$, so erhält man die Linie, welche die Transversalkräfte für die Stellung der Last P in dem Punkte D ergiebt. Da diese Linie die Abscissenaxe AB in O schneidet, so ist der Querschnitt durch diesen Punkt O der gefährliche. Die Betrachtung der Figur zeigt, daß man zu demselben Querschnitte O gelangt, wenn man die Abscissenaxe AB um die Größe $BG = DJ$ erhöht denkt, und ihren Schnittpunkt in dieser neuen Lage mit der Linie $E_1 E_2$ aufsucht, welche die aus der gleichförmigen Belastung resultirenden Transversalkräfte darstellt.

Denkt man sich daher die Kraft P von A hereintretend allmälig nach der Mitte M des Balkens hin verschoben, so nimmt die Größe DJ, welche nach dem Vorigen die Auflagerreaction in B darstellt, allmälig von Null bis $\frac{1}{2} P$ zu, und man findet für jede Stellung der Last P den zugehörigen gefährlichen Querschnitt, wenn man von dem Punkte J, in welchem die Kraftrichtung von P die Linie AF schneidet, eine Horizontale bis zum Schnitt mit der Linie $E_1 E_2$ zieht, welche die Transversalkräfte der gleichförmigen Belastung darstellt. Man erkennt daher leicht, daß der gefährliche Querschnitt, welcher in M sich befindet, während die Kraft P noch über A steht, bei einer Bewegung der letzteren nach dem Träger herein dieser Kraft

entgegengeht, z. B. nach O gekommen ist, wenn die Kraft über D steht, und daß die Kraft P und der gefährliche Querschnitt sich in dem Punkte L begegnen, in welchem die Gerade $E_1 E_2$ der Transversalkraft und die Linie AF sich schneiden. Rückt die Kraft P weiter bis zur Mitte M des Balkens vor, so fällt während dieser Bewegung der gefährliche Querschnitt immer mit der Kraft P zusammen. Man erkennt dies daraus, daß die Linie der gesammten Transversalkraft $R_1 K_2 K_3 R_2$ in diesem Falle immer mit ihrem verticalen Theile $K_2 K_3$ die Abscissenaxe AB durchschneidet, daher stets in dem durch $K_2 K_3$ oder die Kraftrichtung gegebenen Querschnitte die Transversalkraft Null, also das Bruchmoment ein Maximum ist. Wenn die Kraft P noch weiter über die Mitte M des Trägers nach B hin fortschreitet, so begleitet der gefährliche Querschnitt die Kraft bis zu einem Punkte N, welcher von der Mitte M dieselbe Entfernung hat wie L, und wenn die Kraft über diesen Punkt N hinaus sich weiter bewegt, so kehrt der gefährliche Querschnitt von N nach der Mitte M zurück, wo er in dem Momente ankommt, in welchem die Kraft P den Stützpunkt B erreicht. Bei einer einfachen Ueberführung der concentrirten Last P von A nach B macht somit der gefährliche Querschnitt eine Oscillation von der Mitte M nach L, zurück über M nach N und wieder zurück nach M.

Aus den vorstehenden Beispielen ergiebt sich zur Genüge, daß die Anwendung graphischer Methoden in vielen Fällen, besonders, wo es sich, wie in der Festigkeitslehre, um parallele Kräfte handelt, sehr einfach zu den gewünschten Resultaten führt. Besonders fruchtbar erweisen sich diese Methoden für die Berechnung der Dimensionen von Gitter- oder Fachwerksträgern für Brücken, Dächer rc., worüber im zweiten Theile das Nähere.

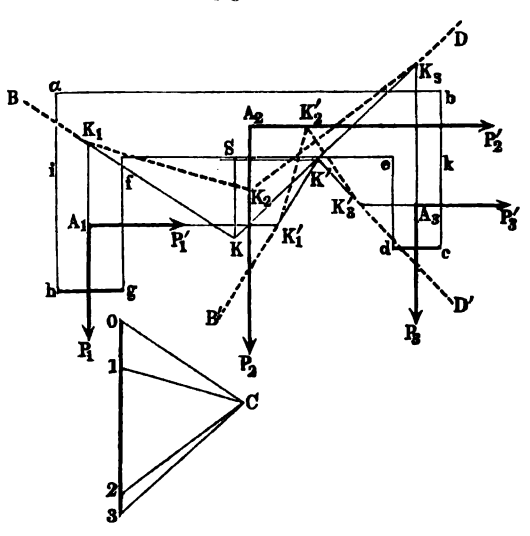
Graphische Schwerpunktsbestimmung. Der Schwerpunkt einer materiellen Fläche als der Mittelpunkt der parallelen Schwerkräfte aller einzelnen Elemente dieser Fläche läßt sich mit Hülfe des Seilpolygons leicht bestimmen. Zerlegt man nämlich die gegebene materielle Figur in ihre Elemente, deren Schwerpunkte man kennt, und zeichnet hierfür das Kräftepolygon und das Seilpolygon, so geben die äußersten Seilpolygonseiten in ihrem Durchschnittspunkte (nach §. 41, Anhang) einen Punkt, durch welchen die Mittelkraft sämmtlicher parallelen Schwerkräfte hindurchgeht. Zieht man daher durch diesen Durchschnitt eine Parallele zu jenen Kräften, so liegt in dieser der Schwerpunkt. Kann man nun noch eine andere, den Schwerpunkt enthaltende Richtung, wie etwa die Symmetrieaxe bei einer symmetrischen Figur, angeben, so findet man natürlich den Schwerpunkt der Fläche in dem Durchschnittspunkte dieser beiden Richtungen. Man muß in solchem Falle, um in Wirklichkeit einen Schnittpunkt zu erhalten, die Richtung der Schwerkräfte oder mit anderen Worten die Lage der gegebenen Figur so §. 46.

annehmen, daß die Schwerkräfte nicht zu der Symmetrieaxe parallel sind.

Wenn die Figur indessen eine Symmetrieaxe nicht besitzt, so erfordert die Bestimmung des Schwerpunkts eine zweimalige Verzeichnung des Seilpolygons für zwei verschiedene Richtungen der Schwerkräfte, d. h. für zwei verschiedene Stellungen der betreffenden Figur gegen die verticale Richtung.

Beispiele. 1) Soll der Schwerpunkt der Figur *abcdefgh*, Fig. 1033, bestimmt werden, so zerlege man diese Figur in die Rechtecke *ifgh*, *abki* und *ekcd*, deren Schwerpunkte in den resp. Mitten A_1, A_2, A_3 liegen.

Fig. 1033.



Nimmt man in diesen Punkten die den Flächenräumen jener Rechtecke proportionalen Kräfte oder Strecken A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3 vertical abwärts gerichtet an, construirt das zugehörige Kräftepolygon $C0123$ und daraus das Seilpolygon $BK_1K_2K_3D$, so erhält man in der Verticalen SK durch den Schnittpunkt K der äußersten Seile DK_3 und BK_1 eine Linie, welche durch den gesuchten Schwerpunkt hindurchgehen muß. Denkt man sich nunmehr die Figur um einen beliebigen Winkel, etwa um 90° gedreht und wiederholt dieselbe Construction für diese neue Lage, so erhält man eine zweite Mittelkraftslinie, die in ihrem Durchschnitte mit der ersten den gesuchten Schwerpunkt liefert. Um indessen nicht die Figur gänzlich von Neuem zeichnen zu müssen, darf man annehmen, die Kräfte P_1, P_2, P_3 wirkten in unveränderter Größe nach einer anderen Richtung, aber immer

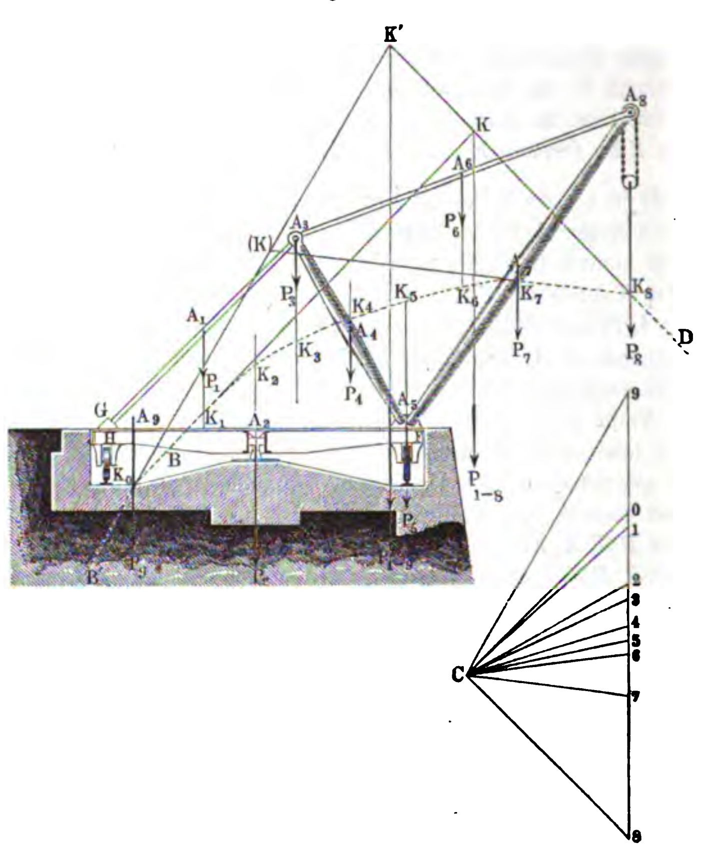
parallel zu einander, etwa horizontal, und seien dieselben durch $A_1 P'_1$, $A_2 P'_2$ und $A_3 P'_3$ dargestellt. Um das Seilpolygon hierfür zu zeichnen, kann man das schon vorhandene Kräftepolygon $C0123$ benutzen, wenn man nur den Seiten des Seilpolygons Richtungen giebt, welche mit den bezüglichen Strahlen denselben Winkel einschließen, um welchen man die Kraftrichtungen gedreht gedacht hat, also wenn man hier, wo dieser Winkel zu 90^0 angenommen wurde, die Seilpolygonseiten senkrecht zu den Strahlen zieht ($B'K'_1 \perp C0$; $K'_1 K'_2 \perp C1$, $K'_2 K'_3 \perp C2$ und $K'_3 D' \perp C3$). Das neue Seilpolygon $B'K'_1 K'_2 K'_3 D'$ liefert dann in der durch den Durchschnitt K' der Außenseile $B'K'_1$ und $D'K'_3$ gezogenen Horizontalen $K'S$ eine Linie, die durch den Schwerpunkt geht, welcher folglich im Durchschnitte S der Geraden KS und $K'S$ liegt.

2) Es sei bei dem in Fig. 1034 (a. f. S.) abgebildeten, auf einer Drehscheibe stehenden Krahn $A_2 P_2$ das Gewicht der Drehscheibe sammt Rädern, $A_1 P_1$ das der hinteren Spannstangen GA_3, $A_3 P_3$ das der Traverse A_3, $A_4 P_4$ das der Doppelstrebe $A_3 A_5$, $A_5 P_5$ das Gewicht des Strebenfußlagers, ferner $A_6 P_6$ das Gewicht der vorderen Spannstangen, $A_7 P_7$ dasjenige der Hauptstreben $A_5 A_8$ und endlich $A_8 P_8$ die durch den Flaschenzug bei A_8 und die angehängte Last dargestellte Belastung. Es mögen diese sämmtlichen Kräfte in der verticalen Symmetrieebene des Krahns angenommen werden, indem man sich immer die Gewichte je zweier, symmetrisch zu dieser Ebene angeordneten Organe (Streben, Spannstangen 2c.) vereinigt denkt. Zeichnet man zu dem Kräftepolygon $C012\ldots8$ das zugehörige Seilpolygon $BK_1 K_2 K_3 \ldots K_8 D$, so erhält man in dem Durchschnitte K der Außenseile BK_1 und DK_8 einen Punkt, durch welchen die Mittelkraft des ganzen Systems KP_{1-8} hindurchgeht. Da diese Kraft die Horizontale HF außerhalb der Stützen trifft, so wird der Krahn nicht ohne Weiteres stabil sein, und man muß sein Umkippen durch ein auf der anderen Seite anzubringendes Gegengewicht verhüten. Es fragt sich nun, wie groß das Gegengewicht $A_9 P_9$, dessen Schwerpunkt über A_9 liegen soll, gewählt werden müsse, damit zu gehöriger Stabilität der Druck des ganzen Systems die horizontale Stützfläche in einem Punkte E treffe, der um ein gewisses Stück (etwa $1/2$ Meter) von der Stützschiene unter F nach innen gelegen ist?

Es muß, damit letzteres stattfinde, offenbar die Mittelkraft von $A_9 P_9$ und von KP_{1-8} durch E hindurchgehen, also muß die Verticale in E den Schnittpunkt K' treffen, in welchem die nunmehrigen äußersten Seilpolygonseiten sich schneiden. Während einerseits DK_8 letzte Seilpolygonseite geblieben ist, kommt andererseits durch die Hinzufügung des Gegengewichts $A_9 P_9$ zu den vorhandenen Seilpolygonseiten noch eine neue hinzu. Den betreffenden Knotenpunkt K_9 erhält man in dem Durchschnitte der neuen Kraft

$A_9 P_9$ mit der bisherigen ersten Seilpolygonseite $B K_1$ und man findet daher nach der soeben angestellten Betrachtung die Richtung des neuen Außenseils in der Verbindungslinie $K_0 K'$. Zieht man hiermit parallel im Kräftepolygon den Strahl $C9$, so erhält man in der Strecke 90 die auf dem zu Grunde gelegten Kräftemaßstabe abzugreifende Größe des Gegengewichtes.

Fig. 1034.



Es ist ebenfalls ohne Weiteres ersichtlich, daß die Mittelkraft des unbelasteten Krahns in die Verticale hineinfallen muß, welche durch den Schnittpunkt (K) der Seilpolygonseite $B' K_0$ und $K_8 K_7$ hindurchgeht. Für den Fall, daß man das Gegengewicht außerhalb der Stützbahn jenseits H angebracht hätte, wie es bei gewissen Eisenbahn- oder Rollkrahnen zu geschehen

pflegt, wäre dieser Punkt (H) aufzusuchen, um die Construction auf ihre Stabilität auch im unbelasteten Zustande zu prüfen. Fiele die Verticale durch (K) jenseits der Stützbahn in H, so müßte in solchem Falle das betreffende Gegengewicht näher nach H hereingerückt und dafür natürlich entsprechend größer angenommen werden.

Den ausführlichsten Unterricht in der graphischen Statik findet man in dem Werke: „Die graphische Statik, von K. Culmann (1866)", welchem das Verdienst zukommt, diese Disciplin zuerst als besondere Wissenschaft behandelt zu haben. Als besonders empfehlenswerth für das Studium müssen ebenfalls die „Elemente der graphischen Statik, von J. Bauschinger (1871)" hervorgehoben werden. Ueber die Anwendung graphischer Methoden beim Rechnen kann man nachlesen: „Cousinery, Le calcul par le trait (1838)."

Alphabetisches Sachregister.

Die angeführten Ziffern geben die Seitenzahl an.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

X.

Z.

Berichtigungen.

Seite 55, Zeile 14 von oben: ∂x statt ∂s.

" 94, " 12 " " $p = -c\sqrt{\mu}$ statt $p = -\sqrt{\mu}$.

" 97, " 1 " " $t = \int \frac{\partial s}{v}$ statt $\int \frac{\partial v}{v}$.

" 469, " 17 " " $\frac{P_2}{WE} \frac{l_2^2}{2} (l_1 - l_2)$ statt $\frac{P_2}{WE} (l_1 - l_2)$



